ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 49

# УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.917.56
DOI: 10.17223/19988605/49/1

**С.Ш. Кадырова, К.Б. Мансимов**

## ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ ТИПА РОССЕРА

Рассматривается одна граничная задача оптимального управления двухпараметрическими дискретными системами типа Россера. При предположении выпуклости области управления установлены линеаризованное условие оптимальности и необходимые условия оптимальности в форме неравенства для квадратичной формы.
**Ключевые слова:** дискретная двухпараметрическая система типа Россера; линеаризованное необходимое условие оптимальности; выпуклая область управления; оптимальное управление; квазиособое управление.

Многие технические процессы описываются различными дискретными многопараметрическими системами, в частности дискретными двухпараметрическими системами типа Россера [1–7].

В работе [8] рассмотрена задача оптимального управления гибридной системой типа Россера (дискретно-непрерывная задача оптимального управления) и доказаны необходимые условия оптимальности первого порядка. Доказательству необходимых условий оптимальности особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений, а также квазиособых управлений в гибридных системах типа Россера посвящены работы [9, 10].

В [11] найдено представление решения краевой задачи для линейной неоднородной гибридной системы уравнений типа Россера.

Достаточное условие оптимальности типа условий В.Ф. Кротова в задаче оптимального управления системами типа Россера доказано в работе [12]. Необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина в линейном случае установлено в [13]. Исследованию особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений на оптимальность в дискретных системах Россера посвящена работа [14].

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами типа Россера, управляемыми посредством выбора граничного условия, при предположении, что граничное условие является решением аналога задачи Коши для нелинейного обыкновенного разностного уравнения с запаздыванием. Таким образом, рассматриваемая в работе задача отличается от задач, которым посвящены работы [8–11], и является более общей, чем задачи из [12–14]. При предположении выпуклости области управления доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума [15–19]. Далее, применяя модифицированный вариант метода приращений, развитый в работах [18, 19], выведены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений [16, 19, 20].

### 1. Постановка задачи

Предположим, что управляемый дискретный процесс описывается системой двухмерных нелинейных разностных уравнений

$$z(t+1,x)=f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right),\quad t=t_0,t_0+1,...,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1, \tag{1}$$
$$y(t,x+1)=g\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right),\quad t=t_0,t_0+1,...,t_1,\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1-1,$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0,x)&=a(x),\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1,\\ y(t,x_0)&=b(t),\quad t=t_0,t_0+1,...,t_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $f(t,x,z,y)$ $\left(g(t,x,z,y)\right)$ – заданная $n(m)$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $(z,y)$ до второго порядка включительно, $t_0,\ t_1,\ x_0,\ x_1$ заданы, причем разности $t_1-t_0,\ x_1-x_0$ есть натуральные числа, $b(t)$ – заданная $m$-мерная дискретная вектор-функция, $a(x)$ – $n$-мерная вектор-функция, являющаяся решением обыкновенного нелинейного разностного уравнения с запаздыванием

$$a(x+1)=F\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right),\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1-1, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$a(x_0-N)=a_{x_0-N},\ ....,\ a(x_0)=a_{x_0}, \tag{4}$$

где $F(x,a,c,u)$ – заданная $n$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $(a,c,u)$ до второго порядка включительно, $a_{x_0-N},\ldots,a_{x_0}$ – заданные постоянные векторы, $N$ – заданное натуральное число (запаздывание), $u(x)$ – $r$-мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества $U\subset R^r$, т.е.

$$u(x)\in U\subset R^r,\quad x\in X=\{x_0,x_0+1,...,x_1-1\}. \tag{5}$$

Такие управления назовем допустимыми управлениями, а соответствующие процессы $\left(u(x),a(x),z(t,x),y(t,x)\right)$ – допустимыми процессами.

В дальнейшем предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении $u(x)$ система уравнений (1)–(4) имеет единственное решение $\left(a(x),z(t,x),y(t,x)\right)$.

