

Д.А. Турсунов, М.О. Орозов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА, КОГДА СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ НЕВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ РЕГУЛЯРНУЮ ОСОБУЮ ОКРУЖНОСТЬ

Исследуется задача Дирихле для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка, с малым параметром при старших производных. Строится полное равномерное асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца. Особенностью задачи является то, что малый параметр стоит перед лапласианом и соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую линию. Поэтому при построении асимптотического решения возникают дополнительные трудности. Формальное асимптотическое решение строится обобщенным методом пограничных функций, а оценка для остаточного члена получена принципом максимума.

Ключевые слова: асимптотическое решение, сингулярно возмущенная задача Дирихле для кольца, малый параметр, регулярная особая линия, обобщенный метод пограничных функций.

Многие физические процессы, связанные с неравномерными переходами, описываются дифференциальными уравнениями с большими или малыми параметрами. Примером, где малый параметр естественным образом находится при главной части дифференциального оператора, является уравнение Шредингера, в котором в роли малого параметра выступает величина кванта действия. Если эту величину устремить к нулю, то некоторые законы квантовой механики переходят в законы классической механики. Кроме того, сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения (дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной) выступают в качестве математических моделей многих задач механики, физики, техники, химии, океанологии и других областей науки [1]. Поэтому построение асимптотических решений сингулярно возмущенных задач представляет теоретический и практический интерес [1–10]. Обычно для построения асимптотических решений сингулярно возмущенных задач применяют либо метод сращивания Ван-Дайка (метод согласования А.М. Ильина), либо метод пограничных функций Вишика – Люстерника – Василевой – Иманалиева, либо метод регуляризации С.А. Ломова и др. Нами в работах [11–16] предложен аналог метода пограничных функций. В данной работе, используя эту идею, построим асимптотику решения нового класса бисингулярных задач, т.е. когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую границу – окружность.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для кольца

$$\varepsilon \Delta v + (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v}{\partial \rho} - q(\varphi)v = f(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D; \quad (1)$$

$$v(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_1(\varphi), \quad v(b, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $0 < a, b, - \text{const}$, $D = \{((\rho, \varphi)) | a < \rho < b, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, $q(\varphi) > 0$ $\varphi \in [0, 2\pi]$, $v = v(\rho, \varphi, \varepsilon)$, $f \in C^\infty(\bar{D})$, $q, \psi_k \in C^\infty[0, 2\pi]$, $k = 1, 2$, $\frac{\partial f(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} \neq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Требуется построить полное равномерное асимптотическое решение задачи (1) – (2), когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Задача

$$(\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial z(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)z(\rho, \varphi) = f(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D; \quad (3)$$

$$z(b, \varphi) = \psi_2(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (4)$$

имеет единственное решение, представимое в виде

$$z(\rho, \varphi) = \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{f(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds + \psi_2(\varphi) \frac{\rho - a}{b - a}, \quad (5)$$

а также справедливо соотношение

$$z(\rho, \varphi) = Q_0(\varphi)(\rho - a) \ln(\rho - a) + Q_1(\rho, \varphi),$$

где $Q_1 \in C^\infty(\bar{D})$, $Q_0 \in C^\infty[0, 2\pi]$.

Доказательство. Отметим, что уравнение (3) на окружности $\rho = a$ имеет слабую особенность. Эту окружность назовем регулярно особой окружностью.

Уравнение (3) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{z(\rho, \varphi)}{\rho - a} \right) = \frac{f(\rho, \varphi)}{q(\varphi)(\rho - a)^2},$$

интегрируя последнее равенство по ρ , учитывая условие (4), получим равенство (5).

Подынтегральную функцию в (5) запишем в виде

$$f(s, \varphi) = f_0(\varphi) + f_1(\varphi)(s - a) + (s - a)^2 F(s, \varphi), \quad (6)$$

Здесь $F_0(a, \varphi) = F(s, \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} f_k(\varphi)(s - a)^{k-2}$, $f_k(\varphi) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(s, \varphi)}{\partial s^k} \Big|_{s=a}$, $k = 0, 1, \dots$.

