МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО НЕНАДЁЖНОСТИ СХЕМЫ В БАЗИСЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ФУНКЦИИ ВЕББА, В P_3 ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 2 НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

О. Ю. Барсукова*, М. А. Алехина**

*Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
**Пензенский государственный технологический университет, г. Пенза, Россия

Рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном базисе, состоящем из функции Вебба. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, подвержены однотипным константным неисправностям типа 2 на выходах. Доказано, что любую функцию трёхзначной логики можно реализовать схемой, функционирующей с ненадёжностью асимптотически не больше 3ε при $\varepsilon \to 0$. Найден класс функций (он содержит почти все функции трёхзначной логики), каждую из которых нельзя реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически меньше 3ε при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, доказано, что почти любую функцию трёхзначной логики можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \to 0$.

Ключевые слова: *функции трёхзначной логики, ненадёжные функциональные элементы, надёжность и ненадёжность схемы, синтез схем из ненадёжных элементов, неисправности на выходах элементов.*

DOI 10.17223/20710410/47/3

ASYMPTOTICALLY OPTIMAL IN UNRELIABILITY CIRCUITS IN THE BASIS CONSISTING OF THE WEBB FUNCTION IN P_3 UNDER FAULTS OF TYPE 2 AT THE OUTPUTS OF ELEMENTS

O. Yu. Barsukova*, M. A. Alekhina**

*Penza State University, Penza, Russia
**Penza State Technological University, Penza, Russia

E-mail: oksana.barsukova.71@gmail.com, alekhina@penzgtu.ru

We consider the realization of ternary logic functions by circuits from unreliable elements in full basis consisting of the Webb function. We assume that elements of the circuit pass to fault states independently of each other, and they are exposed to single-type constant faults of type 2 at the outputs. It is proved that any function of ternary

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 17-01-00451а.

logic can be realized by an asymptotically optimal in reliability circuit functioning with unreliability which is asymptotically no more $3varepsilon$ with $\varepsilon \to 0$. A class of functions is found (it contains almost all ternary logic functions), each of which cannot be implemented by a circuit whose unreliability is asymptotically less 3ε with $\varepsilon \to 0$. Thus, it is proved that almost any function of ternary logic can be implemented by an asymptotically optimal on reliability circuit operating with unreliability which is asymptotically equal to 3ε with $\varepsilon \to 0$.

Keywords: *ternary logic functions, unreliable functional elements, reliability and unreliability of circuit, synthesis of circuits from unreliable elements, faults at outputs of elements.*

Введение

В современной технике и математике в подавляющем большинстве случаев используется двузначная логика. Это исторически сложившееся положение предопределено её сравнительной простотой и сделало её применение предпочтительным (в сравнении с другими логическими системами) с технической и экономической точек зрения. Однако сложность решаемых задач, а следовательно и технических устройств, постоянно возрастает. Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры, число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения задач. Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Среди них различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработка сложных цифровых сигналов и т. д.

Среди работ по многозначным логикам отметим работу [1], в которой функционирование реальных электронных схем описано с помощью функций трёхзначной логики, построен функционально полный в P_3 базис, на компромиссной основе согласованы математические и технические требования и интересы и рассмотрены некоторые аспекты синтеза электронных схем в этом базисе. Знакомство с [1] положило начало исследованиям по синтезу схем из ненадёжных элементов в том или ином полном конечном базисе как в P_3 [2], так и вообще в P_k $(k \geqslant 3)$.

В предлагаемой работе рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами в базисе, состоящем из функции Вебба $V_3(x_1, x_2) = (\max\{x_1, x_2\} + 1) \bmod 3$, при однотипных константных неисправностях типа 2.

Задача синтеза надёжных схем в полном базисе, состоящем из функции Вебба, решена в P_3 [2] при инверсных неисправностях на выходах базисных элементов (когда на каждом входном наборе любого из базисных элементов вероятность появления неверного значения на выходе элемента одинакова). В [2] также доказаны верхняя и нижняя оценки ненадёжности схем в базисе $\{V_3(x_1, x_2)\}$, однако асимптотически эти оценки оказались различными, т. е. в [2] построены надёжные схемы, но асимптотически оптимальными по надёжности эти схемы не являются. В [3] при произвольном $k \geqslant 3$ в случае однотипных константных неисправностей типа 0 и типа $k-1$ в базисе, состоящем из функции Вебба $V_k(x_1, x_2) = (\max\{x_1, x_2\} + 1) \bmod k$, построены надёжные схемы, реализующие функции k-значной логики, получены верхние оценки ненадёжности этих схем. В случае неисправностей типа 0 на выходах элементов построенные схемы оказались не просто надёжными, а асимптотически оптимальными по надёжности.

