ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 49

УДК 519.95
DOI: 10.17223/19988605/49/10

Ф.Г. Фейзиев, М.Р. Мехтиева

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛНОЙ РЕАКЦИИ ОДНОГО КЛАССА ДВОИЧНЫХ 3*D*-МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается вопрос представления полной реакции одного класса двоичных 3*D*- многомерных нелинейных модулярных динамических систем в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры и нахождение неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностях рассматриваемой системы.

Ключевые слова: 3*D*-многомерные нелинейные модулярные динамические системы; многопараметрические системы; фиксированная память; ограниченная связь; двухзначный аналог полинома Вольтерры; неизвестные коэффициенты; рекуррентное соотношение.

Модулярные динамические системы (МДС) [1−6] относятся к классу дискретных динамических систем, в которых входные, выходные последовательности и последовательности состояния принимают значения из конечного поля или кольца (понятие модулярной динамической системы – синоним понятия «конечные последовательностные машины» [7]). МДС широко применяются в вычислительной технике, системах диагностики, кодировании и декодировании дискретных сообщений, в криптографии, моделировании, управлении непрерывных и дискретных объектов и т.д. [1, 2, 5, 6, 8−12].

МДС делится на однопараметрические и многопараметрические классы. Однопараметрические МДС эволюционируют в дискретном времени. Многопараметрические, т.е. *nD*-МДС эволюционируют в дискретном времени и $(n-1)$-мерном дискретном (клеточном) пространстве и поэтому имеют более широкую возможность применения (здесь n – натуральное число и $n \geq 2$). Из-за этого они часто привлекают внимание исследователей [13−16].

Постановка и решение теоретических и прикладных задач для *nD*-МДС основывается на уравнении, описывающем их поведение в пространстве состояний, или на представлении их полной реакции. В работах [3−6] приведены уравнения в пространстве состояний линейных *nD*-МДС в общем виде. В случае нелинейных *nD*-МДС целесообразно получить уравнения в пространстве состояний или представлений полной реакции при конкретных значениях n.

К настоящему времени для описания полной реакции однопараметрических и двухпараметрических нелинейных МДС получено представление в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры [5, 6, 17]. Отметим, что МДС со скалярными входными и выходными последовательностями и МДС с векторными входными и выходными последовательностями имеют разные представления.

В работах [5, 13] двоичные 2*D*-нелинейные МДС (2*D*-НМДС), заданные в виде двухзначных аналогов полинома Вольтерры, применены при моделировании некоторых двухпараметрических объектов с распределенными параметрами. Во многих отраслях (нефтегазовая, нефтехимическая, энергетическая и т.д.) объекты управления имеют более двух параметров. Для их моделирования требуется применение *nD*-НМДС, где $n \geq 3$. В работе [7] получено представление полной реакции 3*D*-НМДС в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры, где входные и выходные последовательности суть скалярные. А 3*D*-НМДС с векторными, т.е. многомерными, входными и выходными последовательностями к настоящему времени не исследованы. Несомненный интерес представляет исследование различных задач теории и приложение классов многомерных 3*D*-НМДС (3*D*-МНМДС). Поэтому в данной работе рассматривается вопрос вывода формулы аналитического представления полной реакции 3*D*-МНМДС, заданных входно-выходными соотношениями.

1. Постановка задачи

Рассмотрим 3*D*-МНМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2$, полная реакция которых характеризуется следующим функциональным соотношением:

$$y[n,c] = G\{u[\tau, c+p] \,|\, n-n_0 \le \tau \le n,\ \ p \in P\}. \tag{1}$$

Здесь $n \in Z_0$, $c = (c_1, c_2)$, $c_i \in Z$, $i = \overline{1,2}$, $p = (p_1, p_2) \in P = P_1 \times P_2$, $P_i \subset Z$, $i = \overline{1,2}$, где Z и Z_0 есть множество целых и неотрицательных целых чисел соответственно; $y[n,c] \in GF^k(2)$ и $u[n,c] \in GF^r(2)$ – выходная и входная последовательности 3*D*-МНМДС, $G\{...\} = \left(G_1\{...\},...,G_k\{...\}\right)^{\mathrm{T}}$, $GF(2)$ – конечное поле, а $GF^k(2)$ и $GF^r(2)$ есть *k* и *r*-мерные линейные пространства над полем $GF(2)$. Выражение $P_1 \times P_2$ суть декартового произведения множества P_1 и P_2.

Пусть $P_i = \{p_i(1),\ldots,p_i(r_i)\}$, $p_i(1) < \ldots < p_i(r_i)$, $p_i(j) \in \{\ldots,-1,0,1\ldots\}$, $j = \overline{1, r_i}$, $i = \overline{1,2}$, и, кроме того, $p_i(1)$ и $p_i(r_i)$ конечные целые числа $(i = \overline{1,2})$. Тогда соотношение (1) можно записать в виде:

$$y_\nu[n, c_1, c_2] = G_\nu\{u_j[\tau, c_1+\rho_1, c_2+\rho_2] \,|\, n-n_0 \le \tau \le n,\ \ \rho_1 \in P_1, \rho_2 \in P_2,\ j = 1,...,r\},\quad \nu = 1,...,k\ . \tag{2}$$

Задача аналитического представления полной реакции 3*D*-МНМДС (1) или (2) состоит в представлении отображение $G\{\ldots\}$в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры и определении неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностях 3*D*-МНМДС.

2. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3*D*-МНМДС

В (1) для каждой $\nu \in \{1,...,k\}$ отображение $G_\nu\{...\}$ можно записать в виде функций f_ν, зависящих от $(n_0+1)r \cdot r_0$ аргументов, и эти аргументы суть элементы множества

$$U = \{u_j[\tau, c+p(\sigma)] \,|\, n-n_0 \le \tau \le n,\ j \in \{1,...,r\},\ \sigma \in \{1,...,r_0\}\ \}. \tag{3}$$

Здесь $r_0 = |P| = r_1 r_2$, а $p(\sigma)$ есть σ-й элемент множества P.

В каждой точке (n,c) модулярную функцию $f_\nu(...)$ можно представить в виде полинома над конечным полем $GF(2)$ с помощью произведения элементов множества *U* в различных возможных комбинациях. В возможных разных комбинациях произведений элементов из *U* число множителей (степень) может быть от нуля до $(n_0+1)rr_0$ и количество таких произведений суть $2^{(n_0+1)r \cdot r_0}$. Каждое такое произведение имеет коэффициенты из поля $GF(2)$.