На решениях задачи (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(u)=\varphi_1\left(a(x_1)\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}G_1\left(x,z(t_1,x)\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}G_2\left(t,y(t,x_1)\right). \tag{6}$$

Здесь $\varphi_1(a)$, $G_1(x,z)$, $G_2(t,y)$ – заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными $\dfrac{\partial\varphi_1(a)}{\partial a}$, $\dfrac{\partial^2\varphi_1(a)}{\partial a^2}$, $\dfrac{\partial G_1(x,z)}{\partial z}$, $\dfrac{\partial^2 G_1(x,z)}{\partial z^2}$, $\dfrac{\partial G_2(t,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 G_2(t,y)}{\partial y^2}$.

Изучим задачу о минимуме функционала (6) при ограничениях (1)–(5).

Допустимое управление $u(x)$, доставляющее минимум функционалу (6), при ограничениях (1)–(5) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\left(u(x),a(x),z(t,x),y(t,x)\right)$ – оптимальным процессом.

## 2. Формула приращения второго порядка критерия качества

Пусть $\left(u(x),a(x),z(t,x),y(t,x)\right)$ – фиксированный допустимый процесс. Через $u(x;\varepsilon)=$ $=\varepsilon v(x)+(1-\varepsilon)u(x)$ обозначим произвольное допустимое управление, такое что соответствующее ему решение $a(x;\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} a(x+1;\,\varepsilon)&=F\left(x,a(x;\,\varepsilon),a(x-N;\,\varepsilon),u(x;\,\varepsilon)\right)= \\ &=F\left(x,a(x;\,\varepsilon),a(x-N;\,\varepsilon),\varepsilon v(x)+(1-\varepsilon)u(x)\right) \end{aligned} \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$a(x_0-N;\,\varepsilon)=a_{x_0-N},\ ...,\ a(x_0;\varepsilon)=a_{x_0}, \tag{8}$$

где $\varepsilon\in[0,\,1]$ – произвольное число, а $v(x)\in U$ ( $x\in X$ ) – произвольное допустимое управление, соответствующее $u(x;\varepsilon)$.

Это возможно в силу выпуклости множества $U$.

Ясно, что при этом $\left(z(t,x;\,\varepsilon),y(t,x;\,\varepsilon)\right)$ будет решением задачи

$$\begin{aligned} z(t+1,x;\,\varepsilon)&=f\left(t,x,z(t,x;\,\varepsilon),y(t,x;\,\varepsilon)\right), \\ y(t,x+1;\,\varepsilon)&=g\left(t,x,z(t,x;\,\varepsilon),y(t,x;\,\varepsilon)\right), \end{aligned} \tag{9}$$

$$z(t_0,x;\,\varepsilon)=a(x;\,\varepsilon),\ \ y(t,x_0;\,\varepsilon)=b(t). \tag{10}$$

Положим

$$\ell(t,x)=\left.\frac{\partial z(t,x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0};\quad m(t,x)=\left.\frac{\partial y(t,x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0};\quad \alpha(x)=\left.\frac{\partial a(x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}; \tag{11}$$

$$Z(t,x)=\left.\frac{\partial^2 z(t,x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0};\quad Y(t,x)=\left.\frac{\partial^2 y(t,x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0};\quad A(x)=\left.\frac{\partial^2 a(x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}; \tag{12}$$

$$\Delta_{v(x)}F(x)\equiv F\left(x,a(x),a(x-N),v(x)\right)-F\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right).$$