В настоящем исследовании при однотипных константных неисправностях типа 2 на выходах элементов в базисе $\{V_3(x_1, x_2)\}$: 1) доказаны нетривиальные нижние оценки ненадёжности схем; 2) выявлен класс K функций трёхзначной логики, для которых найденные нижние оценки ненадёжности схем асимптотически равны ранее известным [3] верхним оценкам ненадёжности схем, т. е. любую функцию этого класса можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой; 3) класс K содержит почти все функции трёхзначной логики.

Введём необходимые понятия и определения.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $P_3(n)$ — множество функций трёхзначной логики, каждая из которых зависит от переменных $x_1, \dots, x_n$, т. е. функций $f(x_1, \dots, x_n) : \{0,1,2\}^n \to \{0,1,2\}$. Обозначим через P_3 множество всех функций трёхзначной логики.

Считаем, что схема реализует функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на её выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$. Допустим, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε $(0 < \varepsilon < 1/2)$ переходят в неисправные состояния типа 2 на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему функцию трёхзначной логики, а в неисправном — константу 2.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через $P_i(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения $i \in \{0,1,2\}$ на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$, а через $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S, \tilde{a}^n)$ — вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$, на котором $f(\tilde{a}^n) = \tau$. Ясно, что $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S, \tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a}^n)$ (в выражениях $\tau + 1$ и $\tau + 2$ сложение осуществляется по модулю 3). Например, если входной набор $\tilde{a}^n$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}^n) = 0$ (т.е. при отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе появляется значение 0), то вероятность ошибки на этом наборе равна $P_{f(\tilde{a}^n)\neq 0}(S, \tilde{a}^n) = P_1(S, \tilde{a}^n) + P_2(S, \tilde{a}^n)$.

Ненадёжностью схемы S будем называть число $P(S) = \max\{P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S, \tilde{a}^n)\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}^n$ схемы S. *Надёжность* схемы S равна $1 - P(S)$.

Замечание 1. Заметим, что при неисправностях типа 2 ненадёжность базисного элемента равна ε.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где S — схема, реализующая $f(\tilde{x}^n)$. Схему A, реализующую f, назовём *асимптотически оптимальной по надёжности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

1. Верхняя оценки ненадёжности

В работе [3] получена верхняя оценка ненадёжности для схем, реализующих функции k-значной логики ($k \geqslant 3$) при неисправностях типа $k-1$ на выходах элементов, а именно доказано, что в базисе, состоящем из функции Вебба $V_k(x_1, x_2) = (\max\{x_1, x_2\} + 1) \bmod k$, любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant 3\varepsilon + c(k)\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 = 2^{-2^k}/(27k^8)$, $c(k) = 17{,}5 \cdot 2^{2^k}$. Для $k = 3$ получается следующая верхняя оценка ненадёжности схем в P_3.

Теорема 1 [3]. Любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать такой схемой S, что $P(S) < 3\varepsilon + 4480\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1 = 2{,}2/10^8$.

Из теоремы 1 следует, что в полном базисе, состоящем из функции Вебба $V_3(x_1, x_2) = (\max\{x_1, x_2\} + 1) \bmod 3$, при однотипных константных неисправностях типа 2 любую функцию из P_3 можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше 3ε.

2. Нижняя оценка ненадёжности

Для нахождения нижних оценок ненадёжности приведём ранее полученные результаты.

