УДК 512.54 MSC 15B33, 20H25
DOI 10.17223/19988621/62/2

В.А. Гайдак, Е.А. Тимошенко

ИНВОЛЮЦИИ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ GL_2 НАД ПОДКОЛЬЦОМ ПОЛЯ $\mathbf{Q}$[1]

Получены необходимые и достаточные условия сопряжённости инволюций группы GL_2 над произвольным подкольцом поля $\mathbf{Q}$. Показано, что если это подкольцо является (не является) 2-делимым, то число классов сопряжённых нецентральных инволюций равно 1 (соответственно 2).

Ключевые слова: *матрица*, *полная линейная группа*, *сопряжённые инволюции*, *внутренний автоморфизм.*

Важным классом абелевых групп без кручения являются вполне разложимые группы. Себельдиным [1] был решён вопрос об определяемости вполне разложимых групп без кручения кольцами эндоморфизмов. Впоследствии появился цикл работ Вильданова [2–4], который был посвящён вопросу определяемости вполне разложимой группы конечного ранга её группой автоморфизмов. Бóльшая часть полученных в этом цикле результатов установлена его автором в предположении, что рассматриваемые вполне разложимые группы 2-делимы.

Настоящая статья представляет собой начальный шаг исследования, конечной целью которого является снятие требования 2-делимости для вполне разложимой группы. Непосредственная задача статьи – описать свойства инволюций полной линейной группы GL_2 над произвольным подкольцом поля рациональных чисел, что в последующем позволит перейти к рассмотрению вопроса, определяются ли своими группами автоморфизмов вполне разложимые группы без кручения ранга два (и более высоких рангов).

Для коммутативного кольца с единицей R через $GL_2(R)$, как всегда, будет обозначаться группа обратимых (2×2)-матриц с элементами из R; эта группа состоит из тех матриц

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ где } a,b,c,d\in R, \tag{1}$$

для которых определитель $|A|=ad-bc$ обратим в R. Легко видеть, что множество $ML_2(R)\subset GL_2(R)$ всех матриц с определителем ± 1 является подгруппой в $GL_2(R)$.

Пусть $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Для всякого множества $L\subset\mathbf{P}$ будем обозначать символом $\mathbf{Q}^{(L)}$ то подкольцо поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, которое порождается элементом 1 и числами p^{-1}, где $p\in L$. Всюду ниже считаем, что R есть подкольцо с единицей поля $\mathbf{Q}$; известно, что все такие подкольца исчерпываются кольцами вида $\mathbf{Q}^{(L)}$.

Нас будут интересовать *инволюции* группы $GL_2(R)$, т.е. матрицы A, у которых A^2 совпадает с единичной матрицей E (что эквивалентно условию $A^{-1}=A$).

Предложение 1. Для матрицы A следующие условия эквивалентны:

1) A – инволюция группы $GL_2(R)$;

[1] Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 1.13557.2019/13.1).

2) A – инволюция группы $ML_2(R)$;

3) либо $A=E$, либо $A=-E$, либо

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \text{ где } a,b,c\in R \text{ и } a^2+bc=1. \qquad (2)$$

Доказательство. Ясно, что выполнено 2) $\Rightarrow$ 1). Обратно, если A – инволюция группы $GL_2(R)$, то имеем $|A|^2=|A^2|=|E|=1$ и, значит, $A\in ML_2(R)$. Таким образом, импликация 1) $\Rightarrow$ 2) также справедлива.

Пусть матрица $A\in ML_2(R)$ задана равенством (1). В случае $|A|=1$ справедливы следующие эквивалентности:

$$A^{-1}=A \Leftrightarrow A^*=A \Leftrightarrow a=d, b=c=0, ad=1 \Leftrightarrow A=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Если же $|A|=-1$, то справедливы эквивалентности

$$A^{-1}=A \Leftrightarrow -A^*=A \Leftrightarrow d=-a, ad-bc=-1 \Leftrightarrow A \text{ имеет вид (2)}.$$

Тем самым доказана равносильность условий 2) и 3). ■

Для инволюций $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ введём обозначения J и I соответственно.

