

УДК 532.542.2

DOI 10.17223/19988621/63/11

**И.А. Рыльцев, К.Е. Рыльцева, Г.Р. Шрагер****КИНЕМАТИКА ТЕЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ  
В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ<sup>1</sup>**

Исследуется установившееся осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе переменного сечения при наличии участка сужения/расширения. Для математического описания потока жидкости используются уравнения в переменных вихрь – функция тока, записанные в цилиндрической системе координат. Реологическое поведение рассматриваемой среды описывается степенной моделью Оствальда – де Ваале. Численное решение задачи осуществляется конечно-разностным методом с использованием метода установления. Расчеты выполнены для трех реологических сред: ньютоновской, псевдопластичной и дилатантной жидкостей.

**Ключевые слова:** *труба переменного сечения, участок сужения/расширения, степенная жидкость, модель Оствальда – де Ваале, преобразование координат, конечно-разностный метод.*

Течение жидкости в осесимметричных трубах переменного радиуса является предметом исследования многих численных и экспериментальных работ [1 – 15]. Актуальность изучения характеристик течения неньютоновских сред в каналах с участком сужения/расширения обусловлена их широким распространением как в природе, так и в технических приложениях. Ряд работ по исследованию подобных течений выполнен в области биомеханики, где данная геометрия используется при моделировании различных сосудистых патологий в кровеносных системах. Развитие некоторых болезней сосудов связано с параметрами течения крови, что обуславливает интерес к исследованию характера и структуры течения крови в организме. Кроме того, трубы переменного сечения встречаются в промышленности в качестве комплектующих элементов бурильной техники, теплообменников и реакторов.

Множество численных и экспериментальных исследований выполнено для ламинарных и турбулентных режимов течения в каналах с различной формой твердых стенок, образующих сужение, с использованием ньютоновской модели жидкости. Работа [1] является одной из первых по исследованию течения жидкости в канале переменного сечения. Авторами рассматривалось течение ньютоновской жидкости в трубе, в которой форма сужения задавалась Гауссовой функцией. Расчеты проводились для числа Рейнольдса в диапазоне от 0 до 25. При этом не удалось получить результаты для более высоких значений числа Рейнольдса по причине численной неустойчивости используемого алгоритма. В работе [2] содержатся экспериментальные данные о течении в трубе с локальным сужением/расширением. Особое внимание уделяется исследованию характеристик течения в зависимости от геометрических параметров канала, а также от числа Рейнольдса. Кроме того, определяется критическое значение числа Рейнольдса, при

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00021).

котором происходит переход от ламинарного режима течения к турбулентному для заданных геометрических параметров сужения.

Серия работ [3 – 5] посвящена исследованию течений ньютоновской среды в трубках, геометрия которых включает несколько участков сужения. Авторами исследуется влияние количества сужений и их положения относительно друг друга на кинематические и динамические характеристики потока. Анализ результатов численного моделирования гемодинамического потока в артериях, включающих стеноз, для различных режимов течения крови приводится в работе [6], целью которой является изучение параметров течения от формы стеноза. В отдельное направление изучения влияния формы стенозов можно выделить исследования течений жидкости в каналах с асимметричными сужениями. Например, в [7] представлено численное исследование течения ньютоновской жидкости через асимметричное сужение и показано его влияние на характеристики потока.

Ползущие течения, реализуемые при малых числах Рейнольдса, хорошо описывают поведение различного рода смазок в технических установках, которые характеризуются наличием каналов с участками сужения/расширения [8]. В работе [9] исследуется течение в трубе, конструкция которой предполагает наличие жестких перегородок, моделирующих сужения. Особенность этой работы заключается в использовании трех различных реологических моделей жидкой среды.

Пульсирующие течения ньютоновской и неньютоновской жидкостей в осесимметричных трубках с участком сужения/расширения рассматриваются в работах [10, 11]. В [11] приводятся результаты численного исследования течения жидкости, реологические свойства которой описываются моделью Балкли – Гершеля. Использование данной модели позволяет рассмотреть следующие частные случаи: модели Ньютона, Шведова – Бингама и Оствальда – де Ваале. Течения данных реологических сред реализуются в трубках, площадь перекрытия которых составляет 25 и 75 % как в стационарном, так и в пульсирующем режиме. Случай с пульсирующим течением в канале с двумя смежными сужениями рассматривается в [12]. Особенности физиологического пульсирующего течения крови в артериях со стенозом, выявленные в ходе численного моделирования, отражены в [13]. Исследование динамических и кинематических характеристик течения неньютоновской жидкости при наличии неровности поверхности приведено в работе [14]. Показано, что падение давления в артерии со стенозом практически не зависит от неровностей на поверхности артерии при малых числах Рейнольдса. В случае больших чисел Рейнольдса влияние поверхности артерии становится существенным.

Целью данной работы является исследование кинематических характеристик течения степенной жидкости в цилиндрической трубке с участком сужения/расширения в зависимости от числа Рейнольдса, степени нелинейности и геометрических параметров области течения.

### Постановка задачи

Рассматривается установившееся ламинарное течение несжимаемой степенной жидкости в осесимметричном канале с локальным сужением/расширением заданной формы. Геометрия канала схематично представлена на рис. 1.