Учитывая разложение (6) из равенства (5) имеем

$$\begin{aligned} z(\rho, \varphi) &= \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{f_0(\varphi) + f_1(\varphi)(s - a) + (s - a)^2 F(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds + \psi_2(\varphi) \frac{\rho - a}{b - a} = \\ &= \frac{\rho - a}{q(\varphi)} f_1(\varphi) \ln(\rho - a) - \frac{\rho - a}{q(\varphi)} f_1(\varphi) \ln(b - a) + \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{f_0(\varphi) + (s - a)^2 F(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds + \psi_2(\varphi) \frac{\rho - a}{b - a}. \end{aligned}$$

Если ввести обозначение

$$Q_0 = f_1(\varphi)/q(\varphi),$$

$$Q_1(\rho, \varphi) = -\frac{\rho - a}{q(\varphi)} f_1(\varphi) \ln(b - a) + \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{f_0(\varphi) + (s - a)^2 F(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds + \psi_2(\varphi) \frac{\rho - a}{b - a},$$

то имеем $z(\rho, \varphi) = Q_0(\varphi)(\rho - a) \ln(\rho - a) + Q_1(\rho, \varphi)$.

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим классическое внешнее асимптотическое решение задачи (1), (2), которое будем искать методом малого параметра в виде

$$V(\rho, \varphi, \varepsilon) = v_0(\rho, \varphi) + \varepsilon v_1(\rho, \varphi) + \varepsilon^2 v_2(\rho, \varphi) + \dots + \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \dots \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (1), учитывая граничное условие на внешней окружности $\rho = b$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε , получаем

$$\begin{aligned} (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v_0(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)v_0(\rho, \varphi) &= f(\rho, \varphi), \\ (\rho, \varphi) \in D, v_0(b, \varphi) &= \psi_2(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v_k(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)v_k(\rho, \varphi) &= -\Delta v_{k-1}(\rho, \varphi), \\ (\rho, \varphi) \in D, v_k(b, \varphi) &= 0, \varphi \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (9)$$

На основании леммы 1, для решения задачи (8) имеем

$$v_0(\rho, \varphi) = Q_0(\varphi)(\rho - a) \ln(\rho - a) + Q_1(\rho, \varphi),$$

где $Q_1 \in C^\infty(\bar{D})$, $Q_0 \in C^\infty[0, 2\pi]$.

Отсюда следует, что

$$\Delta v_0(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)), \rho \rightarrow a.$$

Из соотношения (9) при $k = 1$ имеем

$$(\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v_1(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)v_1(\rho, \varphi) = -\Delta v_0(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D, v_1(b, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi].$$

На основании леммы 1, эта задача имеет единственное решение и для решения справедлива асимптотическая оценка

$$v_1(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)) \text{ при } \rho \rightarrow a,$$

следовательно,

$$\Delta v_1(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)^3) \text{ при } \rho \rightarrow a.$$

Из (9) при $k = 2$ получим

$$(\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v_2(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)v_2(\rho, \varphi) = -\Delta v_1(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D, v_2(b, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi],$$

Решение этой задачи существует и для решения справедлива оценка

$$v_2(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)^3) \text{ при } \rho \rightarrow a,$$

следовательно,

$$\Delta v_2(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)^5) \text{ при } \rho \rightarrow a.$$

Аналогично, продолжая этот процесс, получим

$$v_k(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)^{2k-1}), \rho \rightarrow a, k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, внешнее решение (7) можно записать в виде

$$V(\rho, \varphi, \varepsilon) = v_0(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon}{\rho - a} \tilde{v}_1(\rho, \varphi) + \dots + \frac{\varepsilon^k}{(\rho - a)^{2k-1}} \tilde{v}_k(\rho, \varphi) + \dots,$$

где $\tilde{v}_k(\rho, \varphi) \in C(\bar{D})$, $k \in \mathbb{N}$.

Внешнее решение (7) имеет нарастающие особенности [7], поэтому задачу (1), (2) можно называть бисингулярной.

Равномерное асимптотическое решение задачи (1), (2) строим методом [11–16], т.е. особенности внешнего решения выбрасываем во внутреннее решение.

