ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Управление, вычислительная техника и информатика № 50

УДК 369:519.2
DOI: 10.17223/19988605/50/5

О.В. Губина, Г.М. Кошкин

ОЦЕНИВАНИЕ СОВРЕМЕННОЙ СТОИМОСТИ *n*-ЛЕТНЕЙ РЕНТЫ ДЛЯ СМЕШАННОГО СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

Рассматривается задача оценивания *n*-летней ренты для смешанного страхования жизни, которое часто предлагается страховыми компаниями. Находятся главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки и порядок смещения оценки ренты, доказывается ее асимптотическая нормальность.
Ключевые слова: смешанное страхование жизни; *n*-летняя рента; непараметрическая оценка; среднеквадратическая ошибка; асимптотическая нормальность.

Суть смешанного страхования жизни, или *n*-летнего страхования на дожитие, заключается в следующем. Человек заключает договор страхования на *n* лет. Выплата по договору производится либо в момент смерти застрахованного бенефициарию, если застрахованный умер в течение *n* лет, либо в момент окончания срока действия договора, если застрахованный дожил до конца этого срока. Этот вид договора выполняет функции как страхования, так и накопления средств, тем самым являясь наиболее привлекательным для клиента.

В страховую компанию обращаются люди, достигшие определенного возраста x лет, поэтому все случайные события (страховые случаи), связанные с этим человеком, имеют условный характер. Для человека в возрасте x лет целесообразнее использовать не продолжительность жизни X, а остаточное время жизни $T(x) = X - x$. Согласно [1–3] остаточное время жизни $T(x)$ имеет функцию распределения

$$F_x(t) = P(T(x) \le t) = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}$$

и плотность

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = -\frac{d}{dt} S_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)}, \quad 0 \le t < \infty,$$

где $S(x)$ – функция выживания, $f(u) = -S'(u)$ – плотность распределения продолжительности жизни X.

Определим для смешанного страхования жизни современную величину страховой выплаты z:

$$z = \begin{cases} e^{-\delta T(x)}, & T(x) \le n, \\ e^{-\delta n}, & T(x) > n, \end{cases} \tag{1}$$

где δ обозначает банковскую процентную ставку. В данном случае величина z, определяемая выражением (1), показывает настоящую долю будущей страховой выплаты, принимаемой за условную единицу. Чем больше срок страхования, тем меньше выплаты застрахованного за счет использования банковской процентной ставки.

В качестве *n*-летней пожизненной ренты для смешанного страхования по аналогии с [3] и формулами (1) и (2) из статьи [4] получаем

$$\overline{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - \dfrac{1}{S(x)} \int_0^n e^{-\delta t} f(x+t)dt - \dfrac{e^{-\delta n} S(x+n)}{S(x)}}{\delta}. \tag{2}$$

С помощью замены переменных преобразуем интеграл в (2):

$$\int_0^n e^{-\delta t} f(x+t)dt = e^{\delta x}\int_x^{x+n} e^{-\delta t}dF(t) = \Phi_n(x,\delta),$$

$$\int_x^{x+n} e^{-\delta t}dF(t) = J_n(x,\delta)\,.$$

Тогда формула (2) принимает вид

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\delta}\left(1-\frac{e^{\delta x}}{S(x)}\int_x^{x+n} e^{-\delta t}dF(t) - \frac{e^{-\delta n}S(x+n)}{S(x)}\right), \qquad (3)$$

или

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\delta}\left(1-\left(\frac{\Phi_n(x,\delta)}{S(x)} + \frac{e^{-\delta n}S(x+n)}{S(x)}\right)\right). \qquad (4)$$

Далее будут использоваться как формула (3), так и формула (4).

1. Синтез оценки

Пусть имеется случайная выборка $X_1, ..., X_N$ продолжительности жизни X, по которой необходимо оценить ренту (3).