Лемма 1 [2]. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная функция, которая принимает три значения 0, 1, 2; S — любая схема, её реализующая; подсхема A схемы S содержит выход схемы S и реализует функцию $\varphi(\tilde{y}^m)$ с ненадёжностью $P(A) \leqslant 1/2$; $p_0 = \min\limits_{\tilde{b}_0^m} P_{\varphi(\tilde{b}_0^m)\neq 0}(A, \tilde{b}_0^m)$, где $\tilde{b}_0^m$ — такой входной набор схемы A, что $\varphi(\tilde{b}_0^m) = 0$; $p_1 = \min\limits_{\tilde{b}_1^m} P_{\varphi(\tilde{b}_1^m)\neq 1}(A, \tilde{b}_1^m)$, где $\tilde{b}_1^m$ — такой входной набор схемы A, что $\varphi(\tilde{b}_1^m) = 1$; $p_2 = \min\limits_{\tilde{b}_2^m} P_{\varphi(\tilde{b}_2^m)\neq 2}(A, \tilde{b}_2^m)$, где $\tilde{b}_2^m$ — такой входной набор схемы A, что $\varphi(\tilde{b}_2^m) = 2$. Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} &P_{f(\tilde{a}^n)\neq 0}(S, \tilde{a}^n) \geqslant p_0, \text{ если } f(\tilde{a}^n) = 0,\\ &P_{f(\tilde{a}^n)\neq 1}(S, \tilde{a}^n) \geqslant p_1, \text{ если } f(\tilde{a}^n) = 1,\\ &P_{f(\tilde{a}^n)\neq 2}(S, \tilde{a}^n) \geqslant p_2, \text{ если } f(\tilde{a}^n) = 2. \end{aligned}$$

Пусть в схеме S можно выделить подсхему D, которая имеет один вход, содержит выход схемы S и реализует либо тождественную функцию y, либо $(y+1) \bmod 3$, либо $(y+2) \bmod 3$, т. е. реализует некоторую функцию $(y+j) \bmod 3$, $j \in \{0,1,2\}$. Обозначим через C подсхему, получаемую из схемы S удалением подсхемы D (рис. 1).

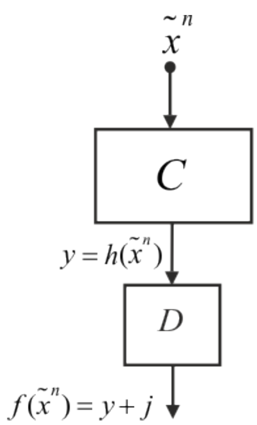

Рис. 1. Схема S

Будем говорить, что схема C *надёжнее* схемы S (и получается из схемы S удалением подсхемы D), если выполнено неравенство $P(C) < P(S)$.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — функция, которая принимает три значения 0, 1, 2. Схему S, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$, будем называть *bc-схемой*, если из неё нельзя получить более надёжную схему удалением подсхемы, содержащей выход схемы S и реализующей некоторую функцию $(y+j) \bmod 3$, $j \in \{0,1,2\}$.

Обозначим $h(\tilde{x}^n)$ функцию, которую реализует схема C (рис. 1); w_i, $i \in \{0,1,2\}$, — вероятность появления ошибки на выходе схемы D при поступлении на её вход значения i. Очевидно, $f(\tilde{x}^n) = (h(\tilde{x}^n) + j) \bmod 3$.

Лемма 2 [2]. Пусть схема S, ненадёжность которой равна $P(S)$, реализует функцию f и является bc-схемой. Пусть в схеме S (рис. 1) можно выделить подсхему D, имеющую один вход, содержащую выход схемы и реализующую некоторую функцию $(y + j) \bmod 3$, $j \in \{0, 1, 2\}$, с такими вероятностями ошибок w_0, w_1, w_2, что $0 < w_0 + w_1 + w_2 < 1$. Тогда верно неравенство

$$\min\left\{\frac{w_0}{w_0+w_1+w_2}, \frac{w_1}{w_0+w_1+w_2}, \frac{w_2}{w_0+w_1+w_2}\right\} \leqslant P(S).$$

Обозначим через $J_i(x)$ ($i \in \{0, 1, 2\}$) функцию, равную 2 при $x = i$ и 0 при $x \neq i$.

Лемма 3. При любом $n \in \mathbb{N}$ любую функцию $f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ трёхзначной логики можно представить следующим образом:

1) при $k = 1$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = J_0(x_1)\&f(0, x_2, \ldots x_n)\vee J_1(x_1)\&f(1, x_2, \ldots x_n)\vee J_2(x_1)\&f(2, x_2, \ldots, x_n);$$

2) при $k \in \{2, \ldots, n-1\}$

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = J_0(x_k)\&f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)\vee$$
$$\vee J_1(x_k)\&f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n) \vee J_2(x_k)\&f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 2, x_{k+1}, \ldots, x_n);$$

3) при $k = n$

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = J_0(x_n)\&f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\vee$$
$$\vee J_1(x_n)\&f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee J_2(x_n)\&f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 2).$$

Доказательство проводится непосредственной подстановкой различных значений переменной x_k в правые и левые части формул.