Предложение 2. а) Центр группы $GL_2(R)$ состоит из диагональных матриц, на главной диагонали у которых стоит один и тот же обратимый в R элемент.

б) Центр группы $ML_2(R)$ состоит из матриц E и $-E$.

Доказательство. Легко заметить, что перечисленные матрицы действительно принадлежат центрам групп $GL_2(R)$ и $ML_2(R)$ соответственно. Обратно, допустим, что матрица A вида (1) лежит в центре какой-либо из этих групп. Тогда из $AJ=JA$ получаем $b=c=0$, а так как $AI=IA$, то имеем $a=d$. Поскольку элемент $|A|=ad=a^2$ должен быть обратимым, то и сам элемент a обратим в R. Остаётся заметить, что если $A\in ML_2(R)$, то $a^2\in\{-1,1\}$, откуда $a=\pm1$ и $A=\pm E$. ■

Из предложений 1 и 2 ясно, что в каждой из групп $GL_2(R)$ и $ML_2(R)$ множество всех нецентральных инволюций совпадает с множеством инволюций вида (2).

Лемма 3. Пусть A – инволюция вида (2). Тогда:

а) если $c=1$, то инволюции A и I сопряжены в $ML_2(R)$;

б) если $c\in\{0,2\}$ и $b\in 2R$, то инволюции A и J сопряжены в $ML_2(R)$.

Доказательство. а) Если $c=1$, то $a^2+b=1$. Для матрицы $X=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеем

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -a \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=I.$$

Поскольку, очевидно, $X\in ML_2(R)$, то инволюции A и I сопряжены в $ML_2(R)$.

б) Пусть $c=0$, тогда $a^2=1$. Если $a=1$, то для $X=\begin{pmatrix} 1 & -b/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеем

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix} 1 & b/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & b/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=J;$$

если же $a=-1$, то, полагая $X=\begin{pmatrix} -b/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, мы можем записать равенства

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -b/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & b/2 \end{pmatrix}X=J.$$

Так как $b\in 2R$, то в обоих случаях $X\in ML_2(R)$, что и требовалось.

Пусть теперь $c=2$, тогда $a^2+2b=1$. Полагая $X=\begin{pmatrix}(a+1)/2 & (a-1)/2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, имеем

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}1 & (1-a)/2\\ -1 & (1+a)/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & -a\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & (1-a)/2\\ 1 & -(1+a)/2\end{pmatrix}X=J$$

и $|X|=1$; поскольку $a^2-1=-2b$, то $a\pm 1\in 2R$ и, следовательно, $X\in ML_2(R)$. Таким образом, инволюции A и J сопряжены в $ML_2(R)$. ■

Теорема 4. Пусть p равно -1 или простому числу, $a,m,n\in R$ и

$$A=\begin{pmatrix}a & m\\ pn & -a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}a & pm\\ n & -a\end{pmatrix} \tag{3}$$

– нецентральные инволюции. Пусть, далее, выполнено одно из условий

1) $p\neq 2$;

2) $p=2$ и $m,n\in 2R$.

Тогда матрицы A и B сопряжены в $ML_2(R)$.

Доказательство. Введём обозначения

$$g_1=\frac{a+1}{p}\cdot\frac{1-p}{2}+1,\ g_2=\frac{a-1}{p}\cdot\frac{1-p}{2}-1. \tag{4}$$

Поскольку инволюция A нецентральная, то элемент $(a+1)(a-1)=a^2-1$ равен $-pmn$ и, значит, делится на p в кольце R. Заметим, что p является либо обратимым (если $R=\mathbf{Q}^{(L)}$ и $p\in L\cup\{-1\}$), либо простым элементом кольца R, поэтому хотя бы один из элементов $a+1$ и $a-1$ принадлежит идеалу pR.

