УДК 539.313
DOI 10.17223/19988621/63/7

С.В. Бакушев

РАЗРЕШАЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Для математической модели сплошной среды, в которой переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига – только функцией интенсивности касательных напряжений, рассматривается построение разрешающего дифференциального уравнения – физически нелинейного аналога уравнения Леви линейной теории упругости – физически-нелинейной теории упругости в напряжениях для случая плоской деформации. Вводя обычным образом функцию напряжений, физически нелинейный аналог уравнения Леви будет представлять собой физически нелинейный аналог бигармонического уравнения для случая плоской деформации.

Ключевые слова: *теория упругости*, *плоская деформация*, *физическая нелинейность*, *разрешающее дифференциальное уравнение*, *решение в напряжениях.*

Оценка напряжённого и деформированного состояния многих ответственных частей зданий и сооружений выполняется в предположении, что эти части находятся в условиях плоской деформации. Сюда можно отнести, в частности, расчёт оснований под здания и сооружения, расчёт протяжённых фундаментов, расчёт канализационных каналов, расчёт трубопроводов больших диаметров и так далее. В настоящее время выполнение расчётов в предположении упругой работы материала конструкции уже нельзя считать достаточно удовлетворительным. В расчётах необходимо учитывать их реальные механические свойства, в частности физическую нелинейность, внутреннее трение в материале, взаимное влияние объёмного и сдвигового деформирования, геометрическую нелинейность и так далее. Тем более, что теоретические основы расчёта конструкций с учётом их реального механического поведения в настоящее время разработаны уже достаточно подробно [1– 6].

Однако от теоретических изысканий до практического внедрения разработанных методик проходит, как правило, достаточно длительное время. Это обусловлено и необходимостью экспериментальных обоснований разработанных методик, и необходимостью разработки расчётных соотношений для решения тех или иных задач или классов задач, и необходимостью выполнения поверочных расчётов, а также сравнения и анализ результатов решения тестовых задач по известным и предлагаемым методикам.

Целью данной работы является получение разрешающих дифференциальных уравнений физически-нелинейной теории упругости в напряжениях в случае плоской деформации для математической модели сплошной среды, в которой переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига – только функцией интенсивности касательных напряжений.