Математическая постановка задачи формулируется в переменных функция тока – вихрь, которая в безразмерном виде в цилиндрической системе координат записывается в виде [16]

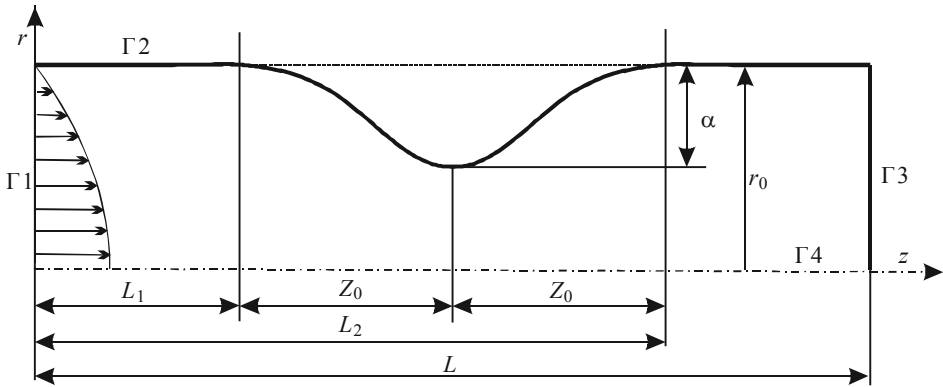


Рис. 1. Область течения  
Fig. 1. Flow region

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial z} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \frac{B}{\text{Re}} \left( \nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{S}{\text{Re}}; \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega, \quad (2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

$$S = 2 \frac{\partial^2 B}{\partial z \partial r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \left( \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\omega}{r} \frac{\partial B}{\partial r},$$

где безразмерные компоненты скорости и вихрь определяются выражениями

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Система уравнений (1), (2) замыкается реологическим уравнением Освальда – де Ваала [17], согласно которому выражение для безразмерной эффективной вязкости имеет вид

$$B = A^{m-1}.$$

Здесь  $u, v$  – аксиальная и радиальная компоненты скорости соответственно,

$\text{Re} = \frac{\rho U^{2-m} r_0^m}{k}$  – число Рейнольдса,  $\rho$  – плотность,  $U$  – среднерасходная скорость,

$A = (2e_{ij}e_{ji})^{1/2}$ ,  $e_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций,  $k$  – консистенция жидкой среды,  $m$  – степень нелинейности жидкости. В качестве масштабов обезразмеривания приняты следующие величины: длины – радиус трубы  $r_0$ ; скорости – среднерасходная скорость  $U$ .

В рассматриваемой задаче степенная жидкость подается в канал через входное сечение  $\Gamma_1$  с постоянным расходом, профиль скорости при этом соответствует установившемуся течению в трубе. На границе  $\Gamma_2$  выполняются условия прилипания, на оси симметрии  $\Gamma_4$  задаются условия симметрии, на выходной границе  $\Gamma_3$  используются мягкие граничные условия. Таким образом, граничные условия в переменных функция тока – вихрь имеют вид [16]

$$(\Gamma_1): \psi = \int_0^r ur dr, \quad \omega = -\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$(\Gamma_2): \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2},$$

$$(\Gamma_3): \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

$$(\Gamma_4): \psi = 0, \quad \omega = 0,$$

где  $n$  – нормаль к границе  $\Gamma_2$ ,  $u = [(3m + 1)/(m + 1)](1 - r^{1/m+1})$ .

Граница  $\Gamma_2$  описывается функцией

$$f(z) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi(z - L_1)}{Z_0} \right), & z \in [L_1; L_2], \\ 1, & z \in [0; L_1] \cup (L_2; L]. \end{cases}$$

Величины  $L_1$  и  $L_2$  задаются из условия достаточного удаления криволинейного участка от границ  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$  с целью исключения его влияния на характер течения в окрестности входной и выходной границ. Таким образом, решение задачи определяется числом Рейнольдса ( $Re$ ), степенью нелинейности жидкости ( $m$ ) и геометрическими параметрами ( $\alpha, Z_0$ ).

### Метод решения

Численное решение задачи осуществляется конечно-разностным методом с использованием метода установления, в результате применения которого стационарная задача преобразуется в нестационарную и процесс сводится к пошаговому приближению решения нестационарной задачи к решению исходной стационарной задачи [18]. При этом в уравнения (1), (2) добавляются производные по времени искомых функций  $\psi, \omega$ , расчет по времени продолжается до обнуления введенных производных. Физическая область течения с криволинейной границей  $f(z)$  преобразуется в прямоугольную введением новых координат  $\xi = z, \eta = r / f(z)$ .