Используя свойство гладкости вектор-функций $f(t,x,z,y)$, $g(t,x,z,y)$, $F(x,a,u)$, при помощи (7), (9), (10) доказывается, что вектор-функции $\ell(t,x)$, $m(t,x)$, $\alpha(x)$, $Z(t,x)$, $Y(t,x)$, $A(x)$, определяемые соотношениями (11), (12), являются решением следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \ell(t+1,x)&=f_z\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+f_y\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x), \\ m(t,x+1)&=g_z\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+g_y\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x), \\ \ell(t_0,x)&=\alpha(x),\ m(t,x_0)=0, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \alpha(x+1)&=F_a\left(x,a(x),u(x)\right)\alpha(x)+F_a\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right)\alpha(x-N)+ \\ &+F_a\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right)\left(v(x)-u(x)\right),\ \alpha(x_0-N)=0,...,\ \alpha(x_0)=0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} Z(t+1,x)&=\frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial z}Z(t,x)+\frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial y}Y(t,x)+ \\ &+\ell'(t,x)\,f_{zz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+\ell'(t,x)\,f_{zy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x)+ \\ &+m'(t,x)\,f_{yz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+m'(t,x)\,f_{yy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} Y(t,x+1)&=g_z\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)Z(t,x)+g_y\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)Y(t,x)+ \\ &+\ell'(t,x)g_{zz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+\ell'(t,x)g_{zy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x)+ \\ &+m'(t,x)g_{yz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+m'(t,x)g_{yy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x), \end{aligned} \tag{16}$$

$$
\begin{gathered}
Z(t_0,x)=A(x),\ Y(t,x_0)=0, \\
A(x+1)=F_a(x,a(x),a(x-N),u(x))A(x)+F_a(x,a(x),a(x-N),u(x))A(x-N)+ \\
+F_u(x,a(x),a(x-N),u(x))(v(x)-u(x))+\alpha'(x)F_{ac}(x,a(x),a(x-N),u(x))\alpha(x-N)+ \\
+\alpha'(x-N)F_{ca}(x,a(x),a(x-N),u(x))\alpha(x)+ \\
+\alpha'(x)F_{au}(x,a(x),a(x-N),u(x))(v(x)-u(x))+ \\
+(v(x)-u(x))'F_{ua}(x,a(x),a(x-N),u(x))\alpha(x)+ \\
+\alpha'(x-N)F_{cu}(x,a(x),a(x-N),u(x))(v(x)-u(x))+ \\
+(v(x)-u(x))'F_{uc}(x,a(x),a(x-N),u(x))\alpha(x-N)+ \\
+(v(x)-u(x))'F_{uu}(x,a(x),a(x-N),u(x))(v(x)-u(x)),\ \alpha(x_0)=0.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

При этом специальное приращение функционала качества (6), отвечающее допустимым управлениям $u(x;\varepsilon)$ и $u(x)$, с использованием формулы Тейлора представляется в виде:

$$
\begin{gathered}
\Delta S_\varepsilon(u)=S(u(x;\varepsilon))-S(u(x))=\varepsilon\frac{\partial\varphi'(a(x_1))}{\partial a}\alpha(x_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\alpha'(x_1)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\alpha(x_1)+ \\
+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial\varphi'(a(x_1))}{\partial a}A(x_1)+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z}\ell(t_1,x)+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\times \\
\times\ell(t_1,x)+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}Z(t_1,x)+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y}m(t,x_1)+ \\
+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}m'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial G_2'(t,y(t,x_1))}{\partial y}Y(t,x_1)+o(\varepsilon^2).
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Введем аналоги функции Гамильтона–Понтрягина в виде:

$$
\begin{gathered}
H(t,x,z,y,p,q)=p'f(t,x,z,y)+q'g(t,x,z,y), \\
M(x,a,u,\psi)=\psi'F(x,a,c,u).
\end{gathered}
$$

Здесь $(\psi(x),p(t,x),y(t,x))$ является решением сопряженной системы

$$
\begin{gathered}
p(t-1,x)=H_x(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)), \\
q(t,x-1)=H_y(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)), \\
\psi(x-1)=M_a(x,a(x),u(x),\psi(x))+ \\
+M_c(x+N,a(x+N),a(x),u(x+N),\psi(x+N))+p(t_0-1,x), \\
p(t_1-1,x)=-\frac{\partial G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z},\ \ q(t,x_1-1)=-\frac{\partial G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y},
\end{gathered}
\tag{19}
$$

$$
\psi(x_1-1)=-\frac{\partial\varphi(a(x_1))}{\partial a},\quad \psi(x)=0,\quad x>x_1-1. \tag{20}
$$