В настоящее время вопросам расчёта деформируемых твёрдых тел с учётом физической нелинейности уделяется пристальное внимание. В работе [7] представлена методика решения физически нелинейной плоской задачи теории упругости в перемещениях и её приложение к расчёту балок, взаимодействующих со средой, имеющих нелинейную диаграмму деформирования. Работа [8] посвящена разработке методики расчёта физически нелинейных пластинчатых систем типа призматических оболочек, взаимодействующих с упругой средой. В качестве примера рассмотрена П-образная система, контактирующая с упругой средой и представлена оценка влияния упругой среды и физической нелинейности на напряжённо-деформированное состояние пластинчатой системы. В статье [9] проанализированы вопросы целесообразности расчёта железобетонных конструкций по деформационной модели с учётом физической и геометрической нелинейности как конструктивных железобетонных систем в целом, так и их отдельных элементов. Работа [10] посвящена разработке разрешающих уравнений, описывающих напряжённо-деформированное состояние тонкостенных оболочечных конструкций, имеющих изломы поверхности, с учётом физически нелинейного деформирования. На базе использования обобщённых функций, содержащих разрывные функции Дирака и Хевисайда, предложен аналитический метод их решения. В статье [11], на основе решения плоской задачи физически нелинейной теории упругости, разработан метод расчёта нормальных нагрузок на крепь капитальных выработок и обделки тоннеля, проложенного в массиве, деформационные свойства которого описываются моделью физически нелинейного тела. В работе [12] рассматривается постановка физически нелинейно-пластической задачи о распределении напряжений вокруг выработки кругового очертания, сооружаемой в физически нелинейном массиве с начальным гидростатическим полем напряжений. Для исследования напряжённо-деформированного состояния использованы уравнения деформационной теории пластичности с условиями Кулона и А.Н. Ставрогина. Показано, что учёт нелинейности приводит к снижению размера области предельного состояния вокруг выработки. В работе [13] предлагается метод решения плоских задач физически нелинейной теории упругости, основанный на применении методов комплексного анализа, начатого в работах Колосова, Мусхелишвили, Векуа и их учеников. Работа [14] посвящена построению решения плоской статической задачи нелинейной теории упругости через комплексные потенциалы, обобщающие известные формулы Колосова. Решение строится для материалов с линейной зависимостью между деформациями Альманси и напряжениями Коши. В работе [15] рассматривается основанный на применении средств комплексного анализа в сочетании со стандартными численными методами оптимизации аналитико-численный метод решения трёхмерных краевых задач нелинейной теории упругости Мурнагана, позволяющий учитывать поведение материала при больших деформациях. Работа [16] посвящена общим подходам к решению пространственных физически нелинейных задач теории упругости, основанным на использовании аналитических функций – кватернионов. При квадратичном законе деформирования получены решения в напряжениях и смещениях. Авторы [17] рассматривают обобщённую плоскую задачу нелинейной теории упругости для полуплоскости, нагруженной на границе внешней сосредоточенной силой (нелинейная задача Фламана). Аналитические решения получены для двух моделей несжимаемого материала: неогуковского и Бартенева – Хазановича и одной модели сжимаемого полулинейного (гармонического) материала. В статье [18] описывается нелинейное поведение бетона как гиперупругого ортотропного материала на базе экспериментальных диаграмм деформирования при одноосном растяжении и сжатии: осевое напряжение – осевая деформация, осевое напряжение – поперечная деформация. В работе [19] рассматриваются вопросы проницаемости пород, составляющих резервуары хранения сланцевого газа. Показана исключительная чувствительность проницаемости породы от характера изменения её напряжённого состояния. Расчёты показали, что учёт нелинейной упругости материала породы наиболее точно описывает её сланцевую проницаемость, пористость, поровое давление и распределение эффективного напряжения. В работе [20] рассмотрена проблема учёта физической нелинейности при расчёте конструкций и их элементов из анизотропных материалов. Методика расчёта конструкций и их элементов основана на деформационной теории пластичности с использованием модифицированного метода Ньютона – Рафсона. Работа [21] посвящена разработке методики расчёта предварительно напряжённых железобетонных ферм с учётом физической и геометрической нелинейности. В основу методики положены алгоритмы нелинейного расчёта, реализованные и апробированные в вычислительном комплексе ПРИНС на базе метода конечных элементов шагово-итерационным методом. В статье [22] предложена конечно-элементная итерационная процедура для анализа напряжённо-деформированного состояния стальных плоских рам с учётом упругопластической работы материала и влияния продольных сил в стержнях на деформации изгиба. На каждой итерации решается линейная задача с использованием для конечных элементов секущих матриц жёсткости и матриц устойчивости. Статья [23] посвящена компьютерному моделированию деформированного состояния физически нелинейных трансверсально-изотропных тел с отверстием. Анизотропия механических свойств материалов описывается структурно-феноменологической моделью, согласно которой исходный материал представляется в виде комплекса из двух совместно работающих изотропных материалов: основного (связующего), рассматриваемого с позиций механики сплошной среды, и материала волокон, ориентированных вдоль направления анизотропии исходного материала. Для решения задачи теории пластичности применяется упрощённая теория малых упругопластических деформаций для трансверсально-изотропного тела, развитая Б.Е. Победрей. Работа [24] посвящена решению краевых задач обобщённой плоской деформации для упругого неогуковского тела, находящегося в поле объёмных сил. Общее решение, с использованием номинального тензора напряжений и функции напряжений, записывается через две голоморфные функции, а основные краевые задачи нелинейной теории упругости приводятся к задаче Римана – Гильберта для голоморфного вектора. Окончательное решение записывается в квадратурах с помощью интеграла Шварца. В работе [25] с использованием аналитических и численных методов рассмотрены фундаментальные вопросы математической корректности и численного решения краевых задач нелинейной теории упругости как в стационарной, так и в эволюционной постановках. Авторами [26] на основе комплексного подхода, позволившего получить более компактные и обозримые зависимости, была предложена предельно простая (без потери общности) версия общей нелинейной теории упругости. Предложенная теория позволяет получать точные решения двумерных краевых задач (плоская задача, антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения). В статье [27] представлен метод расчёта на динамическую устойчивость пластинчатых систем из физически нелинейных материалов, а также получена система нелинейных дифференциальных уравнений для исследования динамической устойчивости таких систем. В качестве примера выполнен расчёт на устойчивость П-образной оболочки. В работе [28] выполнен асимптотический анализ соотношений теории деформации сплошной среды с целью выявить возможности их упрощения. Критерий упрощения включает как масштаб изменения напряжённо-деформированного состояния, так и величину относительных удлинений и сдвигов. Это позволило конкретизировать и развить известный подход В.В. Новожилова к упрощению нелинейных соотношений механики сплошных сред, установить асимптотическую погрешность их приближенных вариантов.

Разрешающие дифференциальные уравнения в напряжениях физически-нелинейной теории упругости в общем случае трёхмерного деформирования при произвольных перекрёстных зависимостях между первыми инвариантами тензоров σ, ε и вторыми инвариантами девиаторов T, Γ напряжений и деформаций получены в работе [29]. Для случая плоской задачи, в частности обобщённого плоского напряжённого состояния, разрешающие дифференциальные уравнения в напряжениях физически-нелинейной теории упругости при произвольных перекрёстных зависимостях между первыми инвариантами тензоров σ, ε и вторыми инвариантами девиаторов T, Γ напряжений и деформаций получены в работе [30]. Для случая плоской деформации разрешающие дифференциальные уравнения в напряжениях физически-нелинейной теории упругости представлены в работе [31].

Вывод расчётных уравнений.

