УДК 539.3
DOI 10.17223/19988621/62/10

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик

ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНАХ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНОЙ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИД, ПОГРУЖЕННЫХ В УПРУГОЕ ТЕЛО

Рассматриваются особые точки, являющиеся вершинами треугольной и четырехугольной пирамид, погруженных в упругое тело. Изучены ограничения на компоненты напряжений в рассматриваемых точках. Показано, что количество этих ограничений обусловливает неклассическую постановку задачи механики деформируемого тела. Выявлены зависимости между материальными константами скрепляемых элементов, приводящие к неограниченному росту напряжений в вершинах пирамид. Результаты исследований найдут применение в механике композитных материалов, в изучении образцов путем индентирования или взаимодействия с призматическими иглами кантилеверов.

Ключевые слова: *внутренняя особая точка*, *неклассическая задача*, *концентрация напряжений*, *элементарный объем.*

Особые точки внутри сплошной среды в виде вершин многогранников, конусов, пространственных ребер присущи, в частности, армированным кристаллическим частицам, коротким волокнам материалов и составным элементам конструкций. Они возникают при внутренних разрушениях компонентов структуры композитов и однородных тел, характерны для исследуемых образцов при внедрении в них инденторов или призматических игл кантилеверов. Изучение особенностей распределения напряжений вблизи особых точек обычно проводится авторами на основе асимптотического подхода (далее классический подход). Применяются методы операционного исчисления [1], интегральных уравнений [2], граничных состояний [3], разложения по различным функциям [4, 5], конечных элементов [6], граничных элементов [7] и др. Напряженное состояние вблизи вершин многогранников, конусов, ребер составных конструкций с использованием классического подхода рассматривались в публикациях [8–17]. В работах [20–24] показано, что достоверность решений, получаемых на основе классического подхода, ограничена областью вне малой окрестности особой точки. Это обстоятельство обусловлено некорректностью задаваемых в особой точке условий. В настоящей работе изучение напряженного состояния в вершинах пирамид, погруженных в упругую среду, проводится на основе подхода, предложенного в работах [20–24]. Основной идеей такого подхода является распространение на особые точки общепринятого представления о том, что с каждой точкой континуума связан элементарный объем. Элементарный объем является носителем материальных свойств среды и параметров состояния (напряжения и деформации). Поэтому задаваемые в точке ограничения на параметры состояния являются ограничениями, накладываемыми на параметры состояния соответствующего ей элементарного объема. Применение данного подхода позволяет выявить задаваемые в особой точке условия и корректно поставить задачу МДТТ.

1. Правильная треугольная пирамида, погруженная в упругое тело

1.1. Постановка задачи

Рассматривается упругое деформируемое твердое тело 1 с особенностью в виде вершины правильной треугольной пирамиды, непрерывным образом контактирующее с другим упругим телом 2 (рис. 1). С пирамидой связывается декартова ортонормированная система координат $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Ось x_1 проходит из точки O центра тяжести треугольника BCD через вершину A, ось x_2 – из точки O через вершину C, а ось x_3 – из точки O параллельно стороне основания BD.

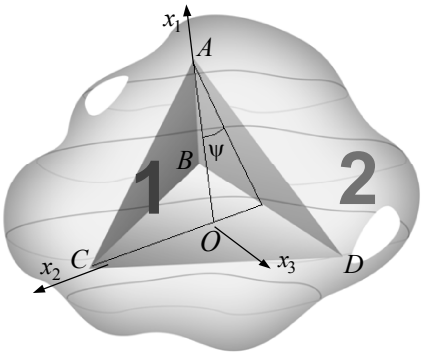

Рис. 1. Упругое тело 2 с погруженной в него вершиной A правильной треугольной пирамиды – тела 1
Fig. 1. Elastic body (2) with an embedded vertex A of the regular triangular pyramid (1)

Угол между высотой тетраэдра, опущенной из вершины A на основание, и высотой боковой грани, исходящей из точки A, обозначается ψ. Область изменения этого угла задана интервалом $0 < \psi < \pi/2$. На гранях тетраэдра вводятся ортонормированные тройки векторов

на грани ACD:

$$\mathbf{n} = \sin\psi\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\cos\psi\mathbf{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_3,$$

$$\xi_n = \cos\psi\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\sin\psi\mathbf{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_3, \quad \zeta_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_3;$$

на грани ABC:

$$\mathbf{m} = \sin\psi\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\cos\psi\mathbf{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_3,$$

$$\xi_m = \cos\psi\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\sin\psi\mathbf{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_3, \quad \zeta_m = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_3; \tag{1}$$

на грани ADB:

$$\mathbf{l} = \sin\psi\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\cos\psi\mathbf{e}_{22}, \quad \overline{\xi}_l = \cos\psi\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\sin\psi\mathbf{e}_2, \quad \zeta_l = \mathbf{e}_3.$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, пара других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, ис-

ходящей из вершины A образующего грань треугольника. Введем обозначения для параметров состояния элементарных объемов тел 1,2, содержащих вершину тетраэдра. $\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора деформаций; индекс k отвечает соответствующему из скрепляемых тел. В точках поверхностей соприкосновения напряжения и деформации в указанных элементарных объемах подчиняются следующим условиям непрерывности:

На грани ACD

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_{\xi_n}^{(1)} = \tau_{\xi_n}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_n}^{(1)} = \tau_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n\zeta_n}^{(2)}. \quad (2)$$

Обозначено: σ_n – нормальное напряжение на грани; τ_{ξ_n} – касательное напряжение в направлении орта ξ_n; τ_{ζ_n} – касательное напряжение в направлении орта ζ_n; η_{ξ_n} – относительное удлинение в направлении орта ξ_n; η_{ζ_n} – относительное удлинение в направлении орта ζ_n; $\eta_{\xi_n\zeta_n}$ – сдвиг между направлениями ξ_n и ζ_n.

