

УДК 517.956.22
DOI 10.17223/19988621/63/5

MSC 35A08, 35J25, 35J70, 35J75

Т.Г. Эргашев, Н.Д. Комилова

ЗАДАЧА ХОЛЬМГРЕНА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Основные краевые задачи для двумерного и трехмерного эллиптических уравнений с двумя сингулярными коэффициентами в конечной и бесконечной областях изучались многими авторами, однако исследование задачи Хольмгрена ограничивалось двумерным случаем. Настоящая работа посвящена нахождению единственного решения задачи Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами в области, ограниченной в одной четверти пространства. Используя свойства одного из фундаментальных решений, построена функция Грина и с помощью известной формулы разложения для гипергеометрической функции Аппеля от двух переменных решение поставленной задачи в конечной области, ограниченной с двумя перпендикулярными гиперплоскостями и четвертью многомерной сферы, найдено в явном виде.

Ключевые слова: многомерное эллиптическое уравнение с двумя сингулярными коэффициентами; задача Хольмгрена; фундаментальное решение; формула Гаусса – Остроградского; функция Грина.

Известно, что теория краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами является одним из центральных разделов современной теории уравнений в частных производных, которые встречаются при решении многих важных вопросов прикладного характера [1, 2]. Подробную библиографию и изложений исследований основных краевых задач для вырождающихся уравнений различного типа, в частности для двумерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, можно найти в монографиях [3–5].

Исследованию краевых задач для многомерных (более двумерных) эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами посвящено сравнительно мало работ. Как известно, для эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом в конечной области рассматриваются две основные (классические) задачи: задача Дирихле и задача Н (Хольмгрена, по имени ученого, впервые исследовавшего такую задачу для уравнения Лапласа). В 1937 году С. Агостинелли [6] рассмотрел задачу Дирихле для трехмерного уравнения с одним сингулярным коэффициентом

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + \frac{2\alpha_1}{x_1}u_{x_1} = 0, \quad 0 < 2\alpha_1 < 1,$$

в области, ограниченной в полупространстве $x_1 > 0$, однако в 1949 году М.Н. Олевский [7] обнаружил ошибку в исследованиях С. Агостинелли и объявил в явном виде решение задачи Дирихле в многомерном полушаре для более общего многомерного уравнения

$$\sum_{k=1}^m u_{x_kx_k} + \frac{2\alpha_1}{x_1}u_{x_1} = 0, \quad 0 < 2\alpha_1 < 1, \quad m \geq 2, \quad (1)$$

а решение задачи Хольмгрена для уравнения (1) в полушаре найдено совсем недавно [8]. В работе [9] построены фундаментальные решения уравнения (1) и найдены решения внешних задач Дирихле и Неймана в бесконечной области (в полупространстве $x_1 > 0$). В настоящее время известны фундаментальные решения [10, 11] для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом

$$\sum_{k=1}^m u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \lambda u = 0, \quad 0 < 2\alpha_1 < 1, \quad \lambda \in R, \quad m \geq 2.$$

Следует отметить, что в двумерном случае фундаментальные решения уравнения (1) были известны еще в первой половине прошлого столетия и они успешно использованы при решении основных краевых задач и построении теории потенциала для этого уравнения [3–5]. Кроме того, работа [12] посвящена исследованию задачи Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с одним сингулярным коэффициентом.

Рассмотрим уравнение

$$H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m, \lambda)}(u) := \sum_{k=1}^m u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \frac{2\alpha_2}{x_2} u_{x_2} + \lambda u = 0 \quad (H)$$

в области $R_m^{2+} = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0\}$, где $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geq 2$; α_1, α_2 и λ – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_1, 2\alpha_2 < 1$.

При $\lambda = 0$ фундаментальные решения уравнения (H) в случаях $m = 2$ и $m = 3$ построены в работах [13] и [14] соответственно, а при наличии λ и при любой размерности уравнения – в [15]. Оказывается, все фундаментальные решения уравнения (H) при $\lambda = 0$ выражаются через гипергеометрические функции Аппеля двух переменных. Используя известную формулу разложения [16] функций Аппеля по гипергеометрическим функциям Гаусса, в случае $m = 2$ и $\lambda = 0$ решены основные краевые задачи для уравнения (H) в конечной [17] и бесконечной [18, 19] областях, а в трехмерном случае ($m = 3, \lambda = 0$) задачи Дирихле и Дирихле – Неймана исследованы лишь в конечной области [14, 20]. Отметим, что в работах [21–24] исследованы потенциалы двойного слоя для уравнения $H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2, 0)}(u) = 0$.