Рассмотрим сплошную среду, находящуюся в условиях плоской деформации, механическое поведение которой описывается математической моделью, в которой переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига – только функцией интенсивности касательных напряжений, то есть

$$K = K(\sigma); \quad G = G(T). \tag{1}$$

В формуле (1), в частности, обозначено:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y;$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2};$$
$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2}. \tag{2}$$

Физические соотношения при этом запишем в следующей форме:

$$\varepsilon_x = a\sigma_x + b\sigma_y; \quad \varepsilon_y = a\sigma_y + b\sigma_x; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \text{ причём } \sigma_z = c(\sigma_x + \sigma_y). \tag{3}$$

Здесь

$$a = \frac{3K + 4G}{4G(3K + G)}; \quad b = \frac{2G - 3K}{4G(3K + G)}; \quad c = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}. \tag{4}$$

Ввиду этого коэффициенты

$$a = a(\sigma, T); \quad b = b(\sigma, T); \quad c = c(\sigma, T). \tag{5}$$

С учётом формул (3), соотношения (2) получают вид

$$\sigma = (1+c)\left(\sigma_x + \sigma_y\right); \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y;$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(c^2 - c + 1\right)\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right) + \left(2c^2 - 2c - 1\right)\sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}; \tag{6}$$

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2}.$$

Подставляя физические соотношения (3) в уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{6}$$

и учитывая уравнения равновесия при постоянных объёмных силах:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0; \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + F_y = 0, \tag{7}$$

$\left(F_x = \text{const}, \quad F_y = \text{const}\right)$, получим уравнение неразрывности деформаций для физически нелинейной теории упругости для случая плоской деформации, записанное в напряжениях:

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = {} & \left(\frac{1}{G^2}\frac{\partial G}{\partial x} - 2\frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \left(\frac{1}{G^2}\frac{\partial G}{\partial y} - 2\frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} - 2\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y} - 2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x} - \\ & - \left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\right)\sigma_x - \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\right)\sigma_y - \frac{1}{G^2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y} - \frac{2}{G}\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}\right)\tau_{xy}.\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – гармонический оператор.

В правой части уравнения (8) производные определяются соотношениями:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 a}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 a}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 a}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 a}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 b}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 b}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 b}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 b}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial b}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

При этом, как это следует из зависимостей (4)

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma}=-\frac{9G}{4G(3K+G)^2}\frac{\partial K}{\partial \sigma};\quad \frac{\partial b}{\partial \sigma}=\frac{3(6K-G)}{4G(3K+G)^2}\frac{\partial K}{\partial \sigma};\quad \frac{\partial c}{\partial \sigma}=\frac{3(6K-G)}{2(G+3K)^2}\frac{\partial K}{\partial \sigma};$$

$$\frac{\partial a}{\partial T}=\frac{4G(3K+G)-(3K+4G)(3K+2G)}{4G^2(3K+G)^2}\frac{\partial G}{\partial T};$$

$$\frac{\partial b}{\partial T}=\frac{2G(3K+G)-(2G-3K)(2G+3K)}{4G^2(3K+G)^2}\frac{\partial G}{\partial T};$$

$$\frac{\partial c}{\partial T}=-\frac{18K}{(2G+6K)^2}\frac{\partial G}{\partial T};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2}=-\frac{9G}{4G(3K+G)^2}\frac{\partial^2 K}{\partial \sigma^2}+\frac{27G}{2G(3K+G)^3}\left(\frac{\partial K}{\partial \sigma}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2}=-\frac{9G}{4G(3K+G)^2}\frac{\partial^2 K}{\partial \sigma^2}+\frac{27G}{2G(3K+G)^3}\left(\frac{\partial K}{\partial \sigma}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}=-\frac{3(6K-G)}{2(3K+G)^2}\frac{\partial^2 K}{\partial \sigma^2}-\frac{27G}{(3K+G)^3}\left(\frac{\partial K}{\partial \sigma}\right)^2; \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial T^2}=\frac{4G(3K+G)-(4G+3K)(2G+3K)}{4G^2(3K+G)^2}\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}+$$

$$+\frac{4G(3K+G)(3K+2G)-(3K+4G)\left[G^2+G(3K+G)+(3K+G)^2\right]}{2G^3(3K+G)^3}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial T^2}=\frac{2G(3K+G)+(3K-2G)(3K+2G)}{4G^2(3K+G)^2}\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}-$$

$$-\frac{2G(3K+G)(3K+2G)+(3K-2G)\left[G^2+G(3K+G)+(3K+G)^2\right]}{2G^3(3K+G)^3}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial T^2}=-\frac{9K}{2(3K+G)^2}\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}+\frac{2(6K-G)}{(3K+G)^3}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2,$$

причём

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y};\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}. \tag{11}$$

В формулах (9), (10) и (11) в соответствии с зависимостями (2)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}=\frac{1+c}{\alpha-\gamma\delta}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)+\frac{\gamma}{\beta(\alpha-\gamma\delta)}\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+B\left(\sigma_x\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right];$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}=\frac{1+c}{\alpha-\gamma\delta}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+\frac{\gamma}{\beta(\alpha-\gamma\delta)}\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right];\qquad(12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{1}{\beta-\delta\frac{\gamma}{\alpha}}\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+\right.$$
$$\left.+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{(1+c)\delta}{\alpha}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{\beta-\delta\frac{\gamma}{\alpha}}\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{(1+c)\delta}{\alpha}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\right].$$

В формулах (12) введены обозначения:

$$A=c^2-c+1;\quad B=2c^2-2c-1;\quad \alpha=1-\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\frac{\partial c}{\partial\sigma};$$

$$\beta=6T-\left(\sigma_{\text{x}}^2+\sigma_y^2\right)\frac{\partial A}{\partial T}-\sigma_x\sigma_y\frac{\partial B}{\partial T};\quad \gamma=\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\frac{\partial c}{\partial T};\quad \delta=\left(\sigma_{\text{x}}^2+\sigma_y^2\right)\frac{\partial A}{\partial\sigma}-\sigma_x\sigma_y\frac{\partial B}{\partial\sigma}.$$

