

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2020

№ 64

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaeв (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Букушева А.В. Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны.....	5
Бычин И.В., Гореликов А.В., Ряховский А.В. Численное решение начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре.....	15
Кучер Н.А., Жалнина А.А., Малышенко О.В. О существовании сильных решений регуляризованных уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей.....	31
Churuksaeva V.V., Starchenko A.V. Numerical modelling of pollution transport in Tom River	48

МЕХАНИКА

Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Инченко О.В., Маркин А.А. Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите.....	63
Васенина Т.В., Глазунов А.А. Аналитические исследования предельных режимов течения в МГД-каналах	78
Ворожцов А.Б., Данилов П.А., Жуков И.А., Хмелева М.Г., Платов В.В., Валихов В.Д. Влияние внешних воздействий на расплав и неметаллических наночастиц на структуру и механические характеристики легких сплавов на основе алюминия и магния.....	91
Мазепа Е.Е., Кусаннов П.И., Лукашов О.Ю., Крайнов А.Ю. О численном решении задачи распространения воздушных ударных волн в горных выработках шахты	108
Мир-Салим-заде М.В. Равнопрочное отверстие для стрингерной пластины с трещинами	121
Скибина Н.П., Гимаева Н.Р., Савкина Н.В., Маслов Е.А. Численное исследование аэродинамических характеристик компонующих тел двух видов при разных углах атаки.....	136
Шабловский О.Н. Сферическое течение идеальной жидкости в пространственно-неоднородном силовом поле	146
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	156

CONTENTS

MATHEMATICS

Bukusheva A.V. Kenmotsu manifolds with a zero curvature distribution.	5
Bychin I.V., Gorelikov A.V., Ryakhovskii A.V. Numerical solution of the initial boundary value problem with vacuum boundary conditions for the magnetic field induction equation in a ball.	15
Kucher N.A., Zhalnina A.A., Malyshenko O.V. On the existence of strong solutions to regularized equations of viscous compressible fluid mixtures	31
Churuksaeva V.V., Starchenko A.V. Numerical modelling of pollution transport in Tom river	48

MECHANICS

Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Inchenko O.V., Markin A.A. On one approach to the assessing of the adhesive layer strength in a layered composite	63
Vasenina T.V., Glazunov A.A. Analytical studies of the limiting flow regimes in MHD channels	78
Vorozhtsov A.B., Danilov P.A., Zhukov I.A., Khmeleva M.G., Platov V.V., Valikhov V.D. The effect of external actions on a molten metal and the influence of nonmetallic nanoparticles on the structure and mechanical properties of the light alloys based on aluminum and magnesium	91
Mazepa E.E., Kusainov P.I., Lukashov O.Yu., Kraynov A.Yu. On the numerical solution to the problem of air shock wave propagation in mine workings	108
Mir-Salim-zada M.V. An equi-stress hole for a stringer plate with cracks.....	121
Skibina N.P., Gimaeva N.R., Savkina N.V., Maslov E.A. Numerical investigation of aerodynamic characteristics of two different component bodies at various angles of attack	136
Shablovsky O.N. Spherical flow of an ideal fluid in a spatially nonuniform field of force.....	146
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	156

МАТЕМАТИКА

УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/64/1

MSC 53C15

А.В. Букушева

МНОГООБРАЗИЯ КЕНМОЦУ
С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Исследуется многообразие Кенмоцу с нулевым тензором Схоутена. Доказывается, что такое многообразие является многообразием Эйнштейна. На многообразии Кенмоцу определяется N -связность и доказывается, что в случае обращения тензора Схоутена в нуль тензор кривизны N -связности равен нулю тогда и только тогда, когда эндоморфизм N ковариантно постоянен относительно внутренней связности.

Ключевые слова: многообразие Кенмоцу, многообразие Эйнштейна, тензор Схоутена, внутренняя связность, N -связность.

Начало изучению геометрии распределений субримановых многообразий положено в работах [1–4]. Оснащая субримановы многообразия дополнительными структурами, получаем почти контактные метрические многообразия, почти контактные би-метрические многообразия т.д. При этом на распределении D полученного многообразия естественным образом могут быть определены продолженные структуры [1–5]. Продолженные структуры наиболее полно сохраняют свойства исходных структур в случае распределения нулевой кривизны [5]. В настоящее время активно исследуется геометрия почти контактных метрических многообразий, наделенных связностями с кручением [6–10]. К таким многообразиям, прежде всего, относятся четвертьсимметрические пространства, находящие применение в теоретической физике [7, 8]. Совсем недавно стали появляться работы, посвященные изучению почти контактных метрических многообразий с N -связностью [6, 9, 10]. N -связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии, наделенном внутренней связностью ∇ и эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$ гладкого распределения D как единственная связность на многообразии M , удовлетворяющая следующим условиям [9]:

- 1) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} \in \Gamma(D)$;
- 2) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = 0$;
- 3) $\nabla_{\vec{\xi}}^N \vec{y} = [\vec{\xi}, \vec{y}] + N\vec{y}$;
- 4) $\nabla_{\vec{y}}^N \vec{z} = \nabla_{\vec{y}} \vec{z}$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, $\vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Если ∇ – метрическая связность, то связность ∇^N характеризуется следующими условиями [9]:

- 1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;

$$2) \nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D);$$

$$3) \nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma(TM);$$

$$4) \nabla_{\vec{x}}^N \eta = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma(TM).$$

В работах [11–13] особое внимание уделяется внутренним инвариантам почти контактных метрических многообразий. Многообразия Кенмоцу [14, 15], составляющие интересный для исследования класс почти контактных метрических многообразий, характеризуются особым строением внутренних инвариантов. В частности, в работе [6] доказывается, что тензор Схоутена – Вагнера [16] для многообразия Кенмоцу обращается в нуль. N-связность в ряде случаев оказывается предпочтительнее связности Леви-Чивиты. Преимущество N-связности заключается в выполнении следующего условия: $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} \in \Gamma(D)$, где $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, $\vec{y} \in \Gamma(D)$. Несомненно, что сравнение эффективности использования разных классов N-связностей для описания геометрии многообразий Кенмоцу представляет интерес как с точки зрения приложения полученных результатов в теоретической физике [4, 8], так и с точки зрения внутренней логики развития геометрии контактных метрических многообразий.

1. Основные сведения из геометрии многообразий Кенмоцу

Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m+1$, $m \geq 1$, с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \phi, g)$ [1, 9]. Здесь, в частности, η – 1-форма, порождающая распределение D : $D = \ker \eta$, $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающее оснащение $D^\perp$ распределения D : $D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D будем называть распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_\phi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\phi(\vec{x}, \vec{y}) = [\phi\vec{x}, \phi\vec{y}] + \phi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \phi[\phi\vec{x}, \vec{y}] - \phi[\vec{x}, \phi\vec{y}]$ – тензор Нейенхайса эндоморфизма ϕ . Нормальное почти контактное метрическое многообразие называется многообразием Кенмоцу, если $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$ [14, 15]. Здесь $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \phi\vec{y})$ – фундаментальная форма почти контактной метрической структуры.

Имеет место следующая теорема [14, 15].

Теорема 1. Почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда $(\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \phi)\vec{y} = -\eta(\vec{y})\phi\vec{x} - g(\vec{x}, \phi\vec{y})\vec{\xi}$.

Для многообразий Кенмоцу также выполняются следующие условия [15]:

$$(\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \eta)\vec{y} = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}), \quad L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta).$$

Определяемые далее адаптированные координаты очень часто применяются для исследования геометрии многообразий, оснащенных гладким распределением. По-видимому, впервые, адаптированные координаты использовались в работе [16].

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \bar{\xi}$ [1–5, 16]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают распределение D : $D = \text{span}(\bar{e}_a)$. Мы будем активно использовать неголономное поле базисов $(\bar{e}_\alpha) = (\bar{e}_a, \partial_n)$. Непосредственно проверяется, что $[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\bar{\xi} \in \ker \omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{a'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля t в адаптированных координатах подчиняется следующему закону [1–5]: $t_b^a = A_a^a A_b^{b'} t_{b'}^{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Пусть $\psi: D \rightarrow D$ – эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(\bar{x}, \bar{y}) = g(\psi\bar{x}, \bar{y})$.

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g : $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$.

Имеет место следующее предложение [11].

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{cd} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{ba}), \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0,$$

где $C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}$, $C_b^a = g^{da} C_{db}$, $\psi_a^c = g^{bc} \omega_{ab}$.

Для многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах получаем:

$$C_{ab} = g_{ab}, \quad C_a^b = \delta_a^b, \quad \omega_{ba} = 0, \quad \psi_a^c = 0.$$

Таким образом, в качестве следствия предложения 1 получаем предложение 2.

Предложение 2 [6]. Коэффициенты связности Леви-Чивиты многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{ba}), \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = -g_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = \delta_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0.$$

Непосредственным следствием предложения 2 является следующее предложение.

Предложение 3. Ненулевые компоненты тензора кривизны $\tilde{R}(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$ связности Леви-Чивиты многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах принимают следующий вид:

$$\tilde{R}_{abc}^d = R_{abc}^d + \delta_b^d g_{ac} - \delta_a^d g_{bc}, \quad \tilde{R}_{anc}^n = g_{ac}, \quad \tilde{R}_{nan}^c = \delta_{na}^c.$$

Здесь R_{bad}^c – компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [9, 16]:

$$R_{abc}^d = 2\tilde{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d\Gamma_{b]c}^e.$$

Тензор Схоутена является допустимым тензорным полем, определяемым равенством $R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} = \nabla_{\bar{x}}\nabla_{\bar{y}}\bar{z} - \nabla_{\bar{y}}\nabla_{\bar{x}}\bar{z} - \nabla_{P[\bar{x}, \bar{y}]}\bar{z} - P[Q[\bar{x}, \bar{y}], \bar{z}]$, где $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D)$, $Q = I - P$, ∇ – внутренняя связность, определяемая ниже.

Тензор $R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$ был назван тензором кривизны Схоутена В.В. Вагнером в работе [16]. В той же работе В.В. Вагнером был введен тензор, определяемый в адаптированных координатах следующим образом: $P_{ad}^c = \partial_n \Gamma_{ad}^c$. В нашей работе этот тензор мы называем тензором Схоутена – Вагнера. Заметим, что иногда тензором Схоутена называют также тензор одномерной кривизны, не имеющий непосредственное отношение к настоящей работе.

Распределение D назовем распределением нулевой кривизны, если тензор Схоутена равен нулю.

Теорема 2. Многообразие Кенмоцу с нулевым тензором Схоутена является многообразием Эйнштейна.

Доказательство теоремы сводится к вычислению тензора Риччи $\tilde{r}$ многообразия M в адаптированных координатах. Из равенств

$$\tilde{R}_{abc}^d = \delta_b^d g_{ac} - \delta_a^d g_{bc}, \quad \tilde{R}_{anc}^n = g_{ac}, \quad \tilde{R}_{nan}^c = \delta_{na}^c$$

следует, что $\tilde{r}_{ac} = 2mg_{ac}$, $\tilde{r}_{nn} = 2m$.

