

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/63/9

В.В. Козлов, А.А. Маркин

АПРОБАЦИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ОСЕВОМ СДВИГЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА¹

Рассматривается один из видов нагружения нелинейно-упругих материалов – осевой сдвиг полого цилиндра. На основании результатов решения задачи предлагается методика определения адекватности представления свойств материала выбранной связью напряжений и деформаций. В частности, используются соотношения, в рамках которых можно контролируемо учитывать различные механические эффекты, удовлетворить частному постулату изотропии Ильюшина.

Ключевые слова: осевой сдвиг, полый цилиндр, нелинейная упругость, определяющие соотношения.

Развитие нелинейной теории упругости является одним из актуальных направлений механики сплошных сред, что подтверждается широким распространением подобных материалов и наличием новых публикаций по данной тематике [1–4].

Одной из ключевых проблем нелинейной теории упругости является формулировка связей между напряжениями и деформациями [5, 6]. Адекватность представления материала определяющим соотношением можно оценить, рассматривая различные нагружения нелинейно-упругих материалов. В данной работе в рамках такой оценки рассмотрено осесимметричное нагружение, представляющее равновесный процесс осевого сдвига полого цилиндра.

Выбор данной схемы обусловлен широким распространением подобных деталей, что находит отражение в ряде работ по нелинейной теории упругости [7–10].

Рассмотрим отличия данного процесса от исследований, проводимых в отношении похожих видов нагружений. Так, в работах Э.Э. Лавендела [11], В.И. Бидермана [12] рассматривается задача кругового сдвига (приложен момент M к внешней обойме) для несжимаемого материала. Л.И. Лурье [13] также рассматривал круговой сдвиг, но в рамках модели сжимаемого материала. В статье Beatty [14] рассматривается круговой сдвиг сжимаемого материала: на кинематические характеристики процесса накладываются ограничения, упрощающие выкладки, в результате использования которых изменение объема в процессе деформирования не происходит. Вследствие этого авторы устанавливают, каким дополнительным условиям должны удовлетворять определяющие соотношения для того, чтобы их можно было применить к фактически несжимаемым материалам. Таким образом, в данной статье рассматривается другой вид осесимметричного нагружения цилиндра, изначально на кинематику не накладываются дополнительных ограничений.

Результаты решения задачи об осевом сдвиге полого цилиндра могут быть использованы для апробации определяющего соотношения. В работе представлены

¹ Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1) и РФФИ (проект № 18-31-20053).

результаты моделирования для классических соотношений, к которым можно отнести связи между деформациями и напряжениями Гузя [15], Мурнагана [12] и т.п. Также моделирование осуществлено для определяющих соотношений, построенных в рамках подхода, представленного в работах Л.А. Толоконникова [16], А.А. Маркина [17], А.В. Муравлева [18], позволяющего контролируемо учитывать различные механические эффекты и удовлетворить частному постулату изотропии Ильюшина.

1. Расчетная схема и кинематические соотношения

Внутренняя и внешняя поверхности цилиндра скреплены с жесткими обоймой и валом соответственно. Вал закреплён неподвижно. К обойме приложен сила в направлении оси симметрии цилиндра Oz . Внутренний радиус цилиндра обозначим R_2 , внешний – R_1 .

Задачу об исследовании напряжённо-деформированного состояния полого цилиндра при осевом сдвиге естественно решать в цилиндрической системе координат.

Пусть $(x^1, x^2, x^3) = (R, \theta, z_0)$ – цилиндрические координаты материальной точки цилиндра в начальном состоянии, (r, φ, z) – цилиндрические координаты этой же точки в деформированном состоянии (ось Oz совпадает с осью симметрии цилиндра).

В рамках данной модели связь между указанными координатами будет выглядеть следующим образом:

$$r = r(R); \quad \varphi = \theta; \quad z = z_R(R) + z_0. \quad (1)$$

Из представлений (1) следует форма записи радиус-вектора положения точки в деформированном состоянии $\vec{x}$:

$$\vec{x} = r \vec{e}_R + z \vec{e}_{z_0}.$$

Запишем выражения векторов материального базиса $\vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}$:

$$\vec{\varepsilon}_1 = r' \vec{e}_r + z'_R \vec{e}_{z_0}, \quad \vec{\varepsilon}_2 = r \vec{e}_\theta, \quad \vec{\varepsilon}_3 = \vec{e}_{z_0}.$$

Из последних формул можно найти базис $\vec{\varepsilon}^i$, взаимный по отношению к материальному:

$$\vec{\varepsilon}^1 = \frac{\vec{e}_r}{r'}, \quad \vec{\varepsilon}^2 = \frac{\vec{e}_\theta}{r}, \quad \vec{\varepsilon}^3 = \vec{e}_{z_0} - \frac{z'_R}{r'} \vec{e}_R. \quad (2)$$

