ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Математика и механика № 63

УДК 512.541 MSC: 20K15, 20K21
DOI 10.17223/19988621/63/3

Нгуен Тхи Куинь Чанг

АБЕЛЕВЫ SACR-ГРУППЫ

Абелевы группы, на которых любое кольцо является ассоциативным и коммутативным, называются SACR-группами. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если любой его метаидеал конечного индекса является идеалом. Абелева группа G называется TI-группой, если любое ассоциативное кольцо на G является филиальным. Получено описание однородных вполне разложимых факторно делимых абелевых SACR-групп, а также показано, что любая неразложимая абелева группа без кручения ранга 2 является SACR-группой. В частности, получено описание TI-групп в классе неразложимых абелевых групп без кручения ранга 2.

Ключевые слова: *абелева группа*, *кольцо на группе*, *SACR-группы*, *TI-группы.*

Одним из направлений теории аддитивных групп колец является изучение абелевых групп, на которых любое кольцо принадлежит определённому классу. Для определения кольцевой структуры на абелевой группе G необходимо указать гомоморфизм $\mu : G \otimes G \to G,$ который называется умножением на группе $G.$ Умножение задает структуру кольца на группе $G.$ Изучению аддитивных групп колец посвящен целый раздел в знаковой монографии Л. Фукса [1], наиболее полный обзор содержится в двухтомной монографии С. Фейгельстока [2].

Проблема изучения взаимосвязи между строением абелевой группы и свойствами колец на ней весьма многогранна. В [3] изучаются абелевы группы, на которых любое кольцо коммутативно, такие группы называются CR-группами. В связи с этим в [3] введено понятие SACR-группы (от «Strongly Associative and Commutative Ring»), SACR-группа – это абелева группа, на которой любое кольцо является ассоциативным и коммутативным. В той же работе, показано, что в классе всех периодических абелевых групп понятия CR-группы и SACR-группы эквивалентны. До настоящего времени CR-группы и SACR-группы были описаны в классах абелевых групп: периодических групп [3], вполне разложимых групп без кручения [4], алгебраически компактных групп [5]. Далее, в настоящей работе мы рассматриваем аддитивные группы филиальных колец. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если любой его метаидеал конечного индекса является идеалом. Согласно [6], подкольцо A ассоциативного кольца R называется метаидеалом индекса n, если существует такой ряд $A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = R,$ что A_i является идеалом A_{i+1} для всех $i = 0,\ldots,n-1.$ Нетрудно видеть, что ассоциативное кольцо является филиальным тогда и только тогда, когда в нем отношение «быть идеалами» транзитивно [7]. Филиальные кольца систематически изучались многими авторами, наиболее значительные результаты содержатся в [7–9]. В [10] Р. Андрушкевич и М. Воронович ввели понятие TI-группы, т.е. такой абелевой группы G, что любое ассоциативное кольцо с аддитивной группой G филиально. Проблема изучения TI-групп сформулирована в [10], там же получено описание периодических TI-групп. Кроме того, что TI-группы были описаны в классах абелевых групп: алгебраически компактных групп [5], почти вполне разложимых групп [11].