Выберем произвольное $i \in \{0,...,(n_0+1)rr_0\}$ и рассмотрим произведения элементов из (3) в различных комбинациях, количество множителей которых равна *i*. Пусть в произвольно выбранном произведении для каждых $j \in \{1,\ldots,r\}$ и $p(\sigma) \in P$ из множества $U_{j,\sigma} = \{u_j[\xi,\ c+p(\sigma)] \,|\, \xi = 0,1,...,n_0\}$ участвуют множители, число которых суть $m_{j,\sigma}$. Тогда должно быть удовлетворено равенство $m_{1,1} + ... + m_{1,r_0} + ... + m_{r,1} + ... + m_{r,r_0} = i$. Пусть

$$\Phi(i) = \{\overline{m} = (m_{1,1},...,m_{1,r_0},...,m_{r,r_0}) \,|\, m_{j,\sigma} \in \{0,...,n_0+1\},\ j = \overline{1,r},\ \sigma = \overline{1,r_0},\ \ m_{1,1} + ... + m_{1,n_0} + ... + m_{r,n_0} = i\ \}, \tag{4}$$

$$Q(i,\overline{m}) = \{\ell \,|\, \ell \in \{1,\ldots,r\} \text{ и } m_{\ell,1} + \ldots + m_{\ell,r_0} \ne 0\},\ Q_1(i,\overline{m},j) = \{\sigma_j \,|\, \sigma_j \in \{1,...,r_0\} \text{ и } m_{j,\sigma_j} \ne 0\}\ . \tag{5}$$

Для каждого набора $\overline{m} \in \Phi(i)$ произведение со степенью i в общем виде можно записать следующим образом:

$$\prod_{j \in Q(i,\overline{m})} \ \prod_{\sigma_j \in Q_1(i,\overline{m},j)} \ \prod_{\xi_{j,\sigma_j}=1}^{m_{j,\sigma_j}} u_j[n - \tau(j, \sigma_j, \xi_{j,\sigma_j}), c + p(\sigma_j)]\ . \tag{6}$$

Фиксируем $i \in \{0,\ldots,(n_0+1)r \cdot r_0\}$ и $\overline{m} \in \Phi(i)$. Для всех (j,σ_j), где $j \in Q(i,\overline{m})$, $\sigma_j \in \{1,\ldots,r_0\}$, введем обозначения

$$\Gamma_1(m_{j,\sigma_j}) = \{\overline{\tau}_{j,\sigma_j} = (\tau(j,\sigma_j,1),\ldots,\tau(j,\sigma_j,m_{j,\sigma_j})) \big| 0 \le \tau(j,\sigma_j,1) < \ldots < \tau(j,\sigma_j,m_{j,\sigma_j}) \le n_0\}. \tag{7}$$

При $i \in \{0,\ldots,(n_0+1)r \cdot r_0\}$ и $\overline{m} \in \Phi(i)$ для всех (j,σ_j), где $j \in Q(i,\overline{m})$, $\sigma_j \in \{1,\ldots,r_0\}$, образуем из векторов $\overline{\tau}_{j,\sigma_j}$ блочный вектор $\overline{\overline{\tau}}$. Множество всех блочных векторов (наборов) $\overline{\overline{\tau}}$ обозначим $\Gamma(i,\overline{m})$:

$$\Gamma(i,\overline{m}) = \prod_{j \in Q(i,\overline{m})} \Gamma_1(m_{j,\sigma_j}). \tag{8}$$

Очевидно, каждому $\overline{\overline{\tau}} \in \Gamma(i,\overline{m})$ соответствует произведение вида (6). Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть имеют место соотношения (4)−(8). Тогда полная реакция $3D$-МНМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2$, характеризующаяся соотношением (1), может быть представлена в виде двузначного аналога полинома Вольтерры:

$$y_\nu[n,c] = K_{0,\nu} + \sum_{i=1}^{(n_0+1)r \cdot r_0} \sum_{\overline{m} \in \Phi(i)} \sum_{\overline{\overline{\tau}} \in \Gamma(i,\overline{m})} K_{i,\nu,\overline{m}}[\overline{n}_2] \prod_{j \in Q(i,\overline{m})} \prod_{\sigma_j \in Q_1(i,\overline{m},j)} \prod_{\xi_{j,\sigma_j}=1}^{m_{j,\sigma_j}} u_j[n - \tau(j,\sigma_j,\xi_{j,\sigma_j}), c + p(\sigma_j)],$$
$$GF(2), \quad \nu = 1,\ldots,k. \tag{9}$$

Здесь $K_{0,\nu}, K_{i,\nu,\overline{m}}[\overline{\overline{\tau}}]$ – коэффициенты этого полинома, где $\overline{\overline{\tau}} \in \Gamma(i,\overline{m})$, $\overline{m} \in \Phi(i)$, $i \in \{1,\ldots,(n_0+1)rr_0\}$, $\nu \in \{1,\ldots,k\}$.

Теперь рассмотрим построение полиномиального представления для функционального соотношения (2). Для каждого $\nu \in \{1,\ldots,k\}$ отображение $G_\nu\{\ldots\}$ можно представить в виде модулярной функций f_ν от аргументов из множества

$$U = \{u_\ell[\sigma, c_1 + p_1, c_2 + p_2] \big| n - n_0 \le \sigma \le n,\ \ell \in \{1,\ldots,r\}, p_1 \in P_1, p_2 \in P_2\}.$$

Функции f_ν, $\nu \in \{1,\ldots,k\}$ можно представить в виде полинома над полем $GF(2)$ с помощью произведения элементов *U* в разных комбинациях, в которых количество множителей (степень слагаемой) может быть от 0 до $(n_0+1)rr_1r_2$.

Пусть $i \in \{1,\ldots,(n_0+1)rr_1r_2\}$. Рассмотрим те произведения элементов из множества *U* в разных комбинациях, которых степень равна i. Пусть в произвольно выбранном произведении для каждого $\ell \in \{1,\ldots,r\}$ из множества $U_\ell = \{u_\ell[n-\xi, c_1 + p_1(\alpha), c_2 + p_2(\beta)] \big| 0 \le \xi \le n_0,\ 1 \le \alpha \le r_1,\ 1 \le \beta \le r_2\}$ участвуют множители количеством η_ℓ, где $\eta_1 + \ldots + \eta_r = i$. Ясно, что для некоторых $\ell \in \{1,\ldots,r\}$ может быть $\eta_\ell = 0$. Введем обозначение: $\overline{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_r)$. Пусть

$$\Lambda(i) = \{\overline{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_r) \big|\ \eta_1 + \ldots + \eta_r = i,\ \eta_\alpha \in \{0,1,\ldots,(n_0+1)r_1r_2\}, \alpha = \overline{1,r}\}, \tag{10}$$

$$Q_0(\overline{\eta}) = \{\ell \ \big| j \in \{1,\ldots,r\} \text{ и } \eta_\ell \ne 0;\ \ \eta_\ell \text{ есть компонент вектора } \overline{\eta}\}, \tag{11}$$

$$\Phi_\ell(\eta_\ell) = \{\overline{m}_\ell = (m_{\ell,1,1},\ldots,m_{\ell,r_1,r_2}) \Big| \sum_{\alpha=1}^{r_1} \sum_{\beta=1}^{r_2} m_{\ell,\alpha,\beta} = \eta_\ell,\ m_{\ell,\alpha,\beta} \in \{0,\ldots,n_0+1\},\ \alpha = \overline{1,r_1}, \beta = \overline{1,r_2}\}, \tag{12}$$

$$Q_\ell(\eta_\ell,\overline{m}_\ell) = \{(\alpha,\beta) \big|\ m_{\ell,\alpha,\beta} \text{ есть компонента } \overline{m}_\ell \text{ и } m_{\ell,\alpha,\beta} \ne 0,\ \alpha = \overline{1,r_1},\ \ \beta = \overline{1,r_2}\}. \tag{13}$$