Недавно появились работы [25, 26], в которых построены и исследованы фундаментальные решения для следующих многомерных уравнений Гельмгольца с тремя и более сингулярными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \frac{2\alpha_2}{x_2} u_{x_2} + \frac{2\alpha_3}{x_3} u_{x_3} + \lambda u = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m \left(u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha_i}{x_i} u_{x_i} \right) + \lambda u = 0,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и λ – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n$.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи Хольмгрена для уравнения

$$H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m, 0)}(u) := \sum_{k=1}^m u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \frac{2\alpha_2}{x_2} u_{x_2} = 0, \quad m \geq 2, \quad 0 < 2\alpha_1, 2\alpha_2 < 1, \quad (2)$$

в конечной односвязной области, ограниченной в R_m^{2+} .

1. Постановка и единственность решения задачи

Пусть $\Omega \subset R_m^{2+}$ – область, ограниченная двумя областями $D_1 = \{x: x_1 = 0, 0 < x_2 < a_2, -b_k < x_k < c_k, k = \overline{3, m}\}$, $D_2 = \{x: x_2 = 0, 0 < x_1 < a_1, -b_k < x_k < c_k, k = \overline{3, m}\}$ и поверхностью S , которая пересекается с D_1 и D_2 , где $a_1, a_2, b_k, c_k = \text{const} > 0, k = \overline{3, m}$. Линии пересечения обозначим через $l_1 = S \cap D_1$ и $l_2 = S \cap D_2$. Поверхность S пересекает оси Ox_1 и Ox_2 при $x_1 = a > 0$ и $x_2 = b > 0$ соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (x_2, x_3, x_4, \dots, x_m) \in R_{m-1}, \quad \tilde{x}_2 = (x_1, x_3, x_4, \dots, x_m) \in R_{m-1}; \\ dx &:= dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad d\tilde{x}_1 = dx_2 dx_3 dx_4 \dots dx_m, \quad d\tilde{x}_2 = dx_1 dx_3 dx_4 \dots dx_m; \\ x_1^0 &= (0, x_2, x_3, \dots, x_m) \in R_m, \quad x_2^0 = (x_1, 0, x_3, \dots, x_m) \in R_m.\end{aligned}$$

Задача Хольмгрена. Найти в области Ω регулярное решение $u(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial u(x; \xi)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = v_1(\tilde{x}_1), \quad \tilde{x}_1 \in D_1; \quad (3)$$

$$x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial u(x; \xi)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = v_2(\tilde{x}_2), \quad \tilde{x}_2 \in D_2; \quad (4)$$

$$u|_S = \varphi(x), \quad x \in \bar{S}, \quad (5)$$

где $v_1(\tilde{x}_1)$, $v_2(\tilde{x}_2)$ и $\varphi(x)$ – заданные непрерывные функции, причем функции $v_1(\tilde{x}_1)$ и $v_2(\tilde{x}_2)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше, чем $1 - 2\alpha_1$ и $1 - 2\alpha_2$ на краях областей D_1 и D_2 соответственно.

Докажем единственность решения поставленной задачи. Для этого рассмотрим тождество

$$x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(w) - w H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(u) \right] = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left[x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left(u \frac{\partial w}{\partial x_k} - w \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \right].$$

Интегрируем обе части последнего тождества по области Ω , расположенной в R_m^{2+} и пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, получим

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(w) - w H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(u) \right] dx &= \\ &= \int_{\Gamma} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \sum_{k=1}^m \left[\left(u \frac{\partial w}{\partial x_k} - w \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \cos(n, x_k) \right] d\Gamma, \quad (6)\end{aligned}$$

где Γ – граничная поверхность области Ω , n – внешняя нормаль к поверхности Γ .

Нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(u) dx = - \int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx.$$

Пусть u – решение уравнения (2). Применяя опять формулу Гаусса – Остроградского, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx &= \int_S x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \varphi(S) \frac{\partial u}{\partial n} dS + \\ &+ \int_{D_1} x_2^{2\alpha_2} v_1(\tilde{x}_1) u(x_1^0) d\tilde{x}_1 + \int_{D_2} x_1^{2\alpha_1} v_2(\tilde{x}_2) u(x_2^0) d\tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Если теперь рассмотреть однородный случай задачи Хольмгрена (т.е. $\varphi(x) \equiv 0$, $v(\tilde{x}_1) \equiv 0$, $v(\tilde{x}_2) \equiv 0$), то из (7) получается

$$\int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x) = 0$ в $\bar{\Omega}$. Тем самым доказана единственность решения задачи Хольмгрена.