Воспользуемся вместо неизвестных $F(x)$ и $S(x)$ их непараметрическими оценками: эмпирическими функциями распределения $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(X_i \le x)$ и выживания $S_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(X_i > x)$, где $I(A)$ – индикатор события A. Подставив $F_N(x)$ и $S_N(x)$ в выражения для смешанной ренты (3) или (4), получим следующую оценку подстановки:

$$\bar{a}^N_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\delta}\left(1-\left(\frac{e^{\delta x}}{S_N(x)\cdot N}\sum_{i=1}^{N}\exp(-\delta X_i)\mathrm{I}(x < X_i \le (x+n)) + \frac{e^{-\delta n}S_N(x+n)}{S_N(x)}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\delta}\left(1-\left(\frac{e^{\delta x}J_{n,N}(x,\delta)}{S_N(x)} + \frac{e^{-\delta n}S_N(x+n)}{S_N(x)}\right)\right) = \frac{1}{\delta}\left(1-\left(\frac{\Phi_{n,N}(x,\delta)}{S_N(x)} + \frac{e^{-\delta n}S_N(x+n)}{S_N(x)}\right)\right). \qquad (5)$$

Отметим, что в оценке (5) вместо эмпирических функций $F_N(x)$ и $S_N(x)$ можно воспользоваться их гладкими модификациями [5–19].

2. Свойства оценки *n*-летней ренты

Найдем сначала главную часть асимптотической среднеквадратической ошибки (СКО) и порядок смещения оценки (5). Для этого нам понадобится теорема 1 из [20], которую ниже сформулируем в виде леммы.

Введем следующие обозначения согласно [20]: $t_N = \left(t_{1N}, t_{2N}, ..., t_{sN}\right)^{\mathrm{T}}$ – s-мерная векторная статистика с компонентами $t_{jN} = t_{jN}(x) = t_{jN}\left(x; X_1, ..., X_N\right)$, $j = \overline{1,s}$, $x \in R^{\alpha}$, R^{α} – α-мерное евклидово пространство. Пусть $\{d_N\}$ – последовательность положительных чисел, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} d_N = \infty$; функция $H(t): R^s \to R^1$, где $t = t(x) = \left(t_1(x), ..., t_s(x)\right)^{\mathrm{T}}$ является s-мерной ограниченной вектор-функцией; $\mathrm{N}_s(\mu; \sigma)$ есть s-мерная нормально распределенная случайная величина с вектором средних $\mu = \mu(x) = \left(\mu_1, ...\mu_s\right)^{\mathrm{T}}$ и ковариационной матрицей $\sigma = \sigma(x)$; $\nabla H(t) = \left(H_1(t), ..., H_s(t)\right)^{\mathrm{T}}$, где $H_j(t) = \left.\frac{\partial H(z)}{\partial z_j}\right|_{z=t}$,

$j = \overline{1,s}$; $\Rightarrow$ – символ сходимости по распределению; $\| x \|$ – евклидова норма вектора x; $\Re$ – множество натуральных чисел.

Определение 1. Функция $H(t): R^s \to R^1$ и последовательность $\{H(t_N)\}$ принадлежат классу $\mathrm{N}_{\nu,s}(t;\gamma)$, если:

1) существует ε-окрестность

$$\sigma = \left\{ z : | z_i - t_i | < \varepsilon, i = \overline{1,s} \right\},$$

в которой функция $H(z)$ и все ее частные производные вплоть до порядка ν непрерывны и ограничены;

2) для всевозможных значений величин $X_1, ..., X_N$ последовательность $\{H(t_N)\}$ мажорируется числовой последовательностью $C_0 d_N^{\gamma}$, такой что $d_N \uparrow \infty$ при $N \to \infty$, $0 \le \gamma < \infty$.

Лемма. Пусть:

1) $H(z)$, $\{H(t_N)\} \in \mathrm{N}_{2,s}(t;\gamma)$;

2) $E\left\|t_N - t\right\|^i = O\left(d_N^{-i/2}\right)$, $i \in \Re$.

Тогда для любых $k \in \Re$

$$\left| E\left[H(t_N) - H(t)\right]^k - E\left[\nabla H(t) \cdot (t_N - t)\right]^k \right| = o\left(d_N^{-(k+1)/2}\right). \tag{6}$$

При $k = 1$ получаем главную часть смещения оценки $H(t_n)$, а при $k = 2$ – ее СКО.

Теорема 1. Если $S(x) > 0$, $S(x+n) > 0$, $S(t)$ – непрерывна в точках x и $x + n$, то

1) для смещения оценки ренты (5) выполняется следующее соотношение:

$$E\left|\overline{a}_{x:\overline{n}|}^N - \overline{a}_{x:\overline{n}|}\right| = o\left(N^{-1}\right);$$

2) СКО оценки (5) задается выражением

$$u^2\left(\overline{a}_{x:\overline{n}|}^N\right) = E\left(\overline{a}_{x:\overline{n}|}^N - \overline{a}_{x:\overline{n}|}\right)^2 = \frac{\sigma\left(\overline{a}_{x:\overline{n}|}\right)}{N} + o\left(N^{-3/2}\right), \tag{7}$$

где $\sigma\left(\overline{a}_{x:\overline{n}|}\right)$ определяется по формуле (8).