Для начала построим формальное асимптотическое решение, которое будем искать в виде

$$v(\rho, \varphi, \varepsilon) = u(\rho, \varphi, \varepsilon) + w(t, \varphi, \mu), \quad (10)$$

где $t = (\rho - a)/\mu$, $\varepsilon = \mu^2$.

Уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon \Delta v + (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v}{\partial \rho} - q(\varphi)v = f(\rho, \varphi) - h(\rho, \varphi, \varepsilon) + h(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (11)$$

где $h(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(\rho, \varphi)$, $h_k(\rho, \varphi)$ – пока неизвестные функций. С помощью этих функций убираем особенности из внешнего решения и потребуем, чтобы оно было гладким.

Подставляя (11) в (10) и учитывая граничные условия (2), имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta u + (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial u}{\partial \rho} - q(\varphi)u &= f(\rho, \varphi) - h(\rho, \varphi, \varepsilon), \\ (\rho, \varphi) \in D, u(b, \varphi, \varepsilon) &= \psi_2(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu c \frac{\partial w}{\partial t} + \mu^2 c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + tq(\varphi) \frac{\partial w}{\partial t} - q(\varphi)w = h(a + \mu t, \varphi, \mu^2); \quad (13)$$

$$w(0, \varphi, \mu) = \psi_1(\varphi) - u(a, \varphi, \varepsilon), w((b-a)/\mu, \varphi, \mu) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], \quad (14)$$

где $c = (a + \mu t)^{-1}$, $b^{-1} < c < a^{-1}$,

Асимптотическое решение задачи (12) ищем в виде

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = u_0(\rho, \varphi) + \varepsilon u_1(\rho, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(\rho, \varphi) + \dots + \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi) + \dots \quad (15)$$

Подставляя (15) в (12) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε , имеем

$$\begin{aligned} (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial u_0(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)u_0(\rho, \varphi) &= f(\rho, \varphi), \\ (\rho, \varphi) \in D, u_0(b, \varphi) &= \psi_2(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial u_k(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)u_k(\rho, \varphi) &= g_k(\rho, \varphi), \\ (\rho, \varphi) \in D, u_k(b, \varphi) &= 0, \varphi \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $g_k(\rho, \varphi) = -(\Delta v_{k-1}(\rho, \varphi) + h_{k-1}(\rho, \varphi))$, $g_k \in C^\infty(\bar{D})$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение задачи (16) представимо в виде (5). Дифференцируя, получаем

$$\Delta u_0(\rho, \varphi) = \frac{f_1(\varphi)}{\rho - a} + \frac{f_1(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) + \frac{f_1''(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a) + \tilde{u}_0(\rho, \varphi),$$

где $\tilde{u}_0 \in C^\infty(\bar{D})$.

$$\text{Пусть} \quad h_0(\rho, \varphi) = -\frac{f_1(\varphi)}{\rho - a} - \frac{f_1(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - 1) - \frac{f_1''(\varphi)}{\rho^2} (\rho - 1) \ln(\rho - 1), \quad \text{тогда}$$

$$g_1(\rho, \varphi) = \tilde{u}_0(\rho, \varphi).$$

Из (17) при $k = 1$ получаем

$$(\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial u_1(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)u_1(\rho, \varphi) = g_1(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad u_1(b, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

Решение этого уравнения, в силу леммы, представимо в виде

$$u_1(\rho, \varphi) = \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{g_1(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds.$$

Дифференцируя, получаем

$$\Delta u_1(\rho, \varphi) = \frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho - a} + \frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) + \frac{g''_{1,1}(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a) + \tilde{u}_1(\rho, \varphi),$$

где $\tilde{u}_1 \in C^\infty(\bar{D})$, $g_{1,1}(\varphi) = \frac{\partial g_1(a, \varphi)}{\partial \rho}$.