Приведём диадное представление аффинора деформации:

$$\Phi = \vec{\nabla} \vec{x} = r' \vec{e}_R \vec{e}_R + z'_R \vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \frac{r}{R} \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_{z_0} = \Phi^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j. \quad (3)$$

Из соотношения (3) и определения $\Phi \cdot \Phi^{-1} = \underline{E}$ можно найти обратный тензор Φ^{-1} :

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{r'} \vec{e}_R \vec{e}_R - \frac{z'_R}{r'} \vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \frac{R}{r} \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_{z_0}.$$

Из формулы (3) получаем выражение меры деформаций Коши – Грина $G = \Phi \cdot \Phi^T$:

$$G = (r'^2 + z_R'^2) \bar{e}_R \bar{e}_R + z'_R (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R) + \frac{r^2}{R^2} \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0} = G^{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j, \quad (4)$$

$$\text{где } G^{ij} = \begin{pmatrix} r'^2 + z_R'^2 & 0 & z'_R \\ 0 & r^2/R^2 & 0 \\ z'_R & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_1 = \bar{e}_R, \quad \bar{e}_2 = \bar{e}_\theta, \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_{z_0}.$$

С помощью (4) получим тензор деформаций Коши – Грина $\varepsilon = 1/2(G - E)$:

$$\varepsilon = 1/2 \left[(r'^2 + z_R'^2 - 1) \bar{e}_R \bar{e}_R + z'_R (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R) + \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta \right]. \quad (5)$$

Опишем подход к нахождению полярного разложения аффинора деформаций [17]

$$\Phi = U \cdot R, \quad (6)$$

где U – левая мера искажения, R – тензор поворота.

Для нахождения левой меры искажения U используем её связь с мерой G [17]:

$$G = U^2.$$

Из последнего выражения следует

$$U = \sqrt{\lambda_i^G} \bar{a}_i^G \bar{a}_i^G, \quad (7)$$

где λ_i^G – собственные значения меры Коши – Грина, $\bar{a}_i^G$ – собственные векторы меры Коши – Грина.

В предположении, что для определенных значений $r(R), r'(R), z'_R(R)$ найдены λ_i^G и $\bar{a}_i^G$, соответствующая левая мера искажения определяется формулой (7).

Из (6) следует соотношение для тензора поворота R :

$$R = U^{-1} \cdot \Phi, \quad (8)$$

где Φ определен формулой (3), а обратный тензор U^{-1} получим на основании (7):

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^G}} \bar{a}_i^G \bar{a}_i^G.$$

Из приведенной схемы нахождения меры U при заданных $r(R), r'(R), z'_R(R)$, а также выражения левого тензора Генки [17] $\Gamma = \ln U$, тензор Генки может быть найден в виде

$$\Gamma = \ln \left(\sqrt{\lambda_i^G} \right) \bar{a}_i^G \bar{a}_i^G. \quad (9)$$

Отметим, что из выражения (4) для G^{ij} следуют упрощения относительно вида собственных векторов меры G :

$$\bar{a}_1 = a_1^R \bar{e}_R + a_1^{z_0} \bar{e}_{z_0}, \quad \bar{a}_2 = \bar{e}_\theta, \quad \bar{a}_3 = a_3^R \bar{e}_R + a_3^{z_0} \bar{e}_{z_0}. \quad (10)$$

Из формул (10) и (3) также можно сделать вывод, что компоненты левой меры искажений $\underline{U}$, тензора поворота $\underline{R}$, левого тензора Генки $\underline{\Gamma}$ при диадах $\bar{e}_R \bar{e}_\theta$, $\bar{e}_\theta \bar{e}_R$, $\bar{e}_\theta \bar{e}_{z_0}$, $\bar{e}_{z_0} \bar{e}_\theta$ равны нулю. Аналогичные выводы из (3) – (5) справедливы для тензоров $\underline{\Phi}$, $\underline{G}$, $\underline{\varepsilon}$. Таким образом, любую рассмотренную меру описания деформированного состояния $\underline{M}$ можно представить в общем виде

$$\underline{M} = M^{RR} \bar{e}_R \bar{e}_R + M^{\theta\theta} \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta + M^{z_0 z_0} \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0} + M^{Rz_0} \bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + M^{z_0 R} \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R. \quad (11)$$

В рамках дополнительного кинематического ограничения

$$r = R \quad (12)$$

меры деформированного состояния могут быть записаны аналитически:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{(z_R'^2 + 2) \bar{e}_R \bar{e}_R + z_R' (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R) + 2 \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0}}{\sqrt{z_R'^2 + 4}} + \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta, \\ \underline{R} &= \frac{1}{\sqrt{z_R'^2 + 4}} \left[2 (\bar{e}_R \bar{e}_R + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0}) + z_R' (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} - \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R) \right] + \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta, \\ \underline{\Gamma} &= \ln \left(\frac{\sqrt{z_R'^2 + 4} + z_R'}{2} \right) \frac{z_R' (\bar{e}_R \bar{e}_R - \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0}) + 2 (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R)}{\sqrt{z_R'^2 + 4}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Первый инвариант левого тензора Генки $\theta = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{33}$ в формуле (13), характеризующий изменение объема, равен нулю. Таким образом, в случае наложения кинематического ограничения (12) среду необходимо считать несжимаемой.