Доказательство. Для оценки $\overline{a}_{x:\overline{n}|}^N$ в обозначениях леммы имеем:

$$t_N = \left(t_{1N}, t_{2N}, t_{3N}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\Phi_{n,N}(x,\delta), S_N(x), S_N(x+n)\right)^{\mathrm{T}};$$

$$d_N = N; \quad t = \left(t_1, t_2, t_3\right)^{\mathrm{T}} = \left(\Phi_n(x,\delta), S(x), S(x+n)\right)^{\mathrm{T}};$$

$$H(t) = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{t_1 + e^{-\delta n} t_3}{t_2}\right) = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{\Phi_n(x,\delta) + e^{-\delta n} S(x+n)}{S(x)}\right) = \overline{a}_{x:\overline{n}|};$$

$$H(t_N) = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{\Phi_{n,N}(x,\delta) + e^{-\delta n} S_N(x+n)}{S_N(x)}\right) = \overline{a}_{x:\overline{n}|}^N.$$

$$\nabla H(t) = \left(H_1(t), H_2(t), H_3(t)\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{\delta S(x)}, -\frac{\Phi_n(x,\delta) - e^{-\delta n} S(x+n)}{\delta S^2(x)}, -\frac{e^{-\delta n}}{\delta S(x)}\right)^{\mathrm{T}} \ne 0.$$

Последовательность $\{H(t_N)\}$ удовлетворяет условию 1 леммы с константами $C_0 = \dfrac{1}{\delta}\left(1 + e^{-\delta n}\right)$, $\gamma = 0$. Действительно,

$$|H(t_N)| = \frac{1}{\delta}\left|1 - \frac{\Phi_{n,N}(x,\delta) + e^{-\delta n} S_N(x+n)}{S_N(x)}\right| \le \frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{\Phi_{n,N}(x,\delta) + e^{-\delta n} S_N(x+n)}{S_N(x)}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{e^{\delta x}\sum\limits_{i=1}^{N}\exp(-\delta X_i) I\left(x < X_i \le (x+n)\right) + e^{-\delta n}\sum\limits_{i=1}^{N} I\left(X_i > (x+n)\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N} I\left(X_i > x\right)}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{e^{\delta x} e^{-\delta x}\sum\limits_{i=1}^{N} I\left(x < X_i \le (x+n)\right) + e^{-\delta n}\sum\limits_{i=1}^{N} I\left(X_i > (x+n)\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N} I\left(X_i > x\right)}\right) \le \frac{1}{\delta}\left(1 + e^{-\delta n}\right).$$

Функция $H(t)$ удовлетворяет условию 1, так как $t_2 = S(x) > 0$. Также эта функция удовлетворяет условию 2 согласно лемме 3.1 [21], так как для всех $i \in \Re$ выполняются следующие неравенства:

$$E\left\{e^{i\delta x} e^{-i\delta X} I^i\left(x < X \le (x+n)\right)\right\} \le e^{i\delta x} e^{-i\delta x}\left[S(x) - S(x+n)\right] = S(x) - S(x+n) \le 1,$$

$$E\{I^i(X > x)\} = S(x) \le 1, \quad E\left\{I^i\left(X > (x+n)\right)\right\} = S(x+n) \le 1.$$

Отметим, что $S_N(x)$ является несмещенной оценкой $S(x)$, а $J_{n,N}(x,\delta)$ – несмещенной оценкой функционала $J_n(x,\delta)$. Известно, что отношение двух несмещенных оценок может иметь смещение. Нахождение смещения отношения, как правило, является сложной задачей и требует использования результатов работы [20]. Найдем порядок смещения оценки. Так как $E(t_N - t) = 0$, то

$$\left|E\left(\bar{a}^N_{x:\bar{n}|} - \bar{a}_{x:\bar{n}|}\right) - E\left[\nabla H(t)(t_N - t)\right]\right| = \left|E\left(\bar{a}^N_{x:\bar{n}|} - \bar{a}_{x:\bar{n}|}\right)\right| = o\left(N^{-1}\right).$$

