ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 49

УДК 517.935.2+517.977.1
DOI: 10.17223/19988605/49/2

А.Н. Паршуков

МЕТОД СИНТЕЗА МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Предложен метод синтеза робастного модального регулятора, получен критерий робастного качества управления в условиях интервальной неопределенности коэффициентов в модели объекта управления. Данный метод синтеза доведен до вычислительных процедур и может быть реализован на ЭВМ. Метод синтеза проиллюстрирован примером.
Ключевые слова: интервальная неопределенность; модальный регулятор; робастное качество управления.

В результате идентификации технологических процессов модель объекта управления чаще всего восстанавливается в виде линейного дифференциального уравнения (заданного порядка), коэффициенты которого определены с точностью до принадлежности некоторым интервалам. Фактически такая интервальная неопределенность коэффициентов означает, что объект управления описывается целым семейством моделей.

В большинстве классических схем синтеза регулятор рассчитывается для модели с точно заданными коэффициентами. В случае объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов регулятор может быть рассчитан по классическим схемам для модели со средними значениями из заданных интервалов. При этом после замыкания объекта управления (описываемого семейством моделей) синтезированным регулятором в передаточной функции (ПФ) замкнутой системы появляется неопределенность. Поскольку свойства устойчивости и качества управления системы определяются расположением полюсов ее ПФ, возникает вопрос: при каких размерах интервальной неопределенности в объекте управления замкнутая система еще сохранит свойства устойчивости (робастная устойчивость) и качества управления (робастное качество управления)?

В схеме модального управления [1. С. 8–21; 2. С. 9–12] качество управления задается в виде области S на комплексной плоскости, определяющей желаемое расположение полюсов ПФ. Следовательно, вопросы исследования (проверки) робастной устойчивости и робастного качества управления могут быть рассмотрены с единых позиций: требуется проверить, принадлежат ли корни заданного семейства полиномов области S.

Проблема исследования робастной устойчивости и робастного качества управления широко представлена в литературе. Можно выделить три главных направления, в рамках которых решается данная задача: 1) принцип исключения нуля; 2) теория H^{∞}; 3) метод LMI.

Принцип исключения нуля впервые был сформулирован в работах [3–4]. Обобщениям принципа исключения нуля на различные случаи, а также разработке на их основе вычислительных методик проверки робастной устойчивости посвящено большое количество статей (см., напр.: [5–6]). В указанных работах основное внимание уделяется проверке робастной устойчивости (задача исследования робастного качества управления не рассматривается).

Следует отметить, что в [7, 8] и некоторых других статьях были получены достаточные критерии робастного качества управления для случаев, когда область S имеет специальную форму – форму трапеции в [7] или сектора в [8]. Общая формулировка критерия робастного качества управления, не зависящая от формы области S, не получена [6. С. 227].

Методы теории H^{∞} (см., напр.: [9–11]) позволяют формулировать достаточное условие робастной устойчивости при наличии как параметрической (неопределенность коэффициентов в операторах), так и структурно-параметрической (неточность задания порядков операторов) неопределенностей в описании объекта. Однако существенным недостатком таких критериев является использование H^{∞}-метрики операторов, что сильно ограничивает классы ПФ, для которых выполняются условия этих критериев. Кроме того, требования к качеству управления сложно выразить в терминах H^{∞}-норм операторов.

Метод линейных матричных неравенств (LMI) можно рассматривать как дальнейшее развитие H^{∞}-теории. Основу LMI подхода составляет «частотная теорема» [12]. Данный метод позволяет решать ряд задач теории управления (например, задачи оптимально-квадратичного управления, робастного H^{∞}-управления, оптимального гашения внешних возмущений в рамках теории H^{∞}-управления и др.) путем сведения к линейным матричным неравенствам [13–16]. При этом все замечания, сделанные к теории H^{∞}, остаются справедливыми и для данного метода.

Таким образом, сформулированная выше задача исследования робастного качества управления остается нерешенной.

В настоящей статье в развитие результатов, изложенных в [6], разрабатывается вычислительная технология исследования робастного качества управления.