Пусть

$$h_1(\rho, \varphi) = -\frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho - a} - \frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) - \frac{g''_{1,1}(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a),$$

тогда

$$g_2(\rho, \varphi) = \tilde{u}_1(\rho, \varphi).$$

Аналогично продолжая этот процесс, получаем:

$$\Delta u_k(\rho, \varphi) = \frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho - a} + \frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) + \frac{g''_{k,1}(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a) + \tilde{u}_k(\rho, \varphi),$$

$$h_k(\rho, \varphi) = -\frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho - a} - \frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) - \frac{g''_{k,1}(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a),$$

$$g_{k+1}(\rho, \varphi) = \tilde{u}_k(\rho, \varphi),$$

где $\tilde{u}_k \in C^\infty(\bar{D})$, $g_{k,1}(\varphi) = \frac{\partial g_k(a, \varphi)}{\partial \rho}$.

Теперь переходим к решению задачи (13), (14). Пусть

$$h_k(a + \mu t, \varphi) = \frac{1}{\mu t} G_k(\mu t, \varphi),$$

где

$$G_k(\mu t, \varphi) = -g_{k,1}(\varphi) - c g_{k,1}(\varphi) \mu t \ln \mu t - c^2 g''_{k,1}(\varphi) (\mu t)^2 \ln \mu t.$$

Тогда уравнение (13) можно записать как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + tq(\varphi) \frac{\partial w}{\partial t} - q(\varphi)w = -\mu c \frac{\partial w}{\partial t} - \mu^2 c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\mu}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{2k} G_k(\mu t, \varphi). \quad (18)$$

Асимптотическое решение задачи (18) – (14) ищем в виде

$$w(t, \varphi, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_{k,\mu}(t, \varphi). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18) и учитывая (14) имеем

$$lw_{0,\mu} \equiv \frac{\partial^2 w_{0,\mu}}{\partial t^2} + tq(\varphi) \frac{\partial w_{0,\mu}}{\partial t} - q(\varphi)w_{0,\mu} = 0, \\ (t, \varphi) \in D_1, \quad w_{0,\mu}(0, \varphi) = \psi_1(\varphi) - u_0(a, \varphi), \quad w_{0,\mu}((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (20)$$

$$lw_{1,\mu} = -c \frac{\partial w_{0,\mu}}{\partial t} + \frac{1}{t} G_0(\mu t, \varphi),$$

$$(t, \varphi) \in D_1, w_{1,\mu}(0, \varphi) = 0, w_{1,\mu}((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi]; \quad (21)$$

$$lw_{2n,\mu} = -c \frac{\partial w_{2n-1,\mu}}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w_{2n-2,\mu}}{\partial \varphi^2},$$

$$(t, \varphi) \in D_1, w_{2n,\mu}(0, \varphi) = -u_n(a, \varphi), w_{2n,\mu}((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], n \in \mathbf{N}; \quad (22)$$

$$lw_{2n+1,\mu} = -c \frac{\partial w_{2n,\mu}}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w_{2n-1,\mu}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{t} G_n(\mu t, \varphi),$$

$$(t, \varphi) \in D_1, w_{2n+1,\mu}(0, \varphi) = 0, w_{2n+1,\mu}((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], n \in \mathbf{N}, \quad (23)$$

где $D_1 = \{(t, \varphi) | 0 < t < (b-a)/\mu, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.

Лемма 2. Решение задачи

$$lw = t^{-k} G(\mu t, \varphi), (t, \varphi) \in D_1, w(0, \varphi) = \gamma(\varphi), w((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], \quad (24)$$

единственно, где G – непрерывная функция.

Доказательство. Однородное уравнение $lw = 0$ имеет два независимых решения:

$$w_1(t, \varphi) = t, \text{ и } w_2(t, \varphi) = t \int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} \tau^{-2} d\tau.$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} \tau^{-2} d\tau - e^{-t^2 q(\varphi)/2} t^{-1} =$$

$$= -e^{-(b-a)^2 q(\varphi)/2\varepsilon} \frac{\varepsilon}{(b-a)^2} - q(\varphi) \int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} d\tau;$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = q(\varphi) e^{-t^2 q(\varphi)/2} q(\varphi) e^{-t^2 q(\varphi)/2} + tq(\varphi) \left(\int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} \tau^{-2} d\tau - e^{-t^2 q(\varphi)/2} t^{-1} \right) -$$

$$- q(\varphi) t \int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} \tau^{-2} d\tau \equiv 0.$$