На грани ABC (обозначения аналогичны):

$$\sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)}, \quad \tau_{\xi_m}^{(1)} = \tau_{\xi_m}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_m}^{(1)} = \tau_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m\zeta_m}^{(2)}. \quad (3)$$

На грани ADB:

$$\sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(2)}, \quad \tau_{\xi_l}^{(1)} = \tau_{\xi_l}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_l}^{(1)} = \tau_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l\zeta_l}^{(2)}. \quad (4)$$

Условия (2) – (4) являются условиями, задаваемыми в вершине A. Вводятся обозначения для разностей компонент напряжений и деформаций:

$$\zeta_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}, \quad \xi_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)}. \quad (5)$$

С использованием обозначений (5) равенства (2) – (4) запишутся двумя автономными однородными системами линейных уравнений:

$$\begin{gathered}
\zeta_{11}\sin^2\psi + \frac{1}{4}\zeta_{22}\cos^2\psi + \frac{3}{4}\zeta_{33}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\zeta_{12}\sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{13}\sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{23}\cos^2\psi = 0,\\
\zeta_{11}\sin 2\psi - \frac{1}{4}\zeta_{22}\sin 2\psi - \frac{3}{4}\zeta_{33}\sin 2\psi + \zeta_{12}\cos 2\psi + \sqrt{3}\zeta_{13}\cos 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{23}\sin 2\psi = 0,\\
\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{33}\cos\psi + \sqrt{3}\zeta_{12}\sin\psi - \zeta_{13}\sin\psi + \zeta_{23}\cos\psi = 0,\\
\zeta_{11}\sin^2\psi + \frac{1}{4}\zeta_{22}\cos^2\psi + \frac{3}{4}\zeta_{33}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\zeta_{12}\sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{13}\sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{23}\cos^2\psi = 0, \quad (6)\\
\zeta_{11}\sin 2\psi - \frac{1}{4}\zeta_{22}\sin 2\psi - \frac{3}{4}\zeta_{33}\sin 2\psi + \zeta_{12}\cos 2\psi - \sqrt{3}\zeta_{13}\cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{23}\sin 2\psi = 0,\\
-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{22}\cos\psi + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{33}\cos\psi - \sqrt{3}\zeta_{12}\sin\psi - \zeta_{13}\sin\psi + \zeta_{23}\cos\psi = 0,\\
\zeta_{11}\sin^2\psi + \zeta_{22}\cos^2\psi - \zeta_{12}\sin 2\psi = 0,\\
\frac{1}{2}\zeta_{11}\sin 2\psi - \frac{1}{2}\zeta_{22}\sin 2\psi - \zeta_{12}\cos 2\psi = 0,\\
\zeta_{13}\sin\psi - \zeta_{23}\cos\psi = 0.
\end{gathered}$$

$$\xi_{11}\cos^2\psi+\frac{1}{4}\xi_{22}\cos^2\psi+\frac{3}{4}\xi_{33}\cos^2\psi-\frac{1}{2}\xi_{12}\sin 2\psi-\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi+\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_{23}\sin^2\psi=0,$$

$$3\xi_{22}+\xi_{33}-\sqrt{3}\xi_{23}=0,$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_{22}\sin\psi+\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_{33}\sin\psi+\sqrt{3}\xi_{12}\cos\psi-\xi_{13}\cos\psi-\xi_{23}\sin\psi=0,$$

$$\xi_{11}\cos^2\psi+\frac{1}{4}\xi_{22}\sin^2\psi+\frac{3}{4}\xi_{33}\sin^2\psi-\frac{1}{2}\xi_{12}\sin 2\psi+\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi-\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_{23}\sin^2\psi=0, \qquad (7)$$

$$3\xi_{22}+\xi_{33}+\sqrt{3}\xi_{23}=0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_{22}\sin\psi-\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_{33}\sin\psi-\sqrt{3}\xi_{12}\cos\psi-\xi_{13}\cos\psi-\xi_{23}\sin\psi=0,$$

$$\xi_{11}\cos^2\psi+\xi_{22}\sin^2\psi+\xi_{12}\sin 2\psi=0,$$

$$\xi_{33}=0,$$

$$\xi_{13}\cos\psi+\xi_{23}\sin\psi=0.$$

Системы уравнений (6), (7) содержат по девять уравнений относительно шести параметров. Задача состоит в исследовании (в зависимости от геометрического параметра ψ) свойств систем уравнений (6), (7) – условий существования их решения и его построении. Решение систем уравнений (6) – (7) формирует ограничения на параметры состояния элементарных объемов тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды.