С этими обозначениями, рассмотренное произведение можно записать в виде:

$$\prod_{\ell \in Q_0(\overline{\eta})} \prod_{(\alpha_\ell,\beta_\ell) \in Q_\ell(\eta_\ell,\overline{m}_\ell)} \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell,\alpha,\beta}} u_\ell[n - \tau(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma),\ c_1 + p_1(\alpha_\ell), c_2 + p_2(\beta_\ell)]. \tag{14}$$

Введем следующие множества:

$$\Phi(\overline{\eta}) = \prod_{\ell \in Q_0(\overline{\eta})} \Phi_\ell(\eta_\ell),\ \ Q(\overline{\eta},\overline{\overline{m}}) = \prod_{\ell \in Q_0(\overline{\eta})} Q_\ell(\eta_\ell,\overline{m}_\ell),\ \ \overline{\overline{m}} = (\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_r), \tag{15}$$

$$\Gamma_{\ell,\alpha,\beta}(m_{\ell,\alpha,\beta}) = \{\overline{\tau}_{\ell,\alpha,\beta} = (\tau_\ell(\alpha,\beta,1),\ldots,\tau_\ell(\alpha,\beta,m_{\ell,\alpha,\beta})) \big| 0 \le \tau_\ell(\alpha,\beta,1) < \ldots < \tau_\ell(\alpha,\beta,m_{\ell,\alpha,\beta}) \le n_0\}. \tag{16}$$

Для всех $(\alpha,\beta)\in Q_\ell(\eta_\ell,\bar m_\ell)$ образуем из векторов $\bar\tau_{\ell,\alpha,\beta}$ блочный вектор $\bar{\bar\tau}$. Множество всех блочных векторов (наборов) $\bar{\bar\tau}$ обозначим через $\Gamma_\ell(\eta_\ell,\bar m_\ell)$:

$$\Gamma_\ell(\eta_\ell,\bar m_\ell)=\prod_{(\alpha,\beta)\in Q_\ell(\eta_\ell,\bar m_\ell)}\Gamma_{\ell,\alpha,\beta}(m_{\ell,\alpha,\beta}). \tag{17}$$

Пусть

$$\Gamma(\bar\eta,\bar{\bar m})=\prod_{\ell\in Q_0(\bar\eta)}\Gamma_\ell(\eta_\ell,\bar m_\ell)\,. \tag{18}$$

Элементы множества $\Gamma(\bar\eta,\bar{\bar m})$ обозначим через $\bar{\bar{\bar\tau}}$. Ясно, что каждому $\bar{\bar{\bar\tau}}\in\Gamma(i,\bar{\bar m})$ соответствует произведение вида (13). Используя (10)−(18) можем записать:

$$y_\nu[n,c_1,c_2]=K_{0,\nu}+\sum_{i=1}^{(n_0+1)rr_1r_2}\ \sum_{\bar\eta\in\Lambda(i)}\ \sum_{\bar{\bar m}\in\Phi(\bar\eta)}\ \sum_{\bar{\bar{\bar\tau}}\in\Gamma(\bar\eta,\bar{\bar m})}K_{i,\nu,\bar\eta,\bar{\bar m}}[\bar{\bar{\bar\tau}}]\times$$

$$\times\prod_{\ell\in Q_0(\bar\eta)}\ \prod_{(\alpha_\ell,\beta_\ell)\in Q_\ell(\eta_\ell,\bar m_\ell)}\ \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell,\alpha_\ell,\beta_\ell}}u_\ell[n-\tau_\ell(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma),\,c_1+p_1(\alpha_\ell),c_2+p_2(\beta_\ell)],GF(2),\ \nu=\overline{1,k}\,. \tag{19}$$

Пусть $i\in\{1,\dots,rr_1r_2(n_0+1)\}$, $\bar\eta\in\Lambda(i)$, $\ell\in Q_0(\bar\eta)$, $\bar m_\ell\in\Phi_\ell(\eta_\ell)$, $A_\ell(\bar m_\ell)=(m_{\ell,\alpha,\beta})$, $\alpha=\overline{1,r_1}$, $\beta=\overline{1,r_2}$. Удаляя нулевые столбцы и строки матрицы $A_\ell(\bar m_\ell)$, построим матрицу $B_\ell(\bar m_\ell)$. Для всех элементов множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$ вышеуказанным путем построим соответствующую матрицу $B(\bar m_\ell)$. Из элементов множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$ построим специальные подмножества следующим образом: 1) любой элемент из множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$ входит в одно и только в одно специальное подмножество; 2) если для элементов $\bar m'_\ell$ и $\bar m''_\ell$ из множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$, соответствующие матрицы $B(\bar m'_\ell)$ и $B(\bar m''_\ell)$ совпадают, тогда оба элемента входят в одно и то же специальное подмножество. Обозначим через $\lambda(\eta_\ell)$ количество специальных подмножеств множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$. i_ℓ-е специальное подмножество обозначим через $\Phi'_\ell(\eta_\ell,i_\ell)$. Рассмотрим какое-либо подмножество $\Phi'_\ell(\eta_\ell,i_\ell)$ множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$. Пусть этому подмножеству соответствует матрица B размерностью $\gamma_1(\ell)\times\gamma_2(\ell)$:

$$B=(m'_{\alpha,\beta}),\quad \alpha=\overline{1,\gamma_1(\ell)},\ \beta=\overline{1,\gamma_2(\ell)}\,.$$

Тогда элементы множества $\Phi'_\ell(\eta_\ell,i_\ell)$ можно представить в следующем виде

$$m_{j_\alpha(\ell),\tau_\beta(\ell)}=m'_{\alpha,\beta},\ \alpha=\overline{1,\gamma_1(\ell)},\ \beta=\overline{1,\gamma_2(\ell)}\,,\quad m_{\sigma,\gamma}=0,\ (\sigma,\gamma)\notin\{j_1,j_2,\dots,j_{\ell_1}\}\times\{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{\ell_2}\}\,.$$

Каждой паре $(\bar j(\ell),\bar\mu(\ell))$ соответствует элемент из множества $\Phi'_\ell(\eta_\ell,i_\ell)$. Здесь $\bar j(\ell)=(j_1(\ell),\dots,j_{\gamma_1(\ell)}(\ell))$ и $\bar\tau(\ell)=(\tau_1(\ell),\dots,\tau_{\gamma_2(\ell)}(\ell))$ являются наборами соответственно в $L_{\ell,1}(\gamma_1(\ell))$ и $L_{\ell,2}(\gamma_2(\ell))$, где

$$L_{\ell,1}(\gamma_1(\ell))=\{\bar j(\ell)=(j_1(\ell),\dots,j_{\gamma_1(\ell)}(\ell))\,\big|\,1\le j_1(\ell)<\dots<j_{\gamma_1(\ell)}(\ell)\le r_1\},$$

$$L_{\ell,2}(\gamma_2(\ell))=\{\bar\mu(\ell)=(\mu_1(\ell),\dots,\mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell))\,\big|\,1\le\mu_1(\ell)<\dots<\mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell)\le r_2\}. \tag{20}$$