Убедимся, что по меньшей мере один из элементов g_1 и g_2 лежит в R. В случае $p\neq 2$ требуемое утверждение вытекает из условия $1-p\in 2R$ и приведённых выше рассуждений ввиду (4). Пусть выполнено $p=2$, тогда $g_1=(3-a)/4$ и $g_2=-(3+a)/4$. Считая, что $2R\neq R$ (в противном случае сразу имеем $g_1,g_2\in R$), запишем a в виде несократимой дроби с целыми числителем и знаменателем: $a=x/y$. Число y представляет собой обратимый элемент кольца R и, значит, является нечётным; кроме того, из сказанного ранее вытекает, что $a\pm 1\in 2R$, поэтому x тоже нечётно. Если число $y-x$ делится на 4, то $g_2=(y-x-4y)/4y\in R$. Если же число $y-x$ при делении на 4 даёт остаток 2, то $g_1=(2y+y-x)/4y\in R$.

Выбрав g принадлежащим множеству $\{g_1,g_2\}\cap R$, положим $x=(p-1)/2$ и

$$X=\begin{pmatrix}2ax+pg & mx\\ nx & g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(p-1)+pg & m(p-1)/2\\ n(p-1)/2 & g\end{pmatrix}.$$

Поскольку $g=\dfrac{(a\pm 1)(1-p)\pm 2p}{2p}=\dfrac{a(1-p)\pm(p+1)}{2p}$, имеем

$$|X|=\left(a(p-1)+\frac{a(1-p)\pm(p+1)}{2}\right)g-\frac{mn(p-1)^2}{4}=$$

$$=\frac{a(p-1)\pm(p+1)}{2}\cdot\frac{a(1-p)\pm(p+1)}{2p}+\frac{-pmn(p-1)^2}{4p}=$$

$$=\frac{(p+1)^2-a^2(p-1)^2}{4p}+\frac{(a^2-1)(p-1)^2}{4p}=\frac{(p+1)^2-(p-1)^2}{4p}=1.$$

Если при этом выполнено какое-то из условий 1) и 2), то все элементы матрицы X принадлежат R и, значит, $X\in ML_2(R)$. Наконец, ввиду равенств

$$X\begin{pmatrix} a & m \\ pn & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2x + pag + pmnx & amx + pmg \\ anx + png & mnx - ag \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & pm \\ n & -a \end{pmatrix} X$$

имеем $A = X^{-1}BX$, т.е. инволюции (3) сопряжены между собой в $ML_2(R)$. ■

Теорема 5. Всякая инволюция A вида (2), для которой $b, c \in 2R$, сопряжена с J в группе $ML_2(R)$.

Доказательство. Пусть $c \neq 0$ (в противном случае нужное утверждение будет справедливо в силу леммы 3). Многократно применяя теорему 4, в которой была установлена сопряжённость инволюций вида (3) для $m, n \in 2R$ и $p \in \mathbf{P} \cup \{-1\}$, мы можем «перенести» множитель $c/2 \in R$ из левого нижнего угла матрицы в правый верхний, получив в результате инволюцию A', имеющую элемент 2 в левом нижнем углу и сопряжённую с матрицей A в группе $ML_2(R)$. Остаётся лишь заметить, что ввиду пункта б) леммы 3 инволюции A' и J сопряжены в $ML_2(R)$. ■

В работе Вильданова [2] отмечался следующий факт: если R – подкольцо поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ такое, что выполняется $2R = R$, то все не равные $\pm E$ инволюции группы $GL_2(R)$ сопряжены в этой группе с матрицей J (а значит, и между собой). Из теоремы 5 видно, что указанный факт остаётся справедливым и в том случае, когда речь идёт о сопряжённости инволюций в группе $ML_2(R)$.

Справедливо также

Следствие 6. Пусть $2R \neq R$. Для инволюции A вида (2) эквивалентны условия:

1) матрицы A и J сопряжены в $GL_2(R)$;

2) матрицы A и J сопряжены в $ML_2(R)$;

3) $b, c \in 2R$.

Доказательство. Ясно, что 2) $\Rightarrow$ 1); импликация 3) $\Rightarrow$ 2) была доказана ранее в теореме 5.

