ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.175.3

ЧИСЛО ПОМЕЧЕННЫХ ТЕТРАЦИКЛИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ БЛОКОВ

В. А. Воблый

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, г. Москва, Россия

Последовательно-параллельный граф — это граф, не содержащий в качестве минора полный граф с четырьмя вершинами. Такие графы используются при построении надёжных коммуникационных сетей. Получена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных тетрациклических графов с заданным числом вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный тетрациклический блок является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна $3/11$.

Ключевые слова: *помеченный граф, тетрациклический граф, последовательно-параллельный граф, блок, перечисление, асимптотика.*

DOI 10.17223/20710410/47/5

THE NUMBER OF LABELED TETRACYCLIC SERIES-PARALLEL BLOCKS

V. A. Voblyi

All-Russian Institut for Scientific and Technical Information, Moscow, Russia

E-mail: vitvobl@yandex.ru

A series-parallel graph is a graph that does not contain a complete graph with four vertices as a minor. Such graphs are used in the construction of reliable communication networks. Let $TB(n)$ be the number of labeled series-parallel tetracyclic blocks with n vertices. The formula $TB(n) = \frac{n!}{80640}(n^5 + 30n^4 + 257n^3 + 768n^2 + 960n + 504)\binom{n-3}{3}$ is obtained. It is proved that with a uniform probability distribution, the probability that the labeled tetracyclic block is a series-parallel graph is asymptotically $3/11$.

Keywords: *labeled graph, tetracyclic graph, series-parallel graph, block, enumeration, asymptotics.*

Введение

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным. *Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения. Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит минора, являющегося полным графом K_4 [1]. *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом рёбер и вершин графа. *k-Циклический граф* — это граф с цикломатическим числом k.

Последовательно-параллельные графы используются при построении надёжных коммуникационных сетей [2]. Целый ряд задач алгоритмической теории графов, являющихся NP-полными для произвольных графов, может быть решён полиномиальными алгоритмами в классе последовательно-параллельных графов [3].

В [1] найдена асимптотика для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [4] перечислены помеченные последовательно-параллельные связные графы и блоки по числу вершин. В [5] найдены числа помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков с заданным числом вершин. В данной работе получена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков с заданным числом вершин.

1. Перечисление графов

Теорема 1. Число $TB(n)$ помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков с n вершинами при $n \geqslant 6$ равно

$$TB(n) = \frac{n!}{80640}(n^5 + 30n^4 + 257n^3 + 768n^2 + 960n + 504)\binom{n-3}{3} . \tag{1}$$

Доказательство. Гомеоморфный тип — это общий граф (возможно, содержащий петли или кратные рёбра) без вершин степени 2, из которого все графы из заданного класса гомеоморфных графов получаются вставкой вершин степени 2 [6, 7]. Из 17 гомеоморфных типов тетрациклических блоков из списка Хипа только 6 не являются последовательно-параллельными графами [8]. Диаграммы этих блоков представлены на рис. 1.

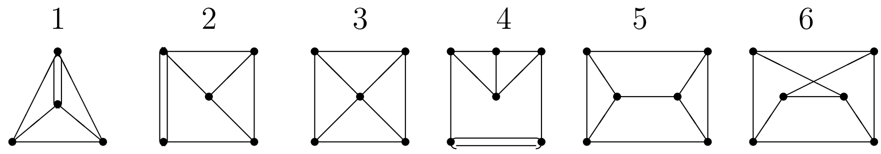

Рис. 1

Пусть H — гомеоморфный тип с a вершинами, b ребрами, b_0 петлями, b_i — число пучков рёбер кратности i, $A(H)$ — порядок вершинно-рёберной группы автоморфизмов графа H. Тогда число помеченных графов C_n с n вершинами и гомеоморфным типом H равно [7, лемма 2]

$$C_n = \frac{n!}{2^{b_0} A(H)} \mathrm{Coef}_{x^{n-a}} \frac{x^{b+b_0-\sum\limits_{i=1}^{b} b_i} \prod\limits_{i=1}^{b} (x + i(1-x))^{b_i}}{(1-x)^b} .$$

В нашем случае имеем

1) $a=4$, $b=7$, $A(H)=8$, $b_0=0$, $b_1=5$, $b_2=1$,

$$C_{1,n}=\frac{n!}{8}\mathrm{Coef}_{x^{n-4}}\frac{x(x+2(1-x))}{(1-x)^7}=\frac{n!}{8}\mathrm{Coef}_{x^{n-4}}\Big(\frac{x^2}{(1-x)^7}+2\frac{x}{(1-x)^6}\Big)\ .$$