Почти контактное метрическое многообразие называется η -Эйнштейновым многообразием, если выполняется условие $\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta$, где a и b – гладкие функции. Хорошо известно, что если $b = \text{const}$, то η -Эйнштейново многообразие является многообразием Эйнштейна. В нашем случае $a = 2m$, $b = 0$, что и доказывает теорему.

Определим на многообразии M N -связность ∇^N , полагая [9]

$$\nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} = \tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{y} - \eta(\bar{x})\tilde{\nabla}_{\bar{y}} \bar{\xi} - \eta(\bar{y})\tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{\xi} + (\omega + c)(\bar{x}, \bar{y})\bar{\xi} + \eta(\bar{x})N\bar{y}.$$

Предложение 4. Ненулевые коэффициенты $G_{\beta\gamma}^\alpha$ связности ∇^N , заданной на почти контактном метрическом многообразии M , имеют вид $G_{ab}^c = \tilde{G}_{ab}^c$, $G_{nb}^c = N_b^c$.

Внутренней линейной связностью ∇ на многообразии с почти контактной метрической структурой [1, 2] называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1\bar{x}+f_2\bar{y}} = f_1\nabla_{\bar{x}} + f_2\nabla_{\bar{y}}$;
- 2) $\nabla_{\bar{x}} f\bar{y} = (\bar{x}f)\bar{y} + f\nabla_{\bar{x}} \bar{y}$;
- 3) $\nabla_{\bar{x}} (\bar{y} + \bar{z}) = \nabla_{\bar{x}} \bar{y} + \nabla_{\bar{x}} \bar{z}$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной

связности определяются из соотношения $\nabla_{\bar{e}_a} \bar{e}_b = \Gamma_{ab}^c \bar{e}_c$. Из равенства $\bar{e}_a = A_a^{a'} \bar{e}_{a'}$,

где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, следует формула преобразования для коэффициентов связности:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^{c'} \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^{c'} \bar{e}_a A_b^{c'}.$$

Кручение S внутренней линейной связности по определению полагается равным $S(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla_{\bar{x}} \bar{y} - \nabla_{\bar{y}} \bar{x} - P[\bar{x}, \bar{y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c$.

Заметим, что из формулы преобразования для коэффициентов связности Γ_{ab}^c следует корректность определения тензора Схоутена – Вагнера.

На почти контактном метрическом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_{\bar{x}} g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формулам

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{bc}).$$

Заметим [4], что для нормального почти контактного метрического многообразия выполняется условие $\nabla \varphi = 0$.

Под внутренней геометрией [10–12] почти контактного метрического многообразия M будем понимать геометрические свойства M , которые зависят только от параллельного перенесения, определяемого внутренней связностью, и от оснащения $D^\perp$. К основным инвариантам внутренней геометрии мы относим тензор кривизны Схоутена R , тензор Схоутена – Вагнера, дифференциальную форму $\omega = d\eta$, производную Ли $C = \frac{1}{2} L_{\bar{\xi}} g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\bar{\xi}$.

Теорема 3 [6]. Тензор Схоутена – Вагнера внутренней связности многообразия Кенмоцу равен нулю.

2. Многообразие Кенмоцу с N-связностью

Используя предложение 2 и формулу $L_{\bar{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$, получаем

Предложение 5. N-связность ∇^N выражается через связность Леви-Чивиты с помощью следующего равенства:

$$\nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} = \tilde{\nabla}_{\bar{x}}^N \bar{y} + \eta(\bar{x}) N \bar{y} + (g + \eta \otimes \eta)(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\xi} - \eta(\bar{y}) \bar{x} - \eta(\bar{x}) \bar{y}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} = \tilde{\nabla}_{\bar{x}}^N \bar{y} + \eta(\bar{x}) N \bar{y} + \tilde{C}(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\xi} - \eta(\bar{y}) \bar{x} - \eta(\bar{x}) \bar{y},$$

где $\tilde{C}_{ab} = g_{ab}$, $\tilde{C}_{an} = 0$, $\tilde{C}_{nn} = 2$.

Предложение 6. Пусть M – многообразие Кенмоцу с нулевым тензором Схоутена, тогда тензор кривизны $K(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z}$ связности ∇^N равен нулю тогда и только тогда, когда эндоморфизм N ковариантно постоянен относительно внутренней связности.

Доказательство предложения основано на том, что ненулевые компоненты тензора кривизны $K(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$ связности ∇^N в адаптированных координатах принимают следующий вид: $K_{abc}^d = R_{abc}^d$, $K_{bnc}^d = \nabla_b N_c^d$.

Из обращения в нуль тензора Схоутена – Вагнера и условия $\nabla\phi = 0$ следует, что тензор Схоутена многообразия Кенмоцу наделен теми же свойствами, что и тензор кривизны кэлерова многообразия. В частности, имеет место

Предложение 7. Тензор Схоутена многообразия Кенмоцу обладает следующими свойствами:

$$R(\bar{x}, \bar{y}) \circ \phi = \phi \circ R(\bar{x}, \bar{y}), \quad R(\phi\bar{x}, \phi\bar{y}) = R(\bar{x}, \bar{y}).$$

Найдем условия, при которых связность ∇^N является метрической связностью.

В адаптированных координатах равенство $\nabla^N g = 0$ переписывается в виде

$$\nabla_c^N g_{ab} = \bar{e}_c g_{ab} - \Gamma_{ca}^d g_{db} - \Gamma_{cb}^d g_{ad} = 0,$$

$$\nabla_n^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N_a^c g_{cb} - N_b^c g_{ac} = 0.$$

Учитывая, что для многообразия Кенмоцу $\partial_n g_{ab} = 2g_{ab}$, из последнего равенства получаем

$$2g_{ab} = N_a^c g_{cb} + N_b^c g_{ac}.$$

Тем самым, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 8. N-связность ∇^N является метрической тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство: $2g_{ab} = N_a^c g_{cb} + N_b^c g_{ac}$.

Найдем ограничение на эндоморфизм N, при котором связность ∇^N сохраняет структурный эндоморфизм многообразия Кенмоцу.

Рассмотрим равенство $\nabla_n^N \phi_a^b = \partial_n \phi_a^b + N_c^b \phi_a^c - N_a^c \phi_c^b = 0$. Учитывая, что многообразие Кенмоцу является нормальным почти контактным метрическим многообразием, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 9. N-связность сохраняет ∇^N структурный эндоморфизм ϕ многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда эндоморфизмы N и ϕ коммутируют: $N_c^b \phi_a^c - N_a^c \phi_c^b = 0$.

Последнее равенство выполняется, в частности, если $N = \phi$.

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение.

Предложение 10. Внутренняя связность ∇ и связность Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$ почти контактного метрического многообразия удовлетворяют следующему соотношению:

$$\tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{y} = \nabla_{P\bar{x}} P\bar{y} + (\omega(\bar{y}, \bar{x}) - c(\bar{y}, \bar{x}))\bar{\xi} + \eta(\bar{x})(C\bar{y} + \psi\bar{y}) + \eta(\bar{y})(C\bar{x} + \psi\bar{x}).$$

С учетом предложения 2 последнее равенство в случае многообразия Кенмоцу принимает более простой вид: $\tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{y} = \nabla_{P\bar{x}} P\bar{y} - g(\bar{x}, \bar{y})\bar{\xi} + \eta(\bar{x})\bar{y} + \eta(\bar{y})\bar{x}$.

Приведем пример многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны. Определим на пространстве R^3 структуру многообразия Кенмоцу, полагая, что в канонических координатах (x, y, z) выполняются равенства: $g_{11} = g_{22} = e^{2z}$,

$g_{33} = 1$, $\varphi \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\varphi \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}$, $\varphi \frac{\partial}{\partial z} = 0$, $\bar{\xi} = \frac{\partial}{\partial z}$, $\eta = dz$. Нетрудно проверить,

что тензор кривизны Схоутена заданной структуры равен нулю.

Другие примеры почти контактных метрических многообразий с нулевым тензором Схоутена можно получить, используя предложение 2. Для этого нужно положить $\tilde{\Gamma}_{ab}^c$ равными нулю и позаботиться о том, чтобы компоненты метрического тензора были константами.

3. Продолженные структуры на распределениях многообразий Кенмоцу

Введем на распределении D многообразия Кенмоцу M структуру гладкого многообразия следующим образом. Поставим в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M сверткарту $\tilde{K}(\bar{x}) = (x^\alpha, x^{n+a})$ на распределении D , где x^{n+a} – координаты допустимого вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$: $\bar{x} = x^{n+a} \bar{e}_a$. Задание внутренней связности ∇ влечет разложение распределения $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D \rightarrow M$ – естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D , HD – горизонтальное распределение, порожаемое векторными полями $\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$, где $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+c}$, Γ_{bc}^a – коэффициенты внутренней связности. Для каждого допустимого вектора $\bar{x} = x^a \bar{e}_a$ определяются горизонтальный лифт $\bar{x}^h = x^a \bar{e}_a$ и вертикальный $\bar{x}^v = x^a \partial_{n+a}$.

Пусть $\varphi: D \rightarrow D$ – поле структурного эндоморфизма; φ – продолженная связность [4] – является связностью в векторном расслоении (D, π, M) и определяется разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\bar{u})$, $\bar{u}_{\bar{x}} = \bar{\xi} - (\varphi \bar{x})^v$, $\bar{\xi} = \partial_n$, $\bar{x} \in D$, $(\varphi \bar{x})^v$ – вертикальный лифт. Относительно базиса $(\bar{e}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\bar{u}$ получает следующее координатное представление: $\bar{u} = \partial_n - \varphi_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Векторные поля $(\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \bar{u} = \partial_n - \varphi_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$ задают на распределении D адаптированное поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + \varphi_b^a x^{n+b} dx^n)$ – сопряженное поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = 2\omega_{ba} \bar{u} + x^{n+d} (2\omega_{ba} \varphi_d^c + R_{bad}^c) \partial_{n+c}, \quad [\bar{e}_a, \bar{u}] = x^{n+d} (\partial_n \Gamma_{ad}^c - \nabla_a \varphi_d^c) \partial_{n+c},$$

$$[\bar{e}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad [\bar{u}, \partial_{n+a}] = \varphi_a^c \partial_{n+c}.$$

Учитывая, что M – многообразие Кенмоцу, перепишем структурные уравнения в следующем виде:

$$[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c}, \quad [\bar{e}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad [\bar{u}, \partial_{n+a}] = \varphi_a^c \partial_{n+c}.$$

Мы использовали здесь: интегрируемость распределения D : $\omega_{ba} = 0$; обращение в нуль тензора Схоутена – Вагнера внутренней связности многообразия Кенмоцу – $\partial_n \Gamma_{ad}^c = 0$; свойство нормальности многообразия Кенмоцу – $\nabla_a \varphi_d^c = 0$.