Обозначим через $K(n)$ множество функций трёхзначной логики, каждая из которых зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 3$), принимает все три значения $0, 1, 2$ и не представима в виде $V_3(x_k, h(\tilde{x}^n))$, $V_3(x_k, h(\tilde{x}^n))+1$ или $V_3(x_k, h(\tilde{x}^n))+2$ ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $h(\tilde{x}^n)$ — произвольная функция трехзначной логики). Обозначим $K = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K(n)$.

Замечание 2. Заметим, что в классе K не содержатся функции x_i ($i \in \mathbb{N}$), которые можно реализовать абсолютно надёжно, не используя функциональные элементы.

Теорема 2. $|K(n)| \geqslant 3^{3^n} - 3n3^{2\cdot 3^{n-1}} - 3 \cdot 2^{3^n}$.

Доказательство. Найдём число функций, представимых в виде $V_3(x_k, h(\tilde{x}^n))$. Для этого разложим функцию $V_3(x_k, h(\tilde{x}^n))$ по переменной x_k, используя лемму 3:

$$V_3(x_k, h(\tilde{x}^n)) = J_0(x_k)\&V_3(h(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n), 0) \vee J_1(x_k)\&V_3(h(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n), 1)\vee$$
$$\vee J_2(x_k) \ \& \ V_3(h(x_1, \ldots, 2, \ldots, x_n), 2) = J_0(x_k)\&\{\max[h(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n), 0] + 1\}\vee$$
$$\vee J_1(x_k)\&\{\max[h(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n), 1] + 1\} \vee J_2(x_k)\&\{\max[h(x_1, \ldots, 2, \ldots, x_n), 2] + 1\} =$$
$$= J_0(x_k)\&[h(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) + 1] \vee J_1(x_k)\&\{\max[h(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n), 1] + 1\}.$$

Тогда число функций, представимых в виде $V_3(x_k, h(\tilde{x}^n))$, не больше $n \cdot 3^{3^{n-1}} \cdot 3^{3^{n-1}} = n3^{2\cdot 3^{n-1}}$.

Аналогично находится число функций, представимых в виде $V_3(x_k, h(\tilde{x}^n)) + 1$ или $V_3(x_k, h(\tilde{x}^n)) + 2$, их также не больше $n3^{2\cdot 3^{n-1}} + n3^{2\cdot 3^{n-1}} = 2n3^{2\cdot 3^{n-1}}$.

Теперь рассмотрим функции, принимающие не больше двух значений из множества $\{0, 1, 2\}$. Очевидно, их число не больше $\mathrm{C}_3^2 \cdot 2^{3^n} = 3 \cdot 2^{3^n}$.

Следовательно, число функций, не принадлежащих классу $K(n)$, не больше $3n3^{2\cdot 3^{n-1}} + 3 \cdot 2^{3^n}$. Поэтому $|K(n)| \geqslant 3^{3^n} - 3n3^{2\cdot 3^{n-1}} - 3 \cdot 2^{3^n}$. ∎

Из теоремы 2 следует, что класс $K(n)$ содержит почти все функции из множества $P_3(n)$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} (3n3^{2\cdot 3^{n-1}} + 3 \cdot 2^{3^n})/3^{3^n} = 0$.

Справедлива теорема о нижней оценке ненадёжности схем, реализующих функции из класса K.

Теорема 3. Пусть $f \in K$. Тогда для любой схемы S, реализующей f, верно неравенство $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 2{,}2 \cdot 10^{-8}]$.

Доказательство. Пусть $f \in K$, S — любая схема, реализующая f. Заметим, что схема S содержит хотя бы три элемента.

Для ненадёжности $P(S)$ схемы S верно одно из двух неравенств (см. теорему 1): либо $P(S) > 3\varepsilon + 4480\varepsilon^2$ (тогда утверждение теоремы верно), либо $P(S) \leqslant 3\varepsilon + 4480\varepsilon^2$.

Пусть $P(S) \leqslant 3\varepsilon + 4480\varepsilon^2$. Без ограничения общности схему S можно считать bc-схемой (иначе будем удалять из схемы S подсхемы, реализующие либо тождественную функцию y, либо функцию $y + 1$, либо функцию $y + 2$, и получать более надёжные схемы, реализующие функции $(f + j) \bmod 3$, $j \in \{0, 1, 2\}$, до тех пор, пока не получим bc-схему S'', для которой и проведём дальнейшие рассуждения, заменив S на S'').

