ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 49

УДК 517.93+519.87
DOI: 10.17223/19988605/49/3

Е.А. Перепелкин

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Решена задача синтеза системы управления состоянием одноканальной марковской системы массового обслуживания с пуассоновским законом поступления заявок, экспоненциальным законом обработки заявок и ограниченным числом заявок в системе. Предполагается, что интенсивность поступления заявок и интенсивность обработки заявок неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы. Описан алгоритм синтеза управления в виде обратной связи. Дано обоснование асимптотической устойчивости и робастности системы с обратной связью. Приведены результаты моделирования.
Ключевые слова: система массового обслуживания; перегрузка; робастное управление.

Исследования по управляемым системам массового обслуживания проводятся в течение нескольких десятилетий. Как правило, под управлением в системе массового обслуживания понимается оптимизация структуры, параметров и режимов работы системы [1, 2] или построение оптимального стохастического управления системой обслуживания как марковским процессом с конечным множеством состояний [3].

С развитием компьютерных сетей возникли новые задачи управления, связанные с устранением перегрузок в компьютерных сетях [4]. При решении этих задач нашли применение методы теории автоматического управления. Например, в системах с активным управлением очередью TCP-пакетов предлагается использовать классические законы управления в виде обратной связи [5–8]. Управление в таких системах осуществляется маркировкой (отклонением) поступающих в буфер узла компьютерной сети TCP-пакетов. При этом отклонение пакетов выполняется с некоторой заданной вероятностью.

В данной работе рассматривается возможность применения пропорционально-интегральной обратной связи для решения задачи управления состоянием одной из наиболее простых систем массового обслуживания – одноканальной марковской системы с пуассоновским законом поступления заявок, экспоненциальным законом обработки заявок и ограниченным числом заявок в системе. Предполагается, что система функционирует в условиях перегрузки, когда интенсивность поступления заявок выше интенсивности обработки заявок. При этом интенсивность поступления заявок и интенсивность обработки заявок неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы.

Под состоянием системы $x(t)$ будем понимать число заявок в системе в момент времени t. Управление осуществляется отклонением поступающих заявок с некоторой вероятностью. Система управления должна обеспечить желаемое среднее число заявок в системе и тем самым исключить возможность перегрузки системы.

Выбор управления в виде пропорционально-интегральной обратной связи обусловлен свойством робастности и простотой реализации системы управления. В отличие от адаптивных систем управления в данном случае не требуется оценивать интенсивности поступления и обработки заявок и настраивать систему управления в процессе ее функционирования.

В работе дано обоснование асимптотической устойчивости и робастности системы с обратной связью. Описан алгоритм синтеза обратной связи. Приведены результаты моделирования системы с управлением.

1. Объект управления

Введем обозначения: λ – интенсивность поступления заявок; μ – интенсивность обработки заявок; u – вероятность отклонения поступившей заявки; n – допустимое число заявок в системе, $p_i(t)$ – вероятность нахождения системы в состоянии $i = 0, 1, \ldots, n$ в момент времени t. Значения λ и μ неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы.

Среднее число заявок в системе в момент времени t равно

$$y(t) = p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) + \ldots + np_n(t).$$

Задача управления заключается в обеспечении заданного среднего числа заявок в системе $y(t) = \bar{y}$, $0 < \bar{y} < n$.

Рассмотрим объект управления как конечную цепь Маркова. Динамика цепи Маркова описывается системой уравнений Колмогорова [9]:

$$\dot{p} = Ap + (Bp)u, \quad y = cp, \quad ep = 1, \tag{1}$$

где

$$p = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda-\mu & \mu & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-\mu & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda-\mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & -\lambda-\mu & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda & -\mu \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; \ldots \;\; n], \quad e = [1 \;\; 1 \;\; \ldots \;\; 1].$$

Система (1) относится к классу билинейных систем [10] с ограничениями на переменные состояния и управления. Синтез управления в виде обратной связи по выходу для такого рода систем является достаточно сложной математической задачей [11].