1) $\Rightarrow$ 3). Для произвольной матрицы $X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \in GL_2(R)$ имеем

$$X^{-1}JX = \frac{1}{|X|} \cdot \begin{pmatrix} y & -v \\ -x & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X = \frac{1}{|X|} \cdot \begin{pmatrix} uy + vx & 2vy \\ -2ux & -uy - vx \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|X|$ есть обратимый элемент кольца R, отсюда вытекает, что во всякой матрице, сопряжённой с J в $GL_2(R)$, на побочной диагонали находятся элементы, принадлежащие идеалу $2R$ (что и требовалось). ■

Теорема 7. Всякая инволюция A вида (2), для которой выполняется $b \notin 2R$ или $c \notin 2R$, сопряжена с I в группе $ML_2(R)$.

Доказательство. Пусть $b \notin 2R$ или $c \notin 2R$, тогда $2R \neq R$. Поскольку

$$I^{-1}AI = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & c \\ b & a \end{pmatrix},$$

то мы можем с самого начала считать, что $c \notin 2R$; в этом случае c можно записать как дробь с нечётными числителем и знаменателем. Применяя теорему 4 столько раз, сколько потребуется, можно перейти от инволюции A к сопряжённой с ней в группе $ML_2(R)$ инволюции A', у которой в левом нижнем и правом верхнем углах находятся элементы, равные 1 и bc соответственно. Чтобы завершить доказательство, остаётся заметить, что инволюции A' и I сопряжены в группе $ML_2(R)$ в силу пункта а) леммы 3. ■

Следствие 8. Пусть $2R \neq R$. Для инволюции A вида (2) эквивалентны условия:

1) матрицы A и I сопряжены в $GL_2(R)$;

2) матрицы A и I сопряжены в $ML_2(R)$;

3) $b \notin 2R$ или $c \notin 2R$.

Доказательство. В силу теоремы 7 выполняется 3) $\Rightarrow$ 2); импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна.

1) $\Rightarrow$ 3). Для произвольной матрицы $X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \in GL_2(R)$ имеем

$$X^{-1}IX = \frac{1}{|X|} \cdot \begin{pmatrix} y & -v \\ -x & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \frac{1}{|X|} \cdot \begin{pmatrix} xy - uv & y^2 - v^2 \\ u^2 - x^2 & uv - xy \end{pmatrix}.$$

Нам надо показать, что хотя бы один из элементов побочной диагонали матрицы $X^{-1}IX$ не лежит в $2R$. Если это не так, то $y^2 - v^2 \in 2R$ и $u^2 - x^2 \in 2R$. Тогда

$$|X|^2 = (uy - vx)^2 = u^2(y^2 - v^2) - v^2(u^2 - x^2) + 2u^2v^2 - 2uvxy \in 2R,$$

что невозможно, поскольку $|X|$ – обратимый элемент кольца R. Полученное нами противоречие завершает доказательство следствия. ■

Замечание. Мы показали, что если $2R \neq R \subset \mathbf{Q}$, то всякая нецентральная инволюция с элементами, принадлежащими кольцу R, сопряжена в $GL_2(R)$ и в $ML_2(R)$ ровно с одной из инволюций J и I. Близкие результаты, касающиеся возможности приводить нецентральные инволюции к некоторому «каноническому» виду, были установлены ранее Коном в предположении, что R представляет собой квазисвободную область целостности (подробнее см. [5]). Прямое применение указанных результатов к случаю $R \subset \mathbf{Q}$, к сожалению, невозможно: в статье [6] показано, что из всех подколец поля **Q** квазисвободными будут только само **Q** и кольцо целых чисел **Z**.

Авторами [5] был также установлен тот факт, что при некоторых ограничениях на R (более жёстких, чем свойство квазисвободы) для любых двух антикоммутирующих инволюций группы $GL_2(R)$ существует внутренний автоморфизм данной группы, переводящий рассматриваемые инволюции в пару антикоммутирующих инволюций $\{J, I\}$. Убедимся, что указанный факт верен и для подколец поля **Q**.

Предложение 9. Если R – подкольцо поля **Q**, то для любых инволюций C и D группы $GL_2(R)$, таких, что выполнено равенство $CD = -DC$, найдётся внутренний автоморфизм этой группы, переводящий множество $\{C, D\}$ в множество $\{J, I\}$.