Далее приняты следующие обозначения: $\doteq$ – равно по определению; * – операция комплексного сопряжения; j – мнимая единица; R^n, C^n – пространства n-мерных векторов $\mathbf{x} \doteq (x_1, \dots x_n)$, коэффициенты которых соответственно вещественные или мнимые числа; z, s – комплексные переменные; S – область на C^1; ∂S – граница области S; int S – внутренняя часть области S; t – непрерывное время; p^i – оператор i-й степени дифференцирования по времени:

$$p^i \doteq d^i / dt^i; \quad i \in \overline{0, n}, \ p^0 \doteq 1.$$

«Полиномиальным оператором» степени l будем называть дифференциальный оператор вида:

$$f(l, p) = \sum_{i=0}^{l} f_i p^i, \tag{1}$$

где f_i – постоянные коэффициенты ($i \in \overline{0, l}$). В изображениях по Лапласу оператору (1) соответствует алгебраический полином

$$f(l, s) = \sum_{i=0}^{l} f_i s^i,$$

определенный на C^1; здесь за s обозначена переменная преобразования Лапласа ($s \in C^1$).

«Множество корней (нулей)» полинома $f(l, s)$ будем обозначать $\Lambda(f)$:

$$\Lambda(f) \doteq \left\{ \lambda_i : f(l, \lambda_i) = 0, \quad i \in \overline{1, l} \right\}.$$

«Интервальным дифференциальным оператором» степени l будем называть семейство дифференциальных операторов вида:

$$f(l, F, p) \doteq \left\{ f(l, \mathbf{f}, p) \doteq \sum_{i=0}^{l} f_i p^i : \quad \forall \mathbf{f} \doteq (f_0, \quad \cdots, \quad f_l) \in F \right\}, \tag{2}$$

где

$$F \doteq \left\{ \mathbf{f} \in R^{l+1} : \forall f_i \in \left[f_i^0 - \Delta f_i, \quad f_i^0 + \Delta f_i \right], f_l^0 \neq 0, \quad \Delta f_i \geq 0, \quad i = \overline{0, l} \right\} –$$

область (многомерный параллелепипед) заданная в пространстве коэффициентов.

Выполняя в (2) формальную замену p на s, получаем «интервальный полином»

$$f(l, F, s) \doteq \left\{ f(l, \mathbf{f}, s) \doteq \sum_{i=0}^{l} f_i s^i : \quad \forall \mathbf{f} \in F \right\}. \tag{3}$$

Интервальный полином (3) можно представить в виде:

$$f(l, F, s) = f^0(l, s) + \Delta f(l, \Delta F, s), \tag{4}$$

где

$$f^0(l,s) \doteq \sum_{i=0}^{l} f_i^0 s^i \ –$$

«точечный» полином, а

$$\Delta f(l,\Delta F,s) \doteq \left\{ \delta f(l,\delta\mathbf{f},s) \doteq \sum_{i=0}^{l} \delta f_i s^i : \quad \forall \delta\mathbf{f} \doteq (\delta f_0, \quad \cdots, \quad \delta f_l) \in \Delta F \right\},$$

$$\Delta F \doteq \left\{ \delta\mathbf{f} : \quad \forall \delta f_i \in [-\Delta f_i, \quad \Delta f_i], \quad i = \overline{0,l} \right\} \ –$$

интервальный полином с симметричными интервалами неопределенности коэффициентов.

1. Схема синтеза робастного модального регулятора и задача исследования робастного качества управления

Пусть линейный объект управления задан дифференциальным уравнением n-го порядка с интервальной неопределенностью коэффициентов

$$a(n,\mathbf{a},p)y(t) = b(m,\mathbf{b},p)u(t), \quad n > m, \quad a_n^0 = 1, \quad \Delta a_n = 0, \tag{5}$$

здесь u – входной (управляющий) сигнал, y – выходной (управляемый) сигнал, а $a(n, \mathbf{a}, p)$ и $b(m, \mathbf{b}, p)$ – дифференциальные операторы вида (4). Модель

$$a^0(n,p)y(t) = b^0(m,p)u(t), \tag{6}$$

принадлежащую семейству моделей (5), назовем «номинальной».

Качество управления будем назначать в виде области S, определяющей допустимое расположение полюсов ПФ на C^1. Предполагаем, что область S удовлетворяет следующим условиям: расположена в ограниченной части C^1 слева от мнимой оси; односвязна; для любой точки $s \in S$ также выполняется $s^* \in S$.