Определим на многообразии D почти контактную метрическую структуру $(D, J, \bar{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, полагая

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{y}^h) &= \tilde{g}(\bar{x}^v, \bar{y}^v) = g(\bar{x}, \bar{y}), \\ \tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{y}^v) &= \tilde{g}(\bar{x}^v, \bar{y}^h) = g(\bar{x}^h, \bar{u}) = g(\bar{x}^v, \bar{u}) = 0, \quad \tilde{g}(\bar{u}, \bar{u}) = 1, \\ \tilde{J}\bar{x}^h &= (\varphi\bar{x})^h, \quad \tilde{J}\bar{x}^v = (\varphi\bar{x})^v, \quad \tilde{J}\bar{u} = \bar{0}, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D).\end{aligned}$$

Предложение 11. Пусть M – многообразие Кенмоцу с распределением нулевой кривизны. Тогда для ненулевых коэффициентов $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ связности Леви-Чивиты метрики $\tilde{g}$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{ab}^c &= \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = -g_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{n+a,n+b}^n = g_{ab}, \\ \tilde{\Gamma}_{an}^c &= \tilde{\Gamma}_{na}^c = \delta_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{n+a,n}^{n+b} = \tilde{\Gamma}_{n,n+a}^{n+b} = \delta_a^b.\end{aligned}$$

Доказательство предложения основано на применение равенства

$$2\Gamma_{ij}^m = g^{km}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}) + \Omega_{ij}^m,$$

где $\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba}$, $\Omega_{ab}^{n+c} = R_{bad}^c x^{n+d}$, $\Omega_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c$, $\Omega_{an}^{n+c} = \partial_n \Gamma_{ab}^c x^{n+b}$.

Теорема 4. Пусть D – распределение нулевой кривизны многообразия Кенмоцу. Тогда продолженная почти контактная метрическая структура $(D, J, \bar{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ является структурой Кенмоцу.

Доказательство. Пусть $\tilde{\nabla}$ – связность Леви-Чивиты, ассоциированная с продолженной структурой $(D, J, \bar{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$. С учетом предложения 11 получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\bar{x}^h} \bar{y}^h &= (\nabla_{\bar{x}} \bar{y})^h - (g(\bar{x}, \bar{y}) \tilde{\xi})^h, \quad \tilde{\nabla}_{\bar{x}^h} \bar{y}^v = (\nabla_{\bar{x}} \bar{y})^v, \quad \tilde{\nabla}_{\bar{x}^v} \bar{y}^h = 0, \\ \tilde{\nabla}_{\bar{x}^v} \bar{y}^v &= -(g(\bar{x}, \bar{y}) \tilde{\xi})^h, \quad \tilde{\nabla}_{\bar{x}^h} \bar{u} = (\nabla_{\bar{u}} \bar{x})^h = (\nabla_{\tilde{\xi}} \bar{x})^h, \quad \tilde{\nabla}_{\bar{x}^v} \bar{u} = \nabla_{\bar{u}} \bar{x}^v = (\nabla_{\tilde{\xi}} \bar{x})^v.\end{aligned}$$

Используя полученные равенства, характеристический признак многообразия Кенмоцу, убеждаемся в справедливости теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bukusheva A.V., Galaev S.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. V. 4 (53). No. 2. P. 13–22.
2. Букушева А.В. Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2015. № 46. С. 58–63.
3. Галаев С.В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. Вып. 2. С. 138–147.
4. Букушева А.В., Галаев С.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 4. С. 10–18.
5. Галаев С.В. Почти контактные метрические многообразия с распределением нулевой кривизны // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2017. № 6 (255). Вып. 46. С. 36–43.
6. Букушева А.В. О геометрии многообразий Кенмоцу с N-связностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2019. № 50. С. 48–60.

7. Golab S. On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor. N.S. 1975. 29. P. 293–301.
8. Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е. Многообразия Римана – Картана // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я). 2009. Т. 123. С. 110–141.
9. Галаев С.В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 3. С. 258–263.
10. Букушева А.В. О геометрии контактных метрических пространств с ф-связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2015. № 17(214). Вып. 40. С. 20–24.
11. Galaev S.V. Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. V. 31. No. 1. P. 35–46.
12. Букушева А.В., Галаев С.В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. № 48. С. 32–41.
13. Galaev S.V. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. V. 39. No. 1. P. 71–76.
14. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93–103.
15. Pitis G. Geometry of Kenmotsu manifolds. Brasov: Publishing House of Transilvania University of Brasov, 2007. 160 p.
16. Вагнер В.В. Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

Статья поступила 21.09.2019 г.

Bukusheva A.V. (2020) KENMOTSU MANIFOLDS WITH A ZERO CURVATURE DISTRIBUTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/64/1

Keywords: Kenmotsu manifold, Einstein manifold, Schouten tensor, intrinsic connection, N-connection.

We study the Kenmotsu manifold with the intrinsic connection defined on it with the zero Schouten curvature tensor. The Schouten tensor is a nonholonomic analog of the curvature tensor of a Riemannian manifold. The intrinsic connection defines a parallel displacement of admissible vectors along admissible curves. In the case of the zero Schouten tensor, the parallel displacement does not depend on the choice of an admissible curve.

It is proved that the Kenmotsu manifold with the zero Schouten tensor is an Einstein manifold. On a Kenmotsu manifold M , an N-connectedness is defined, where N is a tangent bundle endomorphism preserving the distribution D of the manifold M . In some cases, the N-connection is preferable to the Levi-Civita connection.

The advantage of N-connectivity is that it satisfies the following condition: $\nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} \in \Gamma(D)$, where $\bar{x} \in \Gamma(TM)$, $\bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D)$. In the case when $N = C$, or $N = C - \varphi$, N-connectivity ∇^N coincides with the Tanaka–Webster connection or the Schouten–van Kampen connection, respectively. It is proved that the N-connection curvature tensor is zero if and only if the endomorphism N is covariantly constant with respect to the intrinsic connection. The covariantly constant with respect to the interior connection of tensor fields can be attributed, in particular, the structural endomorphism φ of the Kenmotsu manifold. The interior invariants of the Kenmotsu manifold are investigated. In particular, it is proved that the Schouten–Wagner tensor for the Kenmotsu manifold vanishes. On a distribution D of the Kenmotsu manifold, an almost contact metric structure called the extended structure is determined for the case $N = \varphi$ by means of N-connection ∇^N . It is proved that in the case of a Kenmotsu manifold with a Schouten tensor, the extended structure is a Kenmotsu structure.

AMS Mathematical Subject Classification: 53C15

Aliya V. BUKUSHEVA (Candidate of pedagogical sciences, National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky, Saratov, Russian Federation). E-mail: bukusheva@list.ru

REFERENCES

1. Bukusheva A.V., Galaev S.V. (2011) Almost contact metric structures defined by connection over distribution. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics*. 4(53). 2. pp. 13–22.
2. Bukusheva A.V. (2015) Nelineynye svyaznosti i vnutrennie polupul'verzatsii na raspredelenii s obobshchennoy lagranzhevoy metrikoy [Nonlinear connections and internal semipulverizations on a distribution with a generalized Lagrangian metric]. *Differentsial'naya geometriya mnogoobraziy figur*. 46. pp. 58–63.
3. Galaev S.V. (2017) Prodolzhenkiye struktury na koraspredeleniyakh kontaktnykh metricheskikh mnogoobraziy [Extended structures on codistributions of contact metric manifolds] *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 17(2). pp. 138–147. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147>.
4. Bukusheva A.V., Galaev S.V. (2013) Svyaznosti nad raspredeleniyem i geodezicheskiye pul'verzatsii [Connections over a distribution and geodesic sprays]. *Russian Math. (Iz. VUZ)*. 57(4). pp. 7–13. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13040026>.
5. Galaev S.V. (2017) Pochti kontaktnyye metricheskiye mnogoobraziya s raspredeleniyem nulevoy krivizny [Almost contact metric manifolds with distribution of zero curvature]. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*. 6(255). 46. pp. 36–43.
6. Bukusheva A.V. (2019) O geometrii mnogoobraziy Kenmotsu s N-svyaznost'yu [On geometry of Kenmotsu manifolds with N-connection]. *Differentsial'naya geometriya mnogoobraziy figur*. 50. pp. 48–60. DOI: 10.5922/0321-4796-2019-50-7.
7. Golab S. (1975) On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. *Tensor. N.S.* 29. pp. 293–301.
8. Gordeeva I.A., Panzhensky V.I., Stepanov S.E. (2009) Mnogoobraziya Rimana – Kartana [Riemann–Cartan manifolds]. *Itogi nauki i tekhniki*. 123. pp. 110–141.
9. Galaev S.V. (2015) Pochti kontaktnyye metricheskiye prostranstva s N-svyaznost'yu [Almost contact metric spaces with N-connection]. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 15(3). pp. 258–263. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264>.
10. Bukusheva A.V. (2015) O geometrii kontaktnykh metricheskikh prostranstv s ϕ -svyaznost'yu [The geometry of contact metric spaces with ϕ -connection]. *Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics*. 17(214). 40. pp. 20–24.
11. Galaev S.V. (2015) Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*. 31(1). pp. 35–46.
12. Bukusheva A.V., Galaev S.V. (2017) Geometriya pochti kontaktnykh giperkelerovykh mnogoobraziy [Geometry of an almost contact hyper-Kähler manifolds]. *Differentsial'naya geometriya mnogoobraziy figur*. 48. pp. 32–41.
13. Galaev S.V. (2018) Admissible hyper-complex pseudo-Hermitian structures. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 39(1). pp. 71–76. DOI: 10.1134/S1995080218010122.
14. Kenmotsu K. (1972) A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.* 24. pp. 93–103.
15. Pitis G. (2007) *Geometry of Kenmotsu manifolds*. Brasov: Publishing House of Transilvania University of Brasov. 160 p.
16. Vagner V.V. (1941) Geometriya $(n-1)$ -mernogo negolonomnogo mnogoobraziya v n -mernom prostranstve [Geometry of the $(n-1)$ -dimensional manifold in the n -dimensional space]. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu*. 5. pp. 173–255.

Received: September 21, 2019

УДК 519.63
DOI 10.17223/19988621/64/2

MSC 76W05

И.В. Бычин, А.В. Гореликов, А.В. Ряховский

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВАКУУМНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ШАРЕ¹

Разработан алгоритм численного решения начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре. При дискретизации использован метод контрольного объема и модификация FDTD-метода, учитывающая специфику рассматриваемой задачи. Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа на потенциал магнитного поля в вакууме решалась с использованием преобразования обратных радиусов. Представлены результаты тестирования.

Ключевые слова: *уравнение индукции, вакуумные граничные условия, численное решение.*

Необходимость решения уравнения магнитной индукции с вакуумными граничными условиями зачастую возникает при численном решении задач магнитной гидродинамики, например при математическом моделировании явления гидромагнитного динамо [1–5]. При постановке задач с вакуумными граничными условиями магнитное поле считается всюду непрерывным, а в вакууме – потенциальным и соленоидальным [6]. В коммерческих программных кодах обычно используются упрощенные так называемые «псевдо-вакуумные» граничные условия, при которых на границе области полагается равной нулю тангенциальная составляющая магнитного поля [7, 8]. Решения, полученные с использованием псевдо-вакуумных условий, обычно корректно воспроизводят плотность тока, однако структура магнитного поля значительно отличается от решений, рассчитанных при вакуумных условиях [8]. Поэтому в задачах моделирования гидромагнитного динамо представляется целесообразным использование более реалистичных вакуумных граничных условий.