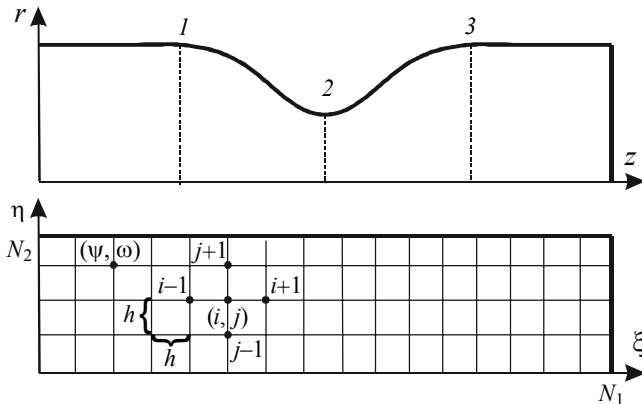


Рис. 2. Преобразование геометрии области течения  
 Fig. 2. Transformation of the flow region geometry

В координатах  $\xi, \eta$  уравнения (1), (2) с добавленными производными по времени переписуются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial \xi} - g \frac{\partial(u\omega)}{\partial \eta} + \frac{1}{f} \frac{\partial(v\omega)}{\partial \eta} = \\ & = \frac{B}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + H \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2g \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + G \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{f^2 \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\omega}{f^2 \eta^2} \right) + \frac{S}{\text{Re}}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left( H - \frac{1}{f^2 \eta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - 2g \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + G \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -f\eta \omega, \quad (4)$$

где 
$$G = \frac{1}{f^2} + \left( \eta \frac{f'}{f} \right)^2, \quad H = \eta \left( 2 \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} \right), \quad g = \eta \frac{f'}{f},$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

$$S_1 = 2 \left( \frac{1}{f} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{g}{f\eta} \frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{g}{f} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{1}{f} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + g \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$S_2 = 2 \left( \frac{\partial B}{\partial \xi} - g \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - g \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + 2 \frac{1}{f^2} \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta},$$

$$S_3 = \left( \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + H \frac{\partial B}{\partial \eta} - 2g \frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta} + \left( g^2 - \frac{1}{f^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - g \frac{\partial v}{\partial \eta} \right),$$

$$S_4 = \frac{\omega}{f^2 \eta} \frac{\partial B}{\partial \eta}.$$

В области решения строится равномерная в каждом направлении квадратная разностная сетка  $\Omega_h = \{ \xi_i = ih, \eta_j = jh, i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2 \}$ , где  $h$  – шаг сетки. Разностные аналоги уравнений (3), (4), записываются с использованием явной разностной схемы, производные по пространственным координатам аппроксимируются со вторым порядком точности. Для аппроксимации конвективных слагаемых в уравнении переноса вихря используется схема против потока. В качестве критерия сходимости итерационного процесса используются условия

$$\begin{aligned} \max_{i,j} \left| 1 - \frac{\omega_{i,j}^t}{\omega_{i,j}^{t+1}} \right| &< \varepsilon, \\ \max_{i,j} \left| 1 - \frac{\psi_{i,j}^t}{\psi_{i,j}^{t+1}} \right| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  – заданный итерационный параметр,  $t$  – номер шага по фиктивному времени. Значение параметра  $\varepsilon$  принималось равным  $10^{-5}$ .

Для определения вихря на стенке используется выражение

$$\omega = -\frac{1}{f\eta} G \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2},$$

разностное представление которого осуществляется согласно формуле Тома [16].

Для проверки аппроксимационной сходимости алгоритма выполнена серия расчетов на последовательности сеток. На рис. 3 показаны профили скорости в сечении 2 (рис. 2) при  $\alpha = 0.5$ ,  $Z_0 = 1$  для  $m = 1$ ,  $Re = 1$ . Для заданного набора параметров в таблице приведены результаты расчетов аксиальной скорости на оси симметрии в выходном сечении трубы в зависимости от шага сетки. Анализ результатов демонстрирует аппроксимационную сходимость алгоритма. Все дальнейшие расчеты выполняются на сетке с шагом  $h = 0.025$ .

| $h$    | $u_{\max}$ |
|--------|------------|
| 0.1    | 1.992      |
| 0.05   | 1.998      |
| 0.025  | 2.000      |
| 0.0125 | 2.000      |

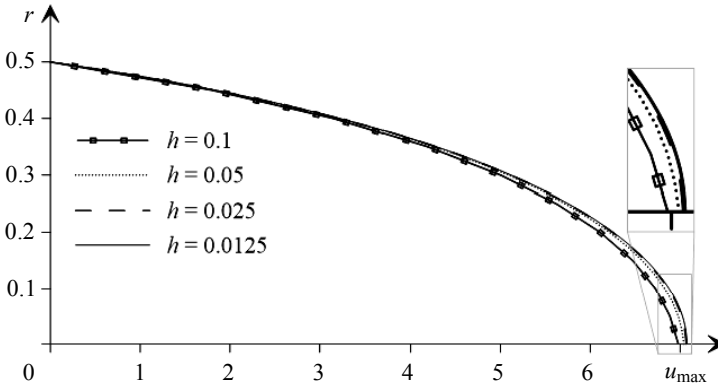


Рис. 3. Распределение аксиальной скорости в сечении 2 ( $Re = 1$ ,  $m = 1$ )  
Fig. 3. Axial velocity distribution in cross section 2 ( $Re = 1$ ,  $m = 1$ )

### Результаты

Результаты выполненных расчетов согласуются с существующими данными по структуре течения как для ньютоновской, так и для степенной жидкости. Наблюдаемая картина стационарного течения степенной жидкости состоит из зон одномерного течения в окрестности входной и выходной границ и области двумерного течения в области сужения/расширения с образованием циркуляционной зоны. Геометрический параметр  $Z_0$  был принят равным единице для всех расчетов. На рис. 4 представлены характерные структуры потоков псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей. Наблюдается, что с ростом степени нелинейности размер циркуляционной зоны за сужением уменьшается.