В технологии синтеза модального регулятора (см., напр.: [1. С. 8–21]) регулятор ищется в виде дифференциального уравнения (n – 1)-го порядка:

$$\beta(n-1,p)u(t) = \alpha(n-1,p)y(t) + \chi(q,p)g(t), \quad q \le n-1, \quad \beta_{n-1} = 1, \tag{7}$$

здесь g – заданный программный сигнал. Коэффициенты операторов $\beta(n-1, p)$ и $\alpha(n-1, p)$ регулятора (7) рассчитываются из условия обращения в тождество уравнения

$$a^{\text{et}}(2n-1,s) = a^0(n,s)\beta(n-1,s) - b^0(m,s)\alpha(n-1,s), \quad a_{2n-1}^{\text{et}} = 1, \tag{8}$$

где $a^{\text{et}}(2n–1, s)$ – заданный характеристический полином эталонной системы управления (далее – «эталон»); выбор эталона ограничен условием

$$\Lambda\left(a^{\text{et}}\right) \subset \operatorname{int} S. \tag{9}$$

Очевидно, что выбор полинома $\chi(q, s)$ не влияет на свойства робастной устойчивости и робастного качества управления, поэтому вопрос расчета полинома $\chi(q, s)$ в данной работе не рассматривается.

В уравнении (8), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной s, получаем систему из $2n$ – 1 линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ – 1 неизвестных коэффициентов полиномов $\beta(n-1, s)$ и $\alpha(n-1, s)$ [Там же. С. 12–13]. Данная система однозначно разрешима, если корни полинома $a^0(n, s)$ не совпадают с корнями полинома $b^0(m, s)$ [2. С. 11].

После замыкания исходного объекта (5) регулятором, синтезированным по схеме (7)–(9), получим ПФ замкнутой системы (поскольку операция деления на множество полиномов не определена, запись носит условный характер):

$$w^{\text{c}}(s) = b^{\text{c}}(m+q,B,s) / a^{\text{c}}(2n-1,A,B,s),$$

здесь

$$b^{\text{c}}(m+q,B,s) = b(m,B,s)\chi(q,s),$$

$$a^{\text{c}}(2n-1,A,B,s) = a(n,A,s)\beta(n-1,s) - b(m,B,s)\alpha(n-1,s).$$

Множество полиномов $a^{c}(2n-1, A, B, s)$ назовем «семейством характеристических полиномов» замкнутой системы; это семейство может быть записано через свои элементы $a^{c}(2n-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, s)$:

$$a^{c}\left(2n-1, A, B, s\right)=\left\{a^{c}\left(2n-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, s\right): \quad \forall \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\right\}, \tag{10}$$

здесь (с учетом условия (8))

$$\begin{gathered} a^{c}\left(2n-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, s\right) \doteq a(n, \mathbf{a}, s) \beta(n-1, s)-b(m, \mathbf{b}, s) \alpha(n-1, s)= \\ =a^{\mathrm{et}}\left(2n-1, s\right)+\delta a(n-1, \delta \mathbf{a}, s) \beta(n-1, s)-\delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \alpha(n-1, s). \end{gathered}$$

Множество

$$\Lambda\left(a^{c}\right)=\left\{\lambda_{i}: \quad \exists \mathbf{a} \in A, \exists \mathbf{b} \in B, a^{c}\left(2n-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda_{i}\right)=0, \quad i=\overline{1,2n-1}\right\}$$

назовем «множеством корней» семейства характеристических полиномов (или «множеством полюсов» ПФ $w^{c}(s)$).

Будем считать, что замкнутая система с характеристическим полиномом (10) обладает робастным качеством управления, если множество $\Lambda(a^{c})$ лежит внутри области S, т.е. выполнено условие (далее – **условие робастного качества управления**)

$$\Lambda\left(a^{c}\right) \subset \operatorname{int} S. \tag{11}$$

При наличии интервальной неопределенности коэффициентов в объекте управления нельзя заранее гарантировать, что модальный регулятор, рассчитанный по формулам (7)–(9), будет обеспечивать выполнение условия (11). Таким образом, задача синтеза модального регулятора в условиях неопределенности в объекте управления состоит из следующих этапов:

1) синтез модального регулятора для номинального объекта (6) (по формулам (7)–(9));

2) последующая проверка выполнения условия (11) для заданного семейства характеристических полиномов (10) (**задача исследования робастного качества управления**).

