ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 49

# ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/49/5

**А.М. Горцев, Л.А. Нежельская**

## ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО АСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача оптимальной оценки состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным (конечным) числом состояний, являющегося одной из математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в телекоммуникационных сетях. Условия наблюдения за потоком таковы, что каждое наблюдаемое событие порождает период мертвого времени, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению и не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности.
**Ключевые слова:** обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий; апостериорная вероятность; оптимальная оценка состояний; непродлевающееся мертвое время.

Системы и сети массового обслуживания (СМО и СеМО) широко применяются в качестве математических моделей различных технических, физических, экономических и других систем. Случайные потоки событий, являющиеся основными элементами СМО и СеМО, в свою очередь, применяются в качестве математических моделей различных реальных процессов, протекающих в таких системах. В частности, случайные потоки событий служат математическими моделями информационных потоков сообщений, функционирующих в телекоммуникационных сетях [1–3]. Современными математическими моделями информационных потоков в телекоммуникационных сетях являются дважды стохастические потоки событий. Одними из первых работ, положивших начало систематическому исследованию дважды стохастических потоков, были работы [4–9].

Большинством авторов исследования СМО и СеМО осуществляются в условиях, когда все события входящего потока доступны наблюдению. В реальности же зарегистрированное событие может создать период мертвого времени для регистрирующего прибора [10], в течение которого другие события потока становятся ненаблюдаемыми для регистрирующего прибора (теряются). В этой связи можно считать, что мертвое время выступает искажающим фактором при решении задачи оценивания, так как эффект мертвого времени влечет за собой потери событий потока, что отрицательно сказывается на оценивании как состояний, так и параметров потока. Все устройства регистрации делятся на две группы. Первую группу составляют устройства с непродлевающемся мертвым временем [11–13], вторую – устройства с продлевающемся мертвым временем [14]. Период ненаблюдаемости событий потока может продолжаться некоторое фиксированное время, а также может быть случайным. Здесь рассматривается случай неродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности.

В работе [15] введен обобщенный асинхронный поток событий с двумя состояниями (обобщенный MMPP-поток), функционирующий при отсутствии мертвого времени. Обобщение результатов этой работы получено в статье [16], где решена задача оптимального оценивания состояний обобщенного асинхронного потока событий с произвольным числом состояний в отсутствии мертвого времени. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работы [16], решается задача об оптимальной оценке состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным (конечным) числом состояний при непродлевающемся мертвом времени. Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний, когда решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности [17]. Данный критерий обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения [18].

## 1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный поток событий (далее – поток), сопровождающий процесс (интенсивность) $\lambda(t)$ которого есть кусочно-постоянный случайный процесс с $n$ состояниями: $\lambda(t)$ принимает значения из дискретного множества значений $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$, $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n \ge 0$. Будем говорить, что имеет место $i$-е состояние процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, $n = 2,3,...$ Если имеет место $i$-е состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с параметром (интенсивностью) $\lambda_i$, $i = \overline{1,n}$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в $i$-м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром $\alpha_i$, $i = \overline{1,n}$. Рассматривается стационарный режим функционирования потока, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения $[t_0, t)$, где $t_0$ – начало наблюдения, $t$ – окончание наблюдения, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. В этих предпосылках $\lambda(t)$ – сопровождающий стационарный кусочно-постоянный скрытый (принципиально ненаблюдаемый) транзитивный марковский процесс с произвольным числом состояний $n$ ($n = 2,3,...$).

Обобщенный асинхронный поток является обобщением асинхронного потока [11]. Обобщение состоит в следующем: в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из $i$-го состояния в $i$-е инициируется с вероятностью $p_{ij}$ дополнительное событие (с вероятностью $(1 - p_{ij})$ дополнительное событие не инициируется), $i, j = \overline{1,n}$, $j \ne i$; переход происходит в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события пуассоновского потока с параметром $\lambda_i$, при этом инициирование дополнительного события осуществляется в $j$-м состоянии (сначала осуществляется переход из $i$-го состояния в $j$-е (переход первичен), затем – инициирование дополнительного события в $j$-м состоянии), $i, j = \overline{1,n}$, $j \ne i$; переход и инициирование дополнительного события происходят мгновенно.

Матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ примут вид:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1+\alpha_1) & (1-p_{12})\alpha_{12} & ... & (1-p_{1n})\alpha_{1n} \\ (1-p_{21})\alpha_{21} & -(\lambda_2+\alpha_2) & ... & (1-p_{2n})\alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ (1-p_{n1})\alpha_{n1} & (1-p_{n2})\alpha_{n2} & ... & -(\lambda_n+\alpha_n) \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & p_{12}\alpha_{12} & ... & p_{1n}\alpha_{1n} \\ p_{21}\alpha_{21} & \lambda_2 & ... & p_{2n}\alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{n1}\alpha_{n1} & p_{n2}\alpha_{n2} & ... & \lambda_n \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

где $\alpha_i = -\alpha_{ii}$, $\alpha_{ii} = -\sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} \alpha_{ij}$, $i = \overline{1,n}$; $\alpha_{ij} > 0$, $0 \le p_{ij} \le 1$, $i, j = \overline{1,n}$, $j \ne i$.

Положив в (1) $p_{ij} = 0$, $i, j = \overline{1,n}$, $j \ne i$, получаем матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ для асинхронного потока событий с произвольным числом состояний.

После каждого зарегистрированного в момент времени $t_k$ события (как события пуассоновского потока с параметром $\lambda_i$, так и дополнительного события) наступает время фиксированной длительности $T$ (мертвое время), в течение которого другие события исходного обобщенного асинхронного потока недоступны наблюдению (теряются). События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности $T$ и т.д.

Таким образом, наличие мертвого времени приводит к тому, что в исходном обобщенном асинхронном потоке происходит частичная потеря событий. В силу этого на полуинтервале $[t_0, t)$ наблюдается «прореженный» исходный поток, будем называть его наблюдаемым потоком. Требуется на основании последовательности временных моментов (от момента $t_0$ до момента $t$) наступления событий наблюдаемого потока оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент времени $t$. Обозначим $\hat{\lambda}(t)$ оценку состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t$. Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t$ необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i \mid t) = w(\lambda_i \mid t_1, \ldots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i \mid t_1, \ldots, t_m, t)$, $i = \overline{1, n}$, того, что в момент времени $t$ значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ ($m$ – количество событий, наступивших в моменты времени $t_1, \ldots, t_m$ на интервале наблюдения $(t_0, t)$), при этом $\sum_{i=1}^{n} w(\lambda_i \mid t) = 1$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) выносится по критерию максимума апостериорной вероятности [17], согласно которому $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, если $w(\lambda_i \mid t) \geq w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1, n}$.

## 2. Явный вид апостериорных вероятностей

Рассмотрим полуинтервал $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,$ между двумя соседними событиями наблюдаемого потока. Так как моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке случайны, то длительность полуинтервала $[t_k, t_{k+1})$ – случайная величина. Длительность начального полуинтервала $[t_0, t_1)$ – также случайная величина. Таким образом, значение длительности полуинтервала $[t_k, t_{k+1})$ есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, \ldots$ С другой стороны, так как наступившее в момент времени $t_k$ событие наблюдаемого потока порождает период мертвого времени длительности $T$, то $\tau_k = T + \eta_k$, где $\eta_k$ – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и моментом $t_{k+1}$. Таким образом, временной полуинтервал $[t_k, t_{k+1})$ разбивается на два смежных полуинтервала: первый – $[t_k, t_k + T)$, второй – $[t_k + T, t_{k+1})$. Условия нахождения апостериорных вероятностей $w(\lambda_i \mid t)$, $i = \overline{1, n}$, на полуинтервале $[t_k, t_k + T)$ длительности $T$ и на полуинтервале $[t_k + T, t_{k+1})$, значение длительности которого есть $\eta_k$, принципиально разные. Кроме того, для нахождения вероятностей $w(\lambda_i \mid t)$, $i = \overline{1, n}$, необходимо точно знать длительность $T$ мертвого времени. В противном случае отсутствие информации о длительности $T$ мертвого времени делает попытку строгого нахождения вероятностей $w(\lambda_i \mid t)$, $i = \overline{1, n}$, невозможной.