Распределение линий тока в зависимости от глубины перекрытия трубы демонстрируются на рис. 5. При перекрытии трубы на треть линии тока огибают сужение, при этом отсутствует циркуляционная зона; увеличение значения перекрытия ( $\alpha = 0.5$ ) приводит к появлению циркуляционной зоны; при  $\alpha = 0.667$  размер зоны становится значительно больше.

Влияние  $Re$  на структуру течения показано на рис. 6. Рост числа Рейнольдса приводит к усилению преобладания инерционных сил над вязкими, что в свою очередь является причиной увеличения размера циркуляционной зоны за сужением.

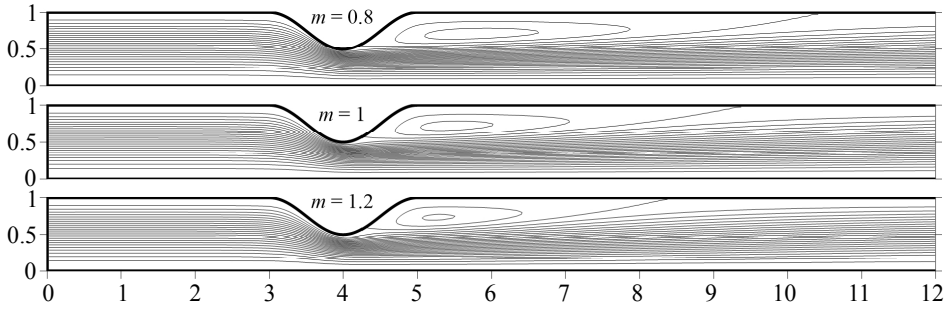


Рис. 4. Распределения линий тока при различных значениях реологического параметра ( $Re = 50$ ,  $\alpha = 0.5$ )

Fig. 4. Streamline distributions at various rheological parameters ( $Re = 50$ ,  $\alpha = 0.5$ )

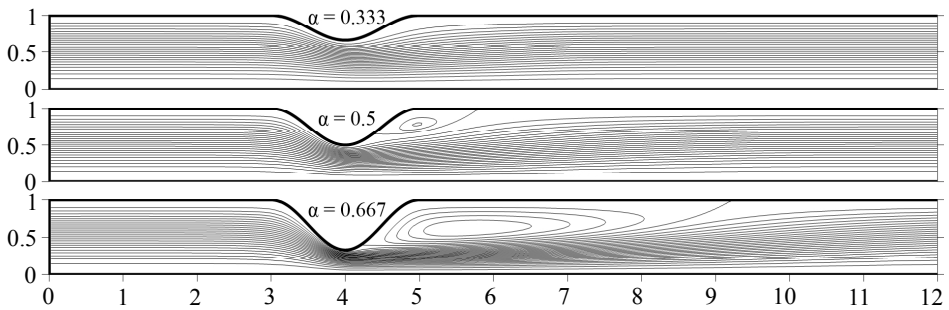


Рис. 5. Распределения линий тока при различных значениях геометрического параметра ( $Re = 10$ ,  $m = 0.8$ )

Fig. 5. Streamline distributions at various geometric parameters ( $Re = 10$ ,  $m = 0.8$ )

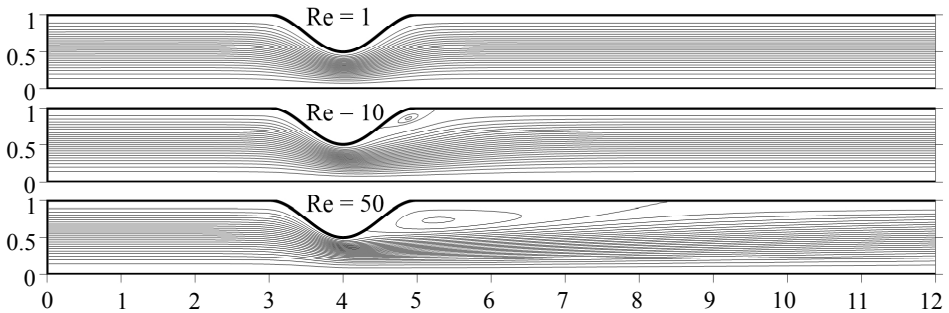
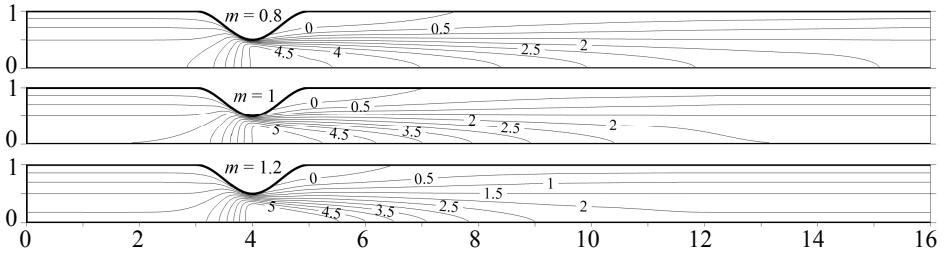


Рис. 6. Распределения линий тока при различных значениях  $Re$  ( $\alpha = 0.5$ ,  $m = 1.2$ )