При необходимости могут быть конкретизированы и другие меры описания деформированного состояния. Формулы данного пункта показывают, что компоненты тензоров деформаций зависят от обобщенных перемещений, их производных, зависящих от радиальной координаты, и от самой радиальной координаты.

2. Определяющие соотношения и условия равновесия

Напряженное состояние среды может быть конкретизировано при известных соотношениях, определяющих связи между напряжениями и деформациями. В данной работе рассматриваются определяющие соотношения, подходы к построению которых описаны в [17].

В качестве первого определяющего соотношения используется выражение для энергетического тензора напряжений $\underline{T}$:

$$\underline{T} = 2G \underline{\varepsilon} + K J_1 \underline{E}, \quad (14)$$

где G – модуль сдвига; K – модуль объемного расширения; J_1 – первый алгебраический инвариант тензора деформаций Коши – Грина $\underline{\varepsilon}$ (5).

Тензор истинных напряжений Коши $\underline{S}$ связан с тензором $\underline{T}$ и может быть представлен в виде

$$\underline{S} = \sqrt{g/G} \Phi^T \cdot \underline{T} \cdot \Phi, \quad (15)$$

где $\underline{T}$ имеет вид (14), аффинор деформации Φ определен выражением (3).

Следующим определяющим соотношением выбрана формулировка для «повернутого» обобщенного тензора напряжений Коши $\underline{\sigma}_R$ [17]:

$$\underline{\sigma}_R = 2G\tilde{\Gamma} + K\theta\tilde{E}, \quad (16)$$

где $\tilde{\Gamma}$ – девиатор левого тензора деформаций Генки, определенного формулой (9).

Для кинематического ограничения (12) применяется определяющее соотношение [17] для несжимаемого материала

$$\underline{\sigma}_R = 2G\tilde{\Gamma} + \sigma_0(R)\tilde{E}, \quad (17)$$

где σ_0 – гидростатическое напряжение.

Для определяющих соотношений (16), (17) тензор истинных напряжений Коши вычисляется по следующей формуле [17]:

$$\underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{g}{G}} \underline{R}^{-1} \cdot \underline{\sigma}_R \cdot \underline{R}, \quad (18)$$

где $\underline{R}$ определяется соотношением (8).

Диадное представление $\underline{\underline{s}}$ имеет вид

$$\underline{\underline{s}} = s^{RR} \vec{e}_R \vec{e}_R + s^{\theta\theta} \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta + s^{z_0 z_0} \vec{e}_{z_0} \vec{e}_{z_0} + s^{Rz_0} (\vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_R), \quad (19)$$

компоненты тензора $\underline{\underline{s}}$ зависят от перемещений $r(R)$, $z_R(R)$, их производных и радиальной координаты R .

Для кинематического ограничения (12) $r = R$ и определяющего соотношения (17) с учетом (18) тензор напряжений $\underline{\underline{s}}$ можно записать аналитически:

$$\underline{\underline{s}} = \frac{4G}{\sqrt{z_R'^2 + 4}} \ln \left(\frac{\sqrt{z_R'^2 + 4} + z_R'}{2} \right) \left[\frac{z_R'}{2} (-\vec{e}_R \vec{e}_R + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_{z_0}) + (\vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_R) \right] + \sigma_0 \tilde{E}. \quad (20)$$

Отметим, что гидростатическое напряжение σ_0 входит только в диагональные компоненты тензора напряжений (20).

Ввиду отсутствия в постановке задачи массовых сил уравнение равновесия примет вид [19]

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{s}} = \vec{0},$$

где $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – оператора Гамильтона в актуальном базисе.

Рассмотрев выражение (19) и найдя производные $\frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial x^i}$, с учетом (2) получаем уравнение равновесия в виде

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{s}} = \left(\frac{1}{r'} \frac{ds^{RR}}{dR} + \frac{s^{RR} - s^{\theta\theta}}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r'} \frac{ds^{Rz_0}}{dR} + \frac{s^{Rz_0}}{r} \right) \vec{e}_{z_0} = \vec{0}.$$

Для решения задачи и интерпретации результатов удобнее работать с безразмерными переменными. Введём переменную $\rho = R/R_1$ и безразмерный тензор