1.2. Исследование системы уравнений (6)

Посредством тождественных преобразований уравнения (6) приводятся к двум автономным системам уравнений. Первая из них состоит из пяти уравнений относительно четырех параметров $\zeta_{11}, \zeta_{22}, \zeta_{33}, \zeta_{12}$

$$\zeta_{11}\sin^2\psi+\frac{1}{4}\zeta_{22}\cos^2\psi+\frac{3}{4}\zeta_{33}\cos^2\psi+\frac{1}{2}\zeta_{12}\sin 2\psi=0,$$

$$\zeta_{11}\sin 2\psi-\frac{1}{4}\zeta_{22}\sin 2\psi-\frac{3}{4}\zeta_{33}\sin 2\psi+\zeta_{12}\cos 2\psi=0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{22}\cos\psi-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{33}\cos\psi+\sqrt{3}\zeta_{12}\sin\psi=0, \qquad (8)$$

$$\zeta_{11}\cos^2\psi+\zeta_{22}\cos^2\psi-\zeta_{12}\sin 2\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\sin 2\psi-\frac{1}{2}\zeta_{22}\sin 2\psi-\zeta_{12}\cos 2\psi=0.$$

Определитель матрицы первых четырех уравнений системы (8)

$$\Delta=-\frac{9\sqrt{3}}{2}\cos^3\psi\sin^2\psi$$

не обращается в нуль в области изменения угла ψ, следовательно, ранг матрицы

системы уравнений (8) равен четырем, поэтому она имеет единственное нулевое решение

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{33} = \zeta_{12} = 0. \tag{9}$$

Вторая система состоит из четырех уравнений относительно двух параметров ζ_{13}, ζ_{23}

$$\zeta_{13} \sin 2\psi + \zeta_{23} \cos 2\psi = 0, \quad -\zeta_{13} \sin \psi + \zeta_{23} \cos \psi = 0,$$

$$\zeta_{13} \cos 2\psi - \frac{1}{2}\zeta_{23} \sin 2\psi = 0, \quad \zeta_{13} \sin \psi - \zeta_{23} \cos \psi = 0. \tag{10}$$

Ранг матрицы системы уравнений (10) равен двум, поэтому она, как и система уравнений (8), имеет лишь нулевое решение

$$\zeta_{13} = \zeta_{23} = 0. \tag{11}$$

Из равенств (9) и (11) следует, что компоненты тензоров напряжений элементарных объемов 1,2 , содержащих вершину тетраэдра, одинаковы

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{12}$$

1.3. Исследование системы уравнений (7)

Уравнения (7) тождественными преобразованиями, так же как и уравнения (6), приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает четыре различных уравнения относительно параметров $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{12}$:

$$2\xi_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2}\xi_{22} \sin^2 \psi + \frac{3}{2}\xi_{33} \sin^2 \psi - \xi_{12} \sin 2\psi = 0,$$

$$3\xi_{22} + \xi_{33} = 0, \tag{13}$$

$$-\xi_{22} \sin \psi + \xi_{33} \sin \psi + \xi_{12} \cos \psi = 0,$$

$$\xi_{11} \cos^2 \psi + \xi_{22} \sin^2 \psi + \xi_{12} \sin 2\psi = 0.$$

Определитель матрицы системы уравнений (13)

$$\Delta = 30 \cos^3 \psi \sin^2 \psi$$

в области изменения угла ψ не обращается в нуль. Следовательно, ранг системы уравнений (13) равен четырем, а ее единственное решение запишется равенствами

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = \xi_{12} = 0. \tag{14}$$

Еще три различных уравнения образуют систему относительно параметров ξ_{13}, ξ_{23}:

$$-\xi_{13} \sin 2\psi + \xi_{23} \sin^2 \psi = 0,$$

$$\xi_{13} \cos \psi + \xi_{23} \sin \psi = 0, \tag{15}$$

$$\xi_{23} = 0.$$

Ранг системы первых двух уравнений (15) равен двум, ее единственное решение лишь нулевое:

$$\xi_{13} = \xi_{23} = 0. \tag{16}$$

Из равенств (14), (16) следует, что деформации в элементарных объемах тел 1, 2, примыкающих к вершине тетраэдра, одинаковы:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{17}$$

1.4. Ограничения на компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды

С использование физических уравнений термоупругости равенства (17) запишем через напряжения

$$\begin{gathered}
\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right)\sigma_{11}-\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22}-\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{33}=Q,\\
-\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11}+\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right)\sigma_{22}-\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{33}=Q,\\
-\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11}-\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22}+\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right)\sigma_{33}=Q;
\end{gathered} \tag{18}$$

$$\left(\frac{1}{G_1}-\frac{1}{G_2}\right)\sigma_{12}=0, \quad \left(\frac{1}{G_1}-\frac{1}{G_2}\right)\sigma_{13}=0, \quad \left(\frac{1}{G_1}-\frac{1}{G_2}\right)\sigma_{23}=0. \tag{19}$$

В этих равенствах $E_k, G_k, \nu_k, \omega_k$ $(i, j = 1, 2, k = 1, 2)$ – модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона, коэффициенты температурной деформации скрепляемых тел; $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}$ (так как $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$); $Q = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T$, ΔT – однородное приращение температуры.