Учитывая введенные обозначения и уравнения (19)–(20), специальное приращение (18) критерия качества записывается с помощью следующей формулы:

$$
\Delta S_\varepsilon(u)=-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M_a(x,a(x),u(x),\psi(x))(v(x)-u(x))+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg\{\alpha'(x_1)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\alpha(x_1)+
$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}m'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\alpha'(x)M_{aa}(x,a(x),u(x),\psi(x))\alpha(x)+$$
$$+\alpha'(x)M_{ac}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\alpha(x-N)+$$
$$+\alpha'(x-N)M_{ca}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\alpha(x)+$$
$$+\alpha'(x-N)M_{cc}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\alpha(x-N)+$$
$$+2\alpha'(x)M_{au}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))(v(x)-u(x))+$$
$$+2\alpha'(x-N)M_{cu}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))(v(x)-u(x))+$$
$$+(v(x)-u(x))'M_{uu}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))(v(x)-u(x))\Big]-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\ell'(t,x)H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\ell(t,x)+$$
$$+\ell'(t,x)H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))m(t,x)+$$
$$+m'(t,x)H_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\ell(t,x)+ \tag{21}$$
$$+m'(t,x)H_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))m(t,x)\Big]+o(\varepsilon^2).$$

## 3. Необходимые условия оптимальности

Специальная формула приращения (21) критерия качества (6) позволяет получить необходимое условие оптимальности первого порядка в форме аналога линеаризованного (дифференциального) условия максимума (см., напр.: [15–18]), а также неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Из разложения (21) следует

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления $u(x)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M_u'(x,a(x),u(x),\psi(x))(v(x)-u(x))\le 0 \tag{22}$$

выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Теперь исследуем случай вырождения линеаризованного условия максимума (22). По аналогии с [16, 18] введем

**Определение 1.** Если для всех допустимых управлений $v(x)\in U$, $x\in X$, выполняется соотношение

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M_u'(x,a(x),u(x),\psi(x))(v(x)-u(x))=0,$$

управление $u(x)$ назовем квазиособым управлением в задаче (1)–(6).

Из разложения (21) следует, что если $u(x)$ – квазиособое оптимальное управление, то неравенство

$$\alpha'(x_1)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\alpha(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\alpha'(x)M_{aa}(x,a(x),u(x),\psi(x))\alpha(x)+$$
$$+2\Delta_{v(x)}M'_a(x,a(x),u(x),\psi(x))\alpha(x)+$$
$$+\alpha'(x)M_{ac}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\alpha(x-N)+$$
$$+\alpha'(x-N)M_{ca}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\alpha(x)+$$
$$+\alpha'(x-N)M_{cc}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\,\alpha(x-N)+$$
$$+2\Delta_{v(x)}M_c(x,a(x),u(x),\psi(x))\alpha(x-N)\Big]-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\ell'(t,x)H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\ell(t,x)+ \tag{23}$$
$$+\ell'(t,x)H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))m(t,x)+$$
$$+m'(t,x)H_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\ell(t,x)+$$
$$+m'(t,x)H_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))m(t,x)\Big]\ge 0$$

выполняется для всех $v(x)\in U$ , $x\in X$ .

Неравенство (23) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Поэтому конструктивное использование этого условия оптимальности весьма затруднительно. Однако с его помощью удается получить ряд необходимых условий оптимальности квазиособых управлений, выраженных непосредственно через параметры задачи (1)–(6).