напряжений Коши $\underline{S}(\rho)/(2G)$ (далее $\underline{S}$). Запишем безразмерные уравнения равновесия в координатной форме:

$$\begin{cases} \frac{1}{r'} \frac{ds^{RR}}{dR} + \frac{s^{RR} - s^{\theta\theta}}{r} = 0, \\ \frac{1}{r'} \frac{ds^{Rz_0}}{d\rho} + \frac{s^{Rz_0}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Рассмотрим постановку задачи в случае, когда накладывается дополнительное кинематическое ограничение (12) $r = \rho$. Тогда уравнения равновесия сводятся к системе

$$\begin{cases} \frac{ds^{RR}}{d\rho} + \frac{s^{RR} - s^{\theta\theta}}{\rho} = 0, \\ \frac{ds^{Rz_0}}{d\rho} + \frac{s^{Rz_0}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Второе уравнение данной системы является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно компоненты s^{Rz_0} и позволяет независимо от первого уравнения найти s^{Rz_0} в виде $s^{Rz_0} = \frac{c}{\rho}$ с точностью до произвольной постоянной.

3. Граничные условия и разрешающее уравнение

Сформулируем естественные для рассматриваемой модели граничные условия в перемещениях. На внутреннем радиусе осевые перемещения отсутствуют, а на внешнем достигается осевое смещение h_z . Значения функции $r(\rho)$ на внешнем $\hat{R}_1 = R_1/R_1$ и внутреннем $\hat{R}_2 = R_2/R_1$ безразмерных начальных радиусах совпадают с соответствующими значениями этих радиусов. В безразмерных переменных данные граничные условия принимают вид

$$z_R(\hat{R}_2) = 0, \quad z_R(\hat{R}_1) = h_z; \quad (23)$$

$$r(\hat{R}_2) = \hat{R}_2, \quad r(\hat{R}_1) = \hat{R}_1. \quad (24)$$

Таким образом, система уравнений равновесия (21) с формулировкой тензора истинных напряжений Коши в виде (15) или (18) для определяющих соотношений (14) или (16) и граничные условия (23), (24) образуют краевую задачу с нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка относительно неизвестных функций перемещений $r(\rho)$, $z_R(\rho)$.

Как было отмечено, использование кинематического ограничения (12) $r = \rho$ приводит к необходимости использовать определяющее соотношение для несжимаемых материалов (17) и появлению неизвестной функции – гидростатического напряжения $\sigma_0(\rho)$. Однако если рассмотреть второе уравнение системы (22), то с учётом выражения (20) для $\underline{S}$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестного перемещения $z_R(\rho)$:

$$z_R''(\rho) = - \frac{\operatorname{arcsch}(z_R'(\rho)/2)(z_R'(\rho)^2 + 4)}{\rho \left[\sqrt{z_R'(\rho)^2 + 4} - z_R'(\rho) \operatorname{arcsch}(z_R'(\rho)/2) \right]}. \quad (25)$$

Таким образом, для несжимаемого материала задача сводится к краевой для дифференциального уравнения (25) с граничными условиями (23). Решение данной задачи позволит полностью конкретизировать деформированное состояние цилиндра, а также сдвиговые напряжения s^{Rz_0} формулы (20).

4. Численный метод

Рассмотрим особенности численного метода на примере краевой задачи (23), (25), полученной для кинематического ограничения (12) относительно функции $z_R(\rho)$.

Область значений радиальной координаты $\rho \in [\hat{R}_2, \hat{R}_1]$ разбивается на последовательность дискретных значений с постоянным шагом h :

$$\rho_i = \hat{R}_2 + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{\hat{R}_1 - \hat{R}_2}{n}. \quad (26)$$

Точки ρ_0, ρ_n будем называть граничными, прочие точки – внутренними. Произведем аппроксимацию производных, входящих в (25) с точностью $O(h^2)$:

а) во внутренних точках используем выражения:

$$\begin{aligned} z_R'|_{\rho=\rho_i} &= (z_R')_i = \frac{z_R|_{\rho=\rho_{i+1}} - z_R|_{\rho=\rho_{i-1}}}{2h} = \frac{(z_R)_{i+1} - (z_R)_{i-1}}{2h} + O(h^2), \\ z_R''|_{\rho=\rho_i} &= (z_R'')_i = \frac{(z_R)_{i+1} - 2(z_R)_i + (z_R)_{i-1}}{h^2} + O(h^2); \end{aligned} \quad (27)$$

б) на левой граничной точке

$$\begin{aligned} z_R'|_{\rho=\rho_0} &= (z_R')_0 = \frac{-3(z_R)_0 + 4(z_R)_1 - (z_R)_2}{2h} + O(h^2), \\ z_R''|_{\rho=\rho_0} &= (z_R'')_0 = \frac{2(z_R)_0 - 5(z_R)_1 + 4(z_R)_2 - (z_R)_3}{h^2} + O(h^2); \end{aligned} \quad (28)$$

в) на правой граничной точке

$$\begin{aligned} z_R'|_{\rho=\rho_n} &= (z_R')_n = \frac{3(z_R)_n - 4(z_R)_{n-1} + (z_R)_{n-2}}{2h} + O(h^2), \\ z_R''|_{\rho=\rho_n} &= (z_R'')_n = \frac{2(z_R)_n - 5(z_R)_{n-1} + 4(z_R)_{n-2} - (z_R)_{n-3}}{h^2} + O(h^2). \end{aligned} \quad (29)$$

Используя (26) – (29), запишем уравнение равновесия (25) для каждой внутренней точки. Дополняя эту систему граничными условиями (23), получаем замкнутую систему нелинейных уравнений. Процесс нахождения решения этой системы реализован итерационным численным методом Левенберга – Марквардта [20, 21].