Изучим решения систем уравнений (18), (19). Определитель матрицы системы уравнений (18) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left(\frac{1}{E_1 E_2}\right)^3 \left[E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2)\right]^2 \left[E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2)\right]. \tag{20}$$

В зависимости от сочетания материальных параметров возможны варианты.

1. $\Delta \neq 0$. Из этого условия следует, что $G_1 \neq G_2$, поэтому уравнения (18), (19) имеют единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{Q E_1 E_2}{E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2)}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \tag{21}$$

Напряженное состояние в вершине тетраэдра полностью определено. Оказываются известными все двенадцать компонент тензоров напряжений. Из решения (21) видно, что сочетание параметров, удовлетворяющее равенству

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) = 0 \tag{22}$$

является критическим, так как при стремлении сочетания параметров к выполнению равенства (22) напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ в элементарных объемах, содержащих вершину А, стремятся к бесконечности.

2. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) = 0, \; E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) \neq 0. \tag{23}$$

Ранг системы уравнений (18) равен двум. Ранг расширенной матрицы равен двум, если $Q = 0$, и трем, если $Q \neq 0$, поэтому реализуются варианты:

а) $Q = 0$. Напряжения σ_{ij} $(i = 1,2,3)$ подчинены ограничениям (так как в данном случае $G_1 \neq G_2$):

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \tag{24}$$

Общее количество ограничений на компоненты тензоров напряжений тел 1 и 2 в вершине пирамиды равно одиннадцати.

б) $Q \neq 0$. Уравнения (18) несовместны. Задача МДТТ не может быть поставлена корректно.

3. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) \neq 0\,,\ E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) = 0. \tag{25}$$

Ранг матрицы системы уравнений (18) равен рангу расширенной матрицы и равен единице. Уравнения совместны. Между напряжениями справедлива зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -\frac{QE_1E_2}{E_2\nu_1 - E_1\nu_2}.$$

В данном случае $G_1 = G_2$, поэтому каких либо дополнительных ограничений на компоненты σ_{ij} $(i \neq j)$ не накладывается. Общее количество ограничений на компоненты напряжений элементарных объемов тел 1, 2, примыкающих к вершине тетраэдра, равно семи.

4. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) = 0\,,\ E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) = 0. \tag{26}$$

В этом случае модули Юнга и коэффициенты Пуассона конусов совпадают. Ранг системы уравнений (18) равен нулю. Ранг расширенной матрицы зависит от значений коэффициентов температурной деформации. Если эти коэффициенты совпадают, скрепляемые материалы идентичны, особая точка отсутствует. Когда ранг расширенной матрицы равен единице, $Q \neq 0$, уравнения (18) несовместны. Корректная постановка задачи МДТТ становится невозможной.

2. Правильная четырехугольная пирамида, погруженная в упругое тело

2.1. Постановка задачи

Рассматриваются непрерывным образом скрепленные изотропные упругие тела 1, 2 (рис. 2), одно из которых имеет особенность в виде вершины правильной четырехугольной пирамиды. Применяется изложенный в п. 1 подход. Угол между высотой пирамиды и высотой боковой грани обозначается через ψ. С пирамидой связываем декартову ортонормированную систему координат O, x_1, x_2, x_3. Начало координат (т. O) совпадает с центром основания пирамиды, а оси x_1, x_2 направляются по его диагоналям. Базисные векторы введенной системы координат обозначаются $\mathbf{e}_i$ $(i = 1,2,3)$.

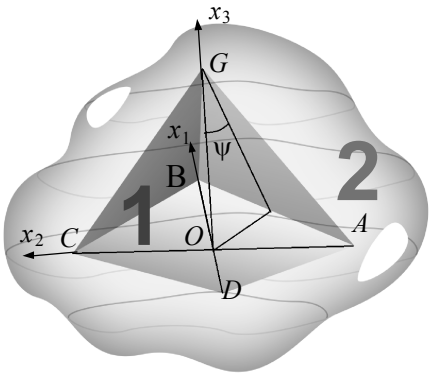

Рис. 2. Упругое тело 2 с погруженной в него вершиной *A* правильной четырехугольной пирамиды – тела 1
Fig. 2. Elastic body (2) with an embedded vertex *A* of the regular quadrangular pyramid (1)

На боковых гранях пирамиды вводятся левоориентированные ортонормированные тройки векторов:

на грани *BCG*:

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_2 + \sin\psi\mathbf{e}_3,$$

$$\boldsymbol{\xi}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_2 - \cos\psi\mathbf{e}_3, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2;$$

на грани *CDG*:

$$\mathbf{m} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_2 + \sin\psi\mathbf{e}_3,$$

$$\boldsymbol{\xi}_m = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_2 - \cos\psi\mathbf{e}_3, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2;$$

на грани *DAG*:

$$\mathbf{l} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_2 + \sin\psi\mathbf{e}_3,$$

$$\boldsymbol{\xi}_l = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_2 - \cos\psi\mathbf{e}_3, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_l = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2;$$