Для оценки $J_{n,N}(\delta)$ вычислим дисперсию:

$$DJ_{n,N}(x,\delta) = D\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(x < X_i \le (x+n)) e^{-\delta X_i}\right\} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} D\left\{I(x < X_i \le (x+n)) e^{-\delta X_i}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\int_0^\infty I(x < X_i \le (x+n)) e^{-2\delta X_i} dF(X_i) - J_n^2(x,\delta)\right) = \frac{1}{N}\left(J_n(x,2\delta) - J_n^2(x,\delta)\right).$$

Теперь, учитывая что $\Phi_n(x,\delta) = e^{\delta x} J_n(x,\delta)$, найдем компоненты ковариационной матрицы трехмерной статистики t_N:

$$\sigma_{11} = ND\{\Phi_{n,N}(x,\delta)\} = \Phi_n(x,2\delta) - \Phi_n^2(x,\delta); \quad \sigma_{22} = ND\{S_N(x)\} = S(x)(1 - S(x));$$

$$\sigma_{33} = ND\{S_N(x+n)\} = S(x+n)(1 - S(x+n)); \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = N\operatorname{cov}\left(S_N(x), \Phi_{n,N}(x,\delta)\right) =$$

$$= N\left(E\{S_N(x)\cdot\Phi_{n,N}(x,\delta)\} - E\{S_N(x)\}E\{\Phi_{n,N}(x,\delta)\}\right) = (1 - S(x))\Phi_n(x,\delta);$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = N\operatorname{cov}\left(S_N(x+n), \Phi_{n,N}(x,\delta)\right) =$$

$$= N\left(E\{S_N(x+n)\Phi_{n,N}(x,\delta)\} - E\{S_N(x+n)\}E\{\Phi_{n,N}(x,\delta)\}\right) = (1 - S(x+n))\Phi_n(x,\delta);$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = N\operatorname{cov}\left(S_N(x), S_N(x+n)\right) = (1 - S(x))S(x+n).$$

Используя предыдущий результат о смещении и найденную ковариационную матрицу, получаем СКО оценки:

$$u^2\left(\bar{a}^N_{x:\bar{n}|}\right) = E\left[\nabla H(t)(t_N - t)\right]^2 + O\left(N^{-3/2}\right) = \frac{\sigma(\bar{a}_{x:\bar{n}|})}{N} + O\left(N^{-3/2}\right),$$

где

$$\sigma(\overline{a}_{x:\overline{n}|}) = \sum_{p=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} H_j(t)\sigma_{jp}H_p(t) = H_1^2(t)\sigma_{11} + H_2^2(t)\sigma_{22} + H_3^2(t)\sigma_{33} + 2H_1(t)H_2(t)\sigma_{12} +$$

$$+ 2H_1(t)H_3(t)\sigma_{13} + 2H_2(t)H_3(t)\sigma_{23} = \frac{\Phi(x,2\delta)}{\delta S^2(x)} - \frac{\Phi^2(x,\delta)}{\delta S^2(x)} + \frac{\Phi(x,\delta)e^{-\delta n}S(x+n)}{\delta S^2(x)} - \tag{8}$$

$$- \frac{e^{-2\delta n}S^2(x+n)}{\delta S^3(x)} - \frac{2e^{-\delta n}S(x+n)}{\delta S^2(x)}.$$

Теорема доказана.

Для нахождения предельного распределения оценки (5) нам понадобятся две теоремы.

Теорема 2 (центральная предельная теорема в многомерном случае) [22]. Пусть $t_1, t_2, ..., t_N, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных s-мерных векторов, $E\{t_s\} = 0$, $\sigma(x) = E\{t_s^{\mathrm{T}} t_s\}$, $S_N = \sum_{s=1}^{N} t_s$. Тогда при $N \to \infty$

$$\frac{S_N}{\sqrt{N}} \Rightarrow \mathrm{N}_s\left(0, \sigma(x)\right).$$

Теорема 3 (асимптотическая нормальность $H(t_N)$) [23]. Пусть:

1) $\sqrt{d_N} \cdot t_N \Rightarrow \mathrm{N}_s\{\mu, \sigma(x)\}$;

2) функция $H(z)$ дифференцируема в точке μ, $\nabla H(\mu) \neq 0$.