В следующем разделе разрабатывается вычислительная технология исследования робастного качества управления для семейства характеристических полиномов вида (10).

2. Вычислительная технология исследования робастного качества управления

2.1. Критерий робастного качества управления

Выражение (10) представляет аффинное семейство полиномов (здесь и далее несущественные для рассуждений аргументы полиномов будем опускать)

$$a^{c}(s)=\left\{z(\xi, s) \doteq z_{0}(s)+\sum_{i=1}^{l} \xi_{i} z_{i}(s): \quad \xi=\left(\xi_{1}, \quad \cdots, \quad \xi_{l}\right) \in \Xi(\gamma)\right\}, \tag{12}$$

где

$$z_{0}(s)=a^{\mathrm{et}}\left(2n-1, s\right), \quad z_{i}(s)=\begin{cases}\Delta a_{i-1} s^{i-1} \beta(n-1, s), & i \in \overline{1, n-1}, \\ \Delta b_{i-n} s^{i-n} \alpha(n-1, s), & i \in \overline{n, n+m},\end{cases}$$

$$l=n+m,$$

а $\Xi(\gamma)$ – l-мерный куб в пространстве коэффициентов семейства (12):

$$\Xi(\gamma) \doteq\left\{\xi \in R^{l}:\left|\xi_{i}\right| \leq \gamma, \quad \forall i \in \overline{1, l}\right\}$$

(здесь $\gamma = 1$). Обозначим за $Z(\gamma, s)$ множество значений («геометрический образ») семейства полиномов (12) для точки $s \in \partial S$:

$$Z(\gamma, s)=\left\{z_{0}(s)+\sum_{i=1}^{l} \xi_{i} z_{i}(s): \quad\left|\xi_{i}\right| \leq \gamma\right\} \subset C^{1}. \tag{13}$$

Доказано (см., напр.: [6. С. 174]), что геометрический образ аффинного семейства полиномов (12) представляет выпуклую линейную оболочку (многоугольник) на C^{1}, вершины которой определяются вершинными полиномами $z_0(s) \pm \gamma z_i(s)$, $i \in \overline{1,l}$; общее число вершин многоугольника не превышает $2l$. Точки комплексной плоскости, соответствующие вершинным полиномам, называются «точками-кандидатами». Выпуклая линейная оболочка $Z(\gamma, s)$ записывается через свои точки-кандидаты:

$$Z(\gamma,s) = \mathrm{Conv}\left\{z_0(s) \pm \gamma z_i(s), \quad i \in \overline{1,l}\right\}.$$

Существует множество алгоритмов построения выпуклой линейной оболочки на плоскости по известным точкам-кандидатам (например, алгоритмы Грэхема, Джарвиса и др. [17. С. 106–112]).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть полином $a^{\mathrm{et}}(2n-1, s)$, принадлежащий семейству (10), удовлетворяет условию (9). Тогда для семейства полиномов (10) выполняется условие робастного качества управления (11) если и только если

$$0 \notin Z(1,s), \quad \forall s \in \partial S. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный полином, принадлежащий семейству (10). Изменение количества корней этого полинома, лежащих внутри области S, может происходить только в том случае, когда хотя бы один из них (при вариациях векторов параметров $\mathbf{a} \in A$ и $\mathbf{b} \in B$) пересечет границу области S и условие (14) будет нарушено. Что и требовалось доказать.

Точка $z_0(s)$ является центром построения выпуклой линейной оболочки (13), таким образом, множество (13) может быть записано:

$$Z(\gamma,s) = z_0(s) + \Delta Z(\gamma,s),$$

где $\Delta Z(\gamma,s) = \mathrm{Conv}\left\{\pm\gamma z_i(s), \quad i \in \overline{1,l}\right\}$ – симметричная выпуклая линейная оболочка (симметрия $\Delta Z(\gamma, s)$ на C^1 следует из симметрии куба $\Xi(\gamma)$). В результате условие (14) принимает вид:

$$z_0(s) \notin \Delta Z(1,s), \quad \forall s \in \partial S. \tag{15}$$

Основная сложность проверки условия (15), как и в случае задачи робастной устойчивости, состоит в необходимости:

1) эффективно строить многоугольник $\Delta Z(\gamma, s)$ на комплексной плоскости для точки $s \in \partial S$;

2) эффективно проверять выполнение условия (15) для точки $s \in \partial S$.