В [16] сформулирован алгоритм расчета апостериорных вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1, n}$, для случая отсутствия мертвого времени ($T = 0$). При этом поведение $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1, n}$, на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots,$ между соседними событиями исходного обобщенного асинхронного потока, ,а также на полуинтервале $[t_0, t_1)$ между началом наблюдения и наблюдением первого события определяется выражением

$$w(\lambda_j \mid t) = \frac{\sum_{s=1}^{n} c_s^{(k)} \gamma_{js} e^{\omega_s (t - t_k)}}{\sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} c_s^{(k)} \gamma_{ls} e^{\omega_s (t - t_k)}},\ j = \overline{1, n},\ t_k \leq t < t_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots; \tag{2}$$

$w(\lambda_j \mid t_0) = w(\lambda_j \mid t_0 + 0) = \pi_j$; $w(\lambda_j \mid t_k) = w(\lambda_j \mid t_k + 0)$, $k = 1, 2, \ldots$; $\omega_s$ – корни (собственные числа) характеристического уравнения $\det \mathbf{D} = 0$, $\mathbf{D} = \left\| d_{sl} \right\|_1^n$, $d_{sl} = a_{sl}$ ($s, l = \overline{1, n}$, $s \neq l$), $d_{ss} = a_{ss} - \omega$ ($s = \overline{1, n}$), $a_{sl} = [(1 - p_{ls})\alpha_{ls} - \lambda_l \delta_{ls}]$, $\delta_{ls}$ – символ Кронекера, $s, l = \overline{1, n}$, $\alpha_{ls}$ и $p_{ls}$ определены в (1); $\gamma_{js}$ – компоненты собственного вектора $\boldsymbol{\gamma}^{(s)}=(\gamma_{1s},...,\gamma_{ns})^T$, $j,s=\overline{1,n}$ (либо $\gamma_{ls}$; $l,s=\overline{1,n}$), определяемые из уравнения $(\mathbf{A}-\omega_s\mathbf{E})\boldsymbol{\gamma}^{(s)}=0$, $s=\overline{1,n}$, в котором $\gamma_{ns}=1$ ($s=\overline{1,n}$), $\mathbf{A}=\|a_{sl}\|_1^n$, $\mathbf{E}$ – единичная матрица; коэффициенты $c_s{}^{(k)}$ являются решением системы линейных алгебраических уравнений $\sum_{s=1}^{n}c_s{}^{(k)}\gamma_{js}=w(\lambda_j\,|\,t_k+0)$, $j=\overline{1,n}$, $k=0,1,...$; вероятность $w(\lambda_j\,|\,t_k+0)$, $k=1,2,...$, определяется формулой пересчета

$$w(\lambda_j\,|\,t_k+0)=\frac{\lambda_j w(\lambda_j\,|\,t_k-0)+\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\alpha_{ij}w(\lambda_i\,|\,t_k-0)}{\sum_{i=1}^{n}w(\lambda_i\,|\,t_k-0)[\lambda_i+\sum_{s=1}^{n}p_{is}\alpha_{is}]},\tag{3}$$

$j=\overline{1,n}$; $p_{jj}=0$, $p_{ii}=0$; $k=1,2,...$, в которой $w(\lambda_i\,|\,t_k-0)$, $i=\overline{1,n}$, вычисляется по формуле

$$w(\lambda_i\,|\,t_k-0)=\frac{\sum_{s=1}^{n}c_s{}^{(k-1)}\gamma_{is}\,e^{\omega_s(t_k-t_{k-1})}}{\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}c_s{}^{(k-1)}\gamma_{ls}\,e^{\omega_s(t_k-t_{k-1})}},\ i=\overline{1,n},\ k=1,2,...;\tag{4}$$