В качестве начального приближения для функции z_R использовалось аналитическое решение задачи осевого сдвига несжимаемого материала из линейной

теории упругости:

$$z_R = \frac{h_z (\ln \rho - \ln \hat{R}_2)}{\ln \hat{R}_1 - \ln \hat{R}_2}. \quad (30)$$

Записав соотношения для функции $r(\rho)$, аналогичные (27) – (29), решаем краевую задачу для системы уравнений равновесия (21) с формулировкой тензора истинных напряжений Коши в виде (15) или (18) и граничными условиями (23), (24). В качестве начального приближения для $r(\rho)$ используем зависимость $r = \rho$.

5. Результаты

С помощью авторского программного комплекса были получены решения для осевого сдвига полого цилиндра в рамках трех постановок:

а) краевой задачи для системы уравнений (21) с граничными условиями (23), (24), тензора истинных напряжений вида (15), соответствующего определяющему соотношению сжимаемого материала в виде (14) $\underline{T} = 2G\tilde{\epsilon} + KJ_1\tilde{E}$;

б) краевой задачи для системы уравнений (21) с граничными условиями (23), (24), тензора истинных напряжений вида (18), соответствующей определяющему соотношению сжимаемого материала (15) $\underline{\sigma}_R = 2G\tilde{\Gamma} + K\theta\tilde{E}$;

с) краевой задачи для уравнения (25) с граничными условиями (23), полученная в рамках кинематического допущения (12) $r = \rho$ с определяющим соотношением (17) $\underline{\sigma}_R = 2G\tilde{\Gamma} + \sigma_0\tilde{E}$.

Все расчеты произведены для цилиндра с геометрическими характеристиками $R_2 = 0.6$, $R_1 = 1$. Также было принято $K = 100G$.

Приведем зависимость $z_R(\rho)$ для перемещения 0.5 на внешней обойме (рис. 1). Таким образом, перемещения для расчетов b , c практически совпадают, однако очевидно несовпадение результатов постановок a и b .

Также существенные различия результатов постановок a , b будем наблюдать, если рассмотрим радиальные перемещения (для перемещения 0.5 внешней обоймы) (рис. 2).

Для расчетов a , b , c приведем графики сдвигового напряжения $s^{Rz_0}(\rho)$ для перемещения 0.05 на внешней обойме (рис. 3)

Как следует из рис. 3, зависимости компоненты s^{Rz_0} от радиальной координаты для расчетов b , c практически совпадают, однако существенно отличаются от расчета a .

Найдем значения силы $F(h_z)$, приложенной к внешней обойме, которую можно наблюдать в эксперименте. Сила F в безразмерном виде, приходящаяся на единицу высоты цилиндра (в качестве таковой возьмем значение $\hat{R}_1$), сводится к выражению

$$F = 2\pi \hat{R}_1^2 s^{Rz_0}(\hat{R}_1).$$

Приведем графики зависимости силы $F(h_z)$ от перемещения внешней обоймы для расчетов a , b , c (рис. 4).

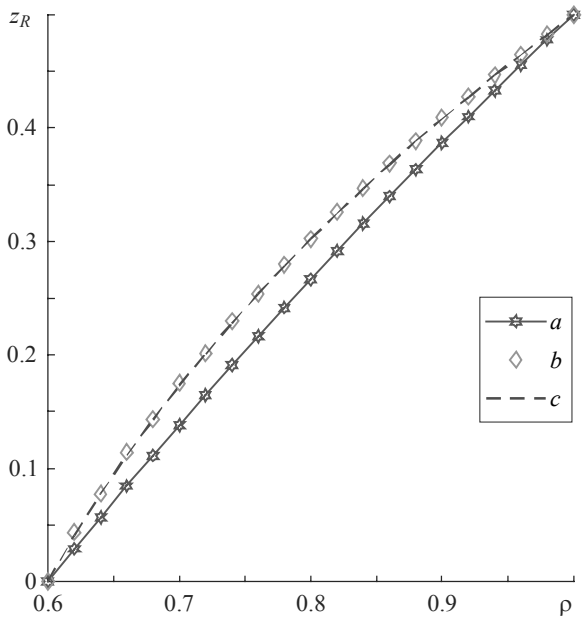


Рис. 1. Зависимости осевого перемещения z_R от радиальной координаты для расчетов a, b, c
Fig. 1. Axial displacement z_R as a function of the radial coordinate for calculations (a), (b), and (c)