Технология проверки условия (15) изложена ниже.

2.2. Методика проверки робастного качества управления

Алгоритм Грэхема [Там же. С. 106–110] формирует множество точек-вершин оболочки $\Delta Z(1, s)$ в порядке их обхода против часовой стрелки (поскольку при построении оболочки $\Delta Z(1, s)$ точка s предполагается фиксированной, далее аргумент s будем опускать):

$$\theta_k, \quad k \in \overline{1,2r} \quad (r \le l).$$

Вершины $\theta_k(\gamma)$ оболочки $\Delta Z(\gamma)$ (с произвольным значением γ) получают по формулам

$$\theta_k(\gamma) = \gamma\theta_k, \quad k \in \overline{1,2r}.$$

При проверке условия (15) будем выделять два случая: $r = 1$ и $r > 1$. В случае $r = 1$ многоугольник $\Delta Z(\gamma)$ вырождается в отрезок

$$Z(\gamma,s) = \gamma[-\theta_1, \quad \theta_1]. \tag{16}$$

В случае $r > 1$ при $\gamma = 0$ многоугольник $\Delta Z(\gamma)$ сжимается в точку $(0, j0)$, при $\gamma \to \infty$ многоугольник стремится ко всей комплексной плоскости.

Поставим следующую **вспомогательную задачу**: для точки $s \in \partial S$ требуется найти значение

$$\gamma(s) \doteq \min\left\{\gamma : \quad z_0(s) \in \partial\Delta Z(\gamma,s), \ \gamma \ge 0\right\}, \tag{17}$$

если оно существует.

Рассмотрим случай $r = 1$. Точка z_0 может принадлежать отрезку (16) только в том случае, если она принадлежит линии

$$a\operatorname{Re}(z)+b\operatorname{Im}(z)=0,\ \ a=-\operatorname{Im}(\theta_1),\ \ b=\operatorname{Re}(\theta_1), \tag{18}$$

на которой находится отрезок (16). Доопределяя $\gamma(s)=\infty$ в тех случаях, когда точка z_0 не лежит на линии (18) получаем следующее выражение для $\gamma(s)$:

$$\gamma(s)=\begin{cases}|z_0|/|\theta_1|, & a\operatorname{Re}(z_0)+b\operatorname{Im}(z_0)=0,\\ \infty, & a\operatorname{Re}(z_0)+b\operatorname{Im}(z_0)\neq 0.\end{cases} \tag{19}$$

Рассмотрим случай $r > 1$. Многоугольник $\Delta Z(\gamma)$ может быть задан системой линейных алгебраических неравенств

$$a_k\operatorname{Re}(z)+b_k\operatorname{Im}(z)+c_k\geq 0,\ \ k\in\overline{1,2\cdot r}, \tag{20}$$

коэффициенты a_k, b_k, c_k определяются по формулам (для простоты записи формул (21) принимается $\theta_{2r+1}\equiv\theta_1$):

$$\begin{gathered}\psi_k=\operatorname{Re}(\theta_{k+1}-\theta_k)\operatorname{Im}(\theta_k)-\operatorname{Im}(\theta_{k+1}-\theta_k)\operatorname{Re}(\theta_k),\quad c_k=\gamma|\psi_k|,\\ a_k=\begin{cases}\operatorname{Im}(\theta_{k+1}-\theta_k), & \psi_k\geq 0,\\ -\operatorname{Im}(\theta_{k+1}-\theta_k), & \psi_k<0,\end{cases}\qquad b_k=\begin{cases}-\operatorname{Re}(\theta_{k+1}-\theta_k), & \psi_k\geq 0,\\ \operatorname{Re}(\theta_{k+1}-\theta_k), & \psi_k<0.\end{cases}\end{gathered} \tag{21}$$

Точка z_0 принадлежит границе $\Delta Z(\gamma)$ в следующих случаях:

1) точка z_0 находится на k-й стороне многоугольника $\Delta Z(\gamma)$, при этом в данной точке k-е неравенство системы (20)–(21) обратится в равенство, откуда находим значение параметра γ (обозначим его за γ_k):

$$\gamma_k=-\left(a_k\operatorname{Re}(z_0)+b_k\operatorname{Im}(z_0)\right)/|\psi_k|;$$

2) точка z_0 находится в k-й вершине многоугольника $\Delta Z(\gamma)$, при этом k-е и $(k+1)$-е неравенства системы (20)–(21) обратятся в равенства.