Настоящая работа посвящена изучению аддитивных групп ассоциативных и коммутативных колец. В разделе 1, получено описание однородных вполне разложимых факторно делимых SACR-групп (теорема 7). Доказательство этой теоремы опирается на теорему о том, что любая факторно делимая группа ранга 1 является SACR-группой. Далее, в разделе 2 показано, что любая неразложимая группа без кручения ранга 2 является SACR-группой. Кроме того, доказано, что понятие TI-группы и nil-группы в классе неразложимых групп без кручения ранга 2 эквивалентны. До настоящего времени все найденные TI- группы без кручения являются SACR-группами. Однако обратное утверждение неверно, пример приведен в разделе 2.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа». Будем использовать следующие обозначения и определения. Умножение $\mu : G \otimes G \to G$ на группе G часто обозначается также знаком $\times$ и т.п., т. е. $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ определяет кольцо на группе G, которое обозначается $(G,\times)$. Кольцо $(G,\times)$ называется нуль-кольцом, если $g_1 \times g_2 = 0$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Группа G называется nil-группой, если любое кольцо на G является нуль-кольцом. Как обычно, $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathrm{P}$ — множества натуральных, целых неотрицательных, всех простых чисел соответственно, $\mathbb{Z}$ — группа (кольцо) всех целых чисел, $\mathbb{Q}$ – группа (поле) всех рациональных чисел, $\mathbb{Z}(n)$ – циклическая группа порядка n, $\mathbb{Z}_n$ — кольцо $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Через $\hat{\mathbb{Z}}_p$, $\mathbb{Q}_p^*$ обозначим аддитивную группу и кольцо целых p-адических чисел соответственно. Пусть G — группа, $g \in G$ и $(G,\times)$ — кольцо на G, через $(g)_\times$ обозначим идеал кольца $(G,\times)$, порожденный элементом g, $\langle g \rangle_*$ — сервантная подгруппа, порожденная элементом g, $\chi(g)$ — характеристика элемента g, $o(g)$ — порядок элемента g. Под $T(G)$ понимается частично упорядоченное множество типов $t(g)$ для $g \in G \setminus \{0\}$, $r(G)$ — ранг группы G. Элемент прямого произведения $G = \prod_{i \in I} G_i$ групп G_i $(i \in I)$ будем записывать в виде $(g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$ для всех $i \in I$. За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [1].

1. Однородные факторно делимые SACR-группы

В этом разделе описаны однородные вполне разложимые факторно делимые SACR-группы. Понятие факторно делимой группы было введено Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в [12] для описания групп, допускающих кольцевую структуру, которая вкладывается в полупростую сепарабельную алгебру. В совместной работе А.А. Фомина и У. Уиклесса [13], это понятие распространено на случай смешанных групп, в той же работе показано, что смешанные факторно делимые группы двойственны группам без кручения конечного ранга.

Определение 1 [13]. Группа G называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую, что G/F — делимая периодическая группа.

Базисом и рангом факторно делимой группы G будем называть всякий базис и ранг свободной группы F.

Несмотря на то, что факторно делимые группы широко изучаются в алгебраической литературе (см. [13–17]), многие свойства колец на таких группах до сих пор не исследованы. В настоящее время класс факторно делимых групп — один из самых исследуемых в теории абелевых групп. В [16] получено описание факторно делимых групп ранга 1 с помощью кохарактеристик. Известно, что умножение на произвольной группе продолжается однозначно до умножения на её сервантно-инъективной и копериодических оболочках, в связи с этим при изучении колец на факторно делимых группах возникает необходимость исследования кольцевых структур на алгебраически компактных группах. Описание всех умножений на редуцированной алгебраически компактной группе получено в [18].

Предложение 2 [5]. Редуцированная алгебраически компактная группа A является SACR-группой тогда и только тогда, когда $A=\prod\limits_{p\in P_0} A_p$, где $P_0\subseteq P$, $A_p=\hat{\mathbb{Z}}_p$ или $A_p=\mathbb{Z}(p^k)$ ($k\in\mathbb{N}$) при любом $p\in P_0$.

Лемма 3. *Пусть G — редуцированная факторно делимая группа ранга 1, являющаяся подгруппой группы $A=\prod\limits_{p\in P_0} A_p$, где $P_0\subseteq P$, $A_p=\hat{\mathbb{Z}}_p$ или $A_p=\mathbb{Z}(p^k)$ ($k\in\mathbb{N}$) при любом $p\in P_0$. Тогда любое умножение на G может быть продолжено до умножения на группе A.*