Доказательство. Так как выполняется $CD = -DC$, то C и D – нецентральные инволюции. Через φ_X будем обозначать внутренний автоморфизм группы $GL_2(R)$, переводящий всякую матрицу W в $X^{-1}WX$ (несложно заметить, что φ_X переводит антикоммутирующие инволюции в антикоммутирующие).

Рассмотрим сначала случай, когда по крайней мере одна из инволюций C и D сопряжена с J; пусть это выполнено для инволюции C. Тогда существует матрица $X \in GL_2(R)$, для которой $\varphi_X(C) = J$. Будем считать, что нецентральная инволюция $A = \varphi_X(D)$ задана условием (2). Подставляя эту инволюцию в равенство $JA = -AJ$, получаем, что $a = 0$ и, значит, $bc = 1$ (в частности, элемент b обратим в R).

Для матрицы $Y = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$ справедливы следующие равенства:

$$Y^{-1}JY = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J,$$

$$Y^{-1}AY = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ bc & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I.$$

Таким образом, $\varphi_{XY}(C) = Y^{-1}X^{-1}CXY = Y^{-1}JY = J$ и $\varphi_{XY}(D) = Y^{-1}X^{-1}DXY = Y^{-1}AY = I$, т.е. φ_{XY} – требуемый внутренний автоморфизм.

Остаётся возможность того, что ни матрица C, ни матрица D не сопряжена с J. Тогда ввиду теорем 5 и 7 имеем $2R \neq R$, а инволюции C и D сопряжены с I. Зафиксируем матрицу $X \in GL_2(R)$, такую, что $\varphi_X(C) = I$, и введём обозначение $A = \varphi_X(D)$. Матрица A является нецентральной инволюцией; будем считать, что она задаётся условием (2). Подставляя эту матрицу в равенство $IA = -AI$, получаем, что $c = -b$, поэтому имеем $a^2 - b^2 = 1$. Так как инволюции D и I сопряжены, то инволюция A также сопряжена с I. В силу следствия 8 отсюда вытекает, что $b \notin 2R$. Представим a и b в виде дробей с целыми числителями и знаменателями: $a = a'/k$ и $b = b'/k$, где b' и k – нечётные числа. Тогда из $a^2 - b^2 = 1$ получаем $a'^2 = b'^2 + k^2 \equiv 2 \pmod 4$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

В заключение мы покажем, что утверждение предложения 9 перестанет быть верным, если заменить в нём группу $GL_2(R)$ её подгруппой $ML_2(R)$.

Пример 10. Пусть $p \in \mathbf{P}$ и $p \neq 2$. Для инволюции $D = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1/p & 0 \end{pmatrix}$ имеем

$$-DJ = -\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1/p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -1/p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1/p & 0 \end{pmatrix} = JD\,.$$

Положим $R = \mathbf{Q}^{(L)}$, где множество $L \subset \mathbf{P}$ таково, что выполнено $2 \notin L$, $p \in L$. Пусть матрица $A \in ML_2(R)$ задаётся равенством (1) и обладает тем свойством, что автоморфизм φ_A переводит пару инволюций $J, D \in ML_2(R)$ в пару $\{J, I\}$. Так как $2R \neq R$, то в силу следствия 8 инволюции J и I не сопряжены в $ML_2(R)$. Поэтому матрица $\varphi_A(J) = A^{-1}JA$ должна совпасть с J (так как она не может совпадать с матрицей I). Подставляя матрицу A в соотношение $JA = AJ$, мы получаем, что $b = c = 0$. Отсюда следует, что инволюция $A^{-1}DA$, в которую φ_A переводит инволюцию D, равна

$$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/d \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p/a \\ 1/pd & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & pd/a \\ a/pd & 0 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, автоморфизм φ_A должен переводить D в I, а значит, $a = pd$, откуда $|A| = ad - bc = ad = pd^2 \neq \pm 1$ и $A \notin ML_2(R)$. Итак, не существует внутреннего автоморфизма группы $ML_2(R)$, который переводил бы $\{J, D\}$ в $\{J, I\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Себельдин А.М.* Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Мат. заметки. 1972. Т. 11. № 4. С. 403–408.
2. *Вильданов В.К.* Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3(1). С. 174–177.
3. *Vildanov V.K.* Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2014. V. 197. No. 5. P. 590–594. DOI: 10.1007/s10958-014-1739-9.
4. *Vildanov V.K.* On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2018. V. 230. No. 3. P. 372–376. DOI: 10.1007/s10958-018-3742-z.
5. *Cohn P.M.* On the structure of the GL_2 of a ring // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 1966. V. 30. P. 5–53. DOI: 10.1007/BF02684355.
6. *Зонов М.Н., Тимошенко Е.А.* О стандартной форме матриц второго порядка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 59. С. 5–10. DOI: 10.17223/19988621/59/1.