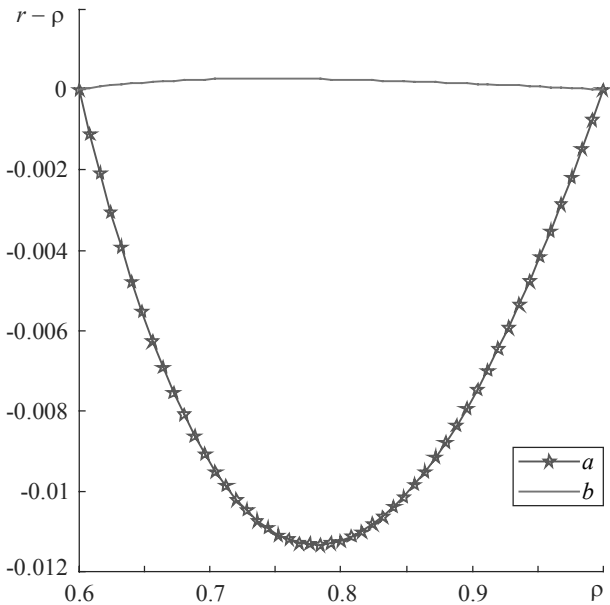


Рис. 2. Радиальное перемещение для расчетов a, b
Fig. 2. Radial displacement for calculations (a) and (b)

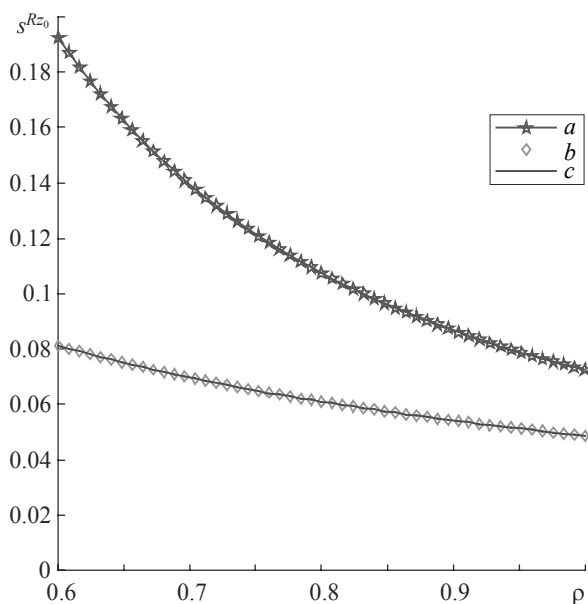


Рис. 3. Зависимости компоненты s^{Rz_0} от радиальной координаты для расчетов a, b, c

Fig. 3. Component s^{Rz_0} as a function of the radial coordinate for calculations (a), (b), and (c)

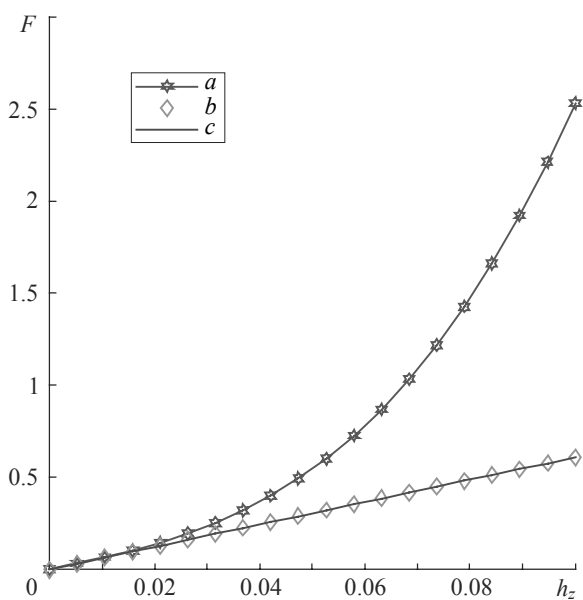


Рис. 4. Зависимость $F(h_z)$ для расчетов a, b, c

Fig. 4. Functional dependency $F(h_z)$ for calculations (a), (b), and (c)