Формулы для вторых производных получают вид

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=\frac{1}{(\alpha-\gamma\delta)^2}\left\{(\alpha-\gamma\delta)\left[\frac{\partial c}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+(1+c)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)\right]+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\gamma}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right]+$$
$$+\frac{\gamma}{\beta}\left[2\frac{\partial A}{\partial x}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+2A\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)+\right.$$
$$+\frac{\partial B}{\partial x}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right)+$$
$$\left.+6\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+6\tau_{xy}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x^2}\right]-\left\langle(1+c)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+\frac{\gamma}{\beta}\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right]\right\rangle\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\delta\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)\right\};$$

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}=\frac{1}{(\alpha-\gamma\delta)^2}\left\{(\alpha-\gamma\delta)\left[\frac{\partial c}{\partial y}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+(1+c)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)\right]+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\gamma}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right]+$$

$$+\frac{\gamma}{\beta}\left[2\frac{\partial A}{\partial y}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+2A\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial B}{\partial y}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}\right)+$$

$$\left.+6\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+6\tau_{xy}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial y^2}\right]-\left\langle(1+c)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+\frac{\gamma}{\beta}\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right]\right\rangle\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\delta\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\gamma\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)\Bigg\};$$

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}=\frac{1}{(\alpha-\gamma\delta)^2}\left\{(\alpha-\gamma\delta)\left[\frac{\partial c}{\partial y}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+(1+c)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x\partial y}\right)\right]+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\gamma}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right]+$$

$$+\frac{\gamma}{\beta}\left[2\frac{\partial A}{\partial y}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+2A\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x\partial y}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial B}{\partial y}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\partial y}\right)+$$

$$\left.+6\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+6\tau_{xy}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}\right]-\left\langle(1+c)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+\frac{\gamma}{\beta}\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right]\right\rangle\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\delta\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\gamma\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)\Bigg\}; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\alpha^2}{(\alpha\beta-\gamma\delta)^2}\left\{\left(\beta-\delta\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left\langle 2\frac{\partial A}{\partial x}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+\right.\right.$$

$$+2A\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial B}{\partial x}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+$$

$$+B\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right)+6\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+6\tau_{xy}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x^2}+$$

$$\left.+\frac{\partial c}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\frac{\delta}{\alpha}+(1+c)\left[\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)\frac{\delta}{\alpha}+\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\delta}{\partial x}-\frac{\delta}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)\right]\right\rangle-$$

$$-\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+(1+c)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\frac{\delta}{\alpha}\right]\left[\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\partial\delta}{\partial x}-\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\gamma}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)\right];$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{\alpha^2}{(\alpha\beta-\gamma\delta)^2}\left\{\left(\beta-\delta\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left\langle 2\frac{\partial A}{\partial y}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+\right.\right.$$

$$+2A\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial B}{\partial y}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)+$$

$$+B\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}\right)+6\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+6\tau_{xy}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial y^2}+$$

$$\left.+\frac{\partial c}{\partial y}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\frac{\delta}{\alpha}+(1+c)\left[\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)\frac{\delta}{\alpha}+\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\delta}{\partial y}-\frac{\delta}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right]\right\rangle-$$

$$-\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\right.$$

$$\left.\left.+(1+c)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\frac{\delta}{\alpha}\right]\left[\frac{\partial\beta}{\partial y}-\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\partial\delta}{\partial y}-\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\gamma}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right]\right\};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}=\frac{\alpha^2}{(\alpha\beta-\gamma\delta)^2}\left\{\left(\beta-\delta\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left\langle 2\frac{\partial A}{\partial y}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+\right.\right.$$

$$+2A\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial B}{\partial y}\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+$$

$$+B\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_x\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\partial y}\right)+6\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+6\tau_{xy}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+$$

$$\left.+\frac{\partial c}{\partial y}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\frac{\delta}{\alpha}+(1+c)\left[\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x\partial y}\right)\frac{\delta}{\alpha}+\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\delta}{\partial y}-\frac{\delta}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right]\right\rangle-$$

$$-\left[2A\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)+B\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\right.$$

$$\left.\left.+(1+c)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\frac{\delta}{\alpha}\right]\left[\frac{\partial\beta}{\partial y}-\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\partial\delta}{\partial y}-\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\gamma}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right]\right\}.$$