Fig. 6. Streamline distributions at various  $Re$  ( $\alpha = 0.5$ ,  $m = 1.2$ )

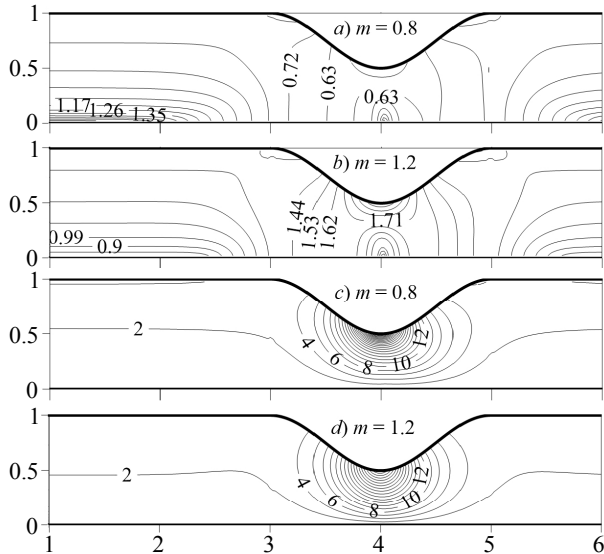
На рис. 7 представлены восстановленные распределения аксиальной скорости, характерные для различных значений параметра нелинейности. Наблюдается, что при заданных параметрах с уменьшением  $m$  зона двумерного течения увеличивается. Таким образом, при уменьшении значения параметра нелинейности для достижения установившегося поля скорости требуется увеличивать расстояние от участка сужения/расширения до выходной границы.



**Рис. 7.** Распределения изолиний аксиальной скорости при различных значениях  $m$  ( $\alpha = 0.5$ ,  $Re = 25$ )

**Fig. 7.** Velocity contours at various  $m$  ( $\alpha = 0.5$ ,  $Re = 25$ )

Рисунок 8, *a*, *b* иллюстрирует распределения эффективной вязкости в области течения. Для псевдопластичной жидкости максимальное значение вязкости наблюдается в зоне одномерного течения в окрестности линии симметрии. В случае дилатантной жидкости в данной области вязкость принимает минимальные значения.



**Рис. 8.** Изолинии эффективной вязкости (*a*, *b*);  
изолинии вихря (*c*, *d*) ( $Re = 0.5$ ,  $\alpha = 0.5$ )

**Fig. 8.** (*a*), (*b*) apparent viscosity contours  
and (*c*), (*d*) vortex contours ( $Re = 0.5$ ,  $\alpha = 0.5$ )

На рис. 9 приведены распределения максимального значения вихря на твердой стенке в зависимости от числа Рейнольдса, полученные в настоящем исследовании и в работах других авторов. Для верификации расчетов имеющиеся данные приведены в соответствие с результатами настоящей работы. Рисунок 9 демонстрирует качественное совпадение зависимостей. Для количественного сравнения выбран работа [5], в которой реализуется аналогичное преобразование координат. Наибольшее расхождение в результатах расчетов наблюдается при  $Re = 50$  и составляет 4.1 %.



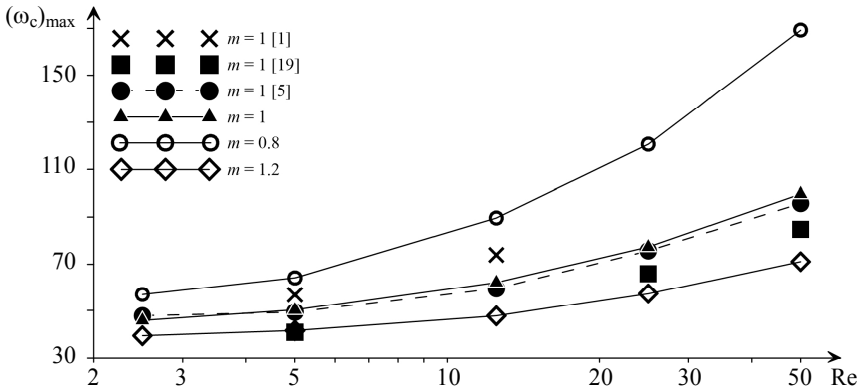


Рис. 9. Распределение максимального значения вихря на стенке в зависимости от Re  
 Fig. 9. Maximum vorticity on the wall as a function of Re

Рисунок 10 демонстрирует распределения аксиальной скорости на оси симметрии для трех значений показателя нелинейности. Расчеты показали, что при  $Re = 1$  для установившегося течения жидкости в рассматриваемой трубе с глубиной перекрытия 0.5 распределение аксиальной скорости на линии симметрии симметрично относительно участка сужения/расширения. Варьирование показателя нелинейности не способствует качественному изменению характера распределения. При этом увеличение числа Рейнольдса приводит к уменьшению максимального значения скорости и нарушению симметрии относительно участка сужения/расширения.