Отметим некоторые свойства функции $w_2(t, \varphi)$:

$$w_2(0, \varphi) = 1, w_2(t, \varphi) \sim \frac{1}{t^2 q(\varphi)} e^{-t^2 q(\varphi)/2}, t \rightarrow \infty, w_2 \in C^\infty(\bar{D}).$$

При фиксированных значениях φ , функция $w_2(t, \varphi)$ убывает $\left(\frac{\partial w_2}{\partial t} < 0 \right)$. Вронскиан

$$W(w_1, w_2) = e^{-t^2 q(\varphi)/2}.$$

Докажем, что следующее выражение является решением уравнения:

$$w(t, \varphi) = w_2(t, \varphi) \int_0^t \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds - w_1(t, \varphi) \int_{\frac{b-a}{\mu}}^t \frac{w_2(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \gamma(\varphi) w_2(t, \varphi).$$

Проверим граничные условия:

$$w(0, \varphi) = w_2(0, \varphi) \int_0^0 \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds -$$

$$- w_1(0, \varphi) \int_{\frac{b-a}{\mu}}^0 \frac{w_2(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \gamma(\varphi) w_2(0, \varphi) = \gamma(\varphi),$$

$$w\left(\frac{b-a}{\mu}, \varphi\right) = w_2\left(\frac{b-a}{\mu}, \varphi\right) \int_0^{\frac{b-a}{\mu}} \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds - \\ - w_1\left(\frac{b-a}{\mu}, \varphi\right) \int_{\frac{b-a}{\mu}}^{\frac{b-a}{\mu}} \frac{w_2(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \gamma(\varphi) w_2\left(\frac{b-a}{\mu}, \varphi\right) \equiv 0.$$

Теперь вычислим производные $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w_2(t, \varphi)}{\partial t} \int_0^t \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds - \frac{\partial w_1(t, \varphi)}{\partial t} \int_{\frac{b-a}{\mu}}^t \frac{w_2(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \gamma(\varphi) \frac{\partial w_2(t, \varphi)}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_2(t, \varphi)}{\partial t^2} \int_0^t \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \frac{G(\mu t, \varphi)}{t^k} + \gamma(\varphi) \frac{\partial^2 w_2(t, \varphi)}{\partial t^2}.$$

Подставляя их в уравнение, а потом, упростив, имеем $t^{-k} G(\mu t, \varphi) = t^{-k} G(\mu t, \varphi)$.

Нетрудно заметить, что однородное уравнение с однородными краевыми условиями имеет только тривиальное решение. Отсюда следует единственность решения неоднородного уравнения.

Лемма 2 доказана.

С помощью этой леммы доказываются существование и единственность решения задач (20) – (23). Решение задачи (20) экспоненциально мало при $t \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$, а решения задач (21) – (23) степенным образом убывают при $t \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$.

Таким образом, нами определены все члены асимптотических решений $u(\rho, \varphi, \varepsilon)$ и $w(t, \varphi, \mu)$. Теперь оценим остаточный член асимптотического разложения $u(\rho, \varphi, \varepsilon) + w(t, \varphi, \mu)$.

Обоснование разложения. Пусть $v(\rho, \varphi, \varepsilon) = v_n(\rho, \varphi, \varepsilon) + R(\rho, \varphi, \varepsilon)$, где

$$v_n(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{2n} \mu^k w_{k, \mu}(t, \varphi),$$

$R(\rho, \varphi, \varepsilon)$ – остаточная функция.

Тогда для остаточной функции имеем

$$\varepsilon \Delta R + (\rho - a) q_1(\rho, \varphi) \frac{\partial R}{\partial \rho} - q_0(\rho, \varphi) R = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\rho, \varphi) \in D,$$

$$R(a, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad R(b, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Применяя принцип максимума [17], получаем $R(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\rho, \varphi) \in \bar{D}$.