Введем следующее обозначение

$$\begin{aligned}F_\ell(\eta_\ell)=\Big\{&(\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar m_\ell)\,\Big|\,\bar m_\ell=(m_{\ell,1,1},\dots,m_{\ell,1,\gamma_2(\ell)},\dots,m_{\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell)}),\sum_{\alpha=1}^{\gamma_1(\ell)}\sum_{\beta=1}^{\gamma_2(\ell)}m_{\ell,\alpha,\beta}=\eta_\ell\ ;\\ &m_{\ell,\alpha,\beta}\in\{0,\dots,n_0+1\},\alpha=\overline{1,\gamma_1(\ell)},\ \beta=\overline{1,\gamma_2(\ell)};\ (\forall\alpha\in\{1,\dots,\gamma_1(\ell)\})(\exists\beta\in\{1,\dots,\gamma_2(\ell)\})\Rightarrow(m_{\ell,\alpha,\beta}\ne0);\\ &(\forall\beta\in\{1,\dots,\gamma_2(\ell)\})(\exists\alpha\in\{1,\dots,\gamma_1(\ell)\})\Rightarrow(m_{\ell,\alpha,\beta}\ne0);\ \gamma_\sigma(\ell)\in\{1,\dots,r_\sigma\},\ \sigma=\overline{1,2}\Big\};\end{aligned} \tag{21}$$

$$Q'_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar m_\ell)=\{(\alpha,\beta)\,\big|m_{\ell,\alpha,\beta}\ \text{есть компонента}\ \bar m_\ell\ \text{и}\ m_{\ell,\alpha,\beta}\ne0,\ \alpha=\overline{1,\gamma_1(\ell)},\beta=\overline{1,\gamma_2(\ell)}\}\,,$$

$$F(\bar\eta)=\prod_{\ell\in Q_0(\bar\eta)}F_\ell(\eta_\ell)\,,\quad L_1=\prod_{\ell\in Q_0(\bar\eta)}L_{\ell,1}(\gamma_1(\ell))\,,\quad L_2=\prod_{\ell\in Q_0(\bar\eta)}L_{\ell,2}(\gamma_2(\ell))\,, \tag{22}$$

$$\gamma_1=(\gamma_1(1),\dots,\gamma_1(r)),\quad \gamma_2=(\gamma_2(1),\dots,\gamma_2(r))\,,\ \bar{\bar j}=(\bar j(1),\dots,\bar j(r))\,,\quad \bar{\bar\mu}=(\bar\mu(1),\dots,\bar\mu(r))\,,\ \bar{\bar m}=(\bar m_1,\dots,\bar m_r)\,.$$

Ясно, что элементы множества $F(\bar{\eta})$ суть набор в виде $(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})$ и $(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})=$ $=((\gamma_1(\ell_1),\gamma_2(\ell_1),\bar{m}_{\ell_1}),..,(\gamma_1(\ell_R),\gamma_2(\ell_R),\bar{m}_{\ell_R}))$, где $R=|Q_0(\bar{\eta})|$, а $\ell_1,\ldots,\ell_R$ суть номера ненулевых компонентов $\bar{\eta}\in\Lambda(i)$. Каждому $(\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)\in F_\ell(\eta_\ell)$ соответствует одно специальное подмножество множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$. Поэтому $\lambda(\eta_\ell)=|F_\ell(\eta_\ell)|$ и $|F(\bar{\eta})|=\prod\limits_{\ell\in Q_0(\bar{\eta})}\lambda_\ell(\eta_\ell)$.

При $\bar{\tau}_{\ell,\alpha,\beta}\in\Gamma_{\ell,,\alpha,\beta}(m_{\ell,\alpha,\beta})$, $(\alpha,\beta)\in Q'_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)$, $\alpha=\overline{1,\gamma_1(\ell)},$ $\beta=\overline{1,\gamma_2(\ell)}$, множество всех блочных векторов (наборов) $\bar{\bar{\tau}}_\ell$ обозначим через $\Gamma_\ell(\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)$. Пусть

$$\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})=\prod_{\ell\in Q_0(\bar{\eta})}\Gamma_\ell(\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell) \tag{23}$$

и элементы множества $\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})$ обозначим через $\bar{\bar{\bar{\tau}}}$.

Теорема 2. Пусть имеют место соотношения (10)−(18) и (20)−(23). Тогда полная реакция 3*D*-МНМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P=P_1\times P_2$, характеризующаяся соотношением (2), может быть представлена в виде следующего двухзначного аналога полинома Вольтерры:

$$y_\nu[n,c_1,c_2]=K_{0,\nu}+\sum_{i=1}^{(n_0+1)rr_1r_2}\sum_{\bar{\eta}\in\Lambda(i)}\sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})\in F(\bar{\eta})}\sum_{(\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})\in L_1\times L_2}\sum_{\bar{\bar{\bar{\tau}}}\in\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})}h_{i,\nu,\bar{\eta},(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})}[\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}},\bar{\bar{\bar{\tau}}}]\times$$

$$\times\prod_{\ell\in Q_0(\bar{\eta})}\prod_{(\alpha_\ell,\beta_\ell)\in Q'_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)}\prod_{\sigma=1}^{m_{\ell,\alpha_\ell,\beta_\ell}}u_\ell[n-\tau(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma),c_1+p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)),c_2+p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))],\ \ GF(2),\quad \nu=\overline{1,k}. \tag{24}$$

3. Нахождение неизвестных коэффициентов полиномиальных представлений для полной реакции 3*D*-МНМДС

Пусть при заданных значениях входной последовательности $u_j[\gamma,c+p]$, $n-n_0\le\gamma\le n,$ $p\in P$, $j=\overline{1,r},$ известны значения выходной последовательности. Найдем в полиноме (9) коэффициенты $K_{0,\nu}$, $K_{i,\nu,\bar{m}}[\bar{n}_2]$, $\nu=\overline{1,k}$, для всех $\bar{n}_2\in\Gamma(i,\bar{m})$, $\bar{m}\in\Phi(i)$, $i\in\{1,\ldots,(n_0+1)rr_0\}$ соответствующие известным входной и выходной последовательностям.