2. Робастное управление

Перейдем к более простому описанию объекта управления. Заметим, что

$$cA = [\lambda \;\; \lambda-\mu \;\; \ldots \;\; \lambda-\mu \;\; -\mu], \quad cB = [-\lambda \;\; -\lambda \;\; \ldots \;\; -\lambda \;\; 0].$$

Из системы уравнений (1) получим

$$\dot{y} = c\dot{p} = cAp + (cBp)u = -\lambda(1-p_n)u + \lambda(1-p_n) - \mu(1-p_0).$$

Следовательно, динамика среднего числа заявок в системе подчиняется уравнению

$$\dot{y} = -au + b, \tag{2}$$

где $a = \lambda(1-p_n)$, $b = \lambda(1-p_n) - \mu(1-p_0)$.

Уравнение (2) будем рассматривать как уравнение системы с неконтролируемым внешним возмущением b и неопределенным параметром a. Управление будем строить в виде пропорционально-интегральной обратной связи

$$u = k_p\tilde{y} + k_i z, \quad \dot{z} = \tilde{y},$$

где $\tilde{y} = y - \bar{y}$ отклонение среднего числа заявок в системе от заданного значения $\bar{y}$, k_p, k_i – коэффициенты обратной связи.

Замкнутая система описывается уравнениями

$$\dot{\tilde{y}} = -ak_p\tilde{y} - ak_i z + b, \quad \dot{z} = \tilde{y}.$$

Характеристический многочлен замкнутой системы равен $\Delta(s) = s^2 + ak_p s + ak_i$. Замкнутая система будет асимптотически устойчивой при любом $a > 0$ тогда и только тогда, когда $k_p > 0$, $k_i > 0$. Из асимптотической устойчивости замкнутой системы следует $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \bar{y}$.

Пусть известна оценка максимального значения интенсивности потока заявок $\lambda_{\max}$. Следовательно, $0 \le a \le \lambda_{\max}$. Коэффициенты обратной связи рассчитаем при $a = \lambda_{\max}$. Зададим желаемые полюсы замкнутой системы равными $s_1 = s_2 = -r$, $r > 0$. Тогда

$$k_p = \frac{2r}{\lambda_{\max}}, \quad k_i = \frac{r^2}{\lambda_{\max}}.$$

При реализации системы управления следует учитывать ограничение, накладываемое на управление, $0 \le u \le 1$. Также необходима оценка среднего числа заявок в системе. Эту оценку можно получить, применяя известные алгоритмы построения последовательной оценки средних значений. Например, можно применить экспоненциальный фильтр первого порядка

$$\dot{\hat{y}}(t) = -\alpha(\hat{y}(t) - x(t)),$$

где $\hat{y}(t)$ – оценка среднего числа заявок в системе в момент времени *t*, $x(t)$ – наблюдаемое число заявок в системе в момент времени *t*, $\alpha > 0$ – параметр фильтра.

3. Пример

Рассмотрим систему обслуживания с параметрами: $\mu = 200$, $0 \le \lambda \le 1\,000$, $n = 100$. Пусть желаемое среднее число заявок в системе $\bar{y} = 40$. Зададим полюсы замкнутой системы равными $s_1 = s_2 = -10$. Тогда $k_p = 0{,}02$, $k_i = 0{,}1$.

