ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Управление, вычислительная техника и информатика № 50

УДК 519.218.72
DOI: 10.17223/19988605/50/7

Г.Ш. Цициашвили

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В СИСТЕМЕ $M|M|1|\infty$ С ОСТАНАВЛИВАЮЩЕЙСЯ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 17-07-00177.

Вычисляется стационарное распределение системы массового обслуживания, в которой интенсивность пуассоновского входного потока является марковским процессом, останавливающимся в некоторых состояниях. Исследуется зависимость стационраного распределения в системе от начального состояния входного потока. Показывается, что подобная модель случайной среды идентична модели разорения игрока, а ее исследование сводится к решению дискретного аналога задачи Дирихле и использованию известных формул для стационарных распределений числа заявок в системе обслуживания с постоянной интенсивностью входного потока.
Ключевые слова: система массового обслуживания; пуассоновский входной поток с останавливающейся интенсивностью; задача Дирихле; игра на разорение игрока.

Моделям массового обслуживания в случайной среде посвящено большое количество работ, затрагивающих как теоретические, так и прикладные аспекты (см., напр.: [1–7]). В этих работах основное внимание уделяется вычислению и анализу стационарных распределений, не зависящих от начального состояния. Однако появляются и другие модели, в которых случайный процесс, определяющий состояние среды, развивается на отрезке с отражающими и поглощающими концами (см., напр.: [8]). Стационарное распределение таких процессов уже зависит от начального состояния. В настоящей работе рассматривается наиболее простой вариант подобной модели случайной среды с помещенной в нее системой массового обслуживания. Вычисляется стационарное распределение системы массового обслуживания в такой случайной среде и исследуется ее зависимость от начального состояния. Показывается, что подобная модель случайной среды идентична модели разорения игрока, а ее исследование сводится к решению дискретного аналога задачи Дирихле [9. Гл. II, § 2–7] и использованию известных формул для стационарных распределений числа заявок в системе обслуживания с постоянной интенсивностью входного потока.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания $M|M|1|\infty$ с бесконечным числом мест ожидания и интенсивностью обслуживания μ. Случайный поцесс $\lambda(t)$, характеризующий интенсивность входного потока, задается марковской цепью z_k, $k = 0,1,...,$ с множеством состояний $\{0,...,N\}$. Марковская цепь z_k, $k = 0,1,\ldots,$ описывает игру на разорение игрока [10. Гл. I, § 9]) и определяет кусочно-постоянный случайный процесс $z(t) = z_k$, $k \le t < k+1$, $k = 0,1,...$ Случайный процесс $\lambda(t) = \Lambda(z(t)) > 0$, $t \ge 0$, с множеством состояний $\{\Lambda(0),...,\Lambda(N)\}$ является марковским, $\Lambda(i) \ne \Lambda(j)$, $i \ne j$. Система массового обслуживания $M|M|1|\infty$ с так определенной интенсивностью входного потока $\lambda(t)$ будет обозначаться **M**.

Рассмотрим марковский процесс $(z(t), k(t)),\ t \geq 0,$ характеризующий случайную интенсивность входного потока и случайное число заявок в системе **M** в момент времени $t.$ Далее предполагаем, что выполняются неравенства

$$\Lambda(0) < \mu, \ldots, \Lambda(N) < \mu. \tag{1}$$

Нашей задачей является вычисление стационарного распределения второй компоненты $k(t)$ этого процесса.

Очевидно, что стационарное распределение марковской цепи $z_k,\ k = 0,1,\ldots,$ зависит от начального состояния z_0. На первый взгляд, эта зависимость затрудняет решение поставленной задачи. Однако аналогия марковской цепи $z_k,\ k = 0,1,\ldots,$ с процессом, описывающим игру на разорение игрока, позволяет, наоборот, существенно упростить вычисление стационарного распределения процесса в системе **M**. Решение данной задачи может быть сведено к решению дискретного аналога уравнения Дирихле и к использованию известных формул для стацинарного распределения процесса обслуживания в системе с постоянной интенсивностью входного потока.

2. Стационарное распределение марковской цепи z_k

Рассмотрим марковскую цепь $z_k,\ k = 0,1,\ldots,$ с множеством состояний $\{0,1,\ldots,N\},$ с ненулевыми элементами матрицы $\Theta = \| \theta_{i,j} \|_{i,j=0}^{N}$ переходных вероятностей

$$\theta_{i,i+1} = p,\ \theta_{i,i-1} = q,\ i = 1,\ldots,N-1,\ \theta_{0,0} = \theta_{N,N} = 1,\ 0 < p < 1,\ q = 1 - p. \tag{2}$$