Пусть матричные функции $\Phi(x,s)$, $V_{ij}(t,x;\tau,s)$, $i,j=1,2$, являются решениями следующих задач:

$$\Phi(x,s-1)=\Phi(x,s)F_a(s,a(s),u(s))+ \tag{24}$$
$$+\Phi(x,s+N)F_c(s+N,a(s+N),a(s),u(s+N))+\Phi(x,s)F_{\text{u}}(s,a(s),u(s))(v(x)-u(x)),$$
$$\Phi(x,x-1)=E,\quad \Phi(x,s)=0,\quad s>x-1, \tag{25}$$
$$\begin{gathered}V_{11}(t,x;\tau-1,s)=V_{11}(t,x;\tau,s)f_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))+\\+V_{12}(t,x;\tau,s)g_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),\\V_{12}(t,x;\tau,s-1)=V_{11}(t,x;\tau,s)f_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))+\\+V_{12}(t,x;\tau,s)g_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),\\V_{21}(t,x;\tau-1,s)=V_{21}(t,x;\tau,s)f_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))+\\+V_{22}(t,x;\tau,s)g_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),\\V_{22}(t,x;\tau,s-1)=V_{21}(t,x;\tau,s)f_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))+\\+V_{22}(t,x;\tau,s)g_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),\end{gathered} \tag{26}$$
$$\begin{gathered}V_{11}(t,x;t-1,x-1)=E_1,\quad V_{22}(t,x;t-1,x-1)=E_2,\\V_{11}(t,x;t-1,s)=0,\ \ x_0\le s\le x-2,\ \ V_{12}(t,x;\tau,x-1)=0,\ \ t_0\le\tau\le t-1,\\V_{21}(t,x;t-1,s)=0,\ \ x_0\le s\le x-1,\ \ V_{22}(t,x;\tau,x-1)=0,\ \ t_0\le\tau\le t-2,\end{gathered} \tag{27}$$

где $E_i$, $i=1,2,$ – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Как видно, уравнения (13), (14) являются линейными неоднородными разностными уравнениями. Решение задач (13), (14) допускают (см.: [18, 21]) представления

$$\alpha(x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)F_u\left(s,a(s),u(s)\right)(v(s)-u(s)), \tag{28}$$

$$\ell(t,x)=V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,x)\alpha(x)+\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,s)\alpha(s), \tag{29}$$

$$m(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{21}(t+1,x;\,t_0-1,s)\alpha(s). \tag{30}$$

Положим

$$Q_1(t,x,s)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s)+V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,x)\Phi(x,s),$$

$$Q_2(t,x,s)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{21}(t+1,x;\,t_0-1,\tau)\Phi(x,s),$$

$$\Phi_1(x,s)=\Phi(x,s)F_u\left(s,a(s),u(s)\right),\ Q_3(t,x;s)=Q_1(t,x,s)F_u\left(s,a(s),u(s)\right),$$

$$Q_4(t,x;s)=Q_2(t,x,s)F_u\left(s,a(s),u(s)\right),$$

тогда представления (28), (30) можно переписать в виде:

$$\alpha(x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi_1(x,s)\left(v(s)-u(s)\right), \tag{31}$$

$$\ell(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_3(t,x,s)\left(v(s)-u(s)\right), \tag{32}$$

$$m(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_4(t,x,s)\left(v(s)-u(s)\right). \tag{33}$$

Введем в рассмотрение матричную функцию

$$\begin{aligned}K(\tau,s)=&-\Phi'(x_1,s)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\Phi(x_1,\tau)-\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_3'(t_1,x,s)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}Q_3(t_1,x,\tau)-\\&-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}Q_4'(t,x_1,s)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}Q_4(t,x_1,\tau)+\\&+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Big[Q_3'(t,x,s)H_{zz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)Q_3(t,x,\tau)+\\&+Q_3'(t,x,\tau)H_{zy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)Q_3(t,x,s)+\\&+Q_4'(t,x,\tau)H_{yz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)Q_3(t,x,s)+\\&+Q_4'(t,x,\tau)H_{yy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)Q_4(t,x,s)\Big]+\\&+\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x}\Big[\Phi_1'(x,\tau)M_{aa}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\Phi_1(x,s)+\\&+\Phi'(x,\tau-N)M_{ca}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\Phi_1(x,\tau)+\\&+\Phi_1'(x,s)M_{ac}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\Phi(x,\tau-N)+\\&+\Phi_1'(x,\tau-N)M_{cc}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\Phi_1(x,s-N)\Big].\end{aligned} \tag{34}$$