Сформируем множество

$$\Gamma_+(s)\doteq\left\{\gamma_k=-\left(a_k\operatorname{Re}(z_0)+b_k\operatorname{Im}(z_0)\right)/|\psi_k|:\ \ \gamma_k\geq 0,\ \ k\in\overline{1,2r}\right\}.$$

Отметим, что по смыслу задачи сразу все значения γ_k, ($k\in\overline{1,2\cdot r}$) не могут быть отрицательны, следовательно, множество $\Gamma_+(s)$ не пусто. Очевидно, что искомое значение $\gamma(s)$ находится по формуле

$$\begin{gathered}\gamma(s)=\max\left\{\gamma_k\in\Gamma_+(s):\right.\\ \left.a_i\operatorname{Re}(z_0)+b_i\operatorname{Im}(z_0)+\gamma_k|\psi_i|\geq 0,\ \forall i\in\overline{1,2r}\right\}.\end{gathered} \tag{22}$$

Приведенные рассуждения можно рассматривать в качестве нестрогого доказательства следующей леммы.

Лемма 1. Решение задачи (17) для точки $s\in\partial S$ определяется формулами (19) в случае $r = 1$ и (22) в случае $r > 1$.

Основываясь на данной лемме, теорему 1 можем переформулировать следующим образом.

Теорема 2. Пусть полином $a^{\text{et}}(2n-1, s)$, принадлежащий семейству (10), удовлетворяет условию (9). Тогда для семейства полиномов (10) выполняется условие робастного качества управления (11) если и только если

$$\gamma_-\doteq\min_{s\in\partial S}\gamma(s)>1,$$

где $\gamma(s)$ – решение задачи (17).

Величина γ_- определяет, во сколько раз следует увеличить (при $\gamma_- > 1$) или уменьшить (при $\gamma_- < 1$) одновременно все интервалы в модели (5), чтобы для характеристического полинома (10) впервые было нарушено условие робастного качества управления (11). Теорема 2 является основой для изложенного ниже алгоритма проверки робастного качества управления.

Пусть на ∂S задано множество точек

$$\Omega(n')=\left\{s_i,\ i\in\overline{1,n'}\right\},\quad (n'<\infty). \tag{23}$$

Алгоритм исследования робастного качества управления

1. В каждой точке $s_i \in \Omega(n')$ по формулам (19) и (22) вычислить $\gamma(s_i)$.

2. По формуле $\gamma_- = \min\limits_{i \in \overline{1,N}} \gamma(s_i)$ рассчитать γ_-.

3. Проверить выполнение условия

$$\gamma_- > 1. \qquad (24)$$

Если условие (24) выполнено, то для семейства полиномов (10) выполняется робастное качество управления, если нет – робастное качество не выполняется.

Проверка робастного качества управления закончена.

Замечание. Очевидно, что для того, чтобы по условию (24) можно было судить о робастном качестве управления, необходимо, чтобы множество точек (23) было как можно больше и располагалось достаточно равномерно на ∂S.

3. Пример исследования робастного качества управления

Пусть задан объект управления с интервальной неопределенностью коэффициентов

$$\left(a^0(2,p) + \Delta a(1,p)\right) y(t) = \left(b^0(1,p) + \Delta b(1,p)\right) u(t),$$

где

$$a^0(2,p) = p^2 + 4p + 13, \qquad b^0(1,p) = 10{,}67p + 138{,}67,$$

$$\Delta a(1,p) = [-1,1]p + [-4,4], \qquad \Delta b(1,p) = [-1,1]p + [-1,1].$$

Требования к качеству управления задаются областью

$$S = \left\{ s : \eta_2 \le -\mathrm{Re}(s) \le \eta_1, \quad |\mathrm{Im}(s)| / |\mathrm{Re}(s)| \le \mu_1 \right\},$$

где $\eta_1 = 25$, $\eta_2 = 2$, $\mu = 1$.