В формулах (13)

$$\frac{\partial A}{\partial x}=(2c-1)\frac{\partial c}{\partial x};\quad \frac{\partial A}{\partial y}=(2c-1)\frac{\partial c}{\partial y};\quad \frac{\partial B}{\partial x}=2(2c-1)\frac{\partial c}{\partial x};\quad \frac{\partial B}{\partial y}=2(2c-1)\frac{\partial c}{\partial y};$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=-\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\frac{\partial c}{\partial\sigma}-(\sigma_x+\sigma_y)\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial x};\quad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=-\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\frac{\partial c}{\partial\sigma}-(\sigma_x+\sigma_y)\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial y};$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}=6\frac{\partial T}{\partial x}-2\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\frac{\partial A}{\partial T}-\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)\frac{\partial^2 A}{\partial T\partial x}-\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)\frac{\partial B}{\partial T}-\sigma_x\sigma_y\frac{\partial^2 B}{\partial T\partial x};$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}=6\frac{\partial T}{\partial y}-2\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\frac{\partial A}{\partial T}-\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)\frac{\partial^2 A}{\partial T\partial y}-\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)\frac{\partial B}{\partial T}-\sigma_x\sigma_y\frac{\partial^2 B}{\partial T\partial y};$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\frac{\partial c}{\partial T}+\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\frac{\partial^2 c}{\partial T\partial x};\quad \frac{\partial\gamma}{\partial y}=\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\frac{\partial c}{\partial T}+\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\frac{\partial^2 c}{\partial T\partial y};\quad (14)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial x}=2\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\frac{\partial A}{\partial\sigma}-\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial x}+\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)\frac{\partial B}{\partial\sigma}+\sigma_x\sigma_y\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma\partial x};$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial y}=2\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\frac{\partial A}{\partial\sigma}-\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial y}+\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)\frac{\partial B}{\partial\sigma}+\sigma_x\sigma_y\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma\partial y},$$

причём

$$\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial c}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\frac{\partial A}{\partial\sigma}=(2c-1)\frac{\partial c}{\partial\sigma};\quad \frac{\partial A}{\partial T}=(2c-1)\frac{\partial c}{\partial T};\quad \frac{\partial B}{\partial\sigma}=2(2c-1)\frac{\partial c}{\partial\sigma};\quad \frac{\partial B}{\partial T}=2(2c-1)\frac{\partial c}{\partial T};$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial x}=\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial y}=\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T\partial x}=\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 A}{\partial T\partial y}=\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial y};\quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma\partial x}=\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 B}{\partial\sigma\partial y}=\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial T\partial x}=\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial^2 B}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 B}{\partial T\partial y}=\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial^2 B}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial x}=\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial y}=\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial T\partial x}=\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial^2 c}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 c}{\partial T\partial y}=\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial^2 c}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial y}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma^2}=2\frac{\partial c}{\partial\sigma}\frac{\partial c}{\partial\sigma}+(2c-1)\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma^2};\quad \frac{\partial^2 A}{\partial T^2}=2\frac{\partial c}{\partial T}\frac{\partial c}{\partial T}+(2c-1)\frac{\partial^2 c}{\partial T^2};$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma^2}=4\frac{\partial c}{\partial\sigma}\frac{\partial c}{\partial\sigma}+2(2c-1)\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma^2};\quad \frac{\partial^2 B}{\partial T^2}=4\frac{\partial c}{\partial T}\frac{\partial c}{\partial T}+2(2c-1)\frac{\partial^2 c}{\partial T^2};\quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial T}=2\frac{\partial c}{\partial\sigma}\frac{\partial c}{\partial T}+(2c-1)\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial T};\quad \frac{\partial^2 B}{\partial\sigma\partial T}=4\frac{\partial c}{\partial\sigma}\frac{\partial c}{\partial T}+2(2c-1)\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma\partial T}.$$

Введём обычным образом функцию напряжений $\varphi=\varphi(x,y)$ так, что

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}.\quad (17)$$

При этом уравнения равновесия (7) без учёта объёмных сил удовлетворяются тождественно.

С учётом формул (17) уравнение неразрывности деформаций (8) будет представлять собой физически нелинейный аналог бигармонического уравнения для плоской деформации. Вполне понятно, что в отличие от физически линейной теории упругости, где бигармоническое уравнение является однородным, аналог бигармонического уравнения для физически нелинейной теории упругости является неоднородным. Вид правой части уравнения (8) существенно определяется видом рассматриваемой математической модели сплошной среды.

Если механическое поведение сплошной среды описывается линейным законом, то есть

$$K = \mathrm{const}, \quad G = \mathrm{const}, \tag{18}$$

то уравнение (8) приводится к уравнению Леви линейной теории упругости:

$$\nabla^2 \left(\sigma_x + \sigma_y \right) = 0 . \tag{19}$$

Заключение

Полученные в статье результаты – разрешающие дифференциальные уравнения физически нелинейной теории упругости в напряжениях для плоской деформации, когда переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига – только функцией интенсивности касательных напряжений – могут найти применение при решении задач расчёта деформируемых тел и сплошных сред, находящихся в условиях плоской деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твёрдых тел: в 2 ч. Часть 1. Малые деформации: пер. с англ. / под ред. А.П. Филина. М.: Наука, 1984. 600 с.
2. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твёрдых тел: в 2 ч. Часть II. Конечные деформации: пер. с англ. / под ред. А.П. Филина. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 780 с.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
6. *Гениев Г.А.*, *Лейтес В.С.* Вопросы механики неупругих тел. М.: Стройиздат, 1981. 160 с.
7. *Иванов С.П.*, *Ахметшин М.Н.* Решение физически нелинейной плоской задачи теории упругости и её приложение к расчёту балок, контактирующих со средой // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 33–36.
8. *Иванов С.П.*, *Иванов О.Г.* Расчёт физически нелинейных пластинчатых систем, взаимодействующих с упругой средой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 1. С. 146–155.
9. *Дудина И.В.*, *Жердева С.А.* Учёт физической нелинейности материалов при оценке надёжности железобетонных конструкций // Системы. Методы. Технологии. 2009. № 2 (2). С. 66–68.
10. *Пичугин С.Н.* Расчёт оболочечных конструкций в виде резервуаров с физически нелинейным деформированием // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2010. № 3. С. 64–69.
11. *Протосеня А.Г.*, *Семенов В.И.*, *Супрун И.К.* Расчёт нагрузок на крепь выработок и тоннелей, сооружаемых в физически нелинейных массивах // Записки Горного института. 2012. Т. 199. С. 173–175.
12. *Протосеня А.Г.* Физически нелинейно-пластическая задача о распределении напряжений вокруг выработки кругового очертания // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2014. № 2. С. 43–48.

13. *Александрович А.И.*, *Горлова А.В.* Исследование плоской задачи для физически нелинейного упругого тела методами теории функций комплексного переменного. // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2007. № 3. С. 63–72.
14. *Бондарь В.Д.* Метод комплексных потенциалов в нелинейной теории упругости // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41. № 1 (239). С. 133–143.
15. *Шеина А.А.*, *Александрович А.И.* Решение пространственных задач нелинейной теории упругости методами многомерного комплексного анализа // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–4. С. 1862–1863.
16. *Нифагин В.А.*, *Севрук А.Б.* Общие приближенные решения основных задач пространственной нелинейной теории упругости в аналитических многомерных функциях матричной переменной // Наука и техника. 2007. № 1. С. 60–65. DOI 10.21122/2227-1031-2007-0-1-60-65.
17. *Мальков В.М.*, *Малькова Ю.В.* Анализ сингулярности напряжений в нелинейной задаче Фламана для некоторых моделей материала // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 4. С. 652–660.
18. *Lavrov Kirill*, *Semenov Artem*, *Benin Andrey*. Modeling of nonlinear multiaxial deformation of concrete on the base of hyperelastic orthotropic model // MATEC Web of Conferences. 2016. 53:01043. DOI 10.1051/matecconf/20165301043.
19. *Chenji Wei*, *Liangang Wang*, *Baozhu Li*, *Lihui Xiong*, *Shuangshuang Liu*, *Jie Zheng*, *Suming Hu*, *Hongqing Song.* A study of nonlinear elasticity effects on permeability of stress sensitive shale rocks using an improved coupled flow and geomechanics model: a case study of the longmaxi shale in China // Energies. 2018. 11(2): 329. DOI 10.3390/en11020329.
20. *Блохина Н.С.* Расчёт конструкций из анизотропных материалов с учётом физической нелинейности // Строительная механика и расчёт сооружений. 2012. № 1 (240). С. 3–5.
21. *Агапов В.П.*, *Айдемиров К.Р.* Применение метода конечных элементов с учётом физической и геометрической нелинейности для расчёта предварительно напряжённых железобетонных ферм // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017. Т. 44. № 1. С. 127–137. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137.
22. *Серпик И.Н.*, *Балабин П.Ю.*, *Школяренко Р.О.* Расчёт рамных конструкций в физически нелинейной постановке с учётом влияния продольных сил на изгиб // Проблемы инновационного биосферно-совместимого социально-экономического развития в строительном, жилищно-коммунальном и дорожном комплексах: Материалы 4-й Международной научно-практической конференции, посвященной 55-летию строительного факультета и 85-летию БГИТУ. 2015. С. 363–366.
23. *Полатов А.М.* Компьютерное моделирование деформированного состояния физически нелинейных трансверсально-изотропных тел с отверстием // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11. № 1. С. 25–35. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.1.3.
24. Мартынов Н.И. Краевые задачи для неогуковского материала в нелинейной теории упругости // Наука и мир. 2014. № 9 (13). С. 25–31.
25. *Бригаднов И.А.*, *Бухштабер В.М.*, *Антонова И.А.*, *Соколова Е.Г.*, *Шаров С.А.* Математическая корректность и методы решения краевых задач нелинейной упругости: Отчёт о НИР № 96-01-00054 (Российский фонд фундаментальных исследований).
26. *Черных К.Ф.* Вариант нелинейной теории упругости. его структура и возможности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. № 3–4. С. 55–62.
27. *Иванов С.П.*, *Иванова А.С.* Динамическая устойчивость физически нелинейных пластинчатых систем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 4. С. 9–18.
28. *Шамина В.А.*, *Веселков С.Ю.*, *Слепнева Л.В.* Основные модели нелинейной механики деформируемого тела: Отчёт о НИР № 95-01-00334 (Российский фонд фундаментальных исследований)
29. *Бакушев С.В.* Уравнения физически нелинейной теории упругости в напряжениях // Региональная архитектура и строительство. 2011. №1(12). С. 117–123.

30. *Бакушев С.В.* Плоская задача физически нелинейной теории упругости – решение в напряжениях // Региональная архитектура и строительство. 2014. №1(18). С. 82–88.
31. *Бакушев С.В.* Плоская деформация физически нелинейной теории упругости – решение в напряжениях // Строительная механика и расчёт сооружений. 2014. № 2. С. 2–9.