Статья поступила 16.06.2019 г.

Gaidak V. A., *Timoshenko E. A.* (2019) INVOLUTIONS OF THE GENERAL LINEAR GROUP GL_2 OVER A SUBRING OF THE FIELD Q. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 19–26

DOI 10.17223/19988621/62/2

Keywords: matrix, general linear group, conjugate involutions, inner automorphism.

We find necessary and sufficient conditions for the conjugacy of involutions of the group GL_2 over a subring of **Q**. Let R be such a subring (with 1). As usual, $GL_2(R)$ denotes the group of invertible 2×2 matrices over R; the set $ML_2(R)\subset GL_2(R)$ of all matrices with determinant ± 1 is a subgroup of $GL_2(R)$.

Proposition 1. For a matrix A, the following conditions are equivalent:

1) A is an involution of the group $GL_2(R)$;

2) A is an involution of the group $ML_2(R)$;

3) either $A=\pm E$ or $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ with $a,b,c\in R$ and $a^2+bc=1$.

Let J and I denote respectively the involutions $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Theorem 5. Every involution $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ such that $b,c\in 2R$ is conjugate to J in $ML_2(R)$.

Corollary 6. Let $2R\neq R$. For an involution $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, the following are equivalent:

1) A and J are conjugate in $GL_2(R)$;

2) A and J are conjugate in $ML_2(R)$;

3) $b,c\in 2R$.

Theorem 7. Every involution $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ such that $b\notin 2R$ or $c\notin 2R$ is conjugate to I in $ML_2(R)$.

Corollary 8. Let $2R\neq R$. For an involution $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, the following are equivalent:

1) A and I are conjugate in $GL_2(R)$;

2) A and I are conjugate in $ML_2(R)$;

3) $b\notin 2R$ or $c\notin 2R$.

Proposition 9. For any involutions C and D of the group $GL_2(R)$ such that $CD=-DC$, there is an inner automorphism of this group which sends the set $\{C,D\}$ to the set $\{J,I\}$.

AMS Mathematical Subject Classification: 15B33, 20H25

Financial support. The work of the second author was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (state assignment No. 1.13557.2019/13.1).

Violetta A. GAIDAK (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: gaidakvioletta@gmail.com

Egor A. TIMOSHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Sebeldin A.M. (1972) Isomorphism conditions for completely decomposable torsion-free Abelian groups with isomorphic rings of endomorphisms. *Math. Notes. Acad. Sci. USSR.* 11(4). pp. 248–250. DOI: 10.1007/BF01367498.

2. Vildanov V.K. (2011) Opredelyaemost' vpolne razlozhimoy abelevoy gruppy bez krucheniya ranga 2 svoey gruppoy avtomorfizmov [Determinability of a completely decomposable torsion-free rank 2 Abelian group by its automorphism group]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*. 3(1). pp. 174–177.
3. Vildanov V.K. (2014) Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group. *J. Math. Sci.* (*New York*). 197(5). pp. 590–594. DOI: 10.1007/s10958-014-1739-9.
4. Vildanov V.K. (2018) On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group. *J. Math. Sci.* (*New York*). 230(3). pp. 372–376. DOI: 10.1007/s10958-018-3742-z.
5. Cohn P.M. (1966) On the structure of the GL_2 of a ring. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 30. pp. 5–53. DOI: 10.1007/BF02684355.
6. Zonov M.N., Timoshenko E.A. (2019) O standartnoy forme matrits vtorogo poryadka [On the standard form for matrices of order two]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 59. pp. 5–10. DOI: 10.17223/19988621/59/1.

Received: June 16, 2019