на грани ABG:

$$\mathbf{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\mathbf{e}_2 + \sin\psi\mathbf{e}_3,$$

$$\xi_k = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\mathbf{e}_2 - \cos\psi\mathbf{e}_3, \tag{30}$$

$$\zeta_k = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2.$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, два других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины G треугольника, образующего грань. Для элементарных объемов тел 1 и 2, примыкающих к вершине пирамиды, в точках поверхностей соприкосновения выполняются условия (сохраняются принятые ранее обозначения):

на грани BCG:

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_{\xi_n}^{(1)} = \tau_{\xi_n}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_n}^{(1)} = \tau_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n}^{(2)} \quad \eta_{\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n\zeta_n}^{(2)}; \tag{31}$$

на грани CDG:

$$\sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)}, \quad \tau_{\xi_m}^{(1)} = \tau_{\xi_m}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_m}^{(1)} = \tau_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m}^{(2)} \quad \eta_{\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m\zeta_m}^{(2)}; \tag{32}$$

на грани DAG:

$$\sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(2)}, \quad \tau_{\xi_l}^{(1)} = \tau_{\xi_l}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_l}^{(1)} = \tau_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l}^{(2)} \quad \eta_{\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l\zeta_l}^{(2)}; \tag{33}$$

на грани ABG:

$$\sigma_k^{(1)} = \sigma_k^{(2)}, \quad \tau_{\xi_k}^{(1)} = \tau_{\xi_k}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_k}^{(1)} = \tau_{\zeta_k}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k}^{(2)} \quad \eta_{\zeta_k}^{(1)} = \eta_{\zeta_k}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k\zeta_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k\zeta_k}^{(2)}. \tag{34}$$

Условия (31) – (34) с использованием обозначений (5) запишутся двумя автономными линейными однородными системами уравнений. Первая из них содержит двенадцать уравнений относительно шести параметров ζ_{ij}:

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos^2\psi + \zeta_{33}\sin^2\psi + \zeta_{12}\cos^2\psi + \sqrt{2}\zeta_{13}\sin\psi\cos\psi + \sqrt{2}\zeta_{23}\sin\psi\cos\psi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi - \zeta_{33}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{12}\cos 2\psi -$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\cos 2\psi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\cos\psi - \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\sin\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\sin\psi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos^2\psi + \zeta_{33}\cos^2\psi - \zeta_{12}\sin\psi\cos\psi -$$
$$- \sqrt{2}\zeta_{13}\sin\psi\cos\psi - \sqrt{2}\zeta_{23}\sin\psi\cos\psi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi - \zeta_{33}\sin\psi\cos\psi - \frac{1}{2}\zeta_{12}\sin\psi\cos\psi +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\cos 2\psi = 0,$$

$$-\frac{1}{4}\zeta_{11}\cos\psi+\frac{1}{2}\zeta_{22}\cos\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\sin\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\sin\psi=0, \qquad (35)$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\cos^2\psi+\frac{1}{2}\zeta_{22}\cos^2\psi+\zeta_{33}\sin^2\psi+\sigma_{12}\cos\psi-\sqrt{2}\zeta_{13}\cos\psi\sin\psi-\sqrt{2}\zeta_{23}\cos\psi\sin\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi+\frac{1}{2}\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi-\zeta_{33}\sin\psi\cos\psi+\zeta_{12}\sin\psi\cos\psi+$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\cos 2\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\cos 2\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\cos\psi-\frac{1}{2}\zeta_{22}\cos\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\sin\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\sin\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\cos^2\psi+\frac{1}{2}\zeta_{22}\cos^2\psi+\zeta_{33}\sin^2\psi-\zeta_{12}\cos\psi+\sqrt{2}\zeta_{13}\cos\psi\sin\psi-\sqrt{2}\zeta_{23}\cos\psi\sin\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi+\frac{1}{2}\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi-\zeta_{33}\sin\psi\cos\psi-\zeta_{12}\sin\psi\cos\psi-$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\cos 2\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\cos 2\psi=0,$$

$$-\frac{1}{2}\zeta_{11}\cos\psi+\frac{1}{2}\zeta_{22}\cos\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\sin\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\sin\psi=0.$$

Вторая система состоит из двенадцати уравнений относительно шести параметров ξ_{ij}:

$$\frac{1}{2}\xi_{11}\sin^2\psi+\frac{1}{2}\xi_{22}\sin^2\psi+\xi_{33}\cos^2\psi+\xi_{12}\sin^2\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\sin 2\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11}+\frac{1}{2}\xi_{22}-\xi_{12}=0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11}\sin\psi-\frac{1}{2}\xi_{22}\sin\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\cos\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\cos\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11}\sin^2\psi+\frac{1}{2}\xi_{22}\sin^2\psi+\xi_{33}\cos^2\psi-\xi_{12}\sin^2\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\sin 2\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11}+\frac{1}{2}\xi_{22}+\xi_{12}=0,$$

$$-\frac{1}{2}\xi_{11}\sin\psi+\frac{1}{2}\xi_{22}\sin\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\cos\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\cos\psi=0, \qquad (36)$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11}\sin^2\psi+\frac{1}{2}\xi_{22}\sin^2\psi+\xi_{33}\cos^2\psi+\xi_{12}\sin^2\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\sin 2\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11}+\frac{1}{2}\xi_{22}-\xi_{12}=0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11}\sin\psi-\frac{1}{2}\xi_{22}\sin\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\cos\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\cos\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11}\sin^2\psi+\frac{1}{2}\xi_{22}\sin^2\psi+\xi_{33}\cos^2\psi-\xi_{12}\sin^2\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\sin 2\psi=0,$$

$$\frac{1}{2}\xi_{11}+\frac{1}{2}\xi_{22}+\xi_{12}=0,$$

$$-\frac{1}{2}\xi_{11}\sin\psi+\frac{1}{2}\xi_{22}\sin\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\cos\psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\cos\psi=0.$$

Задача состоит в исследовании решений систем уравнений (35) и (36). Такие решения являются задаваемыми ограничениями на параметры состояния тел 1 и 2 в вершине пирамиды.