При численном решении уравнения индукции, возникает проблема получения соленоидального магнитного поля. В настоящее время наиболее распространенными методами вычислительной магнитной гидродинамики являются псевдоспектральные [9, 10] и конечно-разностные [11, 12] методы, а также метод контрольного объема [10, 13]. В рамках данных методов существуют различные подходы для обеспечения бездивергентности магнитного поля [14]: использование векторного потенциала; метод искусственного скалярного потенциала [15]; представление дискретного аналога уравнения индукции в такой форме, чтобы его решение автоматически удовлетворяло сеточному уравнению неразрывности [16–18]; метод Пауэлла, который широко применяется в астрофизических приложениях и основан на записи уравнений в форме, допускающей существование магнитных монополей [19]. Перечисленные методы обладают своими преимуще-

¹ Работа выполнена при поддержке Программы ФНИ государственных академий наук на 2013–2020 гг., проект № 0065-2019-0021.

ствами и недостатками. Например, коррекция магнитного поля в методе скалярного потенциала нелокальна, и поэтому локальные ошибки в дивергенции магнитного поля могут мгновенно распространяться на всю область [20]. Другие методы, например метод Пауэлла, не являются, строго говоря, консервативными.

Несмотря на достаточно большое число работ в этой области, разработка эффективных алгоритмов решения уравнения индукции с вакуумными граничными условиями остается актуальной задачей вычислительной магнитной гидродинамики. Целью настоящей работы является разработка и апробация алгоритма численного решения начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре на основе модификации разностных методов вычислительной гидродинамики и электродинамики для использования в ортогональных криволинейных координатах.

1. Постановка задачи и математическая модель

Пусть проводящая жидкость заполняет шар G с центром в начале координат и радиусом a , который находится в неподвижной диэлектрической среде. Предполагается, что удельная электрическая проводимость жидкости $\sigma = \text{const}$. В рамках модели МГД [21–23] рассматривается задача о нахождении индукции магнитного поля $\mathbf{B}$, при заданной скорости жидкости $\mathbf{u}$. Задача решается в сферических координатах r, θ, φ . Полагается, что вне шара магнитное поле потенциально, и его скалярный потенциал ψ является регулярной на бесконечности гармонической функцией. На границе проводника и диэлектрика задаются условия сопряжения (так называемые вакуумные граничные условия), которые заключаются в требовании непрерывности магнитного поля и равенства нулю нормальной составляющей

плотности тока $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}$ [21]. Таким образом, начально-краевая задача, для которой в данной работе строится процедура численного решения, имеет вид

$$r < a, t > 0:$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + v_m \text{rot rot } \mathbf{B} = 0; \quad (1)$$

$$r > a, t \geq 0:$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (\psi - \text{регулярна при } r \rightarrow +\infty); \quad (2)$$

$$r = a, t \geq 0:$$

$$\mathbf{B} = \nabla \psi, \quad (3)$$

$$(\text{rot } \mathbf{B})_r = 0; \quad (4)$$

$$r \leq a, t = 0:$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}, \text{ где } \text{div } \mathbf{b} = 0. \quad (5)$$

Здесь t – время, c – скорость света, $v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ – коэффициент магнитной вязкости.

Из (1) следует, что равенство нулю дивергенции начального поля $\mathbf{b}$ обеспечивает соленоидальность магнитного поля $\mathbf{B}$ и в последующие моменты времени.

2. Численный метод решения уравнения индукции

В данной работе для дискретизации уравнения индукции использован метод контрольного объема [24–26] и модификация метода FDTD (Finite Difference Time Domain) [17, 27, 28] в ортогональных криволинейных координатах, учитывающая специфику рассматриваемой задачи (1) – (5).

Дискретизация расчетной области

Пусть $\{x_\alpha\}$ – произвольные ортогональные координаты, $\{e_\alpha\}$ – соответствующий правый ортонормированный базис, $\{H_\alpha\}$ – коэффициенты Ламе (здесь и далее, нижние греческие индексы принимают значения 1, 2, 3 и определяют номер координаты или соответствующей компоненты). Предполагается, что расчетная область G – ограниченная область в пространстве, которую можно разбить системой координатных поверхностей

$$\{x_{\alpha, i_\alpha} = \text{const}, \alpha = 1, 2, 3, i_\alpha = 1, \dots, n_\alpha : x_{\alpha, i_\alpha - 1} < x_{\alpha, i_\alpha}\}$$

на непересекающиеся подобласти – контрольные объемы

$$D_{i_1 i_2 i_3} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_\alpha \in (x_{\alpha, i_\alpha - 1}, x_{\alpha, i_\alpha}), \alpha = 1, 2, 3\}, i_\alpha = 2, \dots, n_\alpha.$$

В центре каждого контрольного объема содержится внутренняя расчетная точка $P_{i_1 i_2 i_3}$. В целях сокращения записи, в дальнейшем набор индексов i_1, i_2, i_3 обозначается как (i) . Сеточные значения компонент магнитного поля рассчитываются в точках на гранях контрольных объемов, т.е. используется дискретизация на смещенных расчетных сетках [24–28]. Для описания процедуры дискретизации на смещенных сетках удобно использовать операторы сдвига на наборах индексов

$$h_\alpha^\sigma(i) \equiv h_\alpha^\sigma(i_1, i_2, i_3) = h_\alpha^\sigma(i_1), h_\alpha^\sigma(i_2), h_\alpha^\sigma(i_3), \quad (6)$$

действие которых определяется по правилу:

$$h_\alpha^\sigma(i_\beta) = i_\beta + \frac{\sigma}{2} \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \sigma = -1, 1, \quad (7)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, а индекс σ определяет направление и величину сдвига по индексу i_β . При этом полагается, что расчетные точки с одним полуцелым индексом $P_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ находятся в центрах граней $S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ контрольного объема $D_{(i)}$;

$\delta S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ – площадь соответствующей грани контрольного объема; граница кон-

трольного объема $\partial D_{(i)} = \bigcup_{\alpha=1}^3 S_{h_\alpha^{\pm 1/2}(i)}$. Точки с двумя полуцелыми индексами

$P_{h_\beta^{\gamma/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ находятся в центрах ребер $l_{\gamma, h_\beta^{\gamma/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = S_{h_\beta^{\gamma/2}(i)} \cap S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ ($\gamma \neq \alpha \neq \beta$)

контрольного объема $D_{(i)}$ расположенных вдоль координатных линий x_γ ; $\delta l_{\gamma, h_\beta^{\gamma/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ – длина соответствующего ребра контрольного объема $D_{(i)}$, и

$$\partial S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = l_{\gamma, h_\beta^{\pm 1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \cup l_{\beta, h_\gamma^{\pm 1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}.$$

Дискретный аналог уравнения индукции

Уравнение (1) является следствием закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (8)$$

где $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, которая в модели МГД имеет вид [22]

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (9)$$

Для получения дискретного аналога уравнение (8) умножается на $\mathbf{e}_\alpha dS_\alpha dt$ (dS_α – элемент площади на грани $S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$), и затем интегрируется по поверхности $S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ и по промежутку времени $[t_0, t]$. При вычислении интеграла по поверхности $S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ используется теорема Стокса, а при интегрировании по времени – полностью неявная схема. В результате, дискретный аналог уравнения (8) для компоненты B_α можно записать в виде

$$\frac{1}{\delta t} \left(B_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - B_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)}^0 \right) \delta S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = -c \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_\beta (\delta l_\gamma E_\gamma)_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}. \quad (10)$$

Здесь $B_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \equiv B_\alpha(P_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}, t)$ – сеточные значения B_α на текущем временном слое; $B_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)}^0 \equiv B_\alpha(P_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}, t_0)$ – сеточные значения B_α на предыдущем временном слое; $E_{\gamma, h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \equiv E_\gamma(P_{h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}, t)$ – сеточные значения компоненты напряженности электрического поля в точках на ребрах контрольного объема ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$); $\delta t = t - t_0$ – шаг по времени; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – символ Леви-Чивиты; конечные разности в правой части (10) определяются по формуле

$$\Delta_\beta (\delta l_\gamma E_\gamma)_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = E_{\gamma, h_\beta^{1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \delta l_{\gamma, h_\beta^{1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - E_{\gamma, h_\beta^{-1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \delta l_{\gamma, h_\beta^{-1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}. \quad (11)$$

Анализ уравнения (10) для задачи (1) – (5) показывает, что сеточные значения $(\operatorname{rot} \mathbf{B})_r$ в точках на границе расчетной области не входят в уравнение (10) для приграничных расчетных точек $P_{n_1 i_2 i_3}$. Следовательно, условие (4) равенства нулю радиальной составляющей ротора магнитного поля на границе шара G не накладывает каких-либо дополнительных ограничений на вид дискретного аналога уравнения индукции для приграничных расчетных точек.

Дискретный аналог уравнения неразрывности

Сеточные значения $\operatorname{div} \mathbf{B}$ определяются во внутренних расчетных точках $P_{(i)}$ контрольных объемов $D_{(i)}$ по формуле

$$\operatorname{DIV} \mathbf{B}|_{P_{(i)}} = \frac{1}{\delta V_{(i)}} \sum_{\alpha=1}^3 \left(B_{\alpha, h_\alpha^{1/2}(i)} \delta S_{h_\alpha^{1/2}(i)} - B_{\alpha, h_\alpha^{-1/2}(i)} \delta S_{h_\alpha^{-1/2}(i)} \right), \quad (12)$$

где $\delta V_{(i)}$ – объем $D_{(i)}$ и учтено направление внешней нормали $\mathbf{n}_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = \sigma \mathbf{e}_\alpha$ на гранях контрольного объема $D_{(i)}$. Пусть $D_{(i)}$ – внутренний контрольный объем (т.е. его граница не пересекается с границей расчетной области G) и пусть в момент

времени t_0 сеточные значения компонент магнитного поля $B_{\alpha, h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}^0$ удовлетворяют дискретному аналогу уравнения неразрывности $\text{DIV } \mathbf{B}^0|_{P(i)} = 0$. Тогда подстановка $B_{\alpha, h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \delta S_{h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}$ из сеточного уравнения индукции (10) в правую часть (12) дает

$$\text{DIV } \mathbf{B}|_{P(i)} = -\frac{c\delta t}{\delta V(i)} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{1/2}(i)} - \Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{-1/2}(i)} \right), \quad (13)$$

где с учетом (11) правая часть имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{1/2}(i)} - \Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{-1/2}(i)} &= (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{1/2}(i)} - (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{1/2}(i)} - \\ &- (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)} + (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из определения (7), следует, что при $\alpha \neq \beta$ операторы сдвига $h_{\alpha}^{\sigma/2}$ и $h_{\beta}^{\chi/2}$ ($\chi, \sigma \in \{-1, 1\}$) коммутируют, следовательно, выражение (14) симметрично по индексам α и β , и его свертка с символом Леви-Чивиты в правой части (13) равна нулю, т.е.

$$\text{DIV } \mathbf{B}|_{P(i)} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, решение дискретного аналога уравнения индукции (10) удовлетворяет уравнению неразрывности (15) для внутренних контрольных объемов на текущем временном слое, при условии, что оно соленоидально на предыдущем временном слое. Для контрольных объемов, примыкающих к границе G , уравнение неразрывности (15) можно использовать для нахождения нормальной компоненты магнитного поля на границе расчетной области.