Используя представления (31)–(33), и учитывая (34), неравенство (23) по схеме из [18, 19] преобразуется к виду

$$\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\left(v(\tau)-u(\tau)\right)'K(\tau,s)\left(v(s)-u(s)\right)+$$

$$+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\sum_{s=x+1}^{x_1-1}\big(v(s)-u(s)\big)' M_{au}\big(s,a(s),u(s),\psi(s)\big)\Phi_1(s,x)+$$
$$+\big(v(s)-u(s)\big)' M_{cu}\big(s,a(s),a(s-N),u(s),\psi(s)\big)\Phi_1(s-N,x)\Bigg]\big(v(x)-u(x)\big)+ \qquad (35)$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(v(x)-u(x)\big)' M_{uu}\big(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\big)\big(v(x)-u(x)\big)\le 0.$$

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 2.** Если $u(x)$ ( $x\in X$ ) квазиособое управление в задаче (1)–(6), то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство (35) выполнялось для всех $v(x)\in U$ , $x\in X$ .

Неравенство (35) является общим необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Из него можно получить ряд легко проверяемых, но более слабых условий оптимальности. Приведем одно из них.

**Теорема 3.** Если $u(x)$ ( $x\in X$ ) квазиособое управление в задаче (1)–(6), то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство

$$\big(v-u(\theta)\big)'\big[K(\theta,\theta)+M_{\mathrm{uu}}[\theta]\big]\big(v-u(\theta)\big)\le 0 \qquad (36)$$

выполнялось для всех $\theta\in X$ , $v\in U$ .

## Заключение

В работе рассмотрена задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими 2D-системами типа Россера. Установлен аналог дискретного линеаризованного условия максимума и отдельно изучен квазиособый случай. Выведено общее необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, из которого в частности, следует аналог условия оптимальности Габасова–Кирилловой.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Барышев В.Г., Блюмин С.Л. К управлению системами с многомерными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1977. № 4. С. 34–42.
2. Блюмин С.П., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
3. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Доклады АН СССР. 1967. Т. 175, № 1. С. 17–19.
4. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск : Наука и техника, 1996. 199 с.
5. Roesser R.P. A discrete state-space model for linear image processing. // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. AC-20, No. 2. P. 1–10.
6. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Berlin : Springer-Verlag, 1985. 398 p.
7. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск : Изд-во БГЭУ, 2005. 363 с.
8. Мансимов К.Б., Джаббарова А.Я. Необходимые условия оптимальности в одной гибридной системе типа Россера // Известия НАН Азербайджана. Сер. Физ.-мат. наук. 2014. №. 3. С. 98–104.
9. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых управлений в одной задаче управления гибридными системамитипа Россера // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. №3. С. 31–49.
10. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б. Исследование квазиособых управлений в дискретно-непрерывной задаче оптимального управления типа Россера // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. физ.-мат. наук. 2004. № 4. С. 13–23.
11. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б. О представлении решений одной дискретно-непрерывной линейной системы типа Россера // Доклады НАН Азербайджана. 2013. № 8. С. 15–18.
12. Кадырова С.Ш. Достаточное условие оптимальности типа Кротова в одной двухпараметрической задаче управления // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. физ.-мат. наук. 2016. № 1. С. 77–83.
13. Кадырова С.Ш. Об одной дискретной линейной задаче оптимального управления системами типа Россера // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. физ.-мат. наук. 2015. № 4. С. 58–64.