Сначала решим уравнения Колмогорова, дополненные уравнениями обратной связи. На рис. 1, 2 показаны график среднего числа заявок в системе и график управления при трех значениях интенсивности поступления заявок. Расчеты проводились при начальных условиях $p_0(0) = 1$, $p_i(0) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

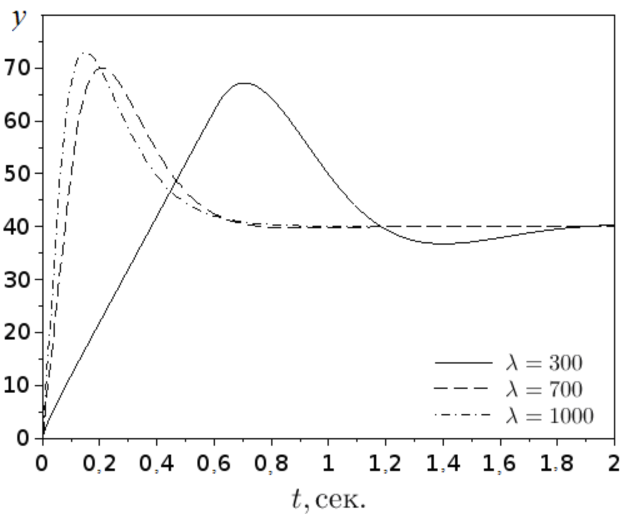

Рис. 1. Среднее число заявок в системе
Fig. 1. Average number of requests in the system

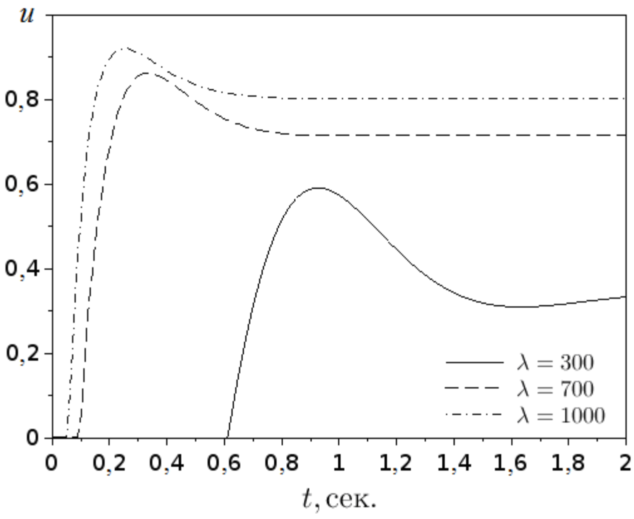

Рис. 2. Вероятность отклонения заявок
Fig. 2. Probability of rejection of requests

Затем выполним имитационное моделирование. Результаты моделирования, полученные при $k_p = 0{,}02$, $k_i = 0{,}1$, $\lambda = 1\,000$, показаны на рис. 3, 4.