Статья поступила 18.03.2019 г.

Bakushev S.V.(2020) RESOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PHYSICALLY NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY IN TERMS OF STRESSES FOR A PLANE STRAIN. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 72–86

DOI 10.17223/19988621/63/7

Keywords: theory of elasticity, plane strain, physical nonlinearity, resolving differential equation, solution in terms of stresses.

The paper is aimed to obtain resolving differential equations of physically nonlinear theory of elasticity in terms of stresses for a plane strain. These equations represent a mathematical model of the continuum whose variable coefficient of the volume expansion (compressibility) is a function of average stress only, and the variable coefficient of the shear is a function of tangential stress intensity only. The resolving differential equations are obtained by inserting the physical relations, in which the strains are expressed in terms of stresses, into Saint-Venant's compatibility condition written for a plane problem. As a result, a physically nonlinear analogue of the Levy equation for linear theory of elasticity is derived. When balance equations are satisfied irrespective of volume forces, stress function introducing yields a physically nonlinear analogue of the Levy equation represented as a physically nonlinear analogue of the biharmonic equation for a plane strain. As opposed to physically linear theory of elasticity, where biharmonic equations are homogeneous, the analogue to the biharmonic equation of physically nonlinear theory of elasticity is inhomogeneous. The form of the right side of the biharmonic equation is governed by the analyzed mathematical model of continuum. The obtained results can be used when solving the problems of physically nonlinear theory of elasticity in terms of stresses.

Sergey V. BAKUSHEV (Doctor of Technical Sciences, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation). E-mail: bakuchsv@mail.ru

REFERENCES

1. Bell Dzh.F. (1984) *Eksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tverdykh tel. Chast I. Malye deformatsii.* [Experimental basis of the deformable solid mechanics. Part 1. Small strains]. Moscow: Nauka.
2. Bell Dzh.F. (1984) *Eksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tverdykh tel. Chast II. Konechnye deformatsii.* [Experimental basis of the deformable solid mechanics. Part 2. Finite strains]. Moscow: Nauka.
3. Kauderer G. (1961) *Nelineynaya mekhanika* [Nonlinear Mechanics]. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury.
4. Lurie A.I. (1990) *Nonlinear Theory of Elasticity.* Amsterdam: North-Holland.
5. Novozhilov V.V. (1958) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Leningrad: Sudpromgiz.
6. Geniev G.A., Leytes V.S. (191) *Voprosy mekhaniki neuprugikh tel* [Issues of the mechanics of inelastic bodies]. Moscow: Stroyizdat.
7. Ivanov S.P., Akhmetshin M.N. (2012) Reshenie fizicheski nelineynoy ploskoy zadachi teorii uprugosti i ee prilozhenie k raschetu balok, kontaktiruyushchikh so sredoy [Solution to the physically nonlinear plane problem of the theory of elasticity and its application in the calculation of the beams interacting with medium]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2. pp. 33–36.

8. Ivanov S.P., Ivanov O.G. (2005) Raschet fizicheski nelineynykh plastinchatykh sistem, vzaimodeystvuyushchikh s uprugoy sredoy [Calculation of physically non-linear plate systems, interacting with elastic medium]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy – Mechanics of Composite Materials and Structures*. 11(1). pp. 146–155.
9. Dudina I.V., Zherdeva S.A. (2009) Uchet fizicheskoy nelineynosti materialov pri otsenke nadezhnosti zhelezobetonnykh konstruktsiy [Allowance for physical nonlinearity of materials when estimating the reliability of reinforced concrete structures]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii – Systems. Methods. Technologies*. 2(2). pp. 66–68.
10. Pichugin S.N. (2010) Raschet obolochechnykh konstruktsiy v vide rezervuarov s fizicheski nelineynym deformirovaniem [Calculation of shell constructions in the form of reservoirs with a physically nonlinear strain]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Neft' i gaz – Oil and Gas Studies*. 3. pp. 64–69.
11. Protosenya A.G., Semenov V.I., Suprun I.K. (2014) Raschet nagruzok na krep' vyrabotok i tonneley, sooruzhaemykh v fizicheski nelineynykh massivakh [Analysis of load formation on lining of tunnel constructed in soil with nonlinear behavior]. *Zapiski Gornogo instituta – Journal of Mining Institute*. 199. pp. 173–175.
12. Protosenya A.G. (2014) Fizicheski nelineyno-plasticheskaya zadacha o raspredelenii napryazheniy vokrug vyrabotki krugovogo ochertaniya [Physically nonlinear plastic problem of the stress distribution around a circular groove]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gornyy zhurnal – News of the Higher Institutions. Mining Journal.* 2. pp. 43–48.
13. Aleksandrovich A.I., Gorlova A.V. (2007) Issledovanie ploskoy zadachi dlya fizicheski nelineynogo uprugogo tela metodami teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo [Testing of the planar problem of a physically nonlinear elastic body by methods of the theory of functions of a complex variable]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 3. pp. 63–72.
14. Bondar' V.D. (2000) Metod kompleksnykh potentsialov v nelineynoy teorii uprugosti [Method of complex potentials in nonlinear theory of elasticity]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 41(1). pp. 133–143.
15. Sheina A.A., Aleksandrovich A.I. (2011) Reshenie prostranstvennykh zadach nelineynoy teorii uprugosti metodami mnogomernogo kompleksnogo analiza [Solution of three-dimensional boundary value problems of the nonlinear theory of elasticity using the methods of multi-dimensional complex analysis]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4–4. pp. 1862–1863.
16. Nifagin V.A., Sevrouk A.V. (2007) Common approximate solutions of main problems of spatial non-linear elasticity theory in analytical multi-dimensional functions of matrix variable. *Science and Technique*. 1. pp. 60–65 DOI: 10.21122/2227-1031-2007-0-1-60-65.
17. Mal'kov V.M., Mal'kova Yu.V. (2008) Analysis of a stress singularity in a non-linear Flamant problem for certain models of a material. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 72(4). pp. 468–474. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2008.08.006.
18. Lavrov K., Semenov A., Benin A. (2016) Modeling of nonlinear multiaxial deformation of concrete on the base of hyperelastic orthotropic model. *MATEC Web of Conferences*. 53(01043). DOI: 10.1051/matecconf/20165301043.
19. Wei Ch., Wang L., Li B., Xiong L., Liu Sh., Zheng J., Hu S., Song H. (2018) A study of nonlinear elasticity effects on permeability of stress sensitive shale rocks using an improved coupled flow and geomechanics model: a case study of the longmaxi shale in China. *Energies*. 11(2). pp. 329–345. DOI: 10.3390/en11020329.
20. Blokhina N.S. (2012) Raschet konstruktsiy iz anizotropnykh materialov s uchetom fizicheskoy nelineynosti [Calculation of the constructions made of anisotropic material with account for physical nonlinearity]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1(240). pp. 3–5.
21. Agapov V.P., Aydemirov K.R. (2017) Primenenie metoda konechnykh elementov s uchetom fizicheskoy i geometricheskoy nelineynosti dlya rascheta predvaritel'no napryazhennykh zhelezobetonnykh ferm [Application of finite element method taking into account physical