14. Мансимов К.Б., Кадырова С.Ш. Об оптимальности особых смысле принципа максимума Понтрягина управлений в одной задаче оптимального управления системами типа Россера // Математическое и компютерное моделирование. Сер. физ.-мат. наук. 2017. Вып. 16. С. 80–92.
15. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М., 2011. 272 с.
16. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Либроком, 2013. 256 с.
17. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск : Наука, 1987. 226 с.
18. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку : ЭЛМ, 1999. 176 с.
19. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку : ЭЛМ, 2010. 363 с.
20. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка. Минск, 1982. 48 с. (Препринт ИМ АН БССР. № 30 (155)).
21. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Об одном представлении решения линейных разностных уравнений типа Россера // Известия НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2013. № 3. С. 12–17.

Поступила в редакцию 24 апреля 2019 г.

Gadirova S.Sh., Mansimov K.B. (2019) ABOUT OPTIMALITY QUASI-SINGULAR CONTROLS IN ONE BOUNDARY CONTROL PROBLEM OF ROSSER TYPE DISCRETE SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 4–13

DOI: 10.17223/19988605/49/1

Suppose that controlled discrete process by system of two-dimensional nonlinear difference equations is described

$$z(t+1,x)=f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right),\quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1, \tag{1}$$

$$y(t,x+1)=g\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right),\quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1;\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1,$$

and boundary conditions

$$\begin{aligned} z(t_0,x)&=a(x),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1,\\ y(t,x_0)&=b(t),\quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Here $f(t,x,z,y)$ $\left(g(t,x,z,y)\right)$ – given $n(m)$-dimensional vector function continuous set of variables together with partial derivatives with respect to $(z,y)$ to second order inclusive, $t_0$, $t_1$, $x_0$, $x_1$ – given, and the difference $t_1-t_0$, $x_1-x_0$ – to second order inclusive, $b(t)$ given – $m$ -dimensional discrete vector function, $a(x)$ – $n$-dimensional vector function that is a solution of an ordinary nonlinear difference equation with delay

$$a(x+1)=F\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1, \tag{3}$$

with initial conditions

$$a(x_0-N)=a_{x_0-N},\ \dots,\ a(x_0)=a_{x_0}, \tag{4}$$

where $F(x,a,c,u)$ – given $n$ -dimensional vector function continuous over a set of variables together with partial derivatives with respect to $(a,c,\mathrm{u})$ to second order inclusive, $a_{x_0-N},\dots,a_{x_0}$ – given constant vectors, $N$ – given natural number, $u(x)$ – $r$ -dimensional discrete vector of control actions with values from given non-empty, bounded and convex set $U\subset R^r$ , i.e.

$$u(x)\in U\subset R^r,\quad x\in X=\{x_0,x_0+1,\dots,x_1-1\}. \tag{5}$$

On the solutions of problem (1)–(5) generated by all possible admissible controls we define the functional

$$S(u)=\varphi_1\left(a(x_1)\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}G_1\left(x,z(t_1,x)\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}G_2\left(t,y(t,x_1)\right). \tag{6}$$

We study the problem of the minimum of the functional (6) with constraints (1)–(5).
A necessary condition for the optimality of quasi-singular controls is established.

Keywords: discrete two-parameter system of Rosser type; linearized necessary optimality condition; convex control domain; optimal control; quasi-singular control.

*MANSIMOV Kamil' Bayramali ogly* (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com
*GADIROVA Sevinj Shamistan gyzy* (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: nacafova.melahet@mail.com