Характеристический полином эталона выберем

$$a^{\mathrm{et}}(3,s) = s^3 + 15s^2 + 75\,s + 125.$$

Для номинальной модели

$$a^0(2,p)y(t) = b^0(1,p)u(t)$$

и эталона $a^{\mathrm{et}}(3, s)$ рассчитан модальный регулятор:

$$(p + 9{,}062)u(t) = (-0{,}182p - 0{,}052)y(t) + \chi_0 g(t).$$

Семейство характеристических полиномов замкнутой системы

$$a^{\mathrm{c}}(3,s) = a^{\mathrm{et}}(3,s) + \Delta a(1,s)\beta(1,s) - \Delta b(1,s)\alpha(1,s). \qquad (25)$$

Требуется найти γ_-.

Решение. В результате расчётов функции $\gamma(s)$ вдоль ∂S получено значение $\gamma_- = 1{,}19$. Это означает, что семейство (25) сохраняет робастное качество управления.

Заключение

В данной работе обоснована схема синтеза робастного модального регулятора. Важной частью процедуры расчета регулятора является задача исследования робастного качества управления. В статье получено обобщение принципа исключения нуля (теорема 1), на основе которого разработана вычислительная технология проверки робастного качества управления. Предложенная схема синтеза проиллюстрирована примером.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паршуков А.Н. Методы синтеза модальных регуляторов. Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. 84 с.
2. Соловьев И.Г. Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск : Наука, 1992. 191 с.

3. Ackermann J.A., Bartlett D., Kaesbauer W.S., Steinhauser R. Robust control. Systems with uncertain physical parameters. London : Springer-Verlag, 1993. 413 p.
4. Barmish B.R. New tools for robustness of linear systems. New York : MacMillan, 1994. 394 p.
5. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.
6. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М. : Наука, 2002. 303 с.
7. Хлебалин Н.А. Построение интервальных полиномов с заданной областью расположения корней // Аналитические методы синтеза регуляторов : межвуз. науч. сб. Саратов : СПИ, 1982. С. 92–98.
8. Липатов А.В., Соколов Н.И. О некоторых достаточных условиях устойчивости линейных непрерывных стационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1978. № 9. С. 30–37.
9. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. V. 34, No. 8. P. 831–847.
10. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Mixed H2/H∞ control: a convex optimization approach // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. V. 36, No. 7. P. 824–831.
11. Kogan M.M. Optimal discrete-time H∞/γ0 filtering and control under unknown covariances // Int. J. Control. 2016. V. 89, No. 4. P. 691–700.
12. Якубович В.А. Частотная теорема в теории управления // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14, № 2. С. 384–420.
13. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М. : Физматлит, 2007. 280 с.
14. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems // Proc. 12th European Control Conf. Zurich, 2013. P. 833–838.
15. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М. : Ленанд, 2014. 560 с.
16. Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н. Федюков А.А. Синтез обобщенного H∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.
17. Preparata F., Shamos M. Computational geometry. An introduction. New York : Springer-Verlag. 1985. 411 p.

Поступила в редакцию 26 марта 2019 г.

Parshukov A.N. (2019) SYNTHESIS METHOD OF MODAL REGULATOR FOR CONTROL OBJECT WITH INTERVAL UNCERTAINTY OF COEFFICIENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 14–22

DOI: 10.17223/19988605/49/2

As a result of the identification of technological processes, the model of the control object is most often restored in the form of a linear differential equation (of a given order), the coefficients of which are determined with accuracy to belong to certain intervals. In fact, such interval uncertainty of coefficients means that the control object is described by the whole family of models.

In most of the classical schemes of synthesis, the regulator is calculated for the model with exactly the desired coefficients. In the case of a control object with interval uncertainty of coefficients, the regulator can be calculated according to classical schemes for a model with average values from the given intervals. In this case, after the closure of the control object (described by the family of models) by the synthesized controller, uncertainty appears in the transfer function of the closed system. Since the properties of stability and control quality of the system are determined by the location of the poles of its transfer function, the question arises: at what size of the interval uncertainty in the control object the closed system will still retain the properties of stability (robust stability) and control quality (robust control quality)?

In the modal control scheme, the control quality is set as an area S on the complex plane, which determines the desired location of the poles of the transfer function. Therefore, the questions of research (verification) of robust stability and robust control quality can be considered from a single point of view: is it necessary to check whether the roots of a given family of polynomials in the domain S?