Очевидны различия в поведении зависимости $F(h_z)$ от выбора определяющего соотношения. Таким образом, сравнивая модельные и экспериментальные зависимости, $F(h_z)$, можно сделать выводы об адекватности представления материала выбранным определяющим соотношением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зингерман К.М., Зубов Л.М. Точные решения задач теории многократного наложения больших деформаций для тел, образованных последовательным соединением деформированных частей // Чебышевский сборник. Т. XVIII. Вып. 3. 2017. С. 255–279. DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-255-279.
2. Андреева Ю.Ю., Жуков Б.А. Точные аналитические решения одной задачи нелинейной теории упругости для двух потенциалов энергии деформации несжимаемого материала // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 2 (46). С. 64–76. DOI: 10.21685/2072-3040-2018-2-7.
3. Astapov Y.V., Khristich D.V. Finite deformations of an elastic cylinder during indentation // International Journal of Applied Mechanics. 2018. V. 12. No. 3. DOI: 10.1142/S1758825118500266
4. Щукина Н.А. Особенности решений задач нелинейной теории упругости в рамках эффектов второго порядка // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2016. № 3–4. С. 543–547.
5. Губаев К.В. Метод построения определяющих соотношений для текучих анизотропных нелинейно упругих тел // Труды МФТИ. 2014. Т. 6. № 3. С. 122–128.
6. Козлов В.В., Маркин А.А. Вопросы конкретизации определяющих соотношений нелинейной теории упругости на основе рассмотрения одноосного однородного растяжения // Известия ТулГУ. Естественные науки. Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. Вып. 4. С. 137–143
7. Zubov L.M. Universal solution of nonlinear elasticity for a hollow cylinder with prestressed coatings // Acta Mechanica. 2018. DOI: 10.1007/s00707-018-2333-x.
8. Merodio J., Ogden R.W. Extension, inflation and torsion of a residually stressed circular cylindrical tube // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. V. 28. P. 157–174. DOI: 10.1007/s00161-015-0411-z.
9. Карякин М.И., Шубчинская Н.Ю. Об устойчивости нелинейно-упругого цилиндра с собственными напряжениями при растяжении и сжатии // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки. 2016. № 2 (190). С. 54–60. DOI: 10.18522/0321-3005-2016-2-54-60.
10. Колтак Е.П. Полый цилиндр из несжимаемого материала при больших деформациях // Нелинейные проблемы механики и физики твердого тела: Труды научной школы академика В.В. Новожилова. СПб., 1998. № 1. С. 96–117.
11. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976. 228 с.
12. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М.: Машгиз, 1958. 975 с.
13. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
14. Beatty Millard. F., Qing Jiang On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 2: Rotational shear of isotropic hyperelastic materials // Q. J. Mechanics Appl. Math. 1997. V. 50. No. 2. P. 211–237. DOI: 10.1093/qjmath/50.2.211.
15. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 270 с.
16. Толоконников Л.А. Вариант соотношений разномодульной теории упругости // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 102–104.
17. Маркин А.А., Христич Д.В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд., доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 92 с.
18. Муравлёв А.В. О представлении упругого потенциала в обобщенном пространстве деформаций А.А. Ильюшина // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 99–102.
19. Маркин А.А. Термомеханика сплошной среды: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. 140 с.

20. Levenberg K. A method for the solution of certain problems in last squares // Quart. Appl. Math. 1944. V. 2. P. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666.
21. Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1963. V. 11. No. 2. P. 431–441. DOI:10.1137/0111030.

Статья поступила 14.05.2019 г.

Kozlov V.V., Markin A.A. (2020) TESTING OF DEFINING RELATIONS OF NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY IN AN AXIAL STRAIN OF A HOLLOW CYLINDER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 102–114

DOI 10.17223/19988621/63/9

Keywords: axial strain, hollow cylinder, nonlinear elasticity, defining relations.

An attempt to validate the accuracy of the defining relations of nonlinear theory of elasticity is made using the model of static axial strain of a hollow cylinder. A closed system of nonlinear differential equations for two unknown functions is obtained. The first function describes the cylinder points' movement in the radial direction, and the second, in the axial direction. Displacements of the inner and outer surfaces of the cylinder are specified as boundary conditions. A difference scheme for resulting system transition to a system of nonlinear equations is described. The dependences of the axial force on the outer holder displacement are obtained for three quasilinear defining relations. In the first case, the energy stress tensor is related to the Cauchy – Green deformation tensor. In the second case, the «rotated» tensor of true stresses and the Hencky tensor are used. In the third case, the incompressibility condition is imposed. It is shown that the dependence of the axial force on the axial displacement of the outer cylinder surface significantly depends on the defining relation chosen. The obtained dependencies can be used to verify the reliability of the defining relations.

Financial support. The reported study was partially funded by the grant of the President of the Russian Federation according to the research project MD-1803.2019.1 and by RFBR according to the research project No. 18-31-20053.