2.2. Исследование системы уравнений (35)

Посредством тождественных преобразований уравнения (35) приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает шесть уравнений относительно четырех компонент $\zeta_{11}, \zeta_{22}, \zeta_{33}, \zeta_{12}$:

$$\begin{gathered}
\zeta_{11}\cos^2\psi+\zeta_{22}\cos^2\psi+2\zeta_{33}\sin^2\psi+2\zeta_{12}\cos^2\psi=0,\\
\zeta_{11}\cos^2\psi+\zeta_{22}\cos^2\psi+2\zeta_{33}\sin^2\psi-2\zeta_{12}\cos^2\psi=0,\\
\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi+\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi-2\zeta_{33}\sin\psi\cos\psi+2\zeta_{12}\sin\psi\cos\psi=0,\\
\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi+\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi-2\zeta_{33}\sin\psi\cos\psi-2\zeta_{12}\sin\psi\cos\psi=0,\\
\zeta_{11}\cos\psi-\zeta_{22}\cos\psi=0,\\
-\zeta_{11}\cos\psi+\zeta_{22}\cos\psi=0.
\end{gathered}\tag{37}$$

Вторая система состоит из шести уравнений относительно двух компонент ζ_{13}, ζ_{23}:

$$\begin{gathered}
\sqrt{2}\,\zeta_{13}\sin 2\psi+\sqrt{2}\,\zeta_{23}\sin 2\psi=0,\\
-\sqrt{2}\,\zeta_{13}\sin 2\psi+\sqrt{2}\,\zeta_{23}\sin 2\psi=0,\\
-\sqrt{2}\,\zeta_{13}\cos 2\psi-\sqrt{2}\,\zeta_{23}\cos 2\psi=0,\\
\sqrt{2}\,\zeta_{13}\cos 2\psi-\sqrt{2}\,\zeta_{23}\cos 2\psi=0,\\
\sqrt{2}\zeta_{13}\sin\psi-\sqrt{2}\zeta_{23}\sin\psi=0,\\
\sqrt{2}\zeta_{13}\sin\psi+\sqrt{2}\zeta_{23}\sin\psi=0.
\end{gathered}\tag{38}$$

При изменении угла ψ в интервале $(0,\pi/2)$ ранг матрицы системы уравнений (37) равен четырем, а ранг матрицы системы уравнений (38) равен двум. Из этого следует, что единственное решение уравнений (37), (38) имеет вид

$$\zeta_{ij}=0,\quad (i,j=1,2,3).\tag{39}$$

Решение (39) означает, что компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1, 2, стягиваемых к вершине пирамиды, одинаковы

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{40}$$

2.3. Исследование системы уравнений (36)

Тождественными преобразованиями уравнения (36) приводятся к трем автономным системам

$$\xi_{11} + \xi_{22} + 2\xi_{12} = 0, \;\; \xi_{11} + \xi_{22} - 2\xi_{12} = 0, \;\; \xi_{11} - \xi_{22} = 0, \tag{41}$$

$$\xi_{13} + \xi_{23} = 0, \;\; \xi_{13} - \xi_{23} = 0, \tag{42}$$

$$\xi_{33} = 0. \tag{43}$$

Легко видеть, что уравнения (41) – (43) имеют лишь нулевое решение

$$\xi_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{44}$$

Равенства (44) говорят о том, что компоненты деформаций тел 1 и 2 в элементарных объемах, содержащих вершину пирамиды, совпадают

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{45}$$

2.4. Компоненты напряжений тел 1,2 в элементарных объемах, содержащих вершину пирамиды

Равенства (45) совпадают с равенствами (17), полученными в п. 1. для правильной треугольной пирамиды. Поэтому записанные через напряжения равенства (45) совпадут с уравнениями (18), (19). Анализ решений этих уравнений, приведенный в п. 1.4 для компонент тензора напряжений в вершине правильной треугольной пирамиды, остается справедливым и для компонент тензора напряжений правильной четырехугольной пирамиды. Отметим, что результаты исследований компонент тензора напряжений в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид, взаимодействующих с упругим телом, совпадают с исследованиями рассматриваемых параметров состояния в точках пространственного ребра и вершине конуса, непрерывно скрепленных с упругим телом [20, 22].