Число неизвестных коэффициентов в полиноме (9) составляет $2^{(n_0+1)r\cdot r_0}$. Число всевозможных различных наборов значений $u_j[\gamma,c+p]$, $n-n_0\le\gamma\le n,$ $p\in P$, $j=\overline{1,r},$ также равно $2^{(n_0+1)r\cdot r_0}$. Учитывая в правой части полинома (9) всевозможные различные наборы значений $u_j[\gamma,c+p]$, $n-n_0\le\gamma\le n,$ $p\in P$, $j=\overline{1,r},$ можно получить систему над $GF(2)$ из $2^{(n_0+1)r\cdot r_0}$ линейных алгебраических уравнений с $2^{(n_0+1)r\cdot r_0}$ неизвестными. Коэффициенты неизвестных в этой системе образуются из произведений известных значений $u_j[\gamma,c+p]$, $n-n_0\le\gamma\le n,$ $p\in P$, $j=\overline{1,r}.$ Ясно, что эта система имеет единственное решение. Структура полученной системы алгебраических уравнений такова, что для ее решения можно построить рекуррентные соотношения.

Ясно, что для каждого $k\in\{1,\ldots,r\}$

$$y_\nu[n,c]=f_\nu(u_1[n,c+p(1)],\ldots,u_1[n-n_0,c+p(1)],\ldots,u_1[n-n_0,c+p(r_0)],\ldots,u_r[n-n_0,c+p(r_0)]).$$

Из (9) видно, что

$$K_{0,\nu}=f_\nu(0,\ldots,0,\ldots,0,\ldots,0). \tag{25}$$

Положим

$$X=\{u_j[n-\tau,c+p(\sigma)]\,|\,\tau=0,\ldots,n_0;\ \sigma=1,\ldots,r_0;\ j=1,\ldots,r\}. \tag{26}$$

Пусть $u_j[n-\tau, c+p(\sigma)]=1$, а остальные переменные из X принимают значения 0, где $\tau \in \{0,\dots,n_0\}$, $\sigma \in \{1,\dots,r_0\}$, $j \in \{1,\dots,r\}$. В этом случае обозначим значение функции $f_\nu(\dots)$ через $f_\nu(u_j[n-\tau,c+p(\sigma)]=1)$. Учитывая значения переменных множества X, из (9) получаем

$$K_{1,\nu,(1_{j,\sigma})}[((\tau))] = K_{0,\nu} + f_\nu(u_j[n-\tau,c+p(\sigma)]=1), \; GF(2), \tag{27}$$

где здесь через $(1_{j,\sigma})$ обозначен элемент $\overline{m} \in \Phi(1)$, в котором $m_{j,\sigma}=1,$ а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Пусть $u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1$, $\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,g}$, где $j_\lambda \in \{1,\dots,r\}$, $\sigma_{\lambda,\alpha} \in \{1,\dots,r_0\}$, $\tau_{\lambda,\alpha,\xi} \in \{0,\dots,n_0\}$, а остальные переменные из множества X принимают значения 0. При этом через $f_\nu(u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1 \,|\, \xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \alpha=\overline{1,\theta_\lambda},\ \lambda=\overline{1,g})$ обозначено значение функции $f_\nu(\dots)$. Введем обозначения:

$$\theta=(\theta_1,\dots,\theta_g), \quad \overline{\overline{\ell}}=((\ell_{1,1},\dots,\ell_{1,\theta_1}),\dots,(\ell_{g,1},\dots,\ell_{g,\theta_g})), \quad S=\ell_{1,1}+\dots+\ell_{1,\theta_1}+\dots+\ell_{g,1}+\dots+\ell_{g,\theta_g}. \tag{28}$$

Тогда полином, образованный из элементов множества

$$\{u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})] \,|\, \xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \alpha=\overline{1,\theta_\lambda},\ \lambda=\overline{1,g}\}$$

можно записать следующим виде:

$$\begin{gathered} f_\nu(u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1 \,|\, \xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \alpha=\overline{1,\theta_\lambda},\ \lambda=\overline{1,g}) = \\ = K_{0,\nu} + \sum_{\omega=1}^{S} \sum_{(\mu,\overline{\eta},\overline{\overline{\beta}},\overline{\overline{\rho}}) \in F_2(\omega,g,\overline{\theta},\overline{\overline{\ell}})} \sum_{\overline{\overline{\overline{\pi}}} \in \Omega_{\mu,\overline{\eta},\overline{\overline{\beta}},\overline{\overline{\rho}}}(\overline{\overline{\ell}})} K_{\omega,\nu,A}[B] \prod_{\upsilon=1}^{\mu} \prod_{\alpha=1}^{\eta_{\chi_\upsilon}} \prod_{\xi=1}^{\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}} x(j_{\chi_\upsilon}, \sigma_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}, \tau_{\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\xi}}), \\ GF(2), \nu=1,\dots,k, \end{gathered} \tag{29}$$

где A и B есть следующие наборы:

$$A=((\beta_{\chi_1,\sigma_{\rho_{\chi_1,1}}},\dots,\beta_{\chi_1,\sigma_{\rho_{\chi_1,\eta_{\chi_1}}}}),\dots,(\beta_{\chi_\mu,\sigma_{\rho_{\chi_\mu,1}}},\dots,\beta_{\chi_\mu,\sigma_{\rho_{\chi_\mu,\eta_{\chi_\mu}}}})), \tag{30}$$

$$\begin{gathered} B=((\tau_{\rho_{\chi_1,1},\pi_{\chi_1,\rho_{\chi_1,1},1}},\dots,\tau_{\rho_{\chi_1,1},\pi_{\chi_1,\rho_{\chi_1,1},\beta_{\chi_1,\rho_{\chi_1,1}}}}),\dots,(\tau_{\rho_{\chi_1,\eta_{\chi_1}},\pi_{\chi_1,\rho_{\chi_1,\eta_{\chi_1}},1}},\dots,\tau_{\rho_{\chi_1,\eta_{\chi_1}},\pi_{\chi_1,\rho_{\chi_1,\alpha},\beta_{\chi_1,\rho_{\chi_1,\eta_{\chi_1}}}}}),\dots, \\ (\tau_{\rho_{\chi_\mu,\eta_{\chi_\mu}},\pi_{\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,\eta_{\chi_\mu}},1}},\dots,\tau_{\rho_{\chi_\mu,\eta_{\chi_\mu}},\pi_{\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,\eta_{\chi_\mu}},\beta_{\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,\eta_{\chi_\mu}}}}})). \end{gathered} \tag{31}$$