Доказательство. Покажем, что фактор-группа A/G — делима, то есть она является p-делимой группой для любого простого числа p. Фиксируем простое число p. Тогда $A=A_p\oplus A'$, где $A'=\prod\limits_{q\neq p} A_q$, q — простое число. Группа A может быть представлена в виде $A=\prod\limits_p \mathbb{Q}_p^* e_p$, где $o(e_p)=\infty$ или $o(e_p)=p^k$ $(k\in\mathbb{N})$. Согласно [18], на группе A существует такое умножение $\cdot$, что $e_p\cdot e_p=e_p$ и $e_p\cdot e_q=0$ при любом простом $q\neq p.$ Ясно, что кольцо $(A,\cdot)$ ассоциативно и коммутативно по предложению 2 и $e=(e_p)_p$ – единица этого кольца. Пусть $g\in A.$ Запишем элементы e и g в виде $e=e_p+e'$, $g=g_p+g'$, где $e_p, g_p\in A_p$ и $e', g'\in A'$. Тогда найдутся целые числа s_i, $0<s_i<p-1$ $(i=0,1,2,\ldots)$ и $x\in\mathbb{Q}_p^*$ такие, что $g_p=(s_0+s_1p+\ldots+s_{k-1}p^{k-1}+p^kx)e_p$ $(k\in\mathbb{N})$. Положим $m=s_0+s_1p+\ldots+s_{k-1}p^{k-1}$. Тогда получаем, что $g_p=(m+p^kx)e_p$, где $m,k\in\mathbb{N}.$ Так как G — редуцированная факторно делимая группа ранга 1, то группа G изоморфна аддитивной группе кольца $R^\chi=\langle e\rangle_*$ [16, теорема 4], откуда, $me\in G.$ Тогда имеем

$$g+G=g-me+G=(g_p+g')-m(e_p+e')+G=(g_p-me_p)+(g'-me')+G.$$

Так как $g'-me' \in A'$ и A' является p-делимой группой, то $g'-me'$ делится на любой степень простого числа p. Кроме того, $g_p - me_p = p^k x$, то есть $g_p - me_p$ делится на p^k для произвольного натурального числа k. Следовательно, A/G — p-делима для всех $p \in P$ и, значит, A/G — делима. Следовательно, A является сервантно-инъективной оболочкой группы G по лемме 48.1 в [1]. В силу теоремы 119.3 в [1] получаем, что любое умножение на группе G продолжается до умножения на A.

Теорема 4. *Пусть G — факторно делимая группа ранга 1. Тогда G является SACR-группой.*

Доказательство. Пусть G — факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики $\chi = (m_p)$. Тогда определим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} A_p$, где $\mathbb{Z}_{p^{m_p}}$, если $m_p < \infty$, и $A_p = \mathbb{Q}_p^*$, если $m_p = \infty$. Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. χ принадлежит нулевому типу и соответствует целому неотрицательному числу m. В силу теоремы 4 в [16] группу G можно представить в виде $G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}(m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. Так как $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}(m)$ — вполне характеристические подгруппы группы G, то разложение группы G также является и разложением в кольцевом смысле. Нетрудно убедиться, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}(m)$ являются SACR-группами, тогда любое кольцо на группе G ассоциативно и коммутативно.

Случай 2. χ принадлежит ненулевому типу. В этом случае, группа G изоморфна аддитивной группе кольца R^χ, где $R^\chi = \langle e \rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$, e — единица кольца $\mathbb{Z}_\chi$ [16, теорема 4]. В силу предложения 2 аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}_\chi$ — SACR-группа. Откуда любое кольцо на G ассоциативно и коммутативно по лемме 4. Таким образом, G является SACR-группой.

Теперь перейдем к описанию однородных вполне разложимых факторно делимых SACR-групп.

Замечание 5. Всякое ненулевое прямое слагаемое SACR-группы является SACR-группой. Однако прямая сумма и прямое произведение SACR-групп не обязаны быть SACR-группами.