2. Существование решения задачи Хольмгрена

Существование решения задачи Хольмгрена докажем методом функции Грина. Для этого положим, что $a_1 = a_2 = b_k = c_k$, $k = \overline{3, m}$, и S является четвертью сферы с центром в начале координат и радиусом R , т.е. $S = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + \dots + x_m^2 = R^2\}$. Кроме того, для определенности положим $m > 2$.

Определение. Функцией Грина задачи Хольмгрена для уравнения (2) называется функция $G_0(x; \xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) внутри области Ω , кроме точки ξ , эта функция есть регулярное решение уравнения (2);

2) она удовлетворяет условиям

$$\left(x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial G_0(x; \xi)}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial G_0(x; \xi)}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad G_0(x; \xi)|_S = 0; \quad (8)$$

3) функция может быть представлена в виде

$$G_0(x; \xi) = q_0(x; \xi) + w_0(x; \xi), \quad (9)$$

где $q_0(x; \xi)$ – фундаментальное решение уравнения (2), определенное формулой [15]:

$$\begin{aligned} q_0(x; \xi) &= \gamma_0 r^{-2\beta_0} F_2(\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2), \\ \beta_0 &= \frac{m}{2} - 1 + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \gamma_0 = 2^{2\beta_0 - m} \frac{\Gamma(\beta_0) \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\pi^{m/2} \Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2)}, \\ \xi &:= (\xi_1, \dots, \xi_m); \quad \sigma_1 = 1 - \frac{r_1^2}{r^2} = -\frac{4x_1 \xi_1}{r^2}, \quad \sigma_2 = 1 - \frac{r_2^2}{r^2} = -\frac{4x_2 \xi_2}{r^2}, \\ r^2 &= \sum_{k=1}^m (x_k - \xi_k)^2, \quad r_i^2 = (x_i + \xi_i)^2 + \sum_{k=1, k \neq i}^m (x_k - \xi_k)^2, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+l} (b_1)_k (b_2)_l}{k! l! (c_1)_k (c_2)_l} x^k y^l, \quad |x| + |y| < 1, \quad c_1, c_2 \neq 0, -1, -2, \dots$$

– гипергеометрическая функция Аппеля двух переменных [27], а $(\kappa)_v$ есть сим-вол Похгаммера: $(\kappa)_0 = 1$, $(\kappa)_v = \frac{\Gamma(\kappa + v)}{\Gamma(\kappa)}$, $v \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$; $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Здесь $w_0(x; \xi)$ – регулярное решение уравнения (2) везде внутри Ω .

Нетрудно видеть, что

$$\left(x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} = 0.$$

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $w_0(x; \xi)$, которая в силу (8) и (9) должна удовлетворить условиям

$$\begin{aligned} \left(x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial w_0(x; \xi)}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0} &= - \left(x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0}, \\ \left(x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial w_0(x; \xi)}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} &= - \left(x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0}, \quad w_0(x; \xi)|_S = -q_0(x; \xi)|_S. \end{aligned}$$

Для области Ω , ограниченной плоскостями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и четвертью сферы S , функция Грина задачи Хольмгрена имеет вид

$$G_0(x; \xi) = q_0(x; \xi) - \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2\beta_0} q_0(x; \bar{\xi}),$$

где
$$\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2, \quad \bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m), \quad \bar{\xi}_k = \frac{R^2}{\rho^2} \xi_k.$$

Пусть $\xi \in \Omega$. Вырежем из области Ω m -мерный шар малого радиуса ε с центром в точке ξ и оставшуюся часть Ω обозначим через Ω_ε , а через C_ε – m -мерную сферу вырезанного шара. Используя формулу (6), получим

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u_0 \frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right] dC_\varepsilon &= - \int_S x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \varphi(S) \frac{\partial G_0(x; \xi)}{\partial n} dS - \\ &- \int_{D_1} v_1(\tilde{x}_1) x_2^{2\alpha_2} G_0(x_1^0; \xi) d\tilde{x}_1 - \int_{D_2} v_2(\tilde{x}_1) x_1^{2\alpha_1} G_0(x_2^0; \xi) d\tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (11)$$

В равенстве (11) совершим предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предварительно преобразуем левую часть (11) в виде суммы трех интегралов:

$$I = \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u_0 \frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right] dC_\varepsilon = I_1 + I_2 + I_3, \quad (12)$$

где

$$I_1 = \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial n} dC_\varepsilon,$$

$$I_2 = -\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\beta_0} \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) \frac{\partial q_0(x, \xi)}{\partial n} dC_\varepsilon,$$

$$I_3 = -\int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} G_0(x, \xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} dC_\varepsilon.$$