В (29) множества $F_2(\omega,g,\overline{\theta},\overline{\overline{\ell}})$ и $\Omega_{\mu,\overline{\eta},\overline{\overline{\beta}},\overline{\overline{\rho}}}(\overline{\overline{\ell}})$ есть следующие множества:

$$\begin{gathered} F_2(\omega,g,\overline{\theta},\overline{\overline{\ell}})=\{(\mu,\overline{\eta},\overline{\overline{\beta}},\overline{\overline{\rho}}) \,|\, 1\le\mu\le g,\ \ \overline{\eta}=(\eta_{\chi_1},\dots,\eta_{\chi_\mu}),\ 1\le\eta_{\chi_\upsilon}\le\theta_{\chi_\upsilon},\ \ \overline{\chi}=(\chi_1,\dots,\chi_\mu)\in V_\mu(g), \\ \overline{\overline{\beta}}=(\overline{\beta}_{\chi_1},\dots,\overline{\beta}_{\chi_\mu}),\ \overline{\beta}_{\chi_\upsilon}=(\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,1}},\dots,\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\eta_{\chi_\upsilon}}}),\ 1\le\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}\le\ell_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}},\ \upsilon=\overline{1,\mu},\ \alpha=\overline{1,\eta_{\chi_\upsilon}}, \\ \overline{\overline{\rho}}=(\overline{\rho}_{\chi_1},\dots,\overline{\rho}_{\chi_\mu}),\ \ \overline{\rho}_{\chi_\upsilon}=(\rho_{\chi_\upsilon,1},\dots,\rho_{\chi_\upsilon,\eta_{\chi_\upsilon}})\in N_{\eta_{\chi_\upsilon}}(\theta_{\chi_\upsilon}),\ \ \upsilon=\overline{1,\mu},\ \ \sum_{\upsilon=1}^{\mu}\sum_{\alpha=1}^{\eta_{\chi_\upsilon}}\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}=\omega\}, \end{gathered} \tag{32}$$

$$\Omega_{\mu,\overline{\eta},\overline{\overline{\beta}},\overline{\overline{\rho}}}(\overline{\overline{\ell}})=\prod_{\upsilon=1}^{\mu}\prod_{\alpha}^{\eta_{\chi_\upsilon}}\Omega_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}(\ell_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}), \tag{33}$$

где

$$V_\mu(g)=\{\overline{\chi}=(\chi_1,\dots,\chi_\mu) \,|\, 1\le\chi_1<\dots<\chi_\mu\le g\}, \tag{34}$$

$$N_{\eta_{\chi_\upsilon}}(\theta_{\chi_\upsilon})=\{\overline{\rho}_{\chi_\upsilon}=(\rho_{\chi_\upsilon,1},\dots,\rho_{\chi_\upsilon,\eta_{\chi_\upsilon}}) \,|\, 1\le\rho_{\chi_\upsilon,1}<\dots<\rho_{\chi_\upsilon,\eta_{\chi_\upsilon}}\le\theta_{\chi_\upsilon}\}, \tag{35}$$

$$\begin{gathered} \Omega_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}(\ell_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}})=\{\overline{\pi}_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}=(\pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},1},\dots,\pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}}) \,|\, 1\le\pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},1}<\dots \\ \dots<\pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}}\le\ell_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}\}. \end{gathered} \tag{36}$$

Ясно, что в правой части формулы слагаемое, соответствующее степени S имеет коэффициент $K_{S,\nu,((\ell_{1,1},\dots,\ell_{1,\theta_1}),\dots,(\ell_{g,1},\dots,\ell_{g,\theta_g}))}[((\tau_{1,1,1},\dots,\tau_{1,1,\ell_{1,1}}),\dots,(\tau_{1,\theta_1,1},\dots,\tau_{1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1}}),\dots,(\tau_{g,\theta_g,1},\dots,\tau_{g,\theta_g,\ell_{g,\theta_g}})]$.

Поэтому из-за $u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1$, $\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,g}$, из формулы (29) получим

$$K_{S,\nu,((\ell_{1,1},\dots,\ell_{1,\theta_1}),\dots,(\ell_{g,1},\dots,\ell_{g,\theta_g}))}[((\tau_{1,1,1},\dots,\tau_{1,1,\ell_{1,1}}),\dots,(\tau_{1,\theta_1,1},\dots,\tau_{1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1}}),\dots,(\tau_{g,\theta_g,1},\dots,\tau_{g,\theta_g,\ell_{g,\theta_g}})]=$$

$$= f_\nu(u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1\big|\xi=\overline{1,\ell_\alpha},\ \alpha=\overline{1,\theta}) + K_{0,\nu} + \sum_{\omega=1}^{S-1}\ \sum_{(\mu,\bar{\eta},\bar{\bar{\beta}},\bar{\bar{\rho}})\in F_2(\omega,g,\bar{\theta},\bar{\bar{\ell}})}\ \sum_{\bar{\bar{\bar{\pi}}}\in\Omega_{\mu,\bar{\eta},\bar{\bar{\beta}},\bar{\bar{\rho}}}(\bar{\bar{\ell}})} K_{\omega,\nu,A}[B]\times$$

$$\times\prod_{\upsilon=1}^{\mu}\prod_{\alpha=1}^{\eta_{\chi_\upsilon}}\prod_{\xi=1}^{\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}} x(j_{\chi_\upsilon},\sigma_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}},\tau_{\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\xi}}), GF(2), \nu=1,\dots,k. \tag{37}$$

Таким образом, получаем доказательства следующей леммы:

Лемма 1. Пусть $u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1$, $\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,g}$, где $j_\lambda\in\{1,\dots,r\}$, $\sigma_{\lambda,\alpha}\in\{1,\dots,r_0\}$, $\tau_{\lambda,\alpha,\xi}\in\{0,\dots,n_0\}$, а остальные переменные из множества X принимают значения 0. При этом через $f_\nu(u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1\big|\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \alpha=\overline{1,\theta_\lambda},\ \lambda=\overline{1,g})$ обозначено значение функции $f_\nu(\dots)$. Пусть имеет место (28)−(36). Тогда справедливо формула (37).

При произвольных $\bar{\bar{\tau}}\in\Gamma(i,\bar{m})$, $\bar{m}\in\Phi(i)$, $\nu\in\{1,\dots,k\}$ и $i\in\{1,\dots,(n_0+1)r\cdot r_0\}$ коэффициента $K_{i,\nu,\bar{m}}[\bar{\bar{\tau}}]$ определяется на основе следующей теоремы:

Теорема 3. Пусть: 1^0. $\bar{m}\in\Phi(i)$, где $i\in\{1,\dots,(n_0+1)rR\}$; 2^0. Ненулевые элементы набора $\bar{m}$ есть m_{j,σ_j}, где $\sigma_j\in Q_1(i,\bar{m},j)$, $j\in Q(i,\bar{m})$; 3^0. $Q(i,\bar{m})=\{j_1,\dots,j_g\}$, $Q_1(i,\bar{m},j_\lambda)=\{\sigma_{\lambda,1},\dots,\sigma_{\lambda,\theta_\lambda}\}$, где $j_\lambda=\overline{1,r}$, $\sigma_{\lambda,\alpha}=\overline{1,r_0}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,g}$; 4^0. Множества $\Gamma_1(m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}})$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,g}$, есть следующие множества

$$\Gamma_1(m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}})=\{\bar{\tau}(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha})=(\tau(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},1),\dots,\tau(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}}))\big|0\le$$

$$\le\tau(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},1)<\dots<\tau(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}})\le n_0\};$$