Всюду далее вероятность $P_{z_0}(A)$ обозначает вероятность события A при условии, что марковская цепь $z_k,\ k = 0,1,\ldots,$ принимает начальное значение z_0. Обозначим

$$\pi_{z_0}(k) = \sum_{z=1}^{N-1} P_{z_0}(z_k = z),\ \psi_{z_0}(k) = P_{z_0}(z_k = 0) + P_{z_0}(z_k = N),$$

очевидно, что справедливо соотношение

$$\pi_{z_0}(k) + \psi_{z_0}(k) = 1. \tag{3}$$

Формулы (2), (3) выполняются при любом $z_0 = 0,\ldots,N.$

Из соотношений (2) следуют неравенства

$$P_{z_0}(z_0 = 0) \leq P_{z_0}(z_1 = 0) \leq \ldots,$$

$$P_{z_0}(z_0 = N) \leq P_{z_0}(z_1 = N) \leq \ldots,$$

и значит существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} P_{z_0}(z_k = 0) = \Psi_{z_0}(0),\ \lim_{k\to\infty} P_{z_0}(z_k = N) = \Psi_{z_0}(N),$$

удовлетворяющие соотношению

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{z_0}(k) = \Psi_{z_0}(0) + \Psi_{z_0}(N) \leq 1.$$

Очевидно, что при $\gamma = p^N + q^N < 1$ выполняется соотношение

$$\pi_{z_0}(kN) - \pi_{z_0}((k+1)N) \geq \pi_{z_0}(kN)\gamma,$$

и значит

$$\pi_{z_0}((k+1)N) \leq \pi_{z_0}(kN)\gamma,\ k = 1,2,\ldots$$

Отсюда получаем предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \pi_{z_0}(k) = 0. \tag{4}$$

Из формул (3), (4) следует предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\Psi_{z_0}(k) = \Psi_{z_0}(0) + \Psi_{z_0}(N) = 1. \qquad (5)$$

Из определения марковской цепи z_k, $k = 0,1,...,$ следует, что $\Psi_{z_0}(0)$ – это вероятность того, что, выходя из состояния z_0, марковская цепь z_k, $k = 0,1,...,$ когда-нибудь попадет в состояние 0. Поэтому $\Psi_{z_0}(0)$ можно интерпретировать как вероятность разорения игрока с начальной суммой z_0 с вероятностью выигрыша p, вероятностью проигрыша q и суммой выигрыша в игре N.

Тогда функция $\Psi_{z_0}(0)$ удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$\Psi_{z_0}(0) = p\Psi_{z_0-1}(0) + q\Psi_{z_0+1}(0),\ z_0 = 1,...,N-1,\ \Psi_0(0) = 1,\ \Psi_N(0) = 0. \qquad (6)$$

Используя известные формулы для вероятности разорения игрока [10. Гл. I, § 9], можно выписать следующие соотношения:

$$\Psi_{z_0}(0) = \frac{(p/q)^{z_0} - (p/q)^N}{1-(p/q)^N},\ p \neq q;\ \ \Psi_{z_0}(0) = 1 - \frac{z_0}{N},\ p = q;\ \ z_0 = 0,...,N, \qquad (7)$$

В свою очередь, из формулы (5) следует, что вероятность выигрыша

$$\Psi_{z_0}(N) = 1 - \Psi_{z_0}(0). \qquad (8)$$

Распределение $\Psi_{z_0}(0),...,\Psi_{z_0}(N)$ является стационарным распределением марковской цепи z_k, $k = 0,1,...,$ с начальным состоянием z_0. Это распределение сосредоточено в точках 0, N, которые являются поглощающими для данной цепи. Отсюда следует, что цепь z_k, $k = 0,1,...,$ при любом начальном условии $z_0 = 0,...,N$ имеет стационарное распределение. Однако эта цепь не является эргодической, так как ее стационарное распределение зависит от начального условия. Этими же свойствами обладает кусочно-постоянный процесс $z(t)$, определяемый по марковской цепи z_k, $k = 0,1,...,$ и задающий интенсивность входного потока $\lambda(t) = \Lambda(z(t))$ системы массового обслуживания **M**.

3. Стационарное распределение числа заявок в системе массового обслуживания M

При начальном условии $z(0) = z_0$ стационарное распределение процесса $\lambda(t) = \Lambda(z(t))$ удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{t\to\infty} P_{z_0}(\lambda(z(t)) = \Lambda(0)) = \Psi_{z_0}(0),\ \lim_{t\to\infty} P_{z_0}(\lambda(z(t)) = \Lambda(N)) = \Psi_{z_0}(N).$$

Иными словами, случайный процесс $\lambda(t)$ имеет на множестве состояний $\{0,...,N\}$ двухточечное стационарное распределение $P(\lambda(t) \equiv \Lambda(0)) = \Psi_{z_0}(0)$, $P(\lambda(t) \equiv \Lambda(N)) = \Psi_{z_0}(N)$, зависящее от начального состояния z_0. Причем процесс $\lambda(t)$, попадая в состояние $\Lambda(0)$ (попадая в состояние $\Lambda(N)$), останавливается в нем и далее не меняется.