априорные финальные вероятности $\pi_j$ ($j=\overline{1,n}$) того, что процесс $\lambda(t)$ в произвольный момент времени $t$ находится в $j$-м состоянии, являются решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i\alpha_{ij}=0,\ j=\overline{1,n-1},\ \sum_{j=1}^{n}\pi_j=1,\tag{5}$$

где $\alpha_{ij}$ ($i,j=\overline{1,n}$) определены в (1). Подчеркнем, что в момент времени $t_k$ (в момент наступления события наблюдаемого потока) апостериорная вероятность (2) претерпевает разрыв 1-го рода ($k=1,2,\ldots$).

Таким образом, вычисление апостериорных вероятностей $w(\lambda_j\,|\,t)$, $j=\overline{1,n}$, по формуле (2) в условиях, когда длительность мертвого времени $T\neq 0$, справедливо на полуинтервале $[t_k+T,t_{k+1})$, значение длительности которого есть $\eta_k$, $k=1,2,...$, и на полуинтервале $[t_0,t_1)$. При этом начальное условие для $w(\lambda_j\,|\,t)$ привязывается к моменту времени $t_k+T$, т.е. в формуле (2), во-первых, нужно $w(\lambda_j\,|\,t_k+0)$ заменить на $w(\lambda_j\,|\,t_k+T)$, во-вторых, $t_k+T\le t<t_{k+1}$, $k=1,2,...$; для $k=0$ формула (2) остается без изменения. Формула пересчета (3) и формула (4) остаются при этом без изменения.

Рассмотрим полуинтервал $[t_k,t_k+T)$, $k=1,2,\ldots$ Так как на этом полуинтервале длительности $T$ событие наблюдаемого потока имеет место в граничной точке $t_k$, а на самом полуинтервале события недоступны наблюдению (для наблюдателя события отсутствуют), то необходимо определить поведение апостериорных вероятностей $w(\lambda_j\,|\,t)$, $j=\overline{1,n}$, на полуинтервале $[t_k,t_k+T)$, $k=1,2,\ldots$

**Теорема 1.** На полуинтервале времени $[t_k,t_k+T)$, $k=1,2,...$, т.е. в течение мертвого времени длительности $T$, апостериорные вероятности состояний обобщенного асинхронного потока с произвольным (конечным) числом состояний, $w(\lambda_j\,|\,t)$, $j=\overline{1,n}$, удовлетворяют следующей системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dw(\lambda_j\,|\,t)}{dt}=\alpha_{nj}+\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{ij}-\alpha_{nj})w(\lambda_i\,|\,t),\ \ w(\lambda_n\,|\,t)=1-\sum_{j=1}^{n-1}w(\lambda_j\,|\,t),\tag{6}$$