5^0. $\ell_{\lambda,\alpha}=m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,g}$; 6^0. В случае, когда $u_{j_\lambda}[n-\tau(\lambda,\alpha,\xi), c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1$, $\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,g}$, где $\theta_\lambda\le r$, $\ell_{\lambda,\alpha}\le n_0+1$, $g\le k$, $j_\lambda\in\{1,\dots,r\}$, $\sigma_{\lambda,\alpha}\in\{1,\dots,R\}$, $\tau(\lambda,\alpha,\xi)\in\{0,\dots,n_0\}$, а остальные переменные из множества X принимают значения 0, для каждого $\nu\in\{1,\dots,k\}$ через $f_\nu(u_{j_\lambda}[n-\tau(\lambda,\alpha,\xi), c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1\big|\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \alpha=\overline{1,\theta_\lambda},\ \lambda=\overline{1,g})$ обозначено значение функции $f_\nu(\dots)$; 7^0. Имеют место соотношения (30)−(36). Тогда множества $\Gamma(i,\bar{m})$ содержит следующий единственный элемент

$$\bar{\bar{\tau}}=(\ (\tau(1,1,1),\dots,\tau(1,1,\ell_{1,1})),\dots,(\tau(1,\theta_1,1),\dots,\tau(1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1})),\dots,(\tau(g,\theta_g,1),\dots,\tau(g,\theta_g,\ell_{g,\theta_g}))\ )$$

и для коэффициента $K_{i,\nu,\bar{m}}[\bar{\bar{\tau}}]$ полинома (9) справедлива следующая формула:

$$K_{i,\nu,\bar{m}}[\bar{\bar{\tau}}]= f_\nu(u_{j_\lambda}[n-\tau(\lambda,\alpha,\xi), c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1\big|\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \alpha=\overline{1,\theta_\lambda},\ \lambda=\overline{1,g})+$$

$$+K_{0,\nu} + \sum_{\omega=0}^{i-1}\ \sum_{(\mu,\bar{b},\bar{\bar{\beta}},\bar{\bar{\rho}})\in F_2(\omega,g,\bar{\theta},\bar{\bar{\ell}})}\ \sum_{\bar{\bar{\bar{\pi}}}\in\Omega_{\mu,\bar{b},\bar{\bar{\beta}},\bar{\bar{\rho}}}(\bar{\bar{\ell}})} K_{\omega,\nu,A}[B], GF(2), \nu=1,\dots,k. \tag{38}$$

Доказательство теоремы 3 можно проводить на основе леммы 1.

Формула (38) вместе с формулами (25), (27) определяют рекуррентное соотношение для нахождения коэффициентов полинома (9) при известных значениях входных и выходных последовательностей 3*D*-МНМДС.

Замечание. 1) В формулах (8), (15), (17), (18), (22), (23) и (33) знак Π есть знак операции декартового произведения множеств; 2) Присутствие записи $GF(2)$ в формулах (9), (19), (24), (27), (29), (37) и (38) указывает, что эти формулы выполняются над полем $GF(2)$, т.е. операция сложения и умножения есть сложение и умножение по mod 2.

Заключение

Двухзначные аналоги полинома Вольтерры в виде (9), (19), (24), являются общим функциональным соотношением для некоторых классов 3*D*-МНМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2$ и могут быть использованы при исследовании их различных свойств, при постановке и решении для них различных математических и прикладных задач и т.д. Полученное рекуррентное соотношение для определения коэффициентов полиномиальных представлений может быть использовано при разработке алгоритмов и программ для вычисления значений этих коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Линейные последовательностные машины. М. : Наука, 1974. 288 с.
2. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М. : Сов.радио, 1975. 248 с.
3. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Анализ и синтез конечных линейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1981. № 6. С. 57−66.
4. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125−163.
5. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку : Элм, 1996. 180 с.
6. Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: основные результаты по теории и приложению. Баку : Элм, 2006. 234 с.
7. Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3*D*-нелинейных модулярных динамических систем // Электронное моделирование. 2011. Т. 33, № 2. С. 33−50.
8. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. М. : Мир, 1986. 576 с.
9. Латыпов Р.Х., Нуруддинов Ш.Р., Столов Е.Л., Фараджев Р.Г. Применение теории линейных последовательностных машин в системах диагностирования // Автоматика и телемеханика. 1988. № 8. С. 3−27.
10. Иванов М.А. Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях. М. : Кудиц-образ, 2001. 368 с.
11. Байбатшаев М.Ш. Синтез одного класса систем с двоичной нелинейной последовательностной машиной для управления непрерывным объектом // Сборник трудов ВНИИСИ. 1978. Вып. 1. С. 48−58.
12. Блюмин С.Л., Корнеев А.М. Дискретное моделирование систем автоматизации и управления. Липецк : Липецкий эколого-гуманитар. ин-т, 2005. 124 с.
13. Nagiyev A.T., Feyziyev F.G. The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters // Seminarberichte, Fachbereich Mathematic. 2001. Bd. 71. S. 31−43.
14. Haci Y. Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system // Applied and computational mathematics. 2009. V. 8, No. 2. P. 263−269.
15. Haci Y., Özen K. Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system // Control and cybernetics. 2009. V. 38, No. 3. P. 625−633.
16. Haci Y., Candan M., Or A. On the Principle of Optimality for Linear Stochastis Dynamical System // International Journal in Foundations of Computer Science and Technology. 2016. V. 6, No. 1. P. 57−63.
17. Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р., Гусейнова А.Дж. Двухзначный аналог полинома Вольтерры для описания полной реакции двоичных многомерных нелинейных модулярных динамических систем // Электронное моделирование. 2017. Т. 39, № 3. С. 3−15.

Поступила в редакцию 21 февраля 2019 г.

Feyziyev F.G., Mekhtiyeva M.R. (2019) ANALYTICAL DESCRIPTION OF FULL REACTION OF ONE CLASSES BINARY 3D-MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR MODULAR DYNAMIC SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 82–91

DOI: 10.17223/19988605/49/10

Binary 3*D*-multidimensional modular dynamic system with fixed memory n_0 and limited connection $P = P_1 \times P_2$, which the full reaction characterized by the following functional ratio, is considered:

$$y[n,c] = G\{u[\tau, c+p] \big| n - n_0 \le \tau \le n, \quad p \in P\}. \qquad (1)$$

Here $n \in Z_0$; $c = (c_1, c_2)$, $c_i \in Z$, $i = \overline{1,2}$; $p = (p_1, p_2) \in P = P_1 \times P_2$, $P_i \subset Z$, $i = \overline{1,2}$; $y[n,c] \in GF^k(2)$ and $u[n,c] \in GF^r(2)$; $G\{...\} = \left(G_1\{...\},...,G_k\{...\}\right)^{\mathrm{T}}$; $GF(2)$ is finite field, $GF^k(2)$ and $GF^r(2)$ are *k*-dimensional and *r*-dimensional linear spaces respectively over the field $GF(2)$.