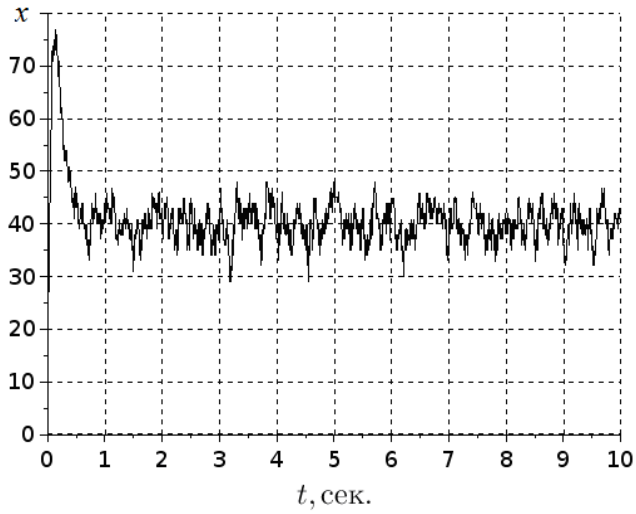

Рис. 3. Число заявок в системе
Fig. 3. Number of requests in the system

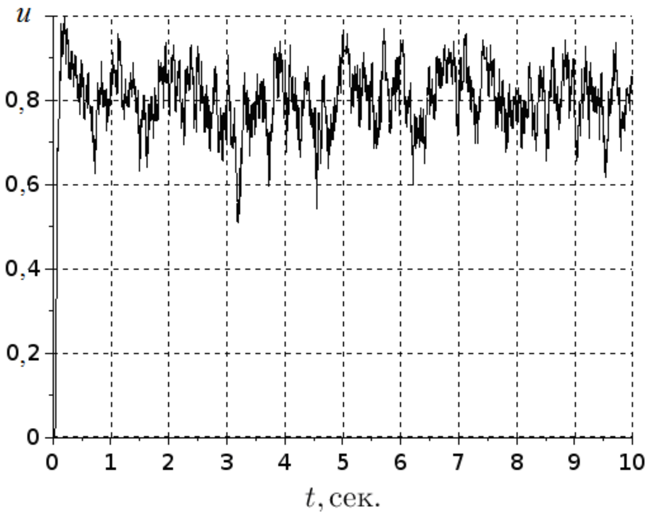

Рис. 4. Управление (вероятность отклонения поступающей заявки)
Fig. 4. Control (probability of rejection of arriving requests request)

Все расчеты и моделирование выполнялись в системе компьютерной математики Scilab. Результаты моделирования подтверждают свойство робастности системы с управлением.

Заключение

В статье решена задача синтеза системы управления в виде обратной связи для одноканальной марковской системы массового обслуживания с пуассоновским законом поступления заявок, экспоненциальным законом обработки заявок и ограниченным числом заявок в системе. Предполагается, что интенсивность поступления заявок и интенсивность обработки заявок неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы. В работе дано обоснование асимптотической устойчивости и робастности системы с обратной связью. Описан алгоритм синтеза обратной связи. Приведены результаты моделирования системы с управлением.

Результаты численных экспериментов и имитационного моделирования подтверждают возможность применения предложенной системы управления в системах массового обслуживания с высокой интенсивностью поступления заявок.

Предложенная система управления может быть использована в системах передачи и обработки данных. Например, в компьютерных сетях с активным управлением очередью пакетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kitaev M.Yu., Rykov V.V. Controlled queueing systems. New York : CRC Press, 1995. 304 p.
2. Назаров А.А. Управляемые системы массового обслуживания и их оптимизация. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1984. 234 с.
3. Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В. Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 111–130.
4. Миллер А.Б. Предотвращение перегрузок в сетях передачи данных с помощью методов стохастического управления // Автоматика и телемеханика. 2010. № 9. С. 70–82.
5. Fezazi N.E., Haoussi F.E., Tissir E.H., Alvarez T. Design of robust H∞ controllers for congestion control in data networks // J. of the Franklin Institute. 2017. V. 354, No. 17. P. 7828–7845.
6. Hamidian H., Beheshti M. A robust fractional-order PID controller design based on active queue management for TCP network // Int. J. of Systems Science. 2018. V. 49, No. 1. P. 211–216.

7. Bisoy S.K., Pattnaik P.K. Design of feedback controller for TCP/AQM networks // Int. J. Engineering Science and Technology. 2017. V. 20. P. 116–132
8. Alvarez T., Heras H., Reguera J. Controller Design for Congestion Control: Some Comparative Studies // Proc. of the World Congress on Engineering. London, 2014. V. II. P. 756–772.
9. Haghighi A.M., Mishev D.P. Difference and Differential Equations with Applications in Queueing Theory. Wiley, 2013. 424 p.
10. Elliott D. L. Bilinear Control Systems: Matrices in Action. Springer, 2009. 280 p.
11. Хлебников М.В. Квадратичная стабилизация билинейной системы управления: линейный динамический регулятор по выходу // Автоматика и телемеханика. 2017. № 9. С. 3–18.

Поступила в редакцию 21 мая 2019 г.

Perepelkin E.A. (2019) ROBUST CONTROLLER OF QUEUING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 21–28

DOI: 10.17223/19988605/49/3

We consider the queuing system as a control object operating under the congestion conditions. Control problem consists in providing a desired system state. The system state is defined as the number of requests in the system. The number of requests in the system is controlled by rejection of arriving requests with some probability. The control system should have a type of feedback and should have property of robustness in relation to change of parameters of a control object and the entering flow of requests.