С помощью известного разложения [9, с. 709]

$$(1-w)^{-m-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{m}w^n$$

получим

$$C_{1,n}=\frac{n!}{8}\mathrm{Coef}_{x^{n-4}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+6}{6}x^{k+2}+4\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{4}x^{k+1}\right)=\frac{n!}{8}\left(\binom{n}{6}+2\binom{n}{5}\right).$$

Аналогично для остальных гомеоморфных типов графов:

2) $a=5$, $b=8$, $A(H)=4$, $b_0=0$, $b_1=6$, $b_2=1$,

$$C_{2,n}=\frac{n!}{4}\mathrm{Coef}_{x^{n-5}}\frac{x(x+2(1-x))}{(1-x)^8}=$$
$$=\frac{n!}{4}\mathrm{Coef}_{x^{n-5}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+7}{7}x^{k+2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+6}{6}x^{k+1}\right)=\frac{n!}{4}\left(\binom{n}{7}+2\binom{n}{6}\right);$$

3) $a=5$, $b=8$, $A(H)=8$, $b_0=0$, $b_1=8$,

$$C_{3,n}=\frac{n!}{8}\mathrm{Coef}_{x^{n-5}}\frac{1}{(1-x)^8}=\frac{n!}{8}\mathrm{Coef}_{x^{n-5}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+7}{7}x^k\right)=\frac{n!}{8}\binom{n+2}{7};$$

4) $a=6$, $b=9$, $A(H)=8$, $b_0=0$, $b_1=7$, $b_2=1$,

$$C_{4,n}=\frac{n!}{8}\mathrm{Coef}_{x^{n-5}}\frac{x(x+2(1-x))}{(1-x)^8}=$$
$$=\frac{n!}{4}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+8}{8}x^{k+2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+7}{7}x^{k+1}\right)=\frac{n!}{8}\left(\binom{n}{8}+2\binom{n}{7}\right);$$

5) $a=6$, $b=9$, $A(H)=12$, $b_0=0$, $b_1=9$,

$$C_{5,n}=\frac{n!}{12}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\frac{1}{(1-x)^9}=\frac{n!}{12}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+8}{8}x^k\right)=\frac{n!}{12}\binom{n+2}{8};$$

6) $a=6$, $b=9$, $A(H)=72$, $b_0=0$, $b_1=9$,

$$C_{6,n}=\frac{n!}{72}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\frac{1}{(1-x)^9}=\frac{n!}{12}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+8}{8}x^k\right)=\frac{n!}{72}\binom{n+2}{8}.$$

Таким образом, число $\bar{C}_n$ не последовательно-параллельных блоков равно

$$\frac{n!}{8}\left(\binom{n}{6}+2\binom{n}{5}\right)+\frac{n!}{4}\left(\binom{n}{7}+2\binom{n}{6}\right)+\frac{n!}{8}\binom{n+2}{7}+$$
$$+\frac{n!}{8}\left(\binom{n}{8}+2\binom{n}{7}\right)+\frac{n!}{12}\binom{n+2}{8}+\frac{n!}{72}\binom{n+2}{8}.$$

Пусть $u(n,n+3)$ — число помеченных блоков с n вершинами и $n+3$ рёбрами (тетрациклических блоков). Э. Райт получил формулу [10]

$$u(n,n+3)=\frac{n!}{720}\left(220\binom{n+3}{8}+275\binom{n+2}{+}120\binom{n+1}{6}-30\binom{n}{5}-\right.$$
$$\left.-117\binom{n-1}{4}-126\binom{n-2}{3}-72\binom{n-3}{2}\right).$$

Вычитая из числа всех тетрациклических блоков число тетрациклических не последовательно-параллельных блоков и приводя подобные члены, найдём $TB(n)$:

$$TB(n)=u(n,n+3)-\bar{C}_n=\frac{n!}{720}\left(220\binom{n+3}{8}+185\binom{n+2}{7}+120\binom{n+1}{6}-\right.$$
$$-210\binom{n}{5}-117\binom{n-1}{4}-126\binom{n-2}{3}-72\binom{n-3}{2}-450\binom{n}{6}-$$
$$\left.-360\binom{n}{7}-90\binom{n}{8}-70\binom{n+2}{8}\right).$$

Полученное выражение для $TB(n)$ ненамного длиннее формулы Райта для $u(n,n+3)$ и пригодно для вычисления. Представляя биномиальные коэффициенты в виде многочленов от n, после приведения подобных членов и выделения линейных множителей в полученном многочлене найдём компактную формулу (1). ■

2. Асимптотика и вероятность

Так как $\binom{n}{k}\sim\frac{n^k}{k!}$ при $n\to\infty$ и фиксированном k, из (1) получаем

Следствие 1. При $n\to\infty$ верно асимптотическое равенство

$$TB(n)\sim\frac{n^8}{483840}n!\,.$$

Зададим на множестве помеченных тетрациклических блоков с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 2. Пусть P_n — вероятность того, что помеченный тетрациклический блок с n вершинами является последовательно-параллельным графом. При $n\to\infty$ верна асимптотика $P_n\sim\frac{3}{11}$.