Используя формулу дифференцирования для гипергеометрических функций Аппеля

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{i+j} F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; \sigma_1, \sigma_2)}{\partial \sigma_1^i \partial \sigma_2^j} = \\ & = \frac{(a)_{i+j} (b_1)_i (b_2)_j}{(c_1)_i (c_2)_j} F_2(a+i+j, b_1+i, b_2+j; c_1+i, c_2+j; \sigma_1, \sigma_2) \end{aligned} \quad (13)$$

и смежное соотношение

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \frac{b_1}{c_1} F_2(a+1, b_1+1, b_2; c_1+1, c_2; \sigma_1, \sigma_2) + \sigma_2 \frac{b_2}{c_2} F_2(a+1, b_1, b_2+1; c_1, c_2+1; \sigma_1, \sigma_2) = \\ & = F_2(a+1, b_1, b_2; c_1, c_2; \sigma_1, \sigma_2) - F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; \sigma_1, \sigma_2), \end{aligned} \quad (14)$$

вычислим производную по внешней нормали к границе области Ω формулой

$$\frac{\partial q_0}{\partial n} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial q_0}{\partial x_k} \cos(n, x_k). \quad (15)$$

Подробно остановимся на вычислении $\frac{\partial q_0}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial q_0}{\partial x_2}$. Действительно, используя формулу дифференцирования (13), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0}{\partial x_1} &= -2\beta_0 \gamma_0 (x_1 - \xi_1) r^{-2\beta_0-2} F_2(\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 (x_1 - \xi_1) r^{-2\beta_0-2} \frac{\alpha_1}{2\alpha_1} \sigma_1 F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 (x_1 - \xi_1) r^{-2\beta_0-2} \frac{\alpha_2}{2\alpha_2} \sigma_2 F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2), \\ \frac{\partial q_0}{\partial x_2} &= -2\beta_0 \gamma_0 (x_2 - \xi_2) r^{-2\beta_0-2} F_2(\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 (x_2 - \xi_2) r^{-2\beta_0-2} \frac{\alpha_1}{2\alpha_1} \sigma_1 F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 (x_2 - \xi_2) r^{-2\beta_0-2} \frac{\alpha_2}{2\alpha_2} \sigma_2 F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2). \end{aligned}$$

Отсюда в силу смежного соотношения (14) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0}{\partial x_1} &= -2\beta_0 \gamma_0 (x_1 - \xi_1) r^{-2\beta_0-2} F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 \xi_1 r^{-2\beta_0-2} F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0}{\partial x_2} = & -2\beta_0\gamma_0(x_2 - \xi_2)r^{-2\beta_0-2}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \\ & -2\beta_0\gamma_0\xi_2r^{-2\beta_0-2}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично вычисляются производные по переменным $x_3, x_4, \dots, x_m$:

$$\frac{\partial q_0}{\partial x_k} = -2\beta_0\gamma_0(x_k - \xi_k)r^{-2\beta_0-2}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2), \quad 3 \leq k \leq m. \quad (18)$$

Подставляя (16) – (18) в (15), получим искомую нормальную производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0(x, \xi)}{\partial n} = & 2\beta_0\gamma_0r^{-2\beta_0}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \frac{\partial}{\partial n} \left[\ln \frac{1}{r} \right] - \\ & -2\beta_0\gamma_0r^{-2\beta_0-2}\xi_1F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \cos(n; x_1) - \\ & -2\beta_0\gamma_0r^{-2\beta_0-2}\xi_2F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \cos(n; x_2). \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично вычисляется производная по нормали и от функции $q_0(x; \bar{\xi})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0(x, \bar{\xi})}{\partial n} = & 2\beta_0\gamma_0\bar{r}^{-2\beta_0}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \frac{\partial}{\partial n} \left[\ln \frac{1}{\bar{r}} \right] - \\ & -2\beta_0\gamma_0\bar{r}^{-2\beta_0-2}\bar{\xi}_1F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \cos(n; x_1) - \\ & -2\beta_0\gamma_0\bar{r}^{-2\beta_0-2}\bar{\xi}_2F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \cos(n; x_2), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 = & 1 - \frac{\bar{r}_1^2}{\bar{r}^2}, \quad \bar{\sigma}_2 = 1 - \frac{\bar{r}_2^2}{\bar{r}^2}, \quad \bar{r}^2 = \sum_{k=1}^m \left(x_k - \frac{R^2}{\rho^2} \xi_k \right)^2, \\ \bar{r}_i^2 = & \left(x_i + \frac{R^2}{\rho^2} \xi_i \right)^2 + \sum_{k=1, k \neq i}^m \left(x_k - \frac{R^2}{\rho^2} \xi_k \right)^2, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (19), перепишем интеграл I_1 в виде

$$I_1 = \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial n} dC_\varepsilon = I_4 + I_5 + I_6,$$