Определение 6 [17]. Факторно делимая группа G называется вполне разложимой, если она раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1. Если все эти факторно делимые группы ранга 1 изоморфны между собой, то есть определяются одной и той же кохарактеристикой χ, то группа G называется однородной вполне разложимой факторно делимой группой кохарактеристики χ. Таким образом, однородная вполне разложимая факторно делимая группа $G = \bigoplus_n R^\chi$ полностью определяется своим рангом n и кохарактеристикой χ.

Теорема 7. *Пусть G — однородная вполне разложимая факторно делимая группа кохарактеристики $\chi = (m_p)$. Группа G является SACR-группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$.*

Доказательство. Пусть $G = \bigoplus_n G_i$, где $G_i \cong \langle R^{\chi}, + \rangle$ и G — SACR-группа. Если $r(G) = 1$, то по теореме 4 G является SACR-группой. Допустим, $r(G) > 1$. Без потери общности можно считать, что $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G'$, где G_1, G_2 — факторно делимые группы ранга 1, G' — однородная вполне разложимая факторно делимая группа кохарактеристики χ. Рассмотрим два следующих случая.

С л у ч а й 1. Если в χ есть m_p, такое, что $0 < m_p < \infty$, то группы G_1 и G_2 можно записать в виде $G_1 = \mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus G_1'$, $G_2 = \mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus G_2'$. Откуда $\mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus \mathbb{Z}(p^{m_p})$ служит прямым слагаемым для группы G. В силу теоремы 5 в [3], существует некоммутативное кольцо на $\mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus \mathbb{Z}(p^{m_p})$. Следовательно, $\mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus \mathbb{Z}(p^{m_p})$, и G не являются SACR-группами.

С л у ч а й 2. Если в χ нет конечных ненулевых чисел m_p, то в χ содержат только 0 и символ ∞. Тогда G_i — группа без кручения ранга 1 идемпотентного типа по предложению 5.15 в [15]. Отсюда $G = \bigoplus_n G_i$ — однородная вполне разложимая группа идемпотентного типа. Согласно теореме 8 в [3], существует некоммутативное кольцо на G и, значит, G не является SACR-группой.

Во всех случаях получилось противоречие, следовательно, $r(G) = 1$.

2. Неразложимые SACR-группы, TI-группы без кручения 2

Напомним, что в классе вполне разложимых групп без кручения описаны SACR-группы [3] и TI-группы [11]. В свою очередь, SACR-группы и TI-группы изучаются в классе неразложимых групп без кручения ранга 2. Кольцам на неразложимых группах без кручения ранга 2 посвящены многие работы (см. [19–23]).

Теорема 8 [19]. *Пусть G — неразложимая группа без кручения ранга 2. Если G допускает ненулевую кольцевую структуру, то $T(G)$ содержит единственный минимальный тип и не более 3 типов.*

Замечание 9. Согласно доказательству теоремы 8, неразложимая группа без кручения ранга 2 G не является nil-группой тогда и только тогда, когда выполняется один из следующих случаев:

1) $|T(G)| = 1$, причем этот тип обязан быть идемпотентным;

2) $|T(G)| = 2$, причем один из них минимален, а другой максимален;

3) $|T(G)| = 3$, причем один из этих типов минимален, а два других максимальны; в этом случае один из максимальных типов обязан быть идемпотентным.

Для изучения взаимосвязи между nil- и TI-группами введём следующее определение. Будем говорить, что $T(G)$ удовлетворяет (nil)-условию, если ни одно из предыдущих условий не выполняется.

Теорема 10. *Пусть G — однородная неразложимая группа без кручения ранга 2. Тогда G является SACR-группой. Более того, G является TI-группой тогда и только тогда, когда G имеет неидемпотентный тип.*

Доказательство. Утверждение о том, что G является SACR-группой следует из теоремы 4.5 в [23]. Теперь докажем второе утверждение.

Пусть G — однородная неразложимая группа без кручения ранга 2 неидемпотенного типа. В силу замечания 9, G — nil-группа, откуда G является TI-группой.