Выделим в схеме S подсхему S', состоящую из трёх элементов и содержащую выход схемы S (это возможно, поскольку $f \in K$). Обозначим через E_1 функциональный элемент, содержащий выход схемы S. Поскольку $f \in K$, входы элемента E_1 не могут быть соединены с полюсами, а следовательно, соединены с выходами некоторых элементов схемы S. Возможны следующие варианты:

1. Пусть входы элемента E_1 соединены с выходами двух различных элементов E_2 и E_3.

1.1. Пусть ни выход элемента E_2 не соединён со входом элемента E_3, ни выход элемента E_3 не соединён со входом элемента E_2 (рис. 2, *а*) либо пусть выход одного из элементов, например E_3, соединён со входом другого элемента E_2 (рис. 2, *б*). Пусть входной набор схемы S' таков, что при отсутствии неисправностей в схеме S' на её выходе появляется значение 1 (такой набор найдётся, поскольку $f \in K$). Вычислим вероятность появления 1 на выходе схемы S' по формуле полной вероятности и получим $(1 - \varepsilon)^3 = 1 - 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 - \varepsilon^3$.

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы S' равна $p_1 = 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$. По лемме 1 получаем неравенство $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$, т. е. утверждение теоремы верно.

1.2. Пусть выход одного из элементов, например E_2, соединён с каждым из двух входов другого элемента E_3 (рис. 2, *в*). Тогда схема S реализует функцию, принимающую только два значения 0 и 2, что противоречит условию $f \in K$.

2. Пусть элементы E_2 и E_3 совпадают, т. е. оба входа элемента E_1 соединены с выходом некоторого элемента E_2. Ни один из входов элемента E_2 не может быть соединён с полюсом, поскольку $f \in K$. Следовательно, оба входа элемента E_2 соединены с выходами некоторых элементов E_4 и E_5.

2.1. Пусть элементы E_4 и E_5 различны. Рассмотрим подсхему A из четырёх элементов E_1, E_2, E_4 и E_5 (рис. 3), причём возможные варианты подсхем S^* представлены на рис. 2. Вычислим вероятность правильного значения 2 на выходе подсхемы A при поступлении на входы соответствующего набора $\tilde{a}$ при отсутствии

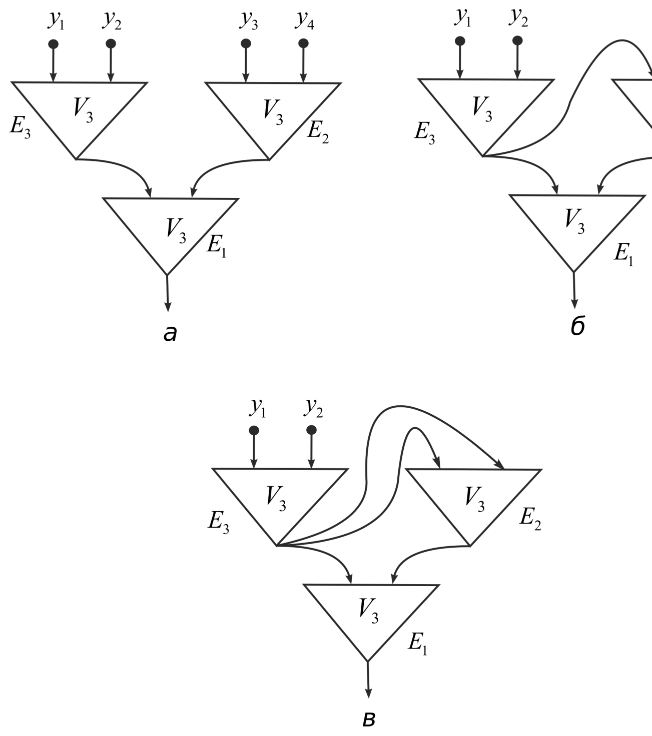

Рис. 2

неисправностей: $P_2(A, \tilde{a}) = (1 - p_1)1 + p_1\varepsilon$, где $p_1 = 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ — вероятность ошибки подсхемы из трёх элементов E_2, E_4 и E_5, найденная в п. 1 доказательства. Поэтому вероятность ошибки на выходе подсхемы A равна $1 - P_2(A, \tilde{a}) = p_1(1 - \varepsilon) = 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - \varepsilon^4 \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$. Поскольку набор $\tilde{a}$ — любой, на котором подсхема A принимает значение 2, по лемме 1 верно неравенство $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$.