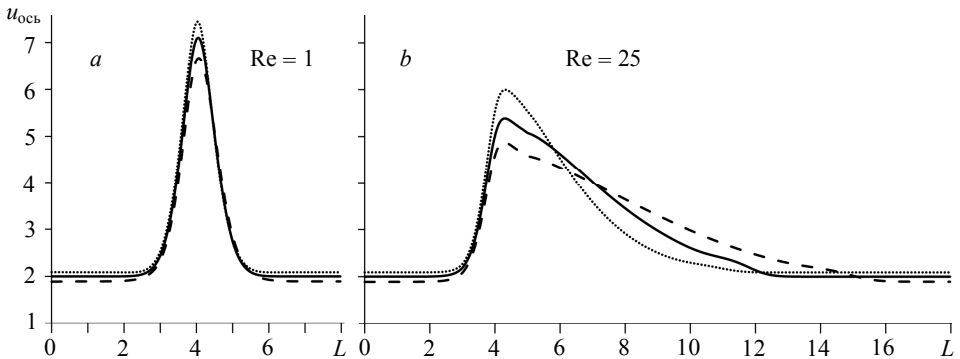


Рис. 10. Распределения аксиальной скорости на оси симметрии ( $\alpha = 0.5$ ).

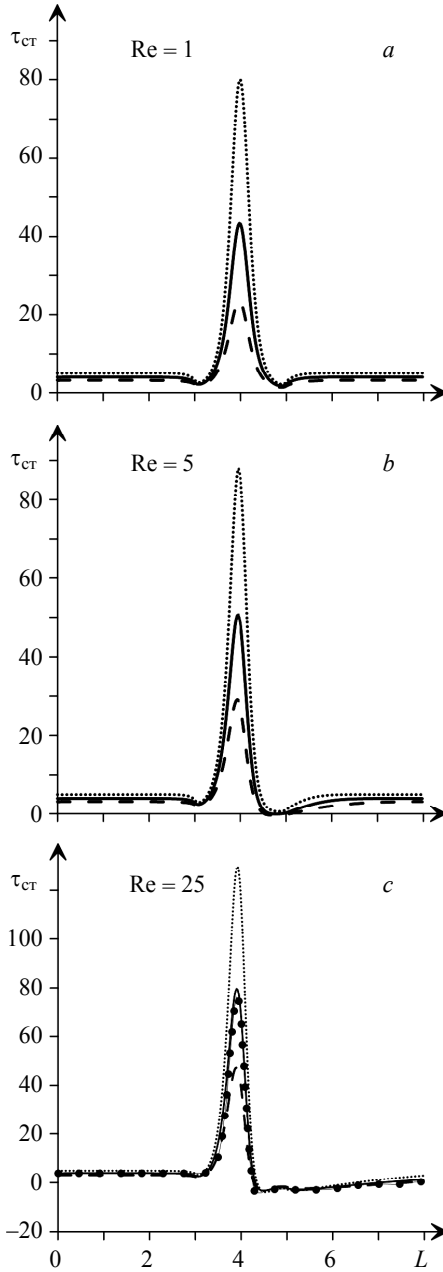
Обозначения: ---  $m = 0.8$ , —  $m = 1$ , .....  $m = 1.2$

Fig. 10. Axial velocity distributions along the symmetry axis ( $\alpha = 0.5$ ).

Notations: ---  $m = 0.8$ , —  $m = 1$ , and .....  $m = 1.2$

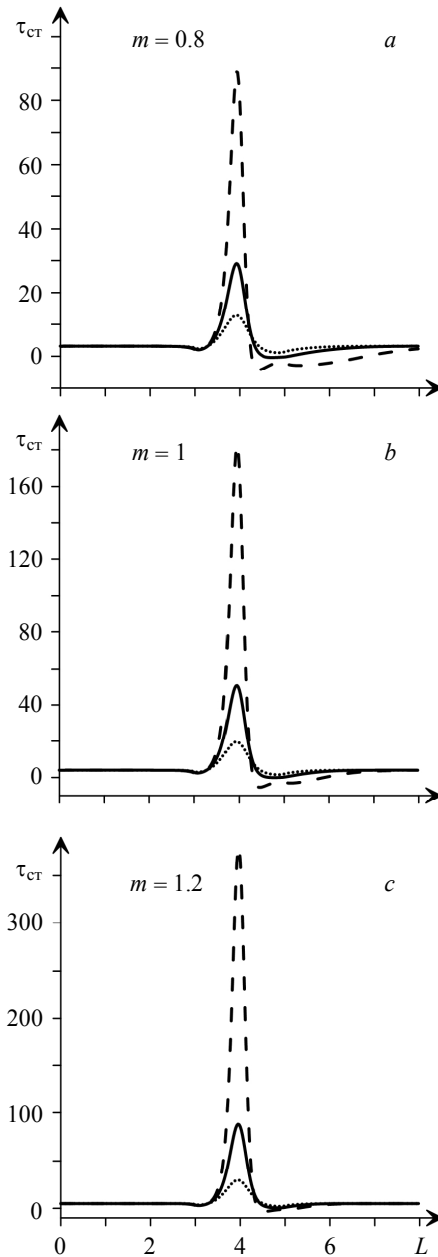
На рис. 11 (a) приведены распределения значений касательных напряжений ( $\tau = B \omega$ ) на твердой стенке для псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей. Во всех трех случаях максимальное значение напряжения наблюдается в непосредственной близости от сужения, при этом для  $Re = 1$  рост показателя нелинейности приводит к увеличению максимального значения напряжения на стенке. С ростом числа Рейнольдса данная тенденция сохраняется (рис. 11, b, c).