Аппроксимация напряженности электрического поля на ребрах контрольного объема

Из (9) следует, что компоненты напряженности электрического поля в ортогональных криволинейных координатах вычисляются по формуле

$$E_{\gamma} = -\frac{1}{c} \sum_{\tau, \rho=1}^3 \frac{\varepsilon_{\gamma\tau\rho}}{H_{\rho}} \left(u_{\tau} H_{\rho} B_{\rho} - \frac{v_m}{H_{\tau}} \frac{\partial (H_{\rho} B_{\rho})}{\partial x_{\tau}} \right). \quad (16)$$

Для удобства записи и аппроксимации конечно-разностных выражений в (10) вводятся новые зависимые переменные:

$$\Phi_{\rho} = H_{\rho} B_{\rho}, \quad \rho = 1, 2, 3. \quad (17)$$

По аналогии с вычислительной гидродинамикой, можно определить суммарные (конвективные и диффузионные) потоки [24] переменной Φ_{ρ} по направлению x_{τ} в точках $P_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}$ на ребрах $l_{\gamma, h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}$ контрольного объема:

$$J_{\gamma\tau\rho}|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = \frac{\delta l_{\gamma}}{H_{\rho}} \left(u_{\tau} \Phi_{\rho} - \frac{v_m}{H_{\tau}} \frac{\partial \Phi_{\rho}}{\partial x_{\tau}} \right) \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}. \quad (18)$$

Тогда, конечные разности (11) можно записать в виде

$$-c\Delta_\beta (\delta l_\gamma E_\gamma)_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = \sum_{\tau, \rho=1}^3 \varepsilon_{\gamma\tau\rho} \Delta_\beta J_{\gamma\tau\rho} \Big|_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} ; \quad (19)$$

$$\Delta_\beta J_{\gamma\tau\rho} \Big|_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = J_{\gamma\tau\rho} \Big|_{h_\beta^{1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - J_{\gamma\tau\rho} \Big|_{h_\beta^{-1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} . \quad (20)$$

Уравнение индукции (10) в терминах переменных Φ_ρ принимает вид

$$\frac{1}{\delta t} \left(\Phi_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - \Phi_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)}^0 \right) A_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{\tau, \rho=1}^3 \varepsilon_{\gamma\tau\rho} \Delta_\beta J_{\gamma\tau\rho} \Big|_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} , \quad (21)$$

$$A_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = \frac{\delta S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}}{H_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)}} . \quad (22)$$

Вычисление сумм в правой части (21) с учетом (20) позволяет записать дискретный аналог уравнения индукции в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \left(\Phi_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - \Phi_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)}^0 \right) A_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = \Lambda_\alpha [& \Phi_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} , \Phi_{\alpha, h_\beta^{\pm 1} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} , \Phi_{\alpha, h_\gamma^{\pm 1} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}] + \\ & + \Omega_\alpha [\Phi_{\beta, h_\beta^{\pm 1/2}(i)} , \Phi_{\beta, h_\alpha^{\pm 1/2} h_\beta^{\sigma/2}(i)} , \Phi_{\gamma, h_\gamma^{\pm 1/2}(i)} , \Phi_{\gamma, h_\alpha^{\pm 1/2} h_\gamma^{\sigma/2}(i)}] \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma) , \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha [\Phi_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} , \Phi_{\alpha, h_\beta^{\pm 1} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} , \Phi_{\alpha, h_\gamma^{\pm 1} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}] = & J_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_\beta^{-1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - J_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_\beta^{1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \\ & + J_{\beta\gamma\alpha} \Big|_{h_\gamma^{-1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - J_{\beta\gamma\alpha} \Big|_{h_\gamma^{1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} , \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha [\Phi_{\beta, h_\beta^{\pm 1/2}(i)} , \Phi_{\beta, h_\alpha^{\pm 1/2} h_\beta^{\sigma/2}(i)} , \Phi_{\gamma, h_\gamma^{\pm 1/2}(i)} , \Phi_{\gamma, h_\alpha^{\pm 1/2} h_\gamma^{\sigma/2}(i)}] = & J_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_\beta^{1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - \\ & - J_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_\beta^{-1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} + J_{\beta\alpha\gamma} \Big|_{h_\gamma^{1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - J_{\beta\alpha\gamma} \Big|_{h_\gamma^{-1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} . \end{aligned} \quad (25)$$

Различные схемы аппроксимации задач конвекции – диффузии подробно рассмотрены в [24–26]. В данной работе на этапе отладки и тестирования нового кода для моделирования МГД-течений использована схема со степенным законом, которая проста в реализации, устойчива и позволяет получать результаты, точность которых сопоставима с численными схемами второго порядка [29–31] при относительно небольших значениях числа Пекле.

Схему со степенным законом можно записать с использованием функции

$$Z(x, y) = y g(x/y) \Theta(g(x/y)) + x \Theta(x) , \quad (26)$$

$$\text{где } g(x) = (1 - 0,1|x|)^5 , \quad \Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Аргументами $Z(x, y)$ являются величины, определяющие интенсивность конвекции и диффузионную проводимость в расчетных точках на ребрах контрольных объемов.

Суммарные потоки в конечно-разностном операторе Λ_α (24) аппроксимируются по формулам

$$\begin{aligned} J_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = & F_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} + \\ & + \chi a_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} (\Phi_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - \Phi_{\alpha, h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$F_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = \frac{u_{\beta} \delta l_{\gamma}}{H_{\alpha}} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}, \quad D_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = \frac{v_m \delta l_{\gamma}}{H_{\alpha} \tilde{\delta l}_{\beta}} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \quad (28)$$

$(\tilde{\delta l}_{\beta, h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} - \text{длина дуги координатной линии } x_{\beta}, \text{ между точками } P_{h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \text{ и } P_{h_{\beta}^{\chi} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)})$;

$$a_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = Z(-\chi F_{\gamma\beta\alpha}, D_{\gamma\beta\alpha}) \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}. \quad (29)$$

Формулы для аппроксимации потоков в Ω_{α} (25):

$$J_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = F_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\beta, h_{\beta}^{\chi/2}(i)} + \tilde{a}_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} (\Phi_{\beta, h_{\alpha}^{\sigma} h_{\beta}^{\chi/2}(i)} - \Phi_{\beta, h_{\beta}^{\chi/2}(i)}), \quad (30)$$

где

$$F_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = \frac{u_{\alpha} \delta l_{\gamma}}{H_{\beta}} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}, \quad D_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = \frac{v_m \delta l_{\gamma}}{H_{\beta} \tilde{\delta l}_{\alpha}} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \quad (31)$$

$(\tilde{\delta l}_{\alpha, h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} - \text{длина дуги координатной линии } x_{\alpha}, \text{ между точками } P_{h_{\beta}^{\chi/2}(i)} \text{ и } P_{h_{\alpha}^{\sigma} h_{\beta}^{\chi/2}(i)})$;

$$\tilde{a}_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = Z(F_{\gamma\alpha\beta}, D_{\gamma\alpha\beta}) \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}. \quad (32)$$

С учетом (27) – (32) выражения для Λ_{α} и Ω_{α} приобретают вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha} [\Phi_{\alpha, h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}, \Phi_{\alpha, h_{\beta}^{\pm 1} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}, \Phi_{\alpha, h_{\gamma}^{\pm 1} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}] = \\ = -(a_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + a_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + a_{\beta\gamma\alpha} \Big|_{h_{\gamma}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + a_{\beta\gamma\alpha} \Big|_{h_{\gamma}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}) \Phi_{\alpha, h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + \\ + (-F_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + F_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} - F_{\beta\gamma\alpha} \Big|_{h_{\gamma}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + F_{\beta\gamma\alpha} \Big|_{h_{\gamma}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}) \Phi_{\alpha, h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + \\ + a_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\alpha, h_{\beta}^1 h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + a_{\gamma\beta\alpha} \Big|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\alpha, h_{\beta}^{-1} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + \\ + a_{\beta\gamma\alpha} \Big|_{h_{\gamma}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\alpha, h_{\gamma}^1 h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} + a_{\beta\gamma\alpha} \Big|_{h_{\gamma}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\alpha, h_{\gamma}^{-1} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha} [\Phi_{\beta, h_{\beta}^{\pm 1/2}(i)}, \Phi_{\beta, h_{\alpha}^{\sigma} h_{\beta}^{\pm 1/2}(i)}, \Phi_{\gamma, h_{\gamma}^{\pm 1/2}(i)}, \Phi_{\gamma, h_{\alpha}^{\sigma} h_{\gamma}^{\pm 1/2}(i)}] = \\ = F_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\beta, h_{\beta}^{1/2}(i)} + \tilde{a}_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} (\Phi_{\beta, h_{\alpha}^{\sigma} h_{\beta}^{1/2}(i)} - \Phi_{\beta, h_{\beta}^{1/2}(i)}) - \\ - F_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\beta, h_{\beta}^{-1/2}(i)} - \tilde{a}_{\gamma\alpha\beta} \Big|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} (\Phi_{\beta, h_{\alpha}^{\sigma} h_{\beta}^{-1/2}(i)} - \Phi_{\beta, h_{\beta}^{-1/2}(i)}) + \\ + F_{\beta\alpha\gamma} \Big|_{h_{\gamma}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\gamma, h_{\gamma}^{1/2}(i)} + \tilde{a}_{\beta\alpha\gamma} \Big|_{h_{\gamma}^{1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} (\Phi_{\gamma, h_{\alpha}^{\sigma} h_{\gamma}^{1/2}(i)} - \Phi_{\gamma, h_{\gamma}^{1/2}(i)}) - \\ - F_{\beta\alpha\gamma} \Big|_{h_{\gamma}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \Phi_{\gamma, h_{\gamma}^{-1/2}(i)} - \tilde{a}_{\beta\alpha\gamma} \Big|_{h_{\gamma}^{-1/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} (\Phi_{\gamma, h_{\alpha}^{\sigma} h_{\gamma}^{-1/2}(i)} - \Phi_{\gamma, h_{\gamma}^{-1/2}(i)}), \end{aligned} \quad (34)$$

где $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

3. Численное решение начально-краевой задачи (1) – (5)

Внешняя краевая задача на потенциал

Если на границе шара G найдена нормальная компонента магнитного поля B_r , то потенциал ψ в каждый момент времени $t \geq 0$ в области $r > a$ является регулярным на бесконечности решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$r > a:$$

$$\nabla^2 \psi = 0; \quad (35)$$

$$r = a:$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = B_r. \quad (36)$$

С помощью преобразования обратных радиусов [32]:

$$r r' = a^2, \quad \psi(r, \theta, \varphi) = r' \omega(r', \theta, \varphi), \quad (37)$$

внешнюю задачу Неймана (35), (36) можно свести к решению внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа на ω с граничными условиями третьего рода:

$$r' < a: \quad \nabla^2 \omega = 0; \quad (38)$$

$$r' = a: \quad a \frac{\partial \omega}{\partial r'} + \omega = -B_r. \quad (39)$$

Краевая задача (38) – (39) численно решалась методом контрольного объема в сферических координатах на той же расчетной сетке, что и уравнение индукции (23). Сеточные значения ω вычислялись во внутренних расчетных точках $P_{(i)}$ контрольных объемов $D_{(i)}$ и в точках $P_{h_1^{1/2}(i)} \in \partial G$. После этого, по (37) определялся потенциал ψ в точках $P_{h_1^{1/2}(i)} \in \partial G$, а затем тангенциальные компоненты магнитного поля

$$r = a: \quad B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (40)$$

в точках $P_{h_\beta^{1/2} h_1^{1/2}(i)} \in \partial G$ ($\beta \neq 1$).