When $P_i = \{p_i(1),...,p_i(r_i)\}$, $p_i(1) < ... < p_i(r_i)$, $p_i(j) \in \{...,-1,0,1...\}$, $j = \overline{1,r_i}$, $i = \overline{1,2}$ formula (1) is written in the form:

$$y_\nu[n,c_1,c_2] = G_\nu\{u_j[\tau, c_1+\rho_1, c_2+\rho_2] \,|\, n-n_0 \le \tau \le n,\ \ \rho_1 \in P_1, \rho_2 \in P_2,\ j=1,...,r\},\ GF(2),\ \ \nu = 1,...,k\ . \tag{2}$$

Let's

$$\Phi(i) = \{\bar{m} = (m_{1,1},...,m_{1,r_0},...,m_{r,r_0}) \,|\, m_{j,\sigma} \in \{0,...,n_0+1\},\ j=\overline{1,r},\ \sigma = \overline{1,r_0},\ \ m_{1,1}+...\ +m_{1,n_0}+...+m_{r,n_0} = i\ \}, \tag{3}$$

$$Q(i,\bar{m}) = \{\ell \ |\ell \in \{1,...,r\} \text{ и } m_{\ell,1}+...+m_{\ell,r_0} \ne 0\},\ Q_1(i,\bar{m},j) = \{\sigma_j \ |\sigma_j \in \{1,...,r_0\} \text{ и } m_{j,\sigma_j} \ne 0\}\,. \tag{4}$$

$$\Gamma_1(m_{j,\sigma_j}) = \{\bar{\tau}_{j,\sigma_j} = (\tau(j,\sigma_j,1),...,\tau(j,\sigma_j,m_{j,\sigma_j})) \,|\, 0 \le \tau(j,\sigma_j,1) < ... < \tau(j,\sigma_j,m_{j,\sigma_j}) \le n_0\}. \tag{5}$$

$$\Gamma(i,\bar{m}) = \prod_{j \in Q(i,\bar{m})} \Gamma_1(m_{j,\sigma_j})\ . \tag{6}$$

Using the formulas (3)−(6) for the functional relation (1), it is obtained representation in the form of the following two-valued analogue of the Volterra's polynomial:

$$y_\nu[n,c] = K_{0,\nu} + \sum_{i=1}^{(n_0+1)r\cdot r_0} \ \sum_{\bar{m} \in \Phi(i)} \sum_{\bar{\bar{\tau}} \in \Gamma(i,\bar{m})} K_{i,\nu,\bar{m}}[\bar{n}_2] \prod_{j \in Q(i,\bar{m})} \ \prod_{\sigma_j \in Q_1(i,\bar{m},j)} \ \prod_{\xi_{j,\sigma_j}=1}^{m_{j,\sigma_j}} u_j[n-\tau(j,\sigma_j,\xi_{j,\sigma_j}), c+p(\sigma_j)], \tag{7}$$

$$GF(2),\ \nu = 1,...,k.$$

For the functional relation (2) also representations in the form of a two-valued analogue of Volterra's polynomial are given. In the work with known values of the input and output sequences, the recurrence relations for finding the unknown coefficients in (7) are obtained.

Keywords: $3D$-multidimensional nonlinear modular dynamic system; multiparameterical systems; fixed memory; limited connection; two-valued analogue of Volterra's polynomial; unknown coefficients; recurrence ratio.

FEYZIYEV Fikrat Gulali (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan).
E-mail: FeyziyevFG@mail.ru

MEKHTIYEVA Maral Rzabala (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University, Baku, Azerbaijan).
E-mail: mehdiyevamaral71@gmail.com

REFERENCES

1. Gill, A. (1974) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential machines]. Moscow: Nauka.
2. Faradzhev, R.G. (1975) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential machines]. Moscow: Sovetskoe radio.
3. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1981). Analysis and design of finite linear sequential cellular machines. *Automation and Remote Control*. 42(6). pp. 746−754.
4. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1982) Linear cellular machine: The approach of the state space (review). *Automation and Remote Control*. 43(2). pp. 238−268.
5. Faradzhev, R.G. & Feyziev, F.G.(1996) *Metody i algoritmy resheniya zadachi kvadratichnoy optimizatsii dlya dvoichnykh posledova-tel'nostnykh mashin* [Methods and algorithms for solving quadratic optimization problem for binary sequential machines]. Baku: Elm.
6. Feyziev, F.G. & Faradzheva, M.R. (2006) Modulyarnye posledovatel'nostnye mashiny: osnovnye rezul'taty po teorii i prilozheniyu [Modular sequential machine: The main results in the theory and application]. Baku: Elm.
7. Feyziev, F.G. & Samedova, Z.A. (2011) Polinomial'noe sootnoshenie dlya predstavleniya polnoy reaktsii 3D-nelineynykh modulyarnykh dinamicheskikh sistem [Polynomial ratio to represent the full reaction 3D-nonlinear modular dynamical systems]. *Elektronnoe modelirovanie*. 33(2). pp. 33−50.
8. Blahut, R. (1986) *Teoriya i praktika kodov, kontroliruyushchikh oshibki* [Theory and Practice of Error Control Codes]. Translated from English by I.I. Grushko, V.M. Blinovsky. Moscow: Mir.
9. Latypov, R.Kh., Nurutdinov, Sh.R., Stolov, E.L. & Faradzev, R.G. (1988) Application of theory of linear sequential machines to diagnosing systems. *Automation and Remote Control*. 8. pp. 3−27.
10. Ivanov, M.A. (2001) *Kriptograficheskie metody zashchity informatsii v komp'yuternykh sistemakh i setyakh* [Cryptographic Methods of Information Protection in Computer Systems and Networks]. Moscow: Kudits-obraz.
11. Baybatshaev, M.Sh. (1978) Sintez odnogo klassa sistem s dvoichnoy nelineynoy posledovatel'nostnoy mashinoy dlya upravleniya nepreryvnym ob"ektom [Design of one class of systems with a binary non-linear sequential machine for controlling a continuous object]. *Sbornik trudov VNIISI*. 1. pp. 48−58.

12. Blyumin, S.L. & Korneev, A.M. (2005) *Diskretnoe modelirovanie sistem avtomatizatsii i upravleniya* [Discrete modeling automation and control systems]. Lipetsk: Lipetskiy ekologo-gumanitar. in-t.
13. Nagiev, A.T. & Feyziev, F.G. (2001) The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters. *Seminarberichte, Fachbereich Mathematic.* 71. pp. 31−43.
14. Haci, Y. (2009) Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system. *Applied and Computational Mathematics*. 8(2). pp. 263−269.
15. Haci, H. & Özen, K. (2009) Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system. *Control and Cybernetics.* 38(3). pp. 625−633.
16. Haci, Y., Candan, M. & Or, A. (2016) On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System. *International Journal in Foundations of Computer Science and Technology*. 6(1). pp. 57−63. DOI: 10.5121/ijfcst.2016.6105
17. Feyziev, F.G., Mekhtieva, M.R. & Huseynova, A.J. (2017) Dvukhznachnyy analog polinoma Vol'terry dlya opisaniya polnoy reaktsii dvoichnykh mnogomernykh nelineynykh modulyarnykh dinamicheskikh sistem [The two-valued analogue of Volterra polynomial for description of full reaction of binary multidimensional nonlinear modular dynamic systems]. *Elektronnoe modelirovaniye*. 39(3). pp. 3−15.