Обратно, пусть G — TI-группа. Допустим, что G имеет идемпотентный тип. Согласно теореме 1 в [8], кольцо $(G,\times)$ — филиально тогда и только тогда, когда

$$(g)_\times = (g)_\times^2 + \mathbb{Z}g$$

для любого $g \in G.$ Пусть $\{x, y\}$ – множество независимых элементов в группе $G.$ Определим кольцо $(G,\times)$ на $G,$ положив

$$x \times x = mx, \quad x \times y = y \times x = my, \quad y \times y = 0,$$

где m — положительное целое число. В кольце $(G,\times)$ рассмотрим множество

$$I = (y)_\times = mRy + \mathbb{Z}y,$$

где R — такая подгруппа группы $\mathbb{Q},$ что $x \times x = mx, x \times y = y \times x = my, y \times y = mry$ является кольцом на $G.$ С другой стороны,

$$J = (y)_\times^2 + \mathbb{Z}y = 0 + \mathbb{Z}y = \mathbb{Z}y.$$

Ясно, что $R \neq \mathbb{Z},$ отсюда $I \neq J$ и, значит, $(G,\times)$ не филиально, получается противоречие. Следовательно, G — группа неидемпотентного типа.

Лемма 11. Пусть G — неразложимая группа без кручения ранга 2, $T(G) = \{t_1, t_2 \mid t_1 < t_2\}.$ Тогда G является SACR-группой, но не является TI-группой.

Доказательство. Пусть $x, y \in G$, такие, что $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2.$ В силу леммы 3 в [21], любое кольцо $(G,\times)$ на G определяется следующим образом:

$$x \times x = ay, \quad x \times y = y \times x = y \times y = 0,$$

для некоторого $a \in \mathbb{Q}.$ Нетрудно проверить, что $(G,\times)$ ассоциативно и коммутативно. Следовательно, G является SACR-группой. Теперь определим кольцо $(G,\times)$ на $G,$ положив

$$x \times x = y, \quad x \times y = y \times x = y \times y = 0.$$

Аналогично доказательству теоремы 10 получаем, что кольцо $(G,\times)$ не филиально. Таким образом, G не является TI-группой.

Пример. Пусть $G = \left\langle \frac{1}{p}x, \frac{1}{p^2}x + \frac{1}{p^5}y \right\rangle$ для всех $p \in P.$ Тогда $T(G) = \{t_1, t_2 \mid t_1 < t_2\},$ где $t_1 = (1,1,...)$ и $t_2 = (4,4,...).$ Определим кольцо $(G,\times)$ на $G,$ положив $x \times x = y,$ $x \times y = y \times x = y \times y = 0.$ Имеем: $(x)_\times = \frac{1}{p}\mathbb{Z}y + \frac{1}{p^2}\mathbb{Z}y + \mathbb{Z}x,$ и $(x)_\times^2 + \mathbb{Z}x = \mathbb{Z}y + \mathbb{Z}x.$ Следовательно, $(x)_\times \neq (x)_\times^2 + \mathbb{Z}x,$ откуда $(G,\times)$ не филиально. Значит, G не является TI-группой.

Лемма 12. Пусть G — неразложимая группа без кручения ранга 2, $T(G)=\{t_0,t_1,t_2\}$, где $t_0<t_1$, $t_0<t_2$ и хотя бы один из $\{t_1,t_2\}$ идемпотентный. Тогда G является SACR-группой, но не является TI-группой.