REFERENCES

1. Baryshev, V.G. & Blyumin, S.L. (1977) To control systems with multidimensional parameters. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 4. pp. 34–42.
2. Blyumin, S.P. & Faradzhev, R.G. (1982) Linear cellular machines: state space approach. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 125–163.
3. Vasilyev, O.V. & Kirillova, F.M. (1967) Ob optimal'nykh protsessakh v dvukhparametricheskikh diskretnykh sistemakh [On optimal processes in two-parameter discrete systems]. *Doklady AN SSSR*. 175(1). p. 17–19.
4. Gayshun, I.V. (1996) *Mnogoparametricheskie sistemy upravleniya* [Multi-parameter control systems]. Minsk: Nauka i tekhnika.
5. Roesser, R.P. (1975) A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*. AC-20(2). pp. 1–10.
6. Kaczorek, T. (1985) *Two-dimensional linear systems*. Berlin: Springer-Verlag.
7. Dymkov, M.P. (2005) *Ekstremal'nye zadachi v mnogoparametricheskikh sistemakh upravleniya* [Extreme problems in multiparameter control systems]. Minsk: BSEU.
8. Mansimov, K.B. & Dzhabbarova, A.Ya. (2014) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v odnoy gibridnoy sisteme tipa Rossera [Necessary conditions for optimality in a single Rosser hybrid system type]. *Izvestiya NAN Azerbaydzhana. Ser. Fiz.-mat. nauk.* 3. pp. 98–104.
9. Dzhabbarova, A.Ya. & Mansimov, K.B. (2018) Necessary conditions for the optimality of special controls in one control problem for hybrid systems of the Rosser type. *Applied Mathematics and Control*. 3. pp. 31–49.
10. Dzhabbarova, A.Ya. & Mansimov, K.B. (2004) ssledovanie kvaziosobykh upravleniy v diskretno-nepreryvnoy zadache optimal'nogo upravleniya tipa Rossera [Investigation of quasi-singular controls in a discrete-continuous optimal control problem of Rosser type]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauk*. 4. pp. 13–23.
11. Dzhabbarova, A.Ya. & Mansimov, K.B. (2013) O predstavlenii resheniy odnoy diskretno-nepreryvnoy lineynoy sistemy tipa Rossera [Presentation of solutions of one discrete-continuous linear system of Rosser type]. *Doklady NAN Azerbaydzhana.* 8. pp. 15–18.
12. Kadyrova, S.Sh. (2016) Dostatochnoe uslovie optimal'nosti tipa Krotova v odnoy dvukhparametricheskoy zadache upravleniya [Sufficient condition of optimality of the Krotov type in a single two-parameter control problem]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauk.* 1. pp. 77–83.
13. Kadyrova, S.Sh. (2015) Ob odnoy diskretnoy lineynoy zadache optimal'nogo upravleniya sistemami tipa Rossera [On a discrete linear optimal control problem for Rosser-type systems]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauk.* 4. pp. 58–64.
14. Mansimov, K.B. & Kadyrova, S.Sh. (2017) Ob optimal'nosti osobykh smysle printsipa maksimuma Pontryagina upravleniy v odnoy zadache optimal'nogo upravleniya sistemami tipa Rossera [On the optimality of the singular sense of the Pontryagin principle of controls in one optimal control problem for Rosser-type systems]. *Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie. Ser. fiz.-mat. nauk.* 16. pp. 80–92.
15. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2011) *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in the theory of optimal control]. Moscow: Nauka.
16. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2013) *Osobye optimal'nye upravleniya* [Singular optimal controls]. Moscow: Librokom.
17. Ashchepkov, L.T. (1987) *Optimal'noe upravlenie razryvnymi sistemami* [Optimal control of discontinuous systems]. Novosibirsk: Nauka.
18. Mansimov, K.B. (1999) *Osobye upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniem* [Singular controls in systems with delay]. Baku: ELM. 179 p.
19. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.J. (2010) *Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems*. Baku: ELM.
20. Gabasov, R., Kirillova, F.M. & Mansimov, K.B. (1982) *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti vysokogo poryadka* [High order necessary conditions for optimality]. Minsk: AS BSSR.
21. Gadirova, S.Sh., Mansimov, K.B. & Mastaliev, R.O. (2013) Ob odnom predstavlenii resheniya lineynykh raznostnykh uravneniy tipa Rossera [On one representation of the solution of linear difference equations of Rosser type]. *Izvestiya NAN Azerbaydzhana. Ser. fiz.-tekhn. i mat. nauk*. 3. pp. 12–17.