Доказательство. Очевидно, для $u(n,n+3)$ при $n\to\infty$ имеем асимптотику $u(n,n+3)\sim\frac{11n^8}{36\cdot 8!}n!$. Поэтому $P_n=\frac{TB(n)}{u(n,n+3)}\sim\frac{3}{11}$ при $n\to\infty$. ■

В таблице представлены числа $TB(n)$, вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple.

n	6	7	8	9	10	11
$TB(n)$	1215	55461	1722840	46312560	1171648800	29004544800

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., and Noy M.* Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // European J. Combinatorics. 2007. V. 28. P. 2091–2105.
2. *Radhavan S.* Low-connectivity network design on series-parallel graphs // Networks. 2004. V. 43. No. 3. P. 163–176.
3. *Takamizawa K., Nishezeki T., and Saito N.* Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs // J. ACM. 1982. V. 29. No. 3. P. 623–641.
4. *Воблый В. А.* Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискретн. анализ и исследование операций. 2019. Т. 26. № 1. С. 20–32.
5. *Воблый В. А., Мелешко А. М.* О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков // Материалы XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения». Тула: Изд-во ТПГУ, 2018. С. 168–170.
6. *Ford G. W. and Uhlenbeck G. E.* Combinatorial problems in theory graphs. IV // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1957. V. 43. P. 163–167.
7. *Степанов В. Е.* О некоторых особенностях строения случайного графа вблизи критической точки // Теория вероятн. и ее применения. 1987. Т. 32. Вып. 4. С. 633–657.
8. *Heap B. R.* Enumeration homeomorphically irreducible star graphs // J. Math. Phys. 1966. V. 7. No. 7. P. 1582–1587.
9. *Прудников А. П. и др.* Интегралы и ряды. Т. 1. М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. 800 с.
10. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edges graphs. II // J. Graph Theory. 1978. V. 2. P. 299–305.

REFERENCES

1. *Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., and Noy M.* Enumeration and limit laws of series-parallel graphs. European J. Combinatorics, 2007, vol. 28, pp. 2091–2105.
2. *Radhavan S.* Low-connectivity network design on series-parallel graphs. Networks, 2004, vol. 43, no. 3, pp. 163–176.
3. *Takamizawa K., Nishezeki T., and Saito N.* Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs. J. ACM, 1982, vol. 29, no. 3, pp. 623–641.
4. *Voblyy V. A.* Vtoroye sootnosheniye Riddella i sledstviya iz nego [The second Riddell relation and its consequences]. Diskretn. analiz i issled. oper., 2019, vol. 26, no. 1, pp. 20–32. (in Russian)
5. *Voblyy V. A. and Meleshko K. A.* O chisle pomechennykh parallel'nykh tritsiklicheskikh blokov [On the number of labeled series-parallel tricyclic blocks.] Proc. Intern. Conf. “Algebra, Teoriya Chisel i Diskretnaya Geometriya. Sovremennyye Problemy i Prilozheniya”, Tula, TPSU Publ., 2018, pp. 168–170. (in Russian)
6. *Ford G. W. and Uhlenbeck G. E.* Combinatorial problems in theory graphs. IV. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1957, vol. 43, pp. 163–167.
7. *Stepanov V. E.* O nekotorykh osobennostyakh stroeniya sluchaynogo grapha vblizi kriticheskoy tohki [On some features of the structure of a random graph near a critical point]. Teoriya Veroyatn. Primen., 1987, vol. 32, no. 4, pp. 633–657. (in Russian)
8. *Heap B. R.* Enumeration homeomorphically irreducible star graphs. J. Math. Phys., 1966, vol. 7, no. 7, pp. 1582–1587.
9. *Prudnikov A. P. et al.* Integraly i ryady [Integrals and Series]. Vol. 1, Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p. (in Russian)
10. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edges graphs. II. J. Graph Theory, 1978, vol. 2, pp. 299–305.