$t_k\le t<t_k+T$, $j=\overline{1,n-1}$, $k=1,2,\ldots$

***Доказательство.*** Матрицы инфинитезимальных характеристик (1) процесса $\lambda(t)$ для рассматриваемого полуинтервала мертвого времени $[t_k, t_k+T)$, $k=1,2,\ldots$, примут вид $\mathbf{D}_0 = \|\alpha_{ij}\|_1^n$, $\mathbf{D}_1 = \|0\|_1^n$; $\alpha_{ij} > 0$, $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$; $\alpha_{ij} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_{ij}$, $i = \overline{1,n}$; так как наступление событий как пуассоновского потока, так и дополнительных событий не оказывает влияния на поведение процесса $\lambda(t)$ (процесс $\lambda(t)$ «живет своей жизнью» и в течение периода мертвого времени). Рассмотрим полуинтервал $[t, t+\Delta t)$, где $\Delta t$ – достаточно малая величина, и $t_k < t+\Delta t < t_k+T$, т.е. полуинтервал $[t, t+\Delta t)$ расположен внутри полуинтервала $[t_k, t_k+T)$, $k=1,2,\ldots$ Найдем апостериорную вероятность $w(\lambda_j \mid t+\Delta t)$ того, что в момент времени $t+\Delta t$ процесс $\lambda(t)$ находится в *j*-м состоянии, $j=\overline{1,n}$. Зафиксируем *j*-е состояние ($j=\overline{1,n}$). Пусть в момент времени $t$ процесс $\lambda(t)$ находится в *j*-м состоянии и на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ процесс $\lambda(t)$ не перешел в *i*-е состояние ($i=\overline{1,n}, i\neq j$), т.е. остался в *j*-м состоянии. Вероятность этого события есть $w(\lambda_j \mid t)(1+\alpha_{jj}\Delta t)+o(\Delta t)$. Пусть в момент времени $t$ процесс $\lambda(t)$ находится в *i*-м состоянии ($i=\overline{1,n}$) и на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ процесс $\lambda(t)$ перешел в *j*-е состояние ($i\neq j$). Вероятность этого события есть $\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \alpha_{ij}\Delta t w(\lambda_i \mid t)+o(\Delta t)$. Другие возможности имеют вероятность $o(\Delta t)$. Тогда имеем

$$w(\lambda_j \mid t+\Delta t) = (1+\alpha_{jj}\Delta t) w(\lambda_j \mid t) + \Delta t \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \alpha_{ij} w(\lambda_i \mid t) + o(\Delta t), \quad j=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Производя в (7) необходимые преобразования, после чего переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, приходим к линейной однородной системе дифференциальных уравнений [20] для вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$:

$$\frac{dw(\lambda_j \mid t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w(\lambda_i \mid t) \ (t_k \le t < t_k+T,\ j=\overline{1,n},\ k=1,2,\ldots), \tag{8}$$

с начальными условиями $w(\lambda_j \mid t=t_k) = w(\lambda_j \mid t_k+0)$, $k=1,2,\ldots$ Начальные условия для системы (8) формируются следующим образом. На полуинтервале $[t_{k-1}+T, t_k)$, $k=2,3,\ldots$, смежном полуинтервалу $[t_k, t_k+T)$, вероятности $w(\lambda_j \mid t)$ рассчитываются по формуле (2), где $w(\lambda_j \mid t_k+0)$ заменяются на $w(\lambda_j \mid t_{k-1}+T)$, $k=2,3,\ldots$, $j=\overline{1,n}$; затем в момент времени $t=t_k$, $k=2,3,\ldots$, происходит пересчет вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$ по формуле (3), так что их значения в точке $t=t_k$ есть $w(\lambda_j \mid t_k+0)$, $j=\overline{1,n}$, $k=2,3,\ldots$, которые являются начальными условиями для системы (8). Для граничного интервала $[t_0, t_1)$ расчет вероятности $w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$, производится по формуле (2) с их последующим пересчетом по формуле (3) в момент времени $t=t_1$. Апостериорные вероятности $w(\lambda_j \mid t)$ для любого $t$ удовлетворяют условию нормировки. Тогда выражая, например, $w(\lambda_n \mid t) = 1-\sum_{j=1}^{n-1} w(\lambda_j \mid t)$ и подставляя данное представление в (8) приходим к (6). Теорема 1 доказана.

**Замечание 1.** Поскольку $\lambda(t)$ – транзитивный марковский процесс, то при $t\to\infty$ апостериорные вероятности стремятся к пределам $w(\lambda_j)$, $j=\overline{1,n}$, не зависящим от начальных условий [19]. Тогда система (6) при $t\to\infty$ приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{nj}-\alpha_{ij}) w(\lambda_i) = \alpha_{nj}, \quad j=\overline{1,n-1}, \quad w(\lambda_n) = 1-\sum_{j=1}^{n-1} w(\lambda_j). \tag{9}$$

Полученная система линейных неоднородных алгебраических уравнений (9) идентична системе (5), так что $w(\lambda_j) = \pi_j$, $j = \overline{1,n}$.