and geometric nonlinearity for the calculation of prestressed reinforced concrete beams]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences.* 44(1). pp. 127–137. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137.

22. Serpik I.N., Balabin P.Yu., Shkolyarenko R.O. (2015) Raschet ramnykh konstruktsiy v fizicheski nelineynoy postanovke s uchetom vliyaniya prodol'nykh sil na izgib [Calculation of frame constructions in a physically nonlinear formulation with account for the effect of central forces on a bend]. *The collected papers of the IV International research to practice conference "Problems of innovative biosphere-compatible socio-economic development in the building, housing and communal, and road complexes"*. pp. 363–366.
23. Polatov A.M. (2018) Komp'yuternoe modelirovanie deformirovannogo sostoyaniya fizicheski nelineynykh transversal'no-izotropnykh tel s otverstiem [Computer modeling of deformed state of physically non-linear transversal-isotropic bodies with hole]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 11(1). pp. 25–35. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.1.3.
24. Martynov N.I. (2014) Kraevye zadachi dlya neogukovskogo materiala v nelineynoy teorii uprugosti [Boundary value problems for neo-Hookean material in nonlinear elasticity]. *Nauka i mir – Science and World*. 9(13). pp. 25–31.
25. Brigadnov I.A., Bukhshtaber V.M., Antonova I.A., Sokolova E.G., Sharov S.A. *Matematicheskaya korrektnost' i metody resheniya kraevykh zadach nelineynoy uprugosti* [Mathematical accuracy and problem-solving techniques for boundary problems of nonlinear elasticity]. Research report (project No. 96-01-00054).
26. Chernykh K.F. (2004) Variant nelineynoy teorii uprugosti. ego struktura i vozmozhnosti [Variant of nonlinear elasticity theory. Its structure and potential]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg University Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 3–4. pp. 55–62.
27. Ivanov S.P., Ivanova A.S. (2014) Dinamicheskaya ustoychivost' fizicheski nelineynykh plastinchatykh sistem [The dynamic stability of physically nonlinear plate systems]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 4. pp. 9–18.
28. Shamina V.A., Veselkov S.Yu., Slepneva L.V. *Osnovnye modeli nelineynoy mekhaniki deformiruemogo tela* [Basic models in nonlinear mechanics of deformable solids]. Research report (project No. 95-01-00334).
29. Bakushev S.V. (2011) Uravneniya fizicheski nelineynoy teorii uprugosti v napryazheniyakh [Equations of physically nonlinear theory of elasticity in terms of stresses]. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo – Regional Architecture and Construction*. 1(12). pp. 117–123.
30. Bakushev S.V. (2014) Ploskaya zadacha fizicheski nelineynoy teorii uprugosti – reshenie v napryazheniyakh [Plane problem of physically nonlinear theory of elasticity – solution in terms of stresses]. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo – Regional Architecture and Construction.* 1(18). pp. 82–88.
31. Bakushev S.V. (2014) Ploskaya deformatsiya fizicheski nelineynoy teorii uprugosti – reshenie v napryazheniyakh [Plane strain in physically nonlinear theory of elasticity – solution in terms of stresses]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2. pp. 2–9.

Received: March 18, 2019