Перейдем теперь к вычислению предельного распределения числа заявок в системе **M** при условии (1). Известно, что стационарное распределение $p(k)$ числа заявок в системе $M|M|1|\infty$ при постоянной интенсивности входного потока λ и интенсивности обслуживания μ удовлетворяет соотношениям

$$p(k) = (1-\rho)\rho^k,\ k = 0,1,...,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1. \qquad (9)$$

Обозначим $\rho(0) = \dfrac{\Lambda(0)}{\mu} < 1$, $\rho(N) = \dfrac{\Lambda(N)}{\mu} < 1$, тогда стационарное распределение $P_{z_0}(k)$, $k = 0,1,...,$ числа заявок в системе массового обслуживания **M** удовлетворяет равенству

$$P_{z_0}(k) = \Psi_{z_0}(0)(1-\rho(0))\rho^k(0) + \Psi_{z_0}(N)(1-\rho(N))\rho^k(N),\ k = 0,1,... \qquad (10)$$

Если предположить, что $A(i), i = 0,...,N,$ – начальное распределение случайной величины z_0, то тогда вследствие формулы (10) стационарное распределение $\Pi(k),\ k = 0,1,...,$ числа заявок в системе обслуживания **M** имеет вид:

$$\Pi(k) = \sum_{i=0}^{N} A(i)\left[\Psi_i(0)(1-\rho(0))\rho^k(0) + \Psi_i(N)(1-\rho(N))\rho^k(N)\right],\ \ k = 0,1,\ldots \tag{11}$$

Заметим, что если $A(1) = ... = A(N-1) = 0,$ то для существования стационарного распределения достаточно потребовать $\Lambda(0) < \mu,\ \Lambda(N) < \mu.$

Заключение

Перечислим теперь возможные обобщения полученных результатов. От простейшей одноканальной системы $M \mid M \mid 1 \mid \infty$, лежащей в основе модели **M**, можно перейти к многоканальным системам, системам с отказами, к открытым сетям массового обслуживания. Марковская цепь $z_k,\ k = 0,1,...,$ определяющая интенсивность входного потока, может быть заменена случайным процессом с непрерывным временем, например диффузионным процессом с поглощениями или частичными поглощениями и отражениями в концах некоторого отрезка. Эта марковская цепь может определять не только интенсивность входного потока, но и интенсивность обслуживания. Тогда вероятность попадания марковской цепи $z_k,\ k = 0,1,...,$ удовлетворяет дискретному аналогу уравнения Дирихле и может быть решена известными методами теории вероятностей и математической физики. Можно также по стационарному распределению процесса $k(t),\ t \ge 0,$ числа заявок в системе массового обслуживания **M** (оцениваемому, например, по наблюдениям) определить начальное состояние z_0 процесса $z(t),\ t \ge 0,$ характеризующего интенсивность входного потока в начальный момент времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
2. Вишневский В.М., Семёнова О.В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. М. : Техносфера, 2007. 470 с.
3. Vishnevskiy V.M., Evfrosinin D.V., Krishnamurti A. Principles of Construction of Mobile and Stationary Tethered High-Altitude Unmanned Telecommunication Platforms of Long-Term Operation // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 919. P. 561–569.
4. Klimenok V.I. Two-Server Queueing System with Unreliable Servers and Markovian Arrival Process // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 800. P. 63–74.
5. Klimenok V.I., Dudin A.N., Vishnevskiy V.M. A Retrial Queueing System with Alternating Inter-retrial Time Distribution // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 919. P. 302–315.
6. Коротаев И.А., Спивак Л.Р. Системы массового обслуживания в полумарковской случайной среде // Автоматика и телемеханика. 1992. Вып. 7. С. 86–92.
7. Жерновой Ю.В. Система массового обслуживания $M|M|n|r$, функционирующая в синхронной случайной среде // Информационные процессы. 2009. Т. 9, вып. 4. С. 352–363.
8. Бондрова О.В., Головко Н.И., Жук Т.А. Вывод уравнений типа Колмогорова–Чепмена с интегральным оператором // Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 135–146.
9. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М. : Наука, 1967. 232 с.
10. Ширяев А.Н. Вероятность. М. : Наука, 1989. 432 с.

Поступила в редакцию 2 октября 2019 г.

Tsitsiashvili G.Sh. (2019) STATIONARY DISTRIBUTION IN THE SYSTEM WITH THE STAYING INTENSITY OF THE INPUT FLOW. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 50. pp. 56–60

DOI: 10.17223/19988605/50/7

Consider a single server queuing system with an infinite number of waiting places and service intensity representing by some random process. A Markov chain with many states defines the process characterizing the intensity of the input flow. The Markov chain describes a game of player ruin and defines a piecewise constant random process with many states which is Markov process. A queuing system with so defined input flow rate will be denoted **M**.