Система (6) с начальными условиями (3) определяет поведение вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, на полуинтервале $[t_k, t_k + T)$, $k = 1, 2, \ldots$, ее решение устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2.** Апостериорные вероятности состояний обобщенного асинхронного потока событий $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, на полуинтервале времени $[t_k, t_k + T)$, $k = 1, 2, \ldots$, определяются формулой

$$w(\lambda_j \mid t) = \pi_j + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_{ji} b_i^{(k)} e^{\alpha^{(i)} t}, \quad w(\lambda_n \mid t) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} w(\lambda_j \mid t), \tag{10}$$

$$j = \overline{1, n-1}, \ t_k \le t < t_k + T, \ k = 1, 2, \ldots,$$

где $\pi_j$ ($j = \overline{1,n}$) – решение системы (5); $\tilde{A}_{ji}$ – элементы матрицы $\tilde{\mathrm{A}} = \left\| \tilde{A}_{ji} \right\|_1^{n-1}$, составленной из собственных векторов матрицы $\tilde{\alpha} = \left\| \tilde{\alpha}_{ji} \right\|_1^{n-1}$ ($\tilde{\alpha}_{ji} = \alpha_{ij} - \alpha_{nj}$) так, что $i$-й столбец матрицы $\tilde{\mathrm{A}}$ соответствует собственному числу $\alpha^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$; коэффициенты $b_i^{(k)}$ являются решением системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_{ji} b_i^{(k)} e^{\alpha^{(i)} t_k} = w(\lambda_j \mid t_k + 0) - \pi_j \ \ (j = \overline{1, n-1}, \ k = 1, 2, \ldots),$$

в которой $w(\lambda_j \mid t_k + 0)$ определяются формулой (3).

**Замечание 2.** Из (9) вытекает, что $\pi_j = w(\lambda_j) = \lim w(\lambda_j \mid t)$ при $t \to \infty$, тогда из (10) следует, что все собственные числа $\alpha^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$, отрицательны.

**Замечание 3.** Из (10) следует, что

$$w(\lambda_j \mid t_k + T) = \pi_j + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_{ji} b_i^{(k)} e^{\alpha^{(i)} (t_k + T)}, \quad w(\lambda_n \mid t_k + T) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} w(\lambda_j \mid t_k + T), \tag{11}$$

$$j = \overline{1, n-1}, \ k = 1, 2, \ldots$$

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорных вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени $t$.

### 3. Алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$

Алгоритм расчета апостериорных вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$ в любой момент времени $t$:

1) в момент времени $t_0$ находятся $w(\lambda_j \mid t_0 + 0) = w(\lambda_j \mid t_0 = 0) = \pi_j$ ($j = \overline{1,n}$) как решение системы (5);

2) по формуле (2) для $k = 0$ рассчитываются вероятности $w(\lambda_j \mid t)$ ($j = \overline{1,n}$) в любой момент времени $t$ ($0 \le t < t_1$), где $t_1$ – момент наблюдения первого события наблюдаемого потока;

3) по формуле (2) для $k = 0$ рассчитываются вероятности $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, в момент времени $t_1$: $w(\lambda_j \mid t_1) = w(\lambda_j \mid t_1 - 0)$;

4) $k$ увеличивается на единицу, и по формуле (3) для $k = 1$ производится пересчет вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$ в момент времени $t = t_1$, при этом $w(\lambda_j \mid t_1 + 0)$ ($j = \overline{1,n}$) являются начальными значениями для расчета $w(\lambda_j \mid t)$ по формуле (10);

5) по формуле (10) для $k=1$ рассчитываются вероятности $w(\lambda_j \mid t)$ ($j=\overline{1,n}$) в любой момент времени $t$ ($t_1<t<t_1+T$);

6) по формуле (11) для $k=1$ рассчитываются вероятности $w(\lambda_j \mid t)$ ($j=\overline{1,n}$) в момент времени $t=t_1+T$, т.е. вероятности $w(\lambda_j \mid t_1+T)$; при этом $w(\lambda_j \mid t_1+T)$ ($j=\overline{1,n}$) являются начальными значениями для вычисления вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$ на следующем шаге алгоритма;