Доказательство. Пусть $x,y\in G$, такие, что $t(x)=t_1$ и $t(y)=t_2$. В силу теоремы 2 в [22], любое кольцо $(G,\times)$ на G определяется следующим образом:

$$x\times x=ax,\quad x\times y=y\times x=0,\quad y\times y=by,$$

для некоторых $a,b\in\mathbb{Q}$. Нетрудно проверить, что $(G,\times)$ ассоциативно и коммутативно. Следовательно, G является SACR-группой. Без потери общности можно считать, что t_1 — идемпотентный тип. Тогда определим кольцо $(G,\times)$ на G, положив

$$x\times x=x,\ x\times y=y\times x=y\times y=0.$$

Пусть $p\in P$, такое, что p не делит x в группе G. Положим $g=px+y\in G$. Тогда имеем:

$$I=(g)_\times=pRx+\mathbb{Z}g,$$

$$J=(g)_\times^2+\mathbb{Z}g=p^2R^2x+p^2Rx+p^2\mathbb{Z}x+\mathbb{Z}g,$$

для некоторой подгруппы R группы $\mathbb{Q}$. Очевидно, $px\in I$. Допустим, что $px\in J$. Тогда найдутся $r_1\in R^2$, $r_2\in R$, $k,l\in\mathbb{Z}$, такие, что $px=p^2r_1x+p^2r_2x+kp^2x+l(px+y)$. Отсюда, $px=(p^2r_1+p^2r_2+kp^2+lp)x+ly$. Из этого следует, что $l=0$, откуда $px=p^2(r_1+r_2+k)x$ и, значит, $p\mid x$, что противоречит выбору числа p. Следовательно, $I\neq J$, откуда кольцо $(G,\times)$ не филиально по теореме 1 в [8]. Таким образом, G не является TI-группой.

Следствие 13. *Любая неразложимая группа без кручения ранга 2 является SACR-группой.*

Доказательство. Вытекает из замечания 9, теоремы 10 и лемм 11, 12.

Теорема 14. *Неразложимая группа без кручения ранга 2 G является TI-группой тогда и только тогда, когда $T(G)$ удовлетворяет (nil)-условию.*

Доказательство. Пусть G — неразложимая группа без кручения ранга 2. Если группа G удовлетворяет одному из 4 предыдущих условий, то G — nil-группа по замечанию 9. Следовательно, G является TI-группой.

Обратно, пусть G — TI-группа. Мы рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. Если $T(G)=\{t\}$, то t — неидемпотентен по теореме 10.

Случай 2. $T(G)=\{t_1,t_2\}$. В этом случае, допустим, что $t_1<t_2$. Тогда в силу леммы 11, G не является TI-группой. Наоборот, если t_1,t_2 — несравнимые типы, то G является nil-группой по замечанию 9. Следовательно, G — TI-группа.

Случай 3. $|T(G)|=3$. Допустим, $T(G)$ выполняет условие 3 в замечании 9. Без потери общности можно считать, что t_1 — идемпотентный тип. Тогда в силу леммы 11, G не является TI-группой. Наоборот, если $|T(G)|=3$ и также не выполняет условие 3 в замечании 9, то G является nil-группой. Следовательно, G — TI-группа.

Случай 4. Если $|T(G)|>3$, то G — nil-группа по замечанию 9. Таким образом, теорема доказана.

Следствие 15. *Неразложимая группа без кручения ранга 2 G является TI-группой тогда и только тогда, когда G — nil-группа.*