Поскольку тангенциальные компоненты магнитного поля на границе шара (40) находятся, как компоненты $\nabla \psi$, то можно показать, что сеточные значения нормальной составляющей ротора магнитного поля $(\text{rot } \mathbf{B})_r$ в точках $P_{h_\gamma^{1/2} h_\beta^{1/2} h_1^{1/2}(i)} \in \partial G$ ($\gamma \neq \beta \neq 1$) автоматически становятся равными нулю, тем самым обеспечивая выполнение условия (4).

Алгоритм решения начально-краевой задачи (1) – (5)

Для удобства записи алгоритма сеточные значения $\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ в точках на границе шара G обозначаются $\mathbf{f}$ (т.е. $\mathbf{f} \equiv \mathbf{B}|_{r=a}$). Пусть в момент времени t_{m-1} с заданной точностью найдено численное решение $\mathbf{B}^{(m-1)}$ начально-краевой задачи (1) – (5) и пусть нижний индекс k нумерует внутренние итерации, которые необходимо сделать, чтобы получить решение на следующем временном слое t_m .

В качестве нулевого приближения для $\mathbf{B}$ на временном слое t_m используется $\mathbf{B}^{(m-1)}$, т.е. при $k = 0$ $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}^{(m-1)}$. В данной работе предложен и реализован следующий алгоритм получения численного решения начально-краевой задачи (1) – (5):

Шаг 1: Из сеточного уравнения неразрывности (15) для приграничных контрольных объемов $D_{n_1 i_2 i_3}$, определяется нормальная (радиальная) компонента магнитного поля на границе G , т.е. вычисляется $f_{r, k+1}$.

Шаг 2: Решается третья внутренняя краевая задача (38), (39) на потенциал ω , для которой $B_r|_{r'=a} = f_{r, k+1}$. Затем вычисляются следующие приближения для тангенциальных составляющих магнитного поля (40) $f_{\theta, k+1}, f_{\phi, k+1}$ на границе расчетной области.

Шаг 3: Найденные $f_{r, k+1}, f_{\theta, k+1}, f_{\phi, k+1}$ используются в качестве граничных условий $\mathbf{B}_{k+1}|_{r=a} = \mathbf{f}_{k+1}$ для нахождения следующего приближения $\mathbf{B}_{k+1}$, которое определяется из решения уравнения индукции (23).

Шаги 1 – 3 повторяются до тех пор, пока не будет достигнута сходимость на данном временном слое. В качестве критериев сходимости решения задачи (1) – (5) использовались следующие условия:

$$\max_G |\text{DIV } \mathbf{B}_{k+1}| \leq \varepsilon_1 ; \quad (41)$$

$$\|\mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k\|_2 \leq \varepsilon_2 . \quad (42)$$

При достижении сходимости $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}_{k+1}$.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений, полученных в результате дискретизации уравнений начально-краевой задачи (1) – (5), использована открытая программная библиотека итерационных решателей LIS (<http://www.ssisc.org/lis/>). Дискретные аналоги уравнений индукции магнитного поля и его потенциала решались стабилизированным методом бисопряжённых градиентов с предобуславливанием по методу Якоби.

4. Тестирование алгоритма

В качестве теста рассматривалась задача о размагничивании проводящего шара единичного радиуса, которая является частным случаем задачи (1) – (5) при $\mathbf{u} \equiv 0, v_m = 1, r = 1$:

$r < 1, t > 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot rot } \mathbf{B} = 0 ; \quad (43)$$

$r > 1, t \geq 0$:

$$\nabla^2 \psi = 0 ; \quad (44)$$

$r = 1, t \geq 0$:

$$\mathbf{B} = \nabla \psi , \quad (45)$$

$$(\text{rot } \mathbf{B})_r = 0 ; \quad (46)$$

$r \leq 1, t = 0$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{b} , \text{ где } \text{div } \mathbf{b} = 0 . \quad (47)$$

Если начальное магнитное поле $\mathbf{b} = b_r(r, \theta)\mathbf{e}_r + b_\theta(r, \theta)\mathbf{e}_\theta$ ($r \leq 1$) имеет вид

$$b_r = \frac{\cos \theta}{(\pi r)^2} \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r} - \cos \pi r \right), \quad b_\theta = \frac{\sin \theta}{2(\pi r)^2} \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r} - \cos \pi r - \pi r \sin \pi r \right), \quad (48)$$

то поле

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = e^{-\pi^2 t} \mathbf{b}(r, \theta) \quad (49)$$

и потенциал ($r \leq 1$)

$$\psi(r, \theta, t) = -\frac{e^{-\pi^2 t} \cos \theta}{2\pi^2 r^2} \quad (50)$$

являются аксиально-симметричным решением задачи (43) – (47) [33].

Расчеты проводились до момента времени $T = 1$ на сетках ($n_r \times n_\theta$), где n_r, n_θ – количество контрольных объемов вдоль соответствующей координатной линии. На каждом временном слое критерии (41), (42) выполнялись с точностью $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-9}$. Точность численного решения для компонент индукции магнитного поля оценивалась по максимальным абсолютным ΔF и средним относительным δF погрешностям:

$$\Delta F = \max_{\bar{G} \otimes (0, T]} |F - F_{\text{ан}}|, \quad \delta F = \frac{1}{V} \int_G \frac{|F - F_{\text{ан}}|}{\bar{F}_{\text{ан}}} d\mathcal{V} \cdot 100\%, \quad (51)$$

где F – сеточные значения компонент B_r, B_θ ; $F_{\text{ан}}$ – точные значения B_r, B_θ , определяемые по (49); $\bar{F}_{\text{ан}} = \frac{1}{V} \int_G |F_{\text{ан}}| d\mathcal{V}$, V – объем шара G .

Точность численного решения для потенциала магнитного поля оценивалась на границе G по формулам

$$\Delta \psi = \max_{\partial G \otimes (0, T]} |\psi - \psi_{\text{ан}}|, \quad \delta \psi = \frac{1}{S} \int_{\partial G} \frac{|\psi - \psi_{\text{ан}}|}{\bar{\psi}_{\text{ан}}} dS \cdot 100\%, \quad (52)$$

где ψ – сеточные значения потенциала; $\psi_{\text{ан}}$ – точные значения потенциала (50);

$\bar{\psi}_{\text{ан}} = \frac{1}{S} \int_{\partial G} |\psi_{\text{ан}}| dS$; S – площадь сферы ∂G .

Результаты тестов на численную сходимость на последовательности вложенных расчетных сеток, приведенные в табл. 1, демонстрируют, что предложенный алгоритм решения начально-краевых задач (1) – (5) с вакуумными граничными условиями занимает промежуточное место по порядку аппроксимации между схемами первого и второго порядков по пространственным переменным. На рис. 1 – 3 представлены максимальные абсолютные погрешности для компонент индукции магнитного поля и потенциала, полученные на вложенных расчетных сетках.

Максимальные абсолютные и средние относительные погрешности

Сетка $n_r \times n_\theta$	ΔB_r	ΔB_θ	$\Delta \psi$	$\delta B_r _{t=0.25}, \%$	$\delta B_\theta _{t=0.25}, \%$	$\delta \psi _{t=0.25}, \%$
12×32	$2.12 \cdot 10^{-3}$	$3.14 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-5}$	0.92	0.79	1.02
22×62	$7.78 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-3}$	$2.43 \cdot 10^{-5}$	0.32	0.29	0.35
42×122	$2.51 \cdot 10^{-4}$	$3.19 \cdot 10^{-4}$	$1.29 \cdot 10^{-5}$	0.17	0.16	0.18

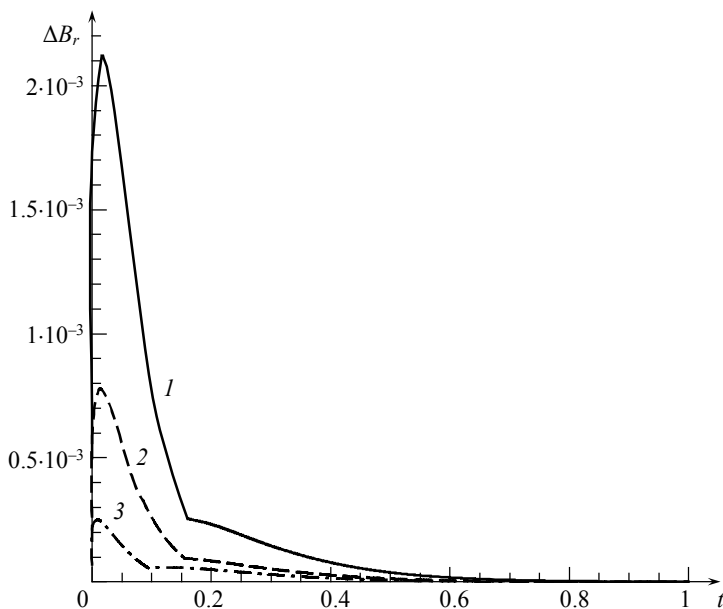


Рис. 1. Максимальная абсолютная погрешность для радиальной компоненты индукции магнитного поля: кр. 1 – сетка 12×32 ; кр. 2 – сетка 22×62 ; кр. 3 – сетка 42×122

Fig. 1. Maximum absolute error for the radial component of the magnetic field induction:

1, grid 12×32 ; 2, grid 22×62 ; 3, grid 42×122

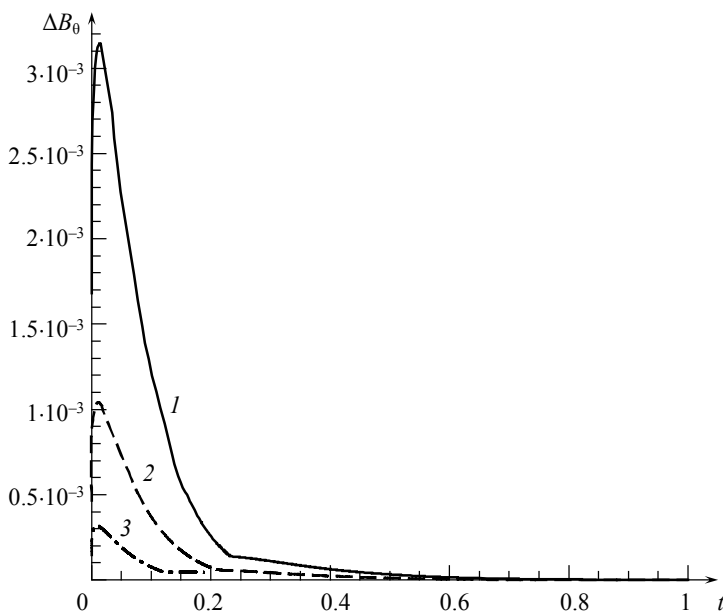


Рис. 2. Максимальная абсолютная погрешность для меридиональной компоненты индукции магнитного поля: кр. 1 – сетка 12×32 ; кр. 2 – сетка 22×62 ; кр. 3 – сетка 42×122

Fig. 2. Maximum absolute error for the meridional component of the magnetic field induction:

1, grid 12×32 ; 2, grid 22×62 ; 3, grid 42×122

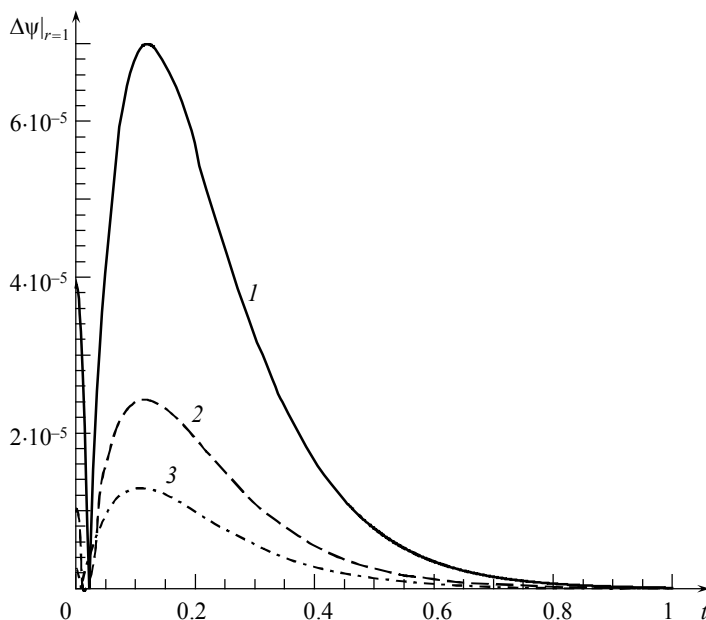


Рис. 3. Максимальная абсолютная погрешность для потенциала на сфере ($r = 1$):
кр. 1 – сетка 12×32 ; кр. 2 – сетка 22×62 ; кр. 3 – сетка 42×122

Fig. 3. Maximum absolute error for the potential on the sphere ($r = 1$):
1, grid 12×32 ; 2, grid 22×62 ; 3, grid 42×122

Заключение

Получен дискретный аналог уравнения индукции магнитного поля в произвольных ортогональных криволинейных координатах, решение которого удовлетворяет условию соленоидальности. Разработан новый алгоритм численного решения начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре. Сравнение результатов тестовых расчетов с аналитическим решением демонстрирует сходимость построенной разностной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Olson P.L., Glatzmaier G.A., Coe R.S. Complex polarity reversals in a geodynamo model // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2011. V. 304. P. 168–179. DOI: 10.1016/j.epsl.2011.01.031.
2. Olson P., Driscoll P., Amit H. Dipole collapse and reversal precursors in a numerical dynamo // *Phys. Earth. Planet. Inter.* 2009. V. 173. P. 121–140. DOI: 10.1016/j.pepi.2008.11.010.
3. Jouve L., Brun A.S., Arlt R., Brandenburg A., Dikpati M., Bonanno A., Käpylä P.J., Moss D., Rempel M., Gilman P., Korpi M.J., Kosovichev A.G. A solar mean field dynamo benchmark // *Astron. Astrophys.* 2008. V. 483. P. 949–960. DOI: 10.1051/0004-6361:20078351.
4. Glatzmaier G.A. Computer simulations of Jupiter's deep internal dynamics help interpret what Juno sees // *Proc. Nat. Acad. Sci.* 2018. V. 115 Iss. 27. P. 6896–6904. DOI: 10.1073/pnas.1709125115.
5. Jones C. A dynamo model of Jupiter's magnetic field // *Icarus*. 2014. V. 241. P. 148–159. DOI: 10.1016/j.icarus.2014.06.020.
6. Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 2000. V. 358. P. 873–897. DOI: 10.1098/rsta.2000.0565.

7. Jackson A.A. et al. A spherical shell numerical dynamo benchmark with pseudo-vacuum magnetic boundary conditions // *Geophysical Journal International*. 2014. V. 196 Iss. 2. P. 712–723. DOI: 10.1093/gji/ggt425.
8. Bandaru V., Boeck T., Krasnov D., Schumacher J. A hybrid finite difference/boundary element procedure for the simulation of turbulent MHD duct flow at finite magnetic Reynolds number // *Journal of Computational Physics*. 2016. V. 304. P. 320–339. DOI: 10.1016/j.jcp.2015.10.007.
9. Glatzmaier G.A. Numerical simulations of stellar convective dynamos I. The model and method // *Journal of Computational Physics*. 1984. V. 55. P. 461–484. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90033-0.
10. Reshetnyak M.Yu. Simulation in Geodynamo. Saarbrücken: Lambert, 2013. 180 p.
11. Kageyama A., Miyagoshi T., Sato T. Formation of current coils in geodynamo simulations // *Nature*. 2008. V. 454. P. 1106–1109. DOI: 10.1038/nature07227.
12. Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. М.: Наука; Физматлит, 1995. 320 с.
13. Hejda P., Reshetnyak M. Control volume method for the dynamo problem in the sphere with the free rotating inner core // *Studia geoph. et geod.* 2003. V. 47. P. 147–159. DOI: 10.1023/A:1022207823737.
14. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
15. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Гореликов А.В. Алгоритм типа предиктор – корректор для численного решения уравнения индукции в задачах магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // *Доклады Академии наук*. 2015. Т. 464. № 5. С. 525–528.
16. Колмычков В.В., Мажорова О.С., Федосеев Е.Э. Численный метод решения уравнений МГД // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2009. № 30. 28 с.
17. Toth G. The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes // *Journal of Computational Physics*. 2000. V. 161. P. 605–652. DOI: 10.1006/jcph.2000.6519.
18. Попов М.В., Елизарова Т.Г. Моделирование трехмерных МГД-течений в рамках магнитной квазигазодинамики // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2013. № 23. 32 с.
19. Powell K.G., Roe P.L., Linde T.J., Gombosi T.I., De Zeeuw D.L. A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics // *Journal of Computational Physics*. 1999. V. 154. p. 284–309. DOI: 10.1006/jcph.1999.6299.
20. Teyssier R., Commerçon B. Numerical Methods for Simulating Star Formation // *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*. 2019. V. 6. Article 51. DOI: 10.3389/fspas.2019.00051.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. пособ. для вузов: в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005. 656 с.
22. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика: учеб. пособие. 3-е изд. М.: Логос, 2011. 324 с.
23. Cowling T.G. Magnetohydrodynamics. Bristol: Adam Hilger, 1976. 136 p.
24. Patankar S. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Washington DC: Hemisphere Publishing, 1980. 197 p.
25. Versteeg H.K., Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics. Harlow: Pearson Education Limited, 2007. 503 p.
26. Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer, 2002. 423 p.
27. Taflove A., Hagness S. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 2nd edition. Boston: Artech House, 2000. 866 p.
28. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики М.: Физматлит, 2012. 432 с.
29. Ates A., Altun O., Kilicman A. On A Comparison of Numerical Solution Methods for General Transport Equation on Cylindrical Coordinates // *Applied Mathematics & Information Sciences*. 2017. V. 11. No. 2. P. 433–439. DOI: 10.18576/amis/110211.
30. Dewangan S.K., Sinha S.L. Comparison of various numerical differencing schemes in predicting non-newtonian transition flow through an eccentric annulus with inner cylinder in

- rotation // International Journal of Mechanical and Industrial Engineering. 2013. V. 3. Iss. 1. P. 119–129.
31. Arshad K., Rafique M., Majid A., Jabeen S. Analyses of MHD Pressure Drop in a Curved Bend for Different Liquid Metals // Journal of Applied Sciences. 2007. V. 7. Iss. 1. P. 72–78. DOI: 10.3923/jas.2007.72.78.
 32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: учебник для ун-тов. 4-е изд., испр. М.: Наука, 1972. 746 с.
 33. Гореликов А.В. Аксиально-симметричное решение задачи о размагничивании проводящего шара // Вестник кибернетики. 2018. № 4(32). С. 9–15.

Статья поступила 07.09.2019 г.

Bychin I.V., Gorelikov A.V., Ryakhovskii A.V. (2020) NUMERICAL SOLUTION OF THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH VACUUM BOUNDARY CONDITIONS FOR THE MAGNETIC FIELD INDUCTION EQUATION IN A BALL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 15–30

DOI 10.17223/19988621/64/2

Keywords: induction equation, vacuum boundary conditions, numerical solution.

The aim of this work is to develop and test an algorithm for numerical solution of the initial-boundary value problem with vacuum boundary conditions for the equation of magnetic field induction in a ball based on a modification of finite-difference methods of computational fluid dynamics and electrodynamics for use in orthogonal curvilinear coordinates.

The problem of the numerical solution of the magnetic field induction equation in the ball G is considered in this paper using the magnetohydrodynamics (MHD) model. It is assumed that outside the ball the magnetic field induction $\mathbf{B} = \text{grad } \psi$, and the potential ψ is a harmonic function regular at infinity. At the boundary ∂G , the vacuum boundary conditions are set. They include the requirement that the magnetic field is continuous and the normal component of the current density is equal to zero.

The discretization of the induction equation is carried out using the control-volume method and the FDTD (Finite Difference Time Domain) method modified for orthogonal curvilinear coordinates. When integrating over time, a completely implicit scheme is used. The total (convective and diffusion) flows are approximated according to the power-law scheme.

The proposed algorithm consists in sequentially executing the following steps at each time layer:

Step 1: The approximation of the radial component of the magnetic field at ∂G is determined from the **discretized continuity equation** for the boundary control volumes.

Step 2: The external Neumann problem for the Laplace equation is solved using the Kelvin transformation. The approximation for the tangential components of the magnetic field at the ∂G is calculated using the found potential ψ .

Step 3: The found components of $\mathbf{B}$ are used as boundary conditions for finding a solution to the induction equation.

The steps 1 to 3 are repeated until convergence is achieved at a given moment in time.