Тогда

$$\sqrt{d_N}\,(H(t_N) - H(\mu)) \Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{\sum_{j=1}^{s} H_j(\mu)\mu_j, \sum_{p=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} H_j(\mu)\sigma_{jp}H_p(\mu)\right\}.$$

Теорема 4 (асимптотическая нормальность оценки (5)). В условиях теоремы 1

$$\sqrt{n}(\overline{a}_{x:\overline{n}|}^{N} - \overline{a}_{x:\overline{n}|}) \Rightarrow \mathrm{N}_1\left(0, \sigma(\overline{a}_{x:\overline{n}|})\right).$$

Доказательство. Так как $t_N = \left(t_{1N}, t_{2N}, t_{3N}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\Phi_{n,N}(x,\delta), S_N(x), S_N(x+n)\right)^{\mathrm{T}}$, то в обозначениях теоремы 3 имеем: $s = 3$, $\sigma(x) = \sigma(\overline{a}_{x:\overline{n}|})$. Таким образом,

$$\sqrt{N}\left\{\Phi_{n,N}(x,\delta) - \Phi_n(x,\delta),\ S_N(x) - S(x),\ S_N(x+n) - S(x+n)\right\} \Rightarrow \mathrm{N}_3\left(0, \sigma(\overline{a}_{x:\overline{n}|})\right),$$

где $\sigma(\overline{a}_{x:\overline{n}|}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13} \\ \sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23} \\ \sigma_{31}\sigma_{32}\sigma_{33} \end{bmatrix}.$

Функция $H(z)$ дифференцируема в точке t и $\nabla H(t) \neq 0$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 3, и для оценки ренты (5) получаем

$$\sqrt{n}(\overline{a}_{x:\overline{n}|}^{N} - \overline{a}_{x:\overline{n}|}) \Rightarrow \mathrm{N}_1\left(0, \sigma(\overline{a}_{x:\overline{n}|})\right).$$

Теорема доказана.

Заключение

В статье построены оценки n-летней ренты для смешанного страхования жизни, которое часто предлагается страховыми компаниями. Найдены главная часть асимптотической СКО и порядок смещения оценки ренты, доказывается ее асимптотическая нормальность. Рассмотренный подход к оцениванию индивидуальной смешанной ренты может быть распространен также и на смешанные ренты, связанные с коллективным страхованием [24, 25].

ЛИТЕРАТУРА

1. Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbitt C. Actuarial mathematics. Itasca : Society of Actuaries, 1986. 624 p.
2. Gerber H. Life insurance mathematics. 3rd ed. New York : Springer-Verlag, 1997. 118 p.
3. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М. : Анкил, 2002. 262 с.
4. Губина О.В., Кошкин Г.М. Оценивание современной стоимости непрерывной *n*-летней временной пожизненной ренты // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 11/2. С. 235–241.
5. Nadaraya E.A. Some new estimates of distribution function // Theory of Probability and its Applications. 1964. V. 9, No. 3. P. 497–500.
6. Azzalini A. A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method // Biometrika. 1981. V. 68, No. 1. P. 326–328.
7. Reiss R.-D. Nonparametric estimation of smooth distribution functions // Scand. J. Statist. 1981. V. 8. P. 116–119.
8. Falk M. Relative efficiency and deficiency of kernel type estimators of smooth distribution functions // Statist. Neerlandica. 1983. V. 37. P. 73–83.
9. Swanepoel J.W.H. Mean integrated squared error properties and optimal kernels when estimating a distribution function // Comm. Statist. Theory Methods. 1988. V. 17, No. 11. P. 3785–3799.
10. Jones M.C. The performance of kernel density functions in kernel distribution function estimation // Statist. Probab. Lett. 1990. V. 9. P. 129–132.
11. Shirahata S., Chu I.S. Integrated squared error of kernel-type estimator of distribution function // Ann. Inst. Statist. Math. 1992. V. 44, No. 3. P. 579–591.
12. Sarda P. Smoothing parameter selection for smooth distribution functions // J. Statist. Plann. Inference Inf. 1993. V. 35. P. 65–75.
13. Altman N., Leger C. Bandwidth selection for kernel distribution function estimation // J. Statist. Plann. Inference. 1995. V. 46. P. 195–214.
14. Bowman A., Hall P., Prvan T. Trust bandwidth selection for the smoothing of distribution functions // Biometrika. 1998. V. 85, No. 4. P. 799–808.
15. Chu I.S. Bootstrap smoothing parameter selection for distribution function estimation // Math. Japon. 1995. V. 41, No. 1. P. 189–197.
16. Shao Y., Xiang X. Some extensions of the asymptotics of a kernel estimator of a distribution function // Statist. Probab. Lett. 1997. V. 34. P. 301–308.
17. Una-Alvarez J., Gonzalez-Manteiga W., Cadarso-Suarez C. Kernel distribution function estimation under the Koziol-Green model // J. Statist. Plann. Inference. 2000. V. 87. P. 199–219.
18. Кошкин Г.М. Гладкое рекуррентное оценивание функции надежности // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 7. С. 128–134.
19. Fuks I., Koshkin G. Smooth Recurrent Estimation of Multivariate Reliability Function // Proc. The Int. Conference on Information and Digital Technologies 2015 (IDT 2015), 7–9 July 2015, Zilina, Slovakia. P. 84–89.
20. Кошкин Г.М. Моменты отклонений оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40, № 3. С. 604–618.
21. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М. : Наука, 1979. 528 с.
22. Боровков А.А. Теория вероятностей. М. : Наука, 1986. 432 с.
23. Кошкин Г.М. Асимптотические свойства функций от статистик и их применения к непараметрическому оцениванию // Автоматика и телемеханика. 1990. № 3. С. 82–97.
24. Губина О.В., Кошкин Г.М. Оценивание коллективной ренты статуса совместной жизни // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 30–36.
25. Кошкин Г.М., Губина О.В. Оценивание коллективной ренты статуса выживания последнего // Известия высших учебных заведений. Физика. 2016. Т. 59, № 8/2. С. 57–60.