Благодарность. Автор благодарит профессора Е. И. Компанцеву за поддержку и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
2. *Feigelstock S.* Additive Groups of Rings. Boston-London: Pitman Advanced Publishing Program, 1983. V. I. 113 p.; 1988. V. II. 100 p.
3. *Feigelstock S.* Additive groups of commutative rings // J. Quaest. Math. 2000. V. 23. P. 241–245. DOI: 10.2989/16073600009485973.
4. *Andruszkiewicz R.*, *Woronowicz M.* On additive groups of associative and commutative rings // J. Quaest. Math. 2017. V. 40. No. 4. P. 527–537. DOI: 10.2989/16073606.2017.1302019.
5. *Компанцева Е.И.*, *Нгуен Т.К.Ч.* Алгебраически компактные абелевы TI-группы // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 1. С. 202–211. DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-202-211.
6. *Baer R.* Meta ideals // Report Conf. Linear Algebras. June. 1956. Publ. National Acad. Sci. Nat. Res. Council. 1957. No. 502. P. 33–52.
7. *Ehrlich G.* Filial rings // Portugal. Math. 1983–1984. V. 42. P. 185–194.
8. *Andruszkiewicz R.*, *Puczylowski E.* On filial rings // Portugal. Math. 1988. V. 45. No. 2. P. 139–149.
9. *Filipowicz M.*, *Puczylowski E. R.* On filial and left filial rings // Publ. Math. Debrecen. 2005. V. 66. P. 257–267.
10. *Andruszkiewicz R.*, *Woronowicz M.* On TI-groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33–41.
11. *Нгуен Т.К.Ч.* Вполне разложимые абелевы TI-группы // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019». М.: МАКС Пресс, 2019. URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2019/data/16175/85633_uid105565_report.pdf.
12. *Beaumont R.*, *Pierce R.* Torsion free rings // Illinois J. Math. 1961. V. 5. P. 61–98.
13. *Fomin A.A.*, *Wickless W.* Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. No. 1. P. 45–52.
14. *Фомин А.А.* К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17. № 8. С. 153–167.
15. *Фомин А.А.* К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Т. 20. № 5. С. 157–196.
16. *Давыдова О.И.* Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 25–33.
17. *Гордеева Е.В.*, *Фомин А.А.* Вполне разложимые однородные факторно делимые абелевы группы // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. № 2. С. 376–387. DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-376-387.
18. *Компанцева Е.И.* Кольца без кручения // Фундамент. и прикл. матем. 2009. Т. 15. № 8. С. 95–143.
19. *Stratton A.E.* The typeset of torsion-free rings of finite rank // Comment Math. Unit. St. 1979. V. 27. P. 199–211.
20. *Beaumont R.*, *Wisner R.* Ring with additive group which is a Torsion-free groups of rank two // Acta Sci. Math. 1959. V. 20. P. 105–116.
21. *Aghdam A.M.* On the strong nilstufe of rank two torsion-free groups // Acta. Sci. Math. (Szeged) 1985. V. 49. P. 53–61.
22. *Aghdam A.M.* Rings on indecomposable torsion free groups of rank two // Int. Math. Forum 1. 2006. V. 3. P. 141–146.
23. *Aghdam A.M.*, *Najafizadeh A.* On torsion-free rings with indecomposable additive group of rank two // Southeast Asian Bull. Math. 2008. V. 32. P. 199–208.

Статья поступила 01.11.2019 г.

Nguyen T.Q.T. (2020) ABELIAN SACR-GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 27–36

DOI 10.17223/19988621/63/3

Keywords: abelian group, ring on group, SACR-group, TI-group.

A homomorphism $\mu : G \otimes G \to G$ is called a multiplication on an abelian group *G*. An abelian group *G* with a multiplication on it is called a ring on *G*. The study of abelian groups supporting only a certain ring is one of the trends in the additive group theory. An abelian group on which every ring is associative and commutative is called an SACR-group (this abbreviation comes from: “strongly associative and commutative ring”). In this paper, we study SACR-groups in the following classes of abelian groups: homogeneous completely decomposable quotient divisible groups and indecomposable torsion-free groups of rank 2. Together with associative and commutative rings, we are also interested in additive groups of filial rings. An associative ring in which all meta-ideals of finite index are ideals is called filial. Certainly, an associative ring *R* is called filial if the relation of being an ideal in *R* is transitive. An abelian group on which every associative ring is filial is called a TI-group.

In Section 1, homogeneous completely decomposable quotient divisible abelian SACR-groups are described (Theorem 7). The proof of this theorem is based on Theorem 4: every quotient divisible group of rank 1 is an SACR-group. Further, in Section 3, it is shown that every indecomposable torsion-free group of rank 2 is an SACR-group. In particular, TI-groups are described in the class of indecomposable torsion-free abelian groups of rank 2. It is shown that the concepts of a TI-group and a nil-group in the class of rank 2 torsion-free indecomposable groups are equivalent. Until now, all known torsion-free TI-groups are SACR-groups. However, the converse is not true; an example is given in Section 3.