The control object as a finite Markov chain is described by the system of the Kolmogorov equations

$$\dot{p} = Ap + (Bp)u \ , \quad y = cp \ ,$$

where *A*, *B*, *c* are matrices of the system, *y* is the average number of requirements in the system, *u* is a control signal. This is a bilinear system with restrictions on the state and control variables. Analysis of this system has shown that it is possible to proceed to a simpler description of the control object in the form of a first-order differential equation with uncertain parameters

$$\dot{y} = -au + b \ .$$

We suggest applying the classic proportional-integral controller to solve the control problem of the state of this system

$$u = k_p\tilde{y} + k_i z, \quad \dot{z} = \tilde{y},$$

where $\tilde{y} = y - \overline{y}$ is deviation of the average number of requests in the system from the specified value $\overline{y}$, k_p, k_i are controller coefficients.

We have described the algorithm of the controller synthesis by the specified poles of the closed system and investigated the conditions of stability and robustness of the system with the controller.

The results of numerical experiments and simulation confirm the possibility of using the proposed controller in queuing systems with a high intensity of requirements.

The proposed control system can be used in data transmission and processing systems operating under congestion conditions, for example, in computer networks with active packet queue management.

Keywords: queuing system; congestion; proportional-integral controller.

PEREPELKIN Evgenii Alexandrovich (Doctor of Technical Science, Professor, Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation).
E-mail: eap@list.ru

REFERENCES

1. Kitaev, M.Yu. & Rykov, V.V. (1995) *Controlled Queueing Systems.* CRC Press.
2. Nazarov, A.A. (1984) *Upravlyaemye sistemy massovogo obsluzhivaniya i ikh optimizatsiya* [Controlled queueing systems and optimization]. Tomsk: Tomsk State University.
3. Miller, B.M., Miller, G.B. & Semenikhin, K.V. (2011) Methods to design optimal control of Markov process with finite state set in the presence of constraints. *Automation and Remote Control.* 72(2). pp. 323–341. DOI: 10.1134/S000511791102010X
4. Miller, A.B. (2010) Using methods of stochastic control to prevent overloads in data transmission networks. *Automation and Remote Control.* 71(9). pp. 1804–1815. DOI: 10.1134/S0005117910090055
5. Fezazi, N.E., Haoussi, F.E., Tissir, E.H. & Alvarez, T. (2017) Design of robust H_∞ controllers for congestion control in data networks. *Journal of the Franklin Institute.* 354(17). pp. 7828–7845. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2017.09.026
6. Hamidian, H. & Beheshti, M. (2018) A robust fractional-order PID controller design based on active queue management for TCP network. *Internationa Journal of Systems Science.* 49(1). pp. 211–216. DOI: 10.1080/00207721.2017.1397801
7. Bisoy, S.K. & Pattnaik, P.K. (2017) Design of feedback controller for TCP/AQM networks. *Engineering Science and Technology, an International Journal.* 20. pp. 116–132 DOI: 10.1016/j.jestch.2016.10.002

8. Alvarez, T., Heras, H. & Reguera, J. (2014) Controller design for congestion control: Some comparative studies. *Proc. of the World Congress on Engineering*. Vol. II. London U.K. pp. 756–772.
9. Haghighi, A.M. & Mishev, D.P. (eds) (2013) *Difference and differential equations with applications in queueing theory*. Wiley. DOI:10.1002/9781118400678
10. Elliott, D.L. (2009) *Bilinear control systems: Matrices in Action.* Springer. DOI: 10.1023/b101451
11. Khlebnikov, M.V. (2017) Quadratic stabilization of bilinear systems: Linear dynamical output feedback. *Automation and Remote Control.* 78(9). pp. 1545–1558. DOI: 10.1134/S0005117917090016