Поступила в редакцию 10 июля 2019 г.

Gubina O.V., Koshkin G.M. (2020) ESTIMATION OF PRESENT VALUE OF n-YEAR LIFE ANNUITY FOR ENDOWMENT INSURANCE. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnica i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 50, pp. 39–46

DOI: 10.17223/19988605/50/5

In the paper, we constructed a nonparametric estimator of the *n*-year life annuity for the endowment insurance and studied its asymptotic properties.

For the *n*-year endowment life insurance, define the present value of the insurance payment *z* as follows:

$$z = \begin{cases} e^{-\delta T(x)}, & T(x) \le n, \\ e^{-\delta n}, & T(x) > n, \end{cases}$$

where δ denotes a force of interest, *x* is the age of an individual, *X* is its lifetime, $T(x) = X - x$ is its future lifetime. In this case, the value of *z* shows the present share of future insurance payments taken as some unit. The longer the insurance period the lower the payment of the insured using bank interest rates.

As the *n*-year life annuity for the endowment insurance we take

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{e^{\delta x}}{S(x)}\int_{x}^{x+n} e^{-\delta t} dF(t) - \frac{e^{-\delta n} S(x+n)}{S(x)}\right),$$

where $S(x) = P(X > x)$ is a survival function, $F(x) = P\left(X \le x\right) = 1 - S(x)$ is a distribution function.

Assume that we have a random sample $X_1, ..., X_N$ of N individuals' lifetimes. Using the empirical survival function $S_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{I}(X_i > x),$ where $I(A)$ is the indicator of an event A, obtain the following estimator of $\bar{a}_{x:\bar{n}|}$:

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|}^{N} = \frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{e^{\delta x}\sum_{i=1}^{N}\exp(-\delta X_i) I\left(x < X_i \le (x+n)\right) + e^{-\delta n}\sum_{i=1}^{N} I\left(X_i > (x+n)\right)}{\sum_{i=1}^{N} I\left(X_i > x\right)}\right).$$

We found the principal term of the asymptotic mean square error of this estimator and proved its asymptotic normality.

Keywords: endowment life insurance; *n*-year life annuity; nonparametric estimation; mean squared error; asymptotic normality.