7) для $k=1$ по формуле (2), в которой $w(\lambda_j \mid t_1+0)$ заменяются на $w(\lambda_j \mid t_1+T)$, рассчитываются вероятности $w(\lambda_j \mid t)$ ($j=\overline{1,n}$) в любой момент времени $t$ ($t_1+T<t<t_2$), где $t_2$ – момент наблюдения второго события наблюдаемого потока;

8) $k$ увеличивается на единицу, и для $k=2$ по формуле (4), в которой $t_1$ заменяется на $t_1+T$, вычисляются вероятности $w(\lambda_i \mid t_2-0)$ ($i=\overline{1,n}$), после чего по формуле (3) рассчитываются вероятности $w(\lambda_j \mid t_2+0)$ ($j=\overline{1,n}$);

9) алгоритм переходит на шаг 5, после чего шаги 5–8 повторяются для $k=2$ и т.д.

Параллельно по ходу вычисления апостериорных вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$, в момент времени $t$ выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) по критерию максимума апостериорной вероятности: $\hat{\lambda}(t)=\lambda_i$, если $w(\lambda_i \mid t)=\max w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$.

## Заключение

Предложенный в настоящей статье метод оценивания состояний потока позволяет получить оптимальные оценки состояний обобщенного асинхронного потока событий с произвольным (конечным) числом состояний, функционирующего в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности в режиме текущего времени. Оценивание производится по критерию максимума апостериорной вероятности, обеспечивающего минимальную полную (безусловную) вероятность принятия ошибочного решения. Апостериорные вероятности получены в явном виде, что позволяет производить их вычисление без привлечения численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
2. Basharin G.P., Gaidamaka Y.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // Automatic Control and Computer Science. 2013. V. 47, is. 2. P. 62–69.
3. Vishnevsky V.M., Larionov A.A., Smolnikov R.V. Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications: proc. of the eighteenth Int. Scientific Conf. (DCCN–2015) (Moscow, October 19–22, 2015). Moscow : ICS RAS, 2015. P. 27–35.
4. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, is. 3. P. 433–441.
5. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
6. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
7. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // J. of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
8. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
9. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10, is. 3. P. 575–598.
10. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.

11. Nezhel’skaya L.A. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
12. Gortsev A.M., Klimov I.S. An estimate for intensity of Poisson flow of events under condition of its partial missing // Radiotekhnika. 1991. No. 12. P. 3–7.
13. Nezhelskaya L.A. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
14. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow // Radiotekhnika. 1996. No. 2. P. 8–11.
15. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, is. 3. P. 283–290.
16. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 47. С. 12–23.
17. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1968. Кн. 2. 504 с.
18. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Сов. радио, 1968. 256 с.
19. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963. 235 с.
20. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.

Поступила в редакцию 29 марта 2019 г.

Gortsev A.M., Nezhel’skaya L.A. (2019) OPTIMAL ESTIMATE OF THE STATES OF A GENERALIZED ASYNCHRONOUS EVENT FLOW WITH AN ARBITRARY NUMBER OF STATES UNDER CONDITIONS OF UNEXTENDABLE DEAD TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 35–43

DOI: 10.17223/19988605/49/5

In this paper, we consider a generalized asynchronous flow of events, the accompanying process (intensity) of which is a piecewise constant random process $\lambda(t)$ with $n$ states: $\lambda(t)$ takes values from a discrete set of values $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$, $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n \geq 0$. Let's say that that the $i$ th state of the process $\lambda(t)$ holds if $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, $n = 2,3,...$. If the $i$ th state takes place, then during the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$ there is a Poisson flow of events with parameter (intensity) $\lambda_i$, $i = \overline{1,n}$. The duration of the process $\lambda(t)$ (flow) in the $i$ th state is distributed according to the exponential law with parameter $\alpha_i$, $i = \overline{1,n}$. We consider the stationary mode of the flow functioning, therefore we can neglect transition processes on the observing semi-interval $[t_0, t)$, where $t_0$ – the beginning of observation, $t$ – the ending of observation. In these premises, $\lambda(t)$ is an accompanying stationary piecewise constant hidden transitive Markov process with an arbitrary number of states $n$ ($n = 2,3,...$).