где

$$\begin{aligned} I_4 = & 2\beta_0\gamma_0 \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) r^{-2\beta_0} F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \frac{\partial}{\partial n} \left[\ln \frac{1}{r} \right] dC_\varepsilon, \\ I_5 = & -2\beta_0\gamma_0 \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) r^{-2\beta_0-2} \xi_1 F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \cos(n; x_1) dC_\varepsilon, \\ I_6 = & -2\beta_0\gamma_0 \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) r^{-2\beta_0-2} \xi_2 F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \cos(n; x_2) dC_\varepsilon. \end{aligned}$$

В интеграле I_4 переходим в обобщенную сферическую систему координат

$$x_1 = \xi_1 + \varepsilon \Phi_1, \dots, x_m = \xi_m + \varepsilon \Phi_m,$$

где $\Phi_1 = \cos \varphi_1$, $\Phi_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$, $\Phi_3 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$, ...,
 $\Phi_{m-1} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}$, $\Phi_m = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$
 $[\varepsilon \geq 0, 0 \leq \varphi_1 \leq \pi, \dots, 0 \leq \varphi_{m-2} \leq \pi, 0 \leq \varphi_{m-1} \leq 2\pi]$.

Тогда мы имеем

$$I_4 = 2\beta_0 \gamma_0 \varepsilon^{-2\beta_0-2+m} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{m-3} d\varphi_{m-3} \dots$$

$$\dots \int_0^\pi (\xi_1 + \varepsilon \Phi_1)^{2\alpha_1} (\xi_2 + \varepsilon \Phi_2)^{2\alpha_2} u_0(\xi_1 + \varepsilon \Phi_1, \dots, \xi_m + \varepsilon \Phi_m) F_2(\varepsilon) \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1,$$

где $F_2(\varepsilon, \varphi) := F_2\left(1 + \beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; 1 - \frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}, 1 - \frac{r_{2\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right),$

$$r_{i\varepsilon}^2 = (2\xi_i + \varepsilon \Phi_i(\varphi))^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1, k \neq i}^{\infty} [\Phi_k(\varphi) \xi_k]^2, i = 1, 2.$$

Для полного вычисления I_4 сначала вычислим $F_2(\varepsilon, \varphi)$. Используя последовательно формулу разложения [16]

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b_1)_k (b_2)_k}{k! (c_1)_k (c_2)_k} \times$$

$$\times x^k y^k F(a+k, b_1+k; c_1+k; x) F(a+k, b_2+k; c_2+k; y)$$

и известную формулу Больца [27]

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right),$$

получим

$$F_2(\varepsilon, \varphi) := \varepsilon^{2\alpha_1+2\alpha_2} r_{1\varepsilon}^{-2\alpha_1} r_{2\varepsilon}^{-2\alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\beta_0)_k (\alpha_1)_k (\alpha_2)_k}{(2\alpha_1)_k (2\alpha_2)_k k!} \left(\frac{\varepsilon^2 - r_{1\varepsilon}^2}{r_{1\varepsilon}^2}\right)^k \left(\frac{\varepsilon^2 - r_{2\varepsilon}^2}{r_{2\varepsilon}^2}\right)^k \times$$

$$\times F\left(2\alpha_1 - \beta_0 - 1, \alpha_1 + k; 2\alpha_1 + k; 1 - \frac{\varepsilon^2}{r_{1\varepsilon}^2}\right) F\left(2\alpha_2 - \beta_0 - 1, \alpha_2 + k; 2\alpha_2 + k; 1 - \frac{\varepsilon^2}{r_{2\varepsilon}^2}\right),$$

где $F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$ – гипергеометрическая функция Гаусса [27].