Нами доказана

Теорема. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$v(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_{k, \mu}(t, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\rho, \varphi) \in \bar{D},$$

а также предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\rho, \varphi, \varepsilon) = v_0(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in \{(\rho, \varphi) \mid a < \rho \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Заключение

Нами исследована задача Дирихле для кольца. Задача Дирихле ставится для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка, с малым параметром перед лапласианом. Особенностью задачи является то, что малый параметр присутствует перед лапласианом и соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую линию. Поэтому при построении асимптотического решения возникают дополнительные трудности. Обобщенным методом пограничных функций построено полное равномерное асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца. Построенный ряд является асимптотическим в смысле Эрдея. Оценка для остаточного члена получена принципом максимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chang-Yeol Jung and Roger Temam* Singularly perturbed problems with a turning point: the noncompatable case // *Analysis and Applications*. 2014. V. 12. No 3. P. 293–321.
2. *Butuzov V. F.* Asymptotic behavior and stability of solutions of a singularly perturbed elliptic problem with a triple root of the degenerate equation // *Izvestiya: Mathematics*. 2017. V. 81. No 3. P. 481–504.
3. *Anastasia-Dimitra Lipitakis* The numerical solution of singularly perturbed nonlinear partial differential equations in three space variables: the adaptive explicit preconditioning approach // *Modelling and Simulation in Engineering*. 2019.
4. *Gung-Min Gie, Chang-Yeol Jung, and Roger Temam* Recent progresses in boundary layer theory // *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*. 2014. V. 36. No 5. P. 2521–2583.
5. *Levinson N.* The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε // *Ann. of Math*. 1950. V. 51. P. 428–445.
6. *Eckhaus W.* Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems // *SIAM Review*. 1972. V. 14. No 2. P. 225–270.
7. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
8. *Зубова С.П., Усков В.И.* Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай // *Матем. заметки*. 2018. Т. 103. № 3. С. 392–403. <https://doi.org/10.4213/mzm11199>.
9. *Зверьяев Е.М.* Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2018. № 83. 19 с. doi:10.20948/prepr-2018-83.
10. *Биматов В.И., Савкина Н.В., Фарапонов В.В.* Сверхзвуковое обтекание и аэродинамические характеристики острого конуса для различных моделей турбулентной вязкости // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2016, № 5(43). С. 35–42. <https://doi.org/10.17223/19988621/43/4>.
11. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 54. С. 46–57 DOI: 10.17223/19988621/54/4.
12. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем // *Изв. вузов. Математика*. 2018. № 3. С. 70–78. DOI: 10.3103/S1066369X18030088.
13. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2017. Т. 14. С. 10–21. DOI 10.17377/semi.2017.14.002
14. *Турсунов Д.А.* Обобщенный метод погранфункций для бисингулярных задач в круге // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2017. Т. 23. № 2. С. 239–249. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-239-249>.
15. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2016. Т. 22. № 1. С. 271–281.

16. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 42–52. DOI 10.17223/19988621/39/5.
17. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

Статья поступила 04.11.2019 г.

Tursunov D.A., Orozov M.O. (2020) ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A RING, WHEN THE CORRESPONDING UNPERTURBED EQUATION HAS A REGULAR SPECIAL CIRCLE. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 37–46

DOI 10.17223/19988621/63/4

Keywords: asymptotic solution, singularly perturbed Dirichlet problem for a ring, small parameter, regular singular line, generalized boundary function method.

The article investigates the Dirichlet problem in a ring for a linear inhomogeneous second-order elliptic equation with two independent variables. In the equation under consideration, there is a small parameter at the highest derivatives, i.e. at the Laplacian. A solution to the Dirichlet problem for a ring, based on the theory of partial differential equations, exists and is unique. However, attempts to construct an explicit solution to the Dirichlet problem and to determine the dependence of the solution on a small parameter directly failed. It is required to construct a complete uniform asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring in powers of a small parameter. The problem under consideration has two features: the first one is a small parameter at the Laplacian and the second one is that the corresponding unperturbed equation has a regular special line. This line is a circle. Therefore, when constructing an asymptotic solution, there appear additional difficulties. The formal asymptotic solution of the Dirichlet problem for a ring is constructed by the generalized method of boundary functions. Using the maximum principle, the constructed formal asymptotic solution is substantiated. The constructed decomposition is asymptotic in the sense of Erdélyi.