At the moment of transition of the process $\lambda(t)$ from the $i$ th state to the $j$ th, an additional event is triggered with probability $p_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$; the transition occurs at an arbitrary time moment, not related to the moment of occurrence of the Poisson flow event with parameter $\lambda_i$, while initiating an additional event occurs in the $j$ th state; transition and initiation of an additional event occur instantly.

After each registered event at the time moment $t_k$ ( both the event of the Poisson flow with parameter $\lambda_i$ and the additional event), there is a period of fixed duration *T* (dead time), during which other events of the generalized asynchronous event flow are inaccessible to observation. An event that occurs during the dead time doesn’t cause an extension of its period (unextendable dead time) At the end of the dead time period, the first event that occurred again creates a period of dead time of duration *T* and etc.

It is required, on the basis of the moments of occurrence of events (from moment $t_0$ to moment $t$ ) to estimate the state of the process $\lambda(t)$ at the moment $t$. We denote the estimate of the state of the process $\lambda(t)$ at the time moment $t$ as $\hat{\lambda}(t)$. We found an explicit form for a posteriori probabilities $w(\lambda_i \mid t) = w(\lambda_i \mid t_1,...,t_m,t)$, $i = \overline{1,n}$, that at the time moment $t$ the value of the process $\lambda(t) = \lambda_i$ (*m* is the number of events that occurred at the time moments $t_1,...,t_m$ at the observation interval $(t_0, t)$ ), here $\sum_{i=1}^{n} w(\lambda_i \mid t) = 1$. The decision on the state of the process $\lambda(t)$ is made according to criterion of a posteriori probability maximum.

The algorithm for calculating a posteriori probabilities $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, at any time moment $t$ ($t \geq t_0 = 0$) was formulated. In parallel, as we calculate a posteriori probabilities $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, we can make a decision on the state of the process $\lambda(t)$ at the current time moment $t$: $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, if $w(\lambda_i \mid t) = \max w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$.

Keywords: generalized asynchronous doubly stochastic flow of events; a posteriori probability; optimal states estimation; unextendable dead time.

*GORTSEV Alexander Mikhailovich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru

*NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna* (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: ludne@mail.ru

REFERENCES

1. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [The queuing systems with correlated flows]. Minsk: BSU.
2. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks. *Automatic Control and Computer Science.* 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
3. Vishnevsky, V.M., Larionov, A.A. & Smolnikov, R.V. (2015) Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes. *Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications.* Proc. of the 18th International Conference (DCCN–2015). Moscow, October 19–22, 2015. Moscow: ICS RAS. pp. 27–35.
4. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
5. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
6. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika.* 6. pp. 92–99.
7. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
8. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models.* 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
9. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 10(3). pp. 575–598. DOI: 10.1080/15326349408807311
10. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
11. Nezhelskaya, L.A. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science.* 564. pp. 141–151.
12. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) An estimate for intensity of Poisson flow of events under condition of its partial missing. *Radiotekhnika*. 12. pp. 3–7.
13. Nezhelskaya, L.A. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science.* 487. pp. 342–350.
14. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radiotekhnika*. 2. pp. 8–11.
15. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283–290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
16. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2019) Optimal estimate of the states of a generalized asynchronous event flow with an arbitrary number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 47. pp. 12−23. DOI: 10.17223/19988605/47/2
17. Levin, B.R. (1968) *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow: Sovetskoe radio.
18. Khazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of optimal statistical decisions and problems of optimal control]. Moscow: Sovetskoe radio.
19. Khinchin, A.Ya. (1963) *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works on the Mathematical Theory of Queuing]. Moscow: Fizmatgiz.
20. Elsgolts, L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [The Differential Equations and Calculus of Variations]. Moscow: Nauka.