Теперь рассмотрим предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2\alpha_1-2\alpha_2} F_2(\varepsilon, \varphi)$. Применив несколько раз формулу суммирования [27]

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0,$$

будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2\alpha_1-2\alpha_2} F_2(\varepsilon, \varphi) := (2\xi_1)^{-2\alpha_1} (2\xi_2)^{-2\alpha_2} \frac{\Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2) \Gamma(m/2)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \Gamma(1+\beta_0)}. \quad (21)$$

Нетрудно вычислить, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{m-3} d\varphi_{m-3} \dots \int_0^\pi \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1 = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}. \quad (22)$$

Принимая во внимание (21) и (22), а также имея в виду значения β_0 и γ_0 (см. формулу (10)), получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_4 = u(\xi). \quad (23)$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_5 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_6 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3 = 0. \quad (24)$$

Таким образом, в силу (12), (23) и (24) левая часть равенства (11) при переходе к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ стала известной:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u_0 \frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right] dC_\varepsilon = u_0(\xi). \quad (25)$$

Теперь займемся правой частью равенства (11). Рассмотрим интеграл

$$\int_S x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \varphi(S) \frac{\partial G_0(x, \xi)}{\partial n} dS.$$

Поскольку на сфере S выполняются равенства $\bar{r}^2 = r^2$, $\bar{r}_1^2 = r_1^2$, $\bar{r}_2^2 = r_2^2$, $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1$ и $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2$, то, с учетом формул (19) и (20), после нескольких элементарных преобразований, найдем

$$\left. \frac{\partial G_0(x, \xi)}{\partial n} \right|_S = 2\beta_0 \gamma_0 F_2(1 + \beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^{2+2\beta_0}}. \quad (26)$$

Подставив теперь (25) и (26) в формулу (11), получим решение задачи Хольмгрена с условиями (3) – (5) для уравнения (2) в явном виде:

$$\begin{aligned} u_0(\xi) = & 2\beta_0 \gamma_0 \int_S x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} F_2(1 + \beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^{2+2\beta_0}} \varphi(S) dS - \\ & - \gamma_0 \int_{D_1} x_2^{2\alpha_2} \left[\frac{F(\beta_0, \alpha_2; 2\alpha_2; \sigma_2^0)}{X_1^{2\beta_0}} - \frac{F(\beta_0, \alpha_2; 2\alpha_2; \bar{\sigma}_2^0)}{\bar{X}_1^{2\beta_0}} \right] v_1(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 - \\ & - \gamma_0 \int_{D_2} x_1^{2\alpha_1} \left[\frac{F(\beta_0, \alpha_1; 2\alpha_1; \sigma_1^0)}{X_2^{2\beta_0}} - \frac{F(\beta_0, \alpha_1; 2\alpha_1; \bar{\sigma}_1^0)}{\bar{X}_2^{2\beta_0}} \right] v_2(\tilde{x}_2) d\tilde{x}_2, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\sigma_2^0 = \sigma_2|_{x_1=0}, \quad \sigma_1^0 = \sigma_1|_{x_2=0}, \quad \bar{\sigma}_2^0 = \bar{\sigma}_2|_{x_1=0}, \quad \bar{\sigma}_1^0 = \bar{\sigma}_1|_{x_2=0}, \quad X_k^2 = \xi_k^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^m (x_i - \xi_i)^2,$$

$$\bar{X}_k^2 = \sum_{i=1, i \neq k}^m \left(R - \frac{x_i \xi_i}{R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \sum_{i=1, i \neq k}^m \sum_{j=1, j \neq i}^m x_i^2 \xi_j^2 - (m-2)R^2, \quad k=1, 2.$$

Формула (27), а с ней и все доказательство, требует, чтобы $m > 2$. Однако формула (27) верна и для $m = 2$.

Таким образом, доказана

Теорема. Существует единственное решение задачи Хольмгрена с условиями (3) – (5) для уравнения (2) при $m \geq 2$ и оно представляется формулой (27).

ЛИТЕРАТУРА

1. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961. 208 с.
2. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 712 с.
3. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.
4. Gilbert R.P. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. New York; London: Academic Press, 1969. 308 p.
5. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. Agostinelli C. Integrazione dell'equazione differenziale $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + x^{-1}u_x = f$ e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. 1937. V. 26. No. 6. P. 7–8.
7. Олевский М.Н. Решения задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = f$ в полусферической области // ДАН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 767–770.
8. Эргашев Т.Г. Задача Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом // Бюллетень Института математики. 2019. № 2. С. 23–32.
9. Салахитдинов М.С., Хасанов А. К теории многомерного уравнения Геллерстедта // Узбекский математический журнал. 2007. № 3. С. 95–109.
10. Уринов А.К. Фундаментальные решения для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами // Научный вестник Ферганского государственного университета. 2006. № 1. С. 5–11.
11. Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2017 V. 62. No. 3. P. 287–296. <http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2016.1218853>.
12. Назинов И.Т. Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 69–85.
13. Салахитдинов М.С., Хасанов А. Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Трикоми // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1979. № 6. С. 29–33.
14. Karimov E.T., Nieto J.J. The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients // Computers and Mathematics with Applications. 2011. No. 62. P. 214–224. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.09.013>.
15. Ergashev T.G., Hasanov A. Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation // Uzbek Mathematical Journal. 2018. No. 1. P. 55–64.
16. Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell's double hypergeometric functions // Quart. J. Math. (Oxford). 1940. Ser. 11. P. 249–270.
17. Хасанов А. Об одной смешанной задаче для уравнения $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1982. № 2. С. 28–32.
18. Аманов Д. Некоторые краевые задачи для вырождающегося эллиптического уравнения в неограниченной области // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1984. № 1. С. 8–13.
19. Аманов Д. Краевая задача для уравнения $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ в неограниченной области // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1984. № 2. С. 8–10.
20. Salakhiddinov M.S., Karimov E.T. Spatial boundary problem with the Dirichlet–Neumann condition for a singular elliptic equation // Applied Mathematics and Computation. 2012. V. 219. P. 3469–3476. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.09.013>.

21. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // *Sohag J. Math.* 2015. V. 2. No. 1. P.1–10.
22. Berdyshev A.S., Hasanov A., Ergashev T.G. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. II // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2019. P. 1–19. <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219>
23. Эргашев Т.Г. Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца // *Уфимский математический журнал*. 2018. Т. 10. Вып. 4. С. 111–122. DOI:10.13108/2018-10-4-111.
24. Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2017. № 50. С. 45–56. DOI 10.17223/19988621/50/4.
25. Ergashev T.G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients // *Computers and Mathematics with Applications*. 2019. V. 77. P. 69–76. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.09.014>.
26. Уринов А.К., Эргашев Т.Г. Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 55. С. 45–56. DOI 10.17223/19988621/55/5.
27. Бейтмен Г., Эрдёи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.

Статья поступила 30.11.2019 г.

Ergashev T.G., Komilova N.J. (2020) HOLMGREN PROBLEM FOR MULTUDIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATION WITH TWO SINGULAR COEFFICIENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63 pp. 47–59

DOI 10.17223/19988621/63/5

Keywords: multidimensional elliptic equation with two singular coefficients; Holmgren problem; fundamental solution; Gauss – Ostrogradsky formula; Green function.

Fundamental solutions of the two-dimensional elliptic equation were known in the first half of the last century and they were successfully used in solving the basic boundary value problems and constructing the theory of potential for this equation. Relatively few papers have been devoted to the study of boundary value problems for multidimensional (greater than two-dimensional) elliptic equations with singular coefficients. For example, main boundary value problems for two-dimensional and three-dimensional elliptic equations with two singular coefficients in finite and infinite domains have been studied by many authors; however, the study of the Holmgren problem was limited to the two-dimensional case. This work is devoted to finding a unique solution to the Holmgren problem for a multidimensional elliptic equation with two singular coefficients in a quarter of a ball. Using the “abc” method, the uniqueness for the solution of the Holmgren problem is proved. Applying the method of Green’s function, we are able to find the solution of the problem in an explicit form. Moreover, the decomposition formula, formula of differentiation, and some adjacent relations for Appell’s hypergeometric functions were used in order to find the explicit solution for the formulated problem.

AMS Mathematical Subject Classification: 35A08, 35J25, 35J70, 35J75

Tuhtasin G. ERGASHEV (Candidate of Physics and Mathematics, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan), E-mail: ertuhtasin@mail.ru

Nigora J. KOMILOVA (Fergana State University, Fergana, Uzbekistan).
E-mail: nigora.komilova@bk.ru