На рис. 11, с наряду с результатами настоящей работы приведена аналогичная зависимость из работы [3]. Сравнение результатов демонстрирует согласование данных.



**Рис. 11.** Распределения напряжений на стенке ( $\alpha = 0.5$ ).  
 Обозначения: ---  $m = 0.8$ , —  $m = 1$ , .....  $m = 1.2$ , ●●●  $m = 1$  [3]  
**Fig. 11.** Shear stress distributions on the wall ( $\alpha = 0.5$ ).  
 Notations: ---  $m = 0.8$ , —  $m = 1$ , .....  $m = 1.2$ , and ●●●  $m = 1$  [3]

На рис. 12 показаны зависимости касательных напряжений на стенке от геометрических параметров участка сужения/расширения трубы для трех жидкостей.



**Рис. 12.** Распределения напряжений на стенке ( $Re = 5$ ).  
Обозначения: .....  $\alpha = 0.333$ , —  $\alpha = 0.5$ , ---  $\alpha = 0.667$

**Fig. 12.** Shear stress distributions on the wall ( $Re = 5$ ).  
Notations: .....  $\alpha = 0.333$ , —  $\alpha = 0.5$ , and ---  $\alpha = 0.667$

Увеличение значения глубины перекрытия канала приводит к росту максимального значения вихря на стенке. Данная тенденция наблюдается для псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей.

### Заключение

В результате выполненной работы реализовано численное решение задачи о течении неньютоновской жидкости в трубе с участком переменного радиуса. Получены картины стационарного течения жидкости, которые характеризуются наличием зоны двумерного течения в окрестности сужения и зон одномерного течения вне ее. Исследованы три типа жидких сред, продемонстрировано влияние значений числа Рейнольдса и глубины перекрытия канала на структуру потока.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Lee J.S., Fung Y.C. Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers // Journal of Applied Mechanics. 1970. V. 37. Iss. 1. P. 9–16.
2. Young D.F., Tsai F.Y. Flow characteristics in model of arterial stenoses-I. Steady flow // Journal of Biomechanics. 1973. V. 6. Iss. 4. P. 395–402.
3. Lee T.S. Numerical studies of fluid flow through tubes with double constrictions // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1990. V. 11. Iss. 8. P. 1113–1126.
4. Lee T.S. Steady laminar fluid flow through variable constrictions in vascular tubes // Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME. 1994. V. 116. Iss. 1. P. 66–71.
5. Lee T.S., Liao W., Low H.T. Numerical simulation of turbulent flow through series stenosis // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2003. V. 42. Iss. 7. P. 717–740.
6. Banerjee M.K., Nag D., Ganguly R., Datta A. Hemodynamics in stenosed arteries effects of stenosis shapes // International Journal of Computational Methods. 2010. V. 7. Iss. 3. P. 397–419.
7. Mandal D.K., Manna N.K., Chakrabarti S. Influence of different bell-shaped stenosis on the progression of the disease atherosclerosis // Journal of Mechanical Science and Technology. 2011. V. 25. Iss. 8. P. 1933–1947.
8. Sisavath S., Jing X., Zimmerman R.W. Creeping flow through a pipe of varying radius // Physics of Fluids. 2001. V. 13. Iss. 10. P. 2762–2772.
9. Nag D., Datta A. Steady laminar flow of blood through successive restrictions in circular conduits of small diameter // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2008. V. 222. Iss. 8. P. 1557–1573.
10. Tu C., Deville M., Dheur L., Vanderschuren L. Finite element simulation of pulsatile flow through arterial stenosis // Journal of Biomechanics. 1992. V. 25. Iss. 10. P. 1141–1152.
11. Tu C., Deville M. Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenosis // Journal of Biomechanics. 1996. V. 29. Iss. 7. P. 899–908.
12. Mukhopadhyay S., Mandal M.S., Mukhopadhyay S. Effects of variable viscosity on pulsatile flow of blood in a tapered stenotic flexible artery // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2019. V. 42. Iss. 2. P. 488–504.
13. Zendehebudi G.R., Moayeri M.S. Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries // Journal of Biomechanics. 1999. V. 32. Iss. 9. P. 959–965.
14. Manimaran R. CFD simulation of non-Newtonian fluid flow in arterial stenoses with surface irregularities // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2011. V. 73. P. 957–962.
15. Борзенко Е.И., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Численное исследование характеристик течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 36–48.
16. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
17. Ostwald W. Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität // Kolloid Zeitschrift. 1929. V. 47. Iss. 2. P. 176–187.

18. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.
19. Deshpande M.D., Giddens D.P., Mabon R.F. Steady laminar flow through modelled vascular stenosis // *Journal of Biomechanics*. 1976. V. 9. Iss. 4. P. 165–174.

Статья поступила 21.10.2019 г.

Ryltsev I.A., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2020). KINEMATICS OF A POWER-LAW FLUID FLOW IN A PIPE WITH A VARYING CROSS SECTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 125–138

DOI 10.17223/19988621/63/11

Keywords: pipe of varying cross section, contraction/expansion, power-law fluid, Ostwald-de Waele model, coordinate transformation, finite-difference method.