GUBINA Oxana Viktorovna (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: gov7@mail.ru

KOSHKIN Gennady Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: kgm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D. & Nesbitt, C. (1986) *Actuarial mathematics*. Itasca: Society of Actuaries.
2. Gerber, H. (1997) *Life insurance mathematics*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
3. Falin, G.I. (2002) *Matematicheskie osnovy teorii strakhovaniya zhizni i pensionnykh skhem* [Mathematical Foundations of the Theory of Life Insurance and Pension Schemes]. Moscow: Ankil.
4. Gubina, O.V. & Koshkin, G.M. (2015) Estimation of the actuarial present value of the continuous *n*-year time life annuity. *Russian Physics Journal.* 58(11/2). pp. 235–241. DOI: 10.17223/19988605/30/5
5. Nadaraya, E.A. (1964) Some new estimates of distribution function. *Theory of Probability and its Applications.* 9(3). pp. 497–500. DOI: 10.1137/1109069
6. Azzalini, A. (1981) A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method. *Biometrika.* 68(1). pp. 326–328. DOI: 10.1093/biomet/68.1.326
7. Reiss, R.-D. (1981) Nonparametric estimation of smooth distribution functions. *Scandinavian Journal of Statistics.* 8. pp.116–119. DOI: 10.1007/BF02613619
8. Falk, M. (1983) Relative efficiency and deficiency of kernel type estimators of smooth distribution functions. *Statist. Neerlandica.* 37. pp. 73-83. DOI: 10.1111/j.1467-9574.1983.tb00802.x
9. Swanepoel, J.W.H. (1988) Mean integrated squared error properties and optimal kernels when estimating a distribution function. *Comm. Statist. Theory Methods.* 17(11). pp. 3785–3799. DOI: 10.1080/03610928808829835
10. Jones, M.C. (1990) The performance of kernel density functions in kernel distribution function estimation. *Statistics and Probability Letters.* 9. pp. 129–132. DOI: 10.1016/0167-7152(92)90006-Q
11. Shirahata, S. & Chu, I.S. (1992) Integrated squared error of kernel-type estimator of distribution function. *Annual Inst. Statist. Math.* 44(3). pp. 579–591. DOI: 10.1007/BF00050707
12. Sarda, P. (1993) Smoothing parameter selection for smooth distribution functions. *Journal of Statistical Planning and Inference.* 35. pp. 65–75. DOI: 10.1016/0378-3758(93)90068-H
13. Altman, N. & Leger, C. (1995) Bandwidth selection for kernel distribution function estimation. *Journal of Statistical Planning and Inference.* 46. pp. 195–214. DOI: 10.1016/0378-3758(94)00102-2
14. Bowman, A., Hall, P. & Prvan, T. (1998) Trust bandwidth selection for the smoothing of distribution functions. *Biometrika.* 85(4). pp. 799–808. DOI: 10.1093/biomet/85.4.799
15. Chu, I.S. (1995) Bootstrap smoothing parameter selection for distribution function estimation. *Math. Japon.* 41(1). pp 189–197.
16. Shao, Y. & Xiang, X. (1997) Some extensions of the asymptotics of a kernel estimator of a distribution function. *Statistics and Probability Letters.* 34. pp. 301–308. DOI: 10.1016/S0167-7152(96)00194-0
17. Una-Alvarez, J., Gonzalez-Manteiga, W. & Cadarso-Suarez, C. (2000) Kernel distribution function estimation under the Koziol-Green model. *Journal of Statistical Planning and Inference.* 87. pp. 199–219.
18. Koshkin, G.M. (2015) Smooth Recurrent Estimators of the Reliability Functions. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 1018–1025. DOI: 10.1007/s11182-015-0603-9

19. Fuks, I. & Koshkin, G. (2015) Smooth recurrent estimation of multivariate reliability function. *Proc. of the Int. Conference on Information and Digital Technologies 2015*. IDT 2015. Zilina, Slovakia. July 7–9, 2015. pp. 84–89. DOI 10.1109/DT.2015.7222955
20. Koshkin, G.M. (1999) Deviation moments of the substitution estimator and its piecewise smooth approximations. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal – Siberian Mathematical Journal*. 40(3). pp. 515–527. DOI: 10.1007/BF02679759
21. Ibragimov, I.A. & Hasminskii, R.Z. (1981) *Statistical Estimation: Asymptotic Theory.* Berlin; New York: Springer.
22. Borovkov, A.A. (1986) Probability Theory. Moscow: Nauka.
23. Koshkin, G.M. (1990) Asymptotic properties of functions of statistics and their application to nonparametric estimation. *Automation and Remote Control*. 51(3). pp. 345–357.
24. Gubina, O.V. & Koshkin, G.M. (2016) Collective annuity estimation of joint-life status. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(35). pp. 30–36. DOI: 10.17223/19988605/35/3
25. Koshkin, G.M. & Gubina, O.V. (2016) Estimation of collective annuity of the last-survivor status. *Russian Physics Journal.* 59(8/2). pp. 57–60.