Viktor V. KOZLOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

Aleksey A. MARKIN (Doctor of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

REFERENCES

1. Zingerman M., Zubov L.M. (2017) Tochnye resheniya zadach teorii mnogokratnogo nalozheniya bol'shikh deformatsiy dlya tel, obrazovannykh posledovatel'nym soedineniem deformirovannykh chastey [Exact solutions to the problems of the theory of repeated superposition of large strains for the bodies derived from a successive junction of deformed parts]. *Chebyshevskiy sbornik*. 18(3). pp. 255–279. DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-255-279.
2. Andreeva Yu.Yu., Zhukov B.A. (2018) Tochnye analiticheskie resheniya odnoy zadachi nelineynoy teorii uprugosti dlya dvukh potentsialov energii deformatsii neszhimaemogo materiala [Exact analytical solutions to a problem of the nonlinear theory of elasticity for two strain energy potentials of an incompressible material]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki – University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*. 2(46). pp. 64–76. DOI: 10.21685/2072-3040-2018-2-7.
3. Astapov Y.V., Khristich D.V. (2018) Finite deformations of an elastic cylinder during indentation. *International Journal of Applied Mechanics*. 12(3). DOI: 10.1142/S1758825118500266.

4. Shchukina N.A. (2016) Osobennosti resheniy zadach nelineynoy teorii uprugosti v ramkakh effektivov vtorogo poriyadka [Features of solutions of problems of nonlinear elasticity theory in the framework of second order effects]. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy – International Journal of Applied and Fundamental Research*. 3–4. pp. 543–547.
5. Gubaev K.V. (2014) Metod postroeniya opredelyayushchikh sootnosheniy dlya tekuchikh anizotropnykh nelineyno uprugikh tel [Developing of constitutive equations for flowing anisotropic nonlinearly elastic materials]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta (gosudarstvennogo universiteta) – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology (State University)*. 6(3). pp. 122–128.
6. Kozlov V.V., Markin A.A. (2015) Voprosy konkretizatsii opredelyayushchikh sootnosheniy nelineynoy teorii uprugosti na osnove rassmotreniya odnoosnogo odnorodnogo rastyazheniya [Questions specification of the defining relationships of nonlinear elasticity theory by considering uniaxial homogeneous tension]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki – Bulletin of the Tula State University*. 4. pp. 137–143.
7. Zubov L.M. (2018) Universal solution of nonlinear elasticity for a hollow cylinder with prestressed coatings. *Acta Mechanica*. DOI: 10.1007/s00707-018-2333-x.
8. Merodio J., Ogden R.W. (2016) Extension, inflation and torsion of a residually stressed circular cylindrical tube. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 28. pp. 157–174. DOI: 10.1007/s00161-015-0411-z.
9. Karyakin M.I., Shubchinskaya N.Yu. (2016) Ob ustoychivosti nelineyno-uprugogo tsilindra s sobstvennymi napryazheniyami pri rastyazhenii i szhatii [On stability of a nonlinearly elastic cylinder with internal stresses under tension and compression]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki – Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Science*. 2(190). pp. 54–60. DOI: 10.18522/0321-3005-2016-2-54-60.
10. Kolpak E.P. (1998) Polyv tsilindr iz neszhimaemogo materiala pri bol'shikh deformatsiyakh [A hollow cylinder made of incompressible material under large deformations]. *Nelineynye problemy mekhaniki i fiziki tverdogo tela. Trudy nauchnoy shkoly akademika V.V. Novozhilova*. 1. pp. 96–117.
11. Lavendel E.E. (1976) *Raschet rezinotekhnicheskikh izdeliy* [Calculation of rubber-technical products]. Moscow: Mashinostroenie.
12. Ponomarev S.D., Biderman V.L. (1958) *Raschety na prochnost' v mashinostroenii*. [Strength calculations in mechanical engineering]. Vol. 2. Moscow: Mashgiz.
13. Lurie A.I. (1990) *Nonlinear Theory of Elasticity*. Amsterdam – North-Holland.
14. Beatty M.F. (1997) On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 2: rotational shear of isotropic hyperelastic materials. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 50(2). pp. 211–237. DOI: 10.1093/qjmam/50.2.211.
15. Guz' A.N. (1973) *Ustoychivost' uprugikh tel pri konechnykh deformatsiyakh* [Stability of elastic bodies under finite strains]. Kyiv: Naukova dumka.
16. Tolokonnikov L.A. (1971) Variant sootnosheniy raznomodul'noy teorii uprugosti [Alternate version of relations of the multimodulus elasticity theory]. *Prochnost' i plastichnost'*. 1. pp. 102–104.
17. Markin A.A., Khristich D.V. (2007) *Nelineynaya teoriya uprugosti: uchebnoe posobie* [Nonlinear theory of elasticity: tutorial]. Tula: TulGU.
18. Muravlev A.V. (2011) On a representation of an elastic potential in A.A. Il'yushin's generalized strain space. *Mechanics of Solids*. 46. pp. 77–79. DOI: 10.3103/S0025654411010122.
19. Markin A.A. (2009) *Termomekhanika sploshnoy sredy: uchebnoe posobie* [Continuum thermomechanics: tutorial]. Tula: TulGU.
20. Levenberg K. (1944) A method for the solution of certain problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2. pp. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666.
21. Marquardt D. (1963) An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 11(2). pp. 431–441. DOI: 10.1137/0111030.

Received: May 14, 2019