The results obtained can find applications in continuum mechanics, hydro- and aerodynamics, magneto hydrodynamics, oceanology, etc.

AMS Mathematical Subject Classification: 35J15, 35J25, 35B25, 35B40, 35C20

Dilmurat A. TURSUNOV (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Osh State University, Kyrgyzstan). E-mail: tdaosh@gmail.com

Maksatbek O. OROZOV (PhD-student, Osh State University Osh, Kyrgyzstan) E-mail: gnezdo1983@mail.ru

REFERENCES

1. Chang-Yeol Jung and Roger Temam (2014) Singularly perturbed problems with a turning point: the noncompatible case. *Analysis and Applications*. 12(3). pp. 293–321.
2. Butuzov V.F. (2017) Asymptotic behavior and stability of solutions of a singularly perturbed elliptic problem with a triple root of the degenerate equation. *Izvestiya: Mathematics*. 81(3). pp. 481–504.
3. Anastasia-Dimitra Lipitakis (2019) The numerical solution of singularly perturbed nonlinear partial differential equations in three space variables: the adaptive explicit preconditioning approach. *Modelling and Simulation in Engineering*. DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/5157145>
4. Gung-Min Gie, Chang-Yeol Jung, and Roger Temam (2014) Recent progresses in boundary layer theory. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*. 36(5). pp. 2521–2583.

5. Levinson N. (1950) The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε . *Ann. of Math.* 51. pp. 428–445.
6. Eckhaus W. (1972) Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems. *SIAM Review*. 14(2). pp. 225–270.
7. Il'in A.M. (1989) *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach* [Matching of asymptotic expansions of boundary problems]. Moscow: Nauka.
8. Zubova S.P., Uskov V.I. (2018) Asymptotic solution of the Cauchy problem for a first-order equation with a small parameter in a Banach space. The regular case. *Math Notes*. 103. pp. 395–404. DOI:10.1134/S0001434618030069.
9. Zverayayev E.M. (2018) Metod Sen-Venana – Pikara – Banakha integrirovaniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh s malym parametroy [The Saint-Venant–Picard–Banach method of integrating partial differential equations with a small parameter]. *Keldysh Institute preprints*. 83.
10. Bimatova V.I., Savkinaab N.V., Faraponova V.V. (2016) Sverkhzvukovoye obtekaniye i aerodinamicheskiye kharakteristiki ostrogo konusa dlya razlichnykh modeley turbulentnoy vyazkosti [Supersonic flow over a sharp cone and its aerodynamic characteristics for different models of turbulent viscosity]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 35–42. <https://doi.org/10.17223/19988621/43/4>.
11. Tursunov D.A. (2018) Asimptotika resheniya zadachi Koshi pri narushenii ustoychivosti tochki pokoya v ploskosti «bystrykh dvizheniy» [Asymptotics of the Cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of "rapid motions"]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 46–57. DOI: 10.17223/19988621/54/4.
12. Tursunov D.A. (2018) Asymptotic solution of linear bisingular problems with additional boundary layer. *Russian Mathematics*. 62(3). pp 60–67. DOI: 10.3103/S1066369X18030088.
13. Tursunov D.A. (2017) Asimptoticheskoye resheniye bisingulyarnoy zadachi Robena [The asymptotic solution of the bisingular Robin problem]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 14. pp. 10–21. DOI 10.17377/semi.2017.14.002.
14. Tursunov D.A. (2017) Obobshchennyy metod pogramfunksiy dlya bisingulyarnykh zadach v krughe [The generalized boundary function method for bisingular problems in a disk]. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 23(2). pp. 239–249. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-239-249>.
15. Tursunov D.A. (2016) Asimptoticheskoye razlozheniye resheniya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s tremya tochkami povorota [Asymptotic expansion for a solution of an ordinary second-order differential equation with three turning points]. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 22(1). pp. 271–281.
16. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. (2016) Asimptoticheskoye razlozheniye resheniya zadachi Dirikhle dlya kol'tsa s osobennost'yu na granitse [Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity on the boundary]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 42–52. DOI: 10.17223/19988621/39/5.
17. Gilbarg D., Trudinger N.S. (1983) *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag.

Received: November 4, 2019