Заключение

Положение механики сплошных сред о том, что с каждой точкой континуума связан элементарный объем, являющийся носителем и материальных свойств и параметров состояния среды, считается справедливым и для особых точек деформируемых твердых тел. На основе данного утверждения изучены параметры состояния в вершинах треугольной и четырехугольной пирамид, погруженных в изотропное упругое тело. Показано, что количество задаваемых ограничений на компоненты напряжений в рассматриваемой точке превышает количество ограничений, соответствующее классической постановке задачи. В этом смысле задача о напряженном состоянии в вершине многогранника, погруженного в упругую среду, оказывается неклассической. Выявлено, что зависимость ограничений на компоненты напряжений в вершине рассматриваемых многогранников от упругих констант скрепляемых тел и температуры одинакова. Эта же зависимость характерна и для вершины кругового конуса, и точки пространственного ребра упругого элемента, погруженных в упругую среду. Результаты исследований могут найти применение в механике ар-

мированных материалов, а также в исследовании напряженного состояния образцов с использованием инденторов Берковича и Виккерса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. P. 526–528.
2. *Андреев А.В.* Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 1. С. 5–30.
3. *Рязанцева Е. А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Е.А.Рязанцева. Липецк, 2015. 215 с.
4. *Kovalenko*, *M.D.*, *Menshova*, *I.V.*, *Kerzhaev*, *A.P.* et al. Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip // Acta Mech. 2018. 229. 4339. DOI: 10.1007/s00707-018-2244-x.
5. *He Z.*, *Kotousov A.* On Evaluation of Stress Intensity Factor from In-Plane and Transverse Surface Displacements // Experim. Mech. 2016. V. 56. No. 8. P. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
6. *Xu W.*, *Tong Z.*, *Leung*, *A.Y.T.*, *Xu X.*, *Zhou Z.* Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending // Eng. Frac. Mech. 2016. V. 168. P. 11–25. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.09.009.
7. *Koguchi H.*, *Antonio da Costa J.* Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface // Int. J. Solids and Struc. 2010. V. 47. P. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015
8. *Nkemzi B.* On solution of Lame equations in axisymmetric domains with conical points // Math. Methods Appl. Sciences . 2005. V. 28. No. l. P. 29–41.
9. *Корепанова Т.О.*, *Матвеенко В.П.*, *Шардаков И.Н.* Аналитические построения собственных решений для изотропных конических тел и их приложения для оценки сингулярности напряжений // Докл. АН. 2014. Т. 457. № 3. С. 286–291. DOI: 10.7868/s0869565214210105.
10. *Koguchi H.*, *Muramoto T.* The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints // Int. J. Solids and Structures. 2000. V. 37(35). P. 4737–4762. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00159-6.
11. *Mittelstedt C.*, *Becker W.* Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method // Int. J. Solids and Structures. 2006. V. 43. No. 10. P. 2868–2903. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059.
12. *Lee Y.*, *Jeon I.*, *Im S.* The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite // Int. J. Solids and Struc. 2006. V. 43(9). P. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
13. *Zhixue W.* A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity // Engineering Fracture Mechanics. 2005. V. 73(7). P. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.10.010.
14. *Koguchi H.*, *da Costa J. A.* Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface // Int. J. Solids and Struc. 2010. V. 47. P. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
15. *Kovalenko M.D.*, *Menshova I.V.*, *Kerzhaev A.P.* On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // A.P.Z. Angew. Math. Phys. 2018. No. 69. P. 121–138. DOI: 10.1007/s00033-018-1013-y.
16. *Apel T.*, *Mehrmann V.*, *Watkins D.* Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2002. No. 191. P. 4459–4473.
17. *Wu Z.* A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity // Eng. Fract. Mech. 2006. V. 73. No 7. P. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.10.010

18. *Miyazaki T.*, *Inoue T.*, *Noda N.A.* Practical method for analyzing singular index and intensity of singular stress field for three dimensional bonded plate (Conference Paper) // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. V. 372(1). P. 0120022018.
19. *Ping X.*, *Chen M.*, *Zhu W.*, *Xiao Y.*, *Wu W.* Computations of Singular Stresses Along Three-Dimensional Corner Fronts by a Super Singular Element Method // Int. J. Comp. Methods. 2017. V. 14(6). P. 1750065
20. *Пестренин В.М.*, *Пестренина И.В.*, *Ландик Л.В.* Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/52/9.
21. *Pestrenin V. M.*, *Pestrenina I. V.*, *Landik L.V.* Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs// Mechanics of Composite Materials. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
22. *Pestrenin V.M.*, *Pestrenina I.V.* Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // Mechanics of Composite Materials. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI: 10.1007/s11029-017-9644-1.
23. *Pestrenin V. M.*, *Pestrenina I. V.*, *Landik L.V. Stress* state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // Latin American Journal of Solids and Structures. 2017. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
24. *Pestrenin V.M.*, *Pestrenina I.V.*, *Landik L.V.* Restrictions on the stress components in the edge points of the homogeneous elastic body // Engineering Solid Mechanics. 2019. V. 7. No. 3. P. 229–246. DOI: 10.5267/j.esm.2019.5.001.

Статья поступила 04.05.2019 г.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2019) RESTRICTIONS ON STRESS COMPONENTS IN THE VERTICES OF REGULAR TRIANGULAR AND QUADRANGULAR PYRAMIDS EMBEDDED IN ELASTIC BODY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 119–134

DOI 10.17223/19988621/62/10

Keywords: internal singular point, non-classical problem, stress concentration, elementary volume.