Fluid transportation through channels with varying cross-section is widely spread in a number of technical applications. This circumstance determines constant interest of researchers to study such flows.

This paper presents an investigation of the steady-state axisymmetric flow of an incompressible power-law fluid in a pipe of varying cross section with contraction followed by expansion. The mathematical formulation of the problem is developed using the equations in a cylindrical coordinate system in terms of vortex-stream function variables. Rheological behavior of the considered medium is described by the Ostwald – de Waele power-law model. To implement the numerical algorithm, a coordinate transformation is carried out. The problem is solved using the finite-difference method. An asymptotic time solution of the unsteady flow equation is applied to obtain steady-state fields of the vortex and stream function in the computational domain. To verify the developed numerical algorithm, an approximation convergence is examined on the sequence of square grids.

The calculations of the flow of three rheological media (Newtonian, pseudoplastic, and dilatant) are carried out. A parametric study is performed to reveal the effect of the Reynolds number and power-law index on the flow structure. The shear stress distributions on the wall are demonstrated at various geometric parameters.

**Financial support.** The research is implemented at the expanses of the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021).

*Ivan A. RYLITSEV* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: Ryltsev\_I@ftf.tsu.ru

*Kira E. RYLITSEVA* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: kiraworkst@gmail.com

*Gennady R. SHRAGER* (Doctor of Physics and Mathematics, Professor,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ftf.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Lee J.S., Fung Y.C. (1970) Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers. *Journal of Applied Mechanics*. 37(1). pp. 9–16. DOI: 10.1115/1.3408496.
2. Young D.F., Tsai F.Y. (1973) Flow characteristics in model of arterial stenoses-I. Steady flow. *Journal of Biomechanics*. 6(4). pp. 395–402. DOI: 10.1016/0021-9290(73)90099-7.
3. Lee T.S. (1990) Numerical studies of fluid flow through tubes with double constrictions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 11(8). pp. 1113–1126. DOI: 10.1002/flid.1650110805.

4. Lee T.S. (1994) Steady laminar fluid flow through variable constrictions in vascular tubes. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*. 116(1). pp. 66–71. DOI: 10.1115/1.2910244.
5. Lee T.S., Liao W., Low H.T. (2003) Numerical simulation of turbulent flow through series stenoses. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 42(7). pp. 717–740. DOI: 10.1002/flid.550.
6. Banerjee M.K., Nag D., Ganguly R., Datta A. (2010) Hemodynamics in stenosed arteries effects of stenosis shapes. *International Journal of Computational Methods*. 7(3). pp. 397–419. DOI: 10.1142/S021987621000226X.
7. Mandal D.K., Manna N.K., Chakrabarti S. (2011) Influence of different bell-shaped stenosis on the progression of the disease atherosclerosis. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 25(8). pp. 1933–1947. DOI: 10.1007/s12206-011-0621-7.
8. Sisavath S., Jing X., Zimmerman R.W. (2001) Creeping flow through a pipe of varying radius. *Physics of Fluids*. 13(10). pp. 2762–2772. DOI: 10.1063/1.1399289.
9. Nag D., Datta A. (2008) Steady laminar flow of blood through successive restrictions in circular conduits of small diameter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 222(8). pp. 1557–1573. DOI: 10.1243/09544062JMES829.
10. Tu C., Deville M., Dheur L., Vanderschuren L. (1992) Finite element simulation of pulsatile flow through arterial stenosis. *Journal of Biomechanics*. 25(10). pp. 1141–1152. DOI: 10.1016/0021-9290(92)90070-H.
11. Tu C., Deville M. (1996) Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenosis. *Journal of Biomechanics*. 29(7). pp. 899–908. DOI: 10.1016/0021-9290(95)00151-4.
12. Mukhopadhyay S., Mandal M.S., Mukhopadhyay S. (2019) Effects of variable viscosity on pulsatile flow of blood in a tapered stenotic flexible artery. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 42(2). pp. 488–504. DOI: 10.1002/mma.5355.
13. Zendehebudi G.R., Moayeri M.S. (1999) Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries. *Journal of Biomechanics*. 32(9). pp. 959–695. DOI: 10.1016/s0021-9290(99)00053-6.
14. Manimaran R. (2011) CFD simulation of non-Newtonian fluid flow in arterial stenoses with surface irregularities. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 73. pp. 957–962.
15. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shragger G.R. (2019) Chislennoe issledovanie kharakteristik techeniya nen'yutonovskoy zhidkosti v trube s vnezapnym suzheniem [Numerical investigation of non-Newtonian fluid flow through a pipe sudden contraction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 56–70. DOI: 10.17223/19988621/58/5.
16. Roache P.J. (1982) Computational Fluid Dynamics. *Hermosa: Albuquerque*. DOI: 10.1016/0041-5553(80)90297-9.
17. Ostwald W. (1929) Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität. *Kolloid Zeitschrift*. 47(2). pp. 176–187. DOI: 10.1007/BF01496959.
18. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. (1987) *Difference Schemes*. North-Holland: Elsevier Science Ltd.
19. Deshpande M.D., Giddens D.P., Mabon R.F. (1976) Steady laminar flow through modelled vascular stenoses. *Journal of Biomechanics*. 9(4). pp. 165–174. DOI: 10.1016/0021-9290(76)90001-4.

Received: October 21, 2019