In the literature devoted to robust theory focuses on the problem of robust stability, and the problem of robust quality control fades into the background and is still not solved.

The aim of the study is to develop a scheme for the synthesis of a modal controller for the case of interval uncertainty of the coefficients in the object model and a method for the study of robust control quality for a closed control system.

This paper generalizes a theorem known as the" zero elimination principle" and the problem of checking the robust quality of control is reduced to the problems of constructing a" geometric image "of a family of polynomials with interval uncertainty of coefficients and subsequent verification of the belonging of a given point to a "geometric image". The geometric image of such a family represents a convex linear shell on the complex plane. The technology of construction of convex linear shells is described in many works.

In the article the method of synthesis of a robust modal regulator is offered, the criterion of robust quality of control is received. The synthesis method is brought to computational procedures and can be implemented on a computer. The synthesis technology is illustrated by an example.

Practical significance: this method of synthesis allows to calculate the regulator settings in the conditions of interval uncertainty of coefficients in the control object model.

Keywords: interval uncertainty; modal regulator; robust control quality.

PARSHUKOV Andrej Nikolaevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tyumen Industrial University, Tyumen, Russian Federation).
E-mail: anparshukov@mail.ru

REFERENCES

1. Parshukov, A.N. (2009) *Metody sinteza modal'nykh regulyatorov* [Methods of synthesis of modal regulators]. Tyumen: Tyumen State Oil and Gas University.
2. Soloviev, I.G. (1992) *Metody mazhorizatsii v analize i sinteze adaptivnykh* system [Methods of majorization in the analysis and synthesis of adaptive systems]. Novosibirsk: Nauka.
3. Ackermann, J.A., Bartlett, D., Kaesbauer, W.S. & Steinhauser, R. (1993) *Robust control. Systems with uncertain physical parameters*. London: Springer-Verlag.
4. Barmish, B.R. (1994) *New tools for robustness of linear systems*. New York: MacMillan.
5. Polyak, B.T. & Tsypkin, Ya.Z. (1990) Frequency criteria of robust stability and aperiodicity of linear systems. *Automation and Remote Control*. 51(9). pp. 1192–1201.
6. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2002) *Robastnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow: Nauka.
7. Khlebalin, N.A. (1982) Postroenie interval'nykh polinomov s zadannoy oblast'yu raspolozheniya korney [Construction of interval polynomials with a given area of roots]. In: *Analiticheskie metody sinteza regulyatorov* [Analytical methods of controller synthesis]. Saratov: SPI. pp. 92–98.
8. Lipatov, A.V. & Sokolov, N.I. (1979) On some sufficient conditions for stability and instability of linear continuous stationary systems. *Automation and Remote Control*. 39(9). pp. 1285–1291.
9. Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. & Francis, B.A. (1989) State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 34(8). pp. 831–847. DOI: 10.1109/9.29425
10. Khargonekar, P.P. & Rotea, M.A. (1991) Mixed H2/H∞ Control: a Convex Optimization Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 36(7). pp. 824–831. DOI: 10.1109/9.85062
11. Kogan, M.M. (2016) Optimal discrete-time H∞/γ0 filtering and control under unknown covariances. *International Journal of Control*. 89(4). pp. 691–700. DOI: 10.1080/00207179.2015.1091511
12. Yakubovich, V.A. (1973) Chastotnaya teorema v teorii upravleniya [A frequency theorem in control theory]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal – Siberian Mathematical Journal*. 14(2). pp. 265–289.
13. Balandin, D.V. & Kogan, M.M. (2007) *Sintez zakonov upravleniya na osnove lineynykh matrichnykh neravenstv* [Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities]. Moscow: Fizmatlit.
14. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2013) An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems. *Proc. 12th European Control Conf*erence. Zurich. pp. 833–838.
15. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2014) *Upravlenie lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv* [Control of linear systems under external disturbances: Technique of linear matrix inequalities]. Moscow: Lenand.
16. Balandin, D.V., Kogan, M.M., Krivdina, L.N. & Fedyukov, A.A. (2014) Design of generalized descretetime H∞-optimal control over finite and infinite intervals. *Automation and Remote Control*. 75(1). pp. 1–17.
17. Preparata, F. & Shamos, M. (1985) *Computational Geometry. An Introduction*. New York: Springer-Verlag.