

УДК 530.145.85, 517.986.66

DOI: 10.17223/00213411/62/12/12

Д.А. ИВАНОВ, А.И. БРЕЕВ

## НЕКОММУТАТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ, ДОПУСКАЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОИЗВОЛ\*

Предлагается обобщение некоммутативной редукции релятивистских волновых уравнений во внешних электромагнитных полях, допускающих функциональный произвол. Построены электромагнитные поля с функциональным произволом, допускающие некоммутативное интегрирование волнового релятивистского уравнения Клейна – Гордона по алгебрам симметрии, содержащим оператор  $P_0+P_3$ .

**Ключевые слова:** метод некоммутативного интегрирования, релятивистские волновые уравнения, теория представлений, операторы симметрии.

### Введение

Точные решения релятивистских волновых уравнений необходимы для расчета квантовых эффектов. Примерами таких эффектов является рождение частиц в квантовой теории поля в сильных электромагнитных и гравитационных полях. В квантовой электродинамике в сильных электромагнитных полях взаимодействие зарядов с сильным электромагнитным полем приводит к эффекту рождения пар частица – античастица [1]. Поскольку такое взаимодействие необходимо учитывать непертурбативно, возникает необходимость использования точных решений уравнения Дирака в соответствующем электромагнитном поле [2]. Аналогичная картина возникает при рассмотрении взаимодействия частиц с сильными гравитационными полями [3].

Основным методом построения точных решений релятивистских волновых уравнений во внешних электромагнитных полях является метод разделения переменных (РП) [4–6]. Данный метод требует наличия полного набора операторов симметрии уравнения.

Альтернативным методом построения точных решений релятивистских волновых уравнений является метод некоммутативного интегрирования (НИ). В отличие от метода РП метод НИ использует неабелеву алгебру линейных дифференциальных операторов симметрии первого порядка [7–11]. Впервые данный метод был предложен в работе [12] и для классических гамильтоновых систем он эквивалентен методу, предложенному А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко в работе [13].

Одно из различий методов РП и НИ заключается в том, что метод РП допускает функциональный произвол в выборе потенциалов волновых уравнений, в то время как метод НИ, как казалось ранее, такого произвола не предоставляет. Однако в работе [14] было замечено, что произвол в определении потенциалов волновых уравнений существует. Тем не менее дальнейших исследований по этой тематике не проводилось.

В данной работе предложен метод обобщенного НИ (или обобщенной некоммутативной редукции). Этот метод позволяет определить функциональный произвол электромагнитного потенциала, допускающего некоммутативную редукцию по алгебре симметрии уравнения, которая вообще говоря, нарушается при включении электромагнитного поля. На основе предложенного метода в работе строятся электромагнитные потенциалы, обладающие функциональным произволом и допускающие некоммутативную редукцию уравнения Клейна – Гордона. Рассматриваются подгруппы группы Пуанкаре, допускающие просто-транзитивное действие на пространстве-времени Минковского.

### 1. Обобщенная некоммутативная редукция

Пусть  $G$  –  $n$ -мерная вещественная связная группа Ли,  $L$  – её алгебра Ли;  $L^*$  – дуальное пространство алгебры  $L$  (коалгебра). Введем локальные координаты в окрестности единицы

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-02-00149), а также в рамках Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного университета среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Уважаемые читатели!

Доступ к полнотекстовой версии журнала  
**«Известия высших учебных заведений. Физика»**  
осуществляется на платформе  
Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU  
на платной основе:

<https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=7725>