Consider the Markov process characterizing the random intensity of the input flow and the random number of customers in the system at a time. Then assume that the following inequalities are satisfied: $\Lambda(0) < \mu, ..., \Lambda(N) < \mu, \quad \Lambda(i) \neq \Lambda(j),\ i \neq j.$ Our task is to calculate the stationary distribution of the process, describing a number of customers in the system **M**.

It is obvious that the stationary distribution of the Markov chain depends on the initial state At first glance, this dependence makes it difficult to solve the problem. However, the analogy of the Markov chain process, describing the game to ruin the player, on the contrary, simplifies the computation of the stationary distribution of the process in the system M. The solution of this problem can be reducing to the solution of a discrete analogue of the Dirichlet equations. Then it is possible to use well-known formulas for stationary distribution service process in the system with a constant intensity of the input flow.

Consider a Markov chain with a set of states with nonzero elements of the transition probability matrix

$$\theta_{i,i+1} = p,\ \theta_{i,i-1} = q,\ i = 1,\dots,N-1,\ \theta_{0,0} = \theta_{N,N} = 1,\ 0 < p < 1,\ q = 1-p. \quad (1)$$

Everywhere further, probability $P_{z_0}(A)$ denotes the probability of an event A provided that the Markov chain $z_k, k = 0,1,...,$ takes the initial value z_0. Denote

$$\pi_{z_0}(k) = \sum_{z=1}^{N-1} P_{z_0}(z_k = z),\ \psi_{z_0}(k) = P_{z_0}(z_k = 0) + P_{z_0}(z_k = N).$$

It is obvious that the following relation is valid

$$\pi_{z_0}(k) + \psi_{z_0}(k) = 1. \quad (2)$$

Formulas (1), (2) are true at any $z_0 = 0,...,N$. Denote $\rho(0) = \dfrac{\Lambda(0)}{\mu} < 1,\ \rho(N) = \dfrac{\Lambda(N)}{\mu} < 1,$ then stationary distribution $P_{z_0}(k),$ $k = 0,1,...,$ of a number of customers in the queuing system **M** satisfies the equality

$$P_{z_0}(k) = \Psi_{z_0}(0)(1-\rho(0))\rho^k(0) + \Psi_{z_0}(N)(1-\rho(N))\rho^k(N),\ k = 0,1,...$$

Keywords: queuing system; Poisson input flow with stopping intensity; Dirichlet problem; the game to ruin the player.

TSITSIASHVILI Gurami Shalvovich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russian Federation).
E-mail: guram@iam.dvo.ru

REFERENCES

1. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primenenie v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
2. Vishnevsky, V.M. & Semenova, O.V. (2007) *Sistemy pollinga: teoriya i primenenie v shirokopolosnykh besprovodnykh setyakh* [Polling systems: theory and application in broadband wireless networks]. Moscow: Tekhnosfera.
3. Vishnevsky, V.M., Evfrosinin, D.V. & Krishnamurti, A. (2018) Principles of Construction of Mobile and Stationary Tethered High-Altitude Unmanned Telecommunication Platforms of Long-Term Operation. *Communications in Computer and Information Science.* 919. pp. 561–569. DOI: 10.1007/978-3-319-99447-5_48
4. Klimenok, V.I. (2017) Two-Server Queueing System with Unreliable Servers and Markovian Arrival Process. *Communications in Computer and Information Science.* 800. pp. 63–74. DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_4
5. Klimenok, V.I., Dudin, A.N. & Vishnevsky, V.M. (2018) A Retrial Queueing System with Alternating Inter-retrial Time Distribution. *Communications in Computer and Information Science.* 919. pp. 302–315. DOI: 10.1007/978-3-319-99447-5
6. Korotaev, I.A. & Spivak, L.R. (1992) Queuing Systems in the semi-Markov random environment. *Automatics Remote Control*. 7. pp. 86–92.
7. Zhernovoy, Yu.V. (2009) Queuing system functioning in synchronous random environment. *Information Processes.* 9(4). pp. 352–363.
8. Bodrova, O.V., Golovko, N.I. & Zhuk, T.A. (2017) Derivation of Kolmogorov-Chapman type equations with integral operator. *Far Eastern Mathematical Journal*. 17(2). pp. 135–146.
9. Dynkin, E.B. & Yushkevich, A.A. (1967) *Teoremy i zadachi o protsessakh Markova* [Theorems and problems on Markov processes]. Moscow: Nauka.
10. Shiryaev, A.N. (1989) *Veroyatnost'* [Probability]. Moscow: Nauka.