In the framework of continuous model of deformable bodies, each point of the continuum is associated with an elementary volume. The concepts of continuum mechanics regarding material properties and state parameters (stresses, strains) are applicable to this volume. In the paper, this statement extends to singular points which are the vertices of triangular and quadrangular pyramids embedded in an elastic body. The restrictions on the stress components at the considered points are studied. It is shown that the number of restrictions determines a non-classical formulation of the problem of mechanics of a deformable body. The dependences for material constants of the bonded elements, which lead to an unlimited increase in the stresses in the vertices of triangular and quadrangular pyramids immersed in an elastic medium, are found to be the same. Moreover, these dependences coincide with those known for a circular cone and a spatial edge. The investigation results will find application in the mechanics of composite materials when studying the samples by indentation or interaction with prismatic cantilevers.

Valeriy M. PESTRENIN (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

Irena V. PESTRENINA (Candidate of Technical Sciences, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

Lidiya V. LANDIK (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

REFERENCES

1. Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension. *Journal of Applied Mechanics*. 19. pp. 526–528.
2. Andreev A.V. (2014) Superpozitsiya stepenno-logarifmicheskikh i stepennykh singulyarnykh resheniy v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Superposition of power-logarithmic and power singular solutions in two-dimensional elasticity problems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 5–30.
3. Ryazantseva E.A. (2015) *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti s singulyarnostyami fizicheskogo i geometricheskogo kharaktera* [Method of boundary conditionsin the problems of elasticity theory with physical and geometrical singularities]. Dissertation. Lipetsk.
4. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. (2018) Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip. *Acta Mechanica.* 229(11). pp. 4339–4356. DOI: 10.1007/s00707-018-2244-x.
5. He Z., Kotousov A. (2016) On evaluation of stress intensity factor from in-plane and transverse surface displacements. *Experimental Mechanics*. 56(8). pp. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
6. Xu W., Tong Zh., Leung A.Y.T., Xu X., Zhou Zh. (2016) Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending. *Engineering Fracture Mechanics*. 168(A). pp. 11– 25. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.09.009.
7. Koguchi H., da Costa J.A. (2010) Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface. *International Journal of Solids and Structures*. 47(22-23). pp. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
8. Nkemzi B. (2005) On solution of Lame equations in axisymmetric domains with conical points. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 28(1). pp. 29–41. DOI: 10.1002/mma.547.
9. Korepanova T.O., Matveenko V.P., Shardakov I.N. (2014) Analiticheskie postroeniya sobstvennykh resheniy dlya izotropnykh konicheskikh tel i ikh prilozheniya dlya otsenki singulyarnosti napryazheniy [Analytical constructions of eigensolutions for isotropic conical bodies and their applications for estimating stress singularity]. *Doklady Akademii nauk*. 457(3). pp. 286–291. DOI: 10.7868/s0869565214210105.
10. Koguchi H., Muramoto T. (2000) The order of stress singularity near the vertex in threedimensional joints. *International Journal of Solids and Structures*. 37(35). pp. 4737–4762. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00159-6.
11. Mittelstedt C., Becker W. (2006) Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method. *International Journal of Solids and Structures*. 43(10). pp. 2868–2903. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059.
12. Lee Y., Jeon I., Im S. (2006) The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite. *International Journal of Solids and Structures*. 43(9). pp. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
13. Zhixue W.A (2005) A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity. *Engineering Fracture Mechanics*. 73(7). pp. 953–962. DOI:10.1016/j.engfracmech.2005.10.010.
14. Koguchi H., da Costa J.A. (2010) Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3Dbonded structures having a slanted side surface. *International Journal of Solids and Structures*. 47(22-23). pp. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
15. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. (2018) On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 69. pp. 121–138. DOI: 10.1007/s00033-018-1013-y.
16. Apel T., Mehrmann V., Watkins D. (2002) Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures. *Computer Methods in*

Applied Mechanics and Engineering. 191(39-40). pp. 4459–4473. DOI: 10.1016/S0045-7825(02)00390-0.
17. Wu Zh. (2006) A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity. *Engineering Fracture Mechanics*. 73(7). pp. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.10.010.
18. Miyazaki T., Inoue T., Noda N.A. (2018) Practical method for analyzing singular index and intensity of singular stress field for three dimensional bonded plate. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 372(012002). pp. 1–8. DOI: 10.1088/1757-899X/372/1/012002.
19. Ping X., Chen M., Zhu W., Xiao Y., Wu W. (2017) Computations of singular stresses along three-dimensional corner fronts by a super singular element method. *International Journal of Computational Methods.* 14(6). 1750065. DOI: 10.1142/S0219876217500657.
20. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Ogranicheniya na parametry napryazhennogo sostoyaniya v vershine krugovogo konusa [Restrictions on stress components in the top of round cone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of mathematics and mechanics*. 52. pp. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/52/9.
21. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
22. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
23. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
24. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2019) Restrictions on the stress components in the edge points of the homogeneous elastic body. *Engineering Solid Mechanics*. 7(3). pp. 229–246. DOI: 10.5267/j.esm.2019.5.001.

Received: May 4, 2019