AMS Mathematical Subject Classification: 20K15, 20K21

Thi Quynh Trang NGUYEN (PhD-student, Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russia). E-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

REFERENCES

1. Fuchs L. (1970, 1973) *Infinite Abelian Groups.* I, II. (1970, 1973). New York; London: Academic Press.
2. Feigelstock S. (1983, 1988) *Additive Groups of Rings.* I, II. Boston; London: Pitman Advanced Publishing Program.
3. Feigelstock S. (2000) Additive groups of commutative rings. *J. Quaest. Math.* 23. pp. 241–245.
4. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. (2017) On additive groups of associative and commutative rings. *J. Quaest. Math.* 40(4). pp. 527–537.
5. Kompantseva E.I., Nguyen T.Q.T. Algebraicheski kompaktnye abelevy TI-gruppy [Algebraically compact abelian TI-groups] (2019) *Chebyshevskii sbornik*. 20(1). pp. 202–211.
6. Baer R. (1957) Meta ideals. *Report conf. linear algebras. June. 1956.* Publ. National Acad. Sci. nat. Res. Council. 502. pp. 33–52.
7. Ehrlich G. (1983–1984) Filial rings. *Portugal. Math*. 42. pp. 185–194.
8. Andruszkiewicz R., Puczylowski E. (1988) On filial rings. *Portugal. Math.* 45(2). pp. 139–149.
9. Filipowicz M., Puczylowski E. R. (2005) On filial and left filial rings. *Publ. Math. Debrecen*. 66. pp. 257–267.
10. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. (2014) On TI-groups. *Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie.* pp. 33–41.
11. Nguyen T.Q.T. Completely decomposable abelian TI-groups. *International scientific conference of students and young scientists "Lomonosov-2019", Moscow, 8 – 12 April 2019.*

12. Beaumont R., Pierce R. (1961) Torsion free rings. *Illinois J. Math.* 5. pp. 61–98.
13. Fomin A.A., Wickless W. (1998) Quotient divisible abelian groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126(1). pp. 45–52.
14. Fomin A.A. (2014) To quotient divisible group theory. I. *J. Math. Sci.* 197(5). pp. 688–697.
15. Fomin A.A. (2018) To quotient divisible group theory. II. *J. Math. Sci.* 230(3). pp. 457–483.
16. Davydova O.I. (2008) Rank-1 quotient divisible groups. *J. Math. Sci.* 154(3). pp. 295–300.
17. Gordeeva E.V., Fomin A.A. (2018) Vpolne razlozhimye odnorodnye faktorno delimye abelevy gruppy [Completely decomposable homogeneous quotient divisible abelian groups]. *Chebyshevskii sbornik.* 19(2). pp. 376–387.
18. Kompantseva E.I. (2010) Torsion-free rings. *J. Math. Sci.* 171(2). pp. 213–247.
19. Stratton A.E. (1979) The typeset of torsion-free rings of finite rank. *Comment Math. Unit. St.* 27. pp. 199–211.
20. Beaumont R., Wisner R. (1959) Ring with additive group which is a Torsion-free groups of rank two. *Acta Sci. Math.* 20. pp. 105–116.
21. Aghdam A.M. (1985) On the strong nilstufe of rank two torsion-free groups *Acta. Sci. Math.* (*Szeged*). 49. pp. 53–61.
22. Aghdam A.M. (2006) Rings on indecomposable torsion free groups of rank two *Int. Math. Forum 1*. 3. pp. 141–146.
23. Aghdam A.M., Najafizadeh A. (2008) On torsion-free rings with indecomposable additive group of rank two *Southeast Asian Bull. Math.* 32. pp. 199–208.

Received: November 1, 2019