REFERENCES

1. Bers L. (1958) *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*. New York: Dover Publications Inc.
2. Frankl F.I. (1973) *Izbrannyye trudy po gazovoy dinamike* [Selected works on gas dynamics]. Moscow: Nauka.
3. Smirnov M.M. (1966) *Vyrozhdaiushchiesya ellipticheskie i giperbolicheskie uravneniya* [Degenerate elliptic and hyperbolic equations]. Moscow: Nauka.
4. Gilbert R. (1969) *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations*. New York, London: Academic Press.
5. Bitsadze A.V. (1981) *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow: Nauka.
6. Agostinelli C. (1937) Integrazione dell'equazione differenziale $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + x^{-1}u_x = f$ e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*. 6(26). pp. 7–8.
7. Olevskii M.N. (1949) Resheniya zadachi Dirikhle, odnosyashyeysya k uravneniyu $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = f$ dlya polusfericheskoy oblasti [Dirichlet problem solutions related to the equation $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = f$ for a hemispherical region]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Reports of the Academy of Sciences of USSR*. 64(6). pp. 767–770.
8. Ergashev T.G. (2019) Zadacha Kholmgrena dlya mnogomernogo ellipticheskogo uravneniya s odnim singulyarnym koeffitsiyentom [Holmgren problem for a multidimensional elliptic equation with one singular coefficient]. *Byulleten' Instituta matematiki – Bulletin of the Institute of Mathematics*. 2. pp. 23–32.
9. Salakhiddinov M.S., Hasanov A. (2007) K teorii mnogomernogo uravneniya Gellerstedta [On the theory of the multidimensional Gellerstedt equation]. *Uzbekskiy matematicheskii zhurnal – Uzbek Mathematical Journal*. 3. pp. 95–109.
10. Urinov A.K. (2006) Fundamental'nye resheniya dlya nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa s singulyarnymi koeffitsiyentami [On fundamental solutions for the some type of the elliptic equations with singular coefficients]. *Nauchnyy vestnik Ferganskogo gosudarstvennogo universiteta – Scientific Records of the Fergana State University*. 1. pp. 5–11.
11. Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. (2017) Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation. *Complex variables and elliptic equations*. 62(3). pp. 287–296. <http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2016.1218853>.
12. Nazipov I.T. (2011) Solution of the special Tricomi problem for a singular mixed-type equation by the method of integral equations. *Russian Mathematics*. 55(3). pp. 61–76. DOI: 10.3103/S1066369X1103008X.
13. Salakhiddinov M.S., Hasanov A. (1979) Ob odnoy kraevoy zadache dlya obobshennogo uravneniya Trikomy [On a boundary value problem for the generalized Tricomi equation]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk – Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Ser. of phys. and math. sciences*. 6. pp. 29–33.
14. Karimov E.T., Nieto J.J. (2011) The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*. 62. pp. 214–224. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.04.068.
15. Ergashev T.G., Hasanov A. (2018) Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 55–64.
16. Burchnall J.L., Chaundy T.W. (1940) Expansions of Appell's double hypergeometric functions. *Quart. J. Math. (Oxford)*. 11. pp. 249–270.
17. Hasanov A. (1982) Ob odnoy smeshannoy zadache dlya uravneniya $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ [On a mixed problem for the equation $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk – Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Ser. of phys. and math. sciences*. 2. pp. 28–32.

18. Amanov D. (1984) Nekotorye kraevye zadachi dlya vyrozhdayushchegosya ellipticheskogo uravneniya v neogranichennoy oblasti [Some boundary value problems for a degenerate elliptic equation in an unbounded domain]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. fiz.-mat.nauk – Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Ser. of phys. and math. sciences.* 1. pp. 8–13.
19. Amanov D. (1984) Krayevaya zadacha dlya uravneniya $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ [A boundary value problem for the equation $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. fiz.-mat.nauk – Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Ser. of phys. and math. sciences.* 2. pp. 8–10.
20. Salakhiddinov M.S., Karimov E.T. (2012) Spatial boundary problem with the Dirichlet-Neumann condition for a singular elliptic equation. *Applied Mathematics and Computation.* 219. pp. 3469–3476. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.09.013>.
21. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. (2015) Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Sohag J. Math.* 2(1). pp. 1–10.
22. Berdyshev A.S., Hasanov A., Ergashev T.G. (2019) Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. II. *Complex Variables and Elliptic Equations.* pp. 1–19. <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219>.
23. Ergashev T.G. (2018) Third double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Ufa Mathematical Journal.* 10(4). pp. 111–121. DOI:10.13108/2018-10-4-111.
24. Ergashev T.G. (2017) Chetvertyy potentsial dvoynogo sloya dlya obobshchennogo dvoesimmetricheskogo uravneniya Gel'mgol'tsa [The fourth double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika I mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 50. pp. 45–56. DOI 10.17223/19988621/50/4.
25. Ergashev T.G. (2019) On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications.* 77. pp. 69–76. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.09.014>
26. Urinov A.K., Ergashev T.G. (2018) Konflyuentnye gipergeometricheskie funktsii mnogikh peremennykh i ikh primenenie k nakhozhdeniyu fundamental'nykh resheniy obobshchennogo uravneniya Gel'mgol'tsa s singulyarnymi koeffitsiyentami [Confluent hypergeometric functions of many variables and their application to finding fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with singular coefficients]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika I mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 55. pp. 45–56. DOI 10.17223/19988621/55/5.
27. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. (1953) *Higher Transcendental Functions.* 1. New York; Toronto; London: McGraw-Hill Book Company.

Received: November 30, 2019