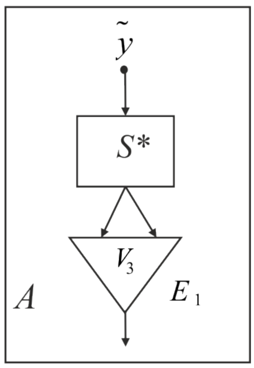

Рис. 3. Подсхема A

2.2. Пусть элементы E_4 и E_5 совпадают. Рассмотрим подсхему D из двух элементов E_1 и E_2, имеющую один вход и один выход (см. рис. 1). Вычислим вероятности ошибок на выходе этой подсхемы:

1) при поступлении на вход D значения 0 вероятность появления правильного значения 2 равна $1 - w_2 = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$, поэтому $w_2 = \varepsilon - \varepsilon^2$;
2) при поступлении на вход D значения 1 вероятность появления правильного значения 0 равна $1 - w_0 = 1 - \varepsilon$, поэтому $w_0 = \varepsilon$;

3) при поступлении на вход D значения 2 вероятность появления правильного значения 1 равна $1 - w_1 = (1-\varepsilon)^2$, поэтому $w_1 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$.

Тогда $w_0 + w_1 + w_2 = 4\varepsilon - 2\varepsilon^2$ и

$$\min\left\{\frac{w_0}{w_0+w_1+w_2}, \frac{w_1}{w_0+w_1+w_2}, \frac{w_2}{w_0+w_1+w_2}\right\} = \frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{4\varepsilon-2\varepsilon^2} = \frac{1-\varepsilon}{4-2\varepsilon}.$$

По лемме 2 при $\varepsilon \in (0,\ 2{,}2 \cdot 10^{-8}]$ верно неравенство $\dfrac{1-\varepsilon}{4-2\varepsilon} \leqslant 3\varepsilon + 4480\varepsilon^2$, что не так, поскольку $\dfrac{1-\varepsilon}{4-2\varepsilon} \geqslant (1-\varepsilon)/4 > 0{,}8/4 = 0{,}2$, а $3\varepsilon + 4480\varepsilon^2 < 0{,}1$. Полученное противоречие означает, что подсхема D не может быть подсхемой схемы S. ■

Следовательно, любая схема, реализующая функцию $f \in K$, функционирует с ненадёжностью, которая асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не меньше 3ε.

Таким образом, в полном базисе, состоящем из функции Вебба $V_3(x_1, x_2) = (\max\{x_1, x_2\} + 1) \bmod 3$, при неисправностях типа 2 на выходах элементов почти любую функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) равной 3ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виноградов Ю. А.* О синтезе трехзначных схем // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1991. Вып. 3. С. 187–198.
2. *Барсукова О. Ю.* Синтез надежных схем, реализующих функции двузначной и трехзначной логик: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2014. 87 с.
3. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* О надёжности схем в базисе, состоящем из функции Вебба, в P_k при неисправностях типа 0 и типа $k-1$ на выходах элементов // Прикладная дискретная математика. 2019. № 44. С. 56–64.

REFERENCES

1. *Vinogradov Yu. A.* O sinteze trekhznachnykh skhem [About the synthesis of ternary logic circuits]. Math. Problems of Cybernetics. Moscow, Nauka Publ., 1991, vol. 3, pp. 187–198.(in Russian)
2. *Barsukova O. Yu.* Sintez nadezhnykh skhem, realizuyushchikh funktsii dvuznachnoy i trekhznachnoy logik [Synthesis of reliable schemes that implement two-valued and three-valued logics functions]. PhD Thesis, Penza, 2014. 87 p. (in Russian)
3. *Alekhina M. A. and Barsukova O. Yu.* O nadezhnosti skhem v bazise, sostoyashchem iz funktsii Vebba, v P_k pri neispravnostyakh tipa 0 i tipa $k-1$ na vykhodakh elementov [About reliability of circuits in the basis consisting of the Webb function in P_k under failures of 0 type and $k-1$ type at the outputs of elements.] Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2019, no. 44, pp. 56–64.