The algorithm was tested on the problem of the magnetic field diffusion in a conducting ball, which has an analytical solution.

In this paper, the discretization of the magnetic field induction equation the solution of which satisfies the solenoidality condition is obtained in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates. A new algorithm for numerical solution of the initial-boundary value problem with vacuum boundary conditions for the equation of magnetic field induction in a ball is developed. The comparison between the numerical solution and the analytical solution demonstrates the convergence of the constructed finite-difference scheme.

Financial support. The work was supported by the FSR Program of the state academies of Sciences for 2013–2020, project № 0065-2019-0021.

AMS Mathematical Subject Classification: 76W05

Igor V. BYCHIN (Surgut State University, Branch of Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences" in the Surgut, Surgut, Russian Federation). E-mail: igor-bychin@yandex.ru

Andrey V. GORELIKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Surgut State University, Branch of Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences" in the Surgut, Surgut, Russian Federation) E-mail: gorelikov_a@list.ru

Alexei V. RYAKHOVSKII (Candidate of Physics and Mathematics, Surgut State University, Surgut, Russian Federation). E-mail: echo47@rambler.ru

REFERENCES

1. Olson P.L., Glatzmaier G.A., Coe R.S.. (2011) Complex polarity reversals in a geodynamo model. *Earth Planet. Sci. Lett.* 304. pp. 168–179. DOI: 10.1016/j.epsl.2011.01.031.
2. Olson P., Driscoll P., Amit H. (2009) Dipole collapse and reversal precursors in a numerical dynamo. *Phys. Earth. Planet. Inter.* 173. pp. 121–140. DOI: 10.1016/j.pepi.2008.11.010.
3. Jouve L., Brun A.S., Arlt R., Brandenburg A., Dikpati M., Bonanno A., Käpylä P.J., Moss D., Rempel M., Gilman P., Korpi M. J., Kosovichev A.G. (2008) A solar mean field dynamo benchmark. *Astron. Astrophys.* 483. pp. 949–960. DOI: 10.1051/0004-6361:20078351.
4. Glatzmaier G.A. (2018) Computer simulations of Jupiter's deep internal dynamics help interpret what Juno sees. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 115 (27). pp. 6896–6904. DOI: 10.1073/pnas.1709125115.
5. Jones C. (2014). A dynamo model of Jupiter's magnetic field. *Icarus.* 241. pp. 148–159. DOI: 10.1016/j.icarus.2014.06.020.
6. Jones C.A. (2000) Convection-driven geodynamo models. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 358. pp. 873–897. DOI: 10.1098/rsta.2000.0565.
7. Jackson A.A. et al. (2014) A spherical shell numerical dynamo benchmark with pseudo-vacuum magnetic boundary conditions. *Geophysical Journal International.* 196 (2). pp. 712–723. DOI: 10.1093/gji/ggt425.
8. Bandaru V., Boeck T., Krasnov D., Schumacher J. (2016) A hybrid finite difference/boundary element procedure for the simulation of turbulent MHD duct flow at finite magnetic Reynolds number. *Journal of Computational Physics.* 304. pp. 320–339. DOI: 10.1016/j.jcp.2015.10.007.
9. Glatzmaier G.A. (1984) Numerical simulations of stellar convective dynamos I. The model and method. *Journal of Computational Physics.* 55. pp. 461–484. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90033-0.
10. Reshetnyak M.Yu. (2013) *Simulation in Geodynamo*. Saarbrücken: Lambert.
11. Kageyama A., Miyagoshi T., Sato T. (2008) Formation of current coils in geodynamo simulations. *Nature.* 454. pp. 1106–1109. DOI: 10.1038/nature07227.
12. Galanin M.P., Popov Yu.P. (1995) *Kvazistacionarnye elektromagnitnye polya v neodnorodnykh sredakh: Matematicheskoe modelirovanie*. [Quasistationary electromagnetic fields in inhomogeneous media: Mathematical simulation]. Moscow: Nauka; Fizmatlit.
13. Hejda P., Reshetnyak M. (2003) Control volume method for the dynamo problem in the sphere with the free rotating inner core. *Studia Geoph. et Geod.* 47. pp. 147–159. DOI: 10.1023/A:1022207823737.
14. Kulikovskij A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. (2001). *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy*. [Mathematical problems of numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moscow: Fizmatlit.
15. Betelin V.B., Galkin V.A., Gorelikov A.V. (2015). *Algoritm tipa prediktor-korrektor dlya chislennogo resheniya uravneniya indukcii v zadachah magnitnoj gidrodinamiki vyazkoj*

- neszhimaemoj zhidkosti [Predictor-corrector type algorithm for the numerical solution of the induction equation in problem of magnetic hydrodynamics of viscous incompressible fluid]. *Doklady Akademii nauk*. 464(5). pp. 525–528. DOI: 10.7868/S0869565215290034.
16. Kolmychkov V.V., Mazhorova O.S., Fedoseev E.E. (2009) Chislennyy metod resheniya uravneniy MGD [Numerical Method for MHD Equations]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*. 30. 28 pages.
 17. Toth G. (2000) The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes. *Journal of Computational Physics*. 161. pp. 605–652. DOI: 10.1006/jcph.2000.6519.
 18. Popov M.V., Elizarova T.G. (2013) Modelirovanie trekhmernykh MGD-techeniy v ramkakh magnitnoy kvazigazodinamiki [Simulation of 3D MHD flows within the framework of magneto-quasi-gasdynamics]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*. 23. 32 pages.
 19. Powell K.G., Roe P.L., Linde T.J., Gombosi T.I., De Zeeuw D.L. (1999) A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 154. pp. 284–309. DOI: 10.1006/jcph.1999.6299.
 20. Teyssier R., Commercon B. (2019) Numerical methods for simulating star formation. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*. 6(51). DOI: 10.3389/fspas.2019.00051.
 21. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1984) *Electrodynamics of Continuous Media (Volume 8 of A Course of Theoretical Physics)*. Oxford: Pergamon Press.
 22. Kulikovskiy A.G., Lyubimov G.A. (2011) *Magnitnaya gidrodinamika* [Magnetohydrodynamics]. Moscow: Logos.
 23. Cowling T.G. (1976) *Magnetohydrodynamics*. Bristol: Adam Hilger.
 24. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington DC: Hemisphere Publishing.
 25. Versteeg H.K., Malalasekera W. (2007) *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Harlow: Pearson Education Limited.
 26. Ferziger J.H., Peric M. (2002) *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer.
 27. Taflove A., Hagness S. (2000) *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. 2nd edition*. Boston: Artech House.
 28. Grigorev A.D. (2012) *Metody vychislitel'noy elektrodinamiki* [Methods of computational electrodynamics]. Moscow: Fizmatlit.
 29. Ates A., Altun O., Kilicman A. (2017) On a comparison of numerical solution methods for general transport equation on cylindrical coordinates. *Applied Mathematics & Information Sciences*. 11 (2). pp. 433–439. DOI: 10.18576/amis/110211.
 30. Dewangan S.K., Sinha S.L. (2013) Comparison of various numerical differencing schemes in predicting non-Newtonian transition flow through an eccentric annulus with inner cylinder in rotation. *International Journal of Mechanical and Industrial Engineering*. 3 (1). pp. 119–129.
 31. Arshad K., Rafique M., Majid A., Jabeen S. (2007) Analyses of MHD pressure drop in a curved bend for different liquid metals. *Journal of Applied Sciences*. 7 (1). pp. 72–78. DOI: 10.3923/jas.2007.72.78.
 32. Tihonov A.N., Samarskij A.A. (1972) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
 33. Gorelikov A.V. (2018) Aksialno-simmetrichnoe reshenie zadachi o razmagnichivaniy provodyashchego shara [An axisymmetric solution of the problem about demagnetization of a conducting ball]. *Vestnik kibernetiki*. 4(32). pp. 9–15.

Received: September 7, 2019

УДК 517.9
DOI 10.17223/19988621/64/3

MSC 35D35, 35Q35, 35B65

Н.А. Кучер, А.А. Жалнина, О.В. Малышенко

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Математические модели многоскоростных континуумов, посредством которых описываются движения многокомпонентных смесей, представляют собой обширную область современной механики и математики. Математические результаты (постановка задач, теоремы о существовании и единственности, свойства решений и др.) для таких моделей достаточно скромны по сравнению с результатами для классических однокомпонентных среда. Настоящая работа имеет своей целью в какой-то мере восполнить этот пробел и посвящена исследованию глобальной корректности краевой задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений, являющейся некоторой регуляризацией уравнений движения смеси вязких сжимаемых жидкостей. Построение решения рассматриваемой в этой статье задачи является ключевым этапом для математического анализа исходной модели смеси, поскольку позволяет посредством предельного перехода получить глобально определенные решения последней. Алгоритм построения решения регуляризованной задачи носит конструктивный характер, основанный на процедуре конечномерной аппроксимации бесконечномерной задачи и поэтому на этой основе может быть построен математически обоснованный алгоритм численного решения краевой задачи о движении смеси вязких сжимаемых жидкостей в области, ограниченной твердыми стенками.

Ключевые слова: смесь вязких сжимаемых жидкостей, краевая задача, сильное решение.

Пространственное движение бинарной смеси вязких сжимаемых жидкостей описывается системой уравнений [1]

$$\partial_t(\rho_i \vec{u}^{(i)}) + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \nabla p_i = \operatorname{div} \sigma^{(i)} + \vec{J}^{(i)}; \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho_i) + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\rho_i, p_i, \vec{u}^{(i)}, i = 1, 2$, соответственно плотность, давление, скорость компонент смеси – искомые функции времени t и точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ евклидова пространства $\mathbf{R}^3$. Тензоры вязких напряжений $\sigma^{(i)}, i = 1, 2$, задаются равенствами

$$\sigma^{(i)}(\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}) = \sum_{j=1}^2 \left[2\mu_{ij} \mathbf{D}(\vec{u}^{(j)}) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} \cdot \mathbf{I} \right],$$

$$\mathbf{D}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T), \quad \mathbf{I} - \text{единичный тензор}, \quad (3)$$

в которых (постоянные) коэффициенты вязкости $\mu_{ij}, \lambda_{ij}, i, j = 1, 2$, таковы, что матрицы

$$\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^2 \quad \text{и} \quad \{\lambda_{ij} + 2\mu_{ij}\}_{i,j=1}^2 \quad \text{положительно определены.} \quad (4)$$

Предполагается, что давление p_i и плотность ρ_i в i -й компоненте связаны соотношением $p_i = \rho_i^{\gamma_i}$, где $\gamma_i > 1$ – показатель адиабаты. Слагаемые $\bar{J}^{(i)}$, характеризующие интенсивность обмена импульсом между компонентами смеси, определены по формуле [2, 3]

$$\bar{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} \cdot a(\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}), \quad a = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Рассмотрим задачу о движении смеси в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, граница $\partial\Omega$ которой является неподвижной непроницаемой стенкой. Тогда краевые условия на границе $\partial\Omega$ выражаются соотношениями

$$\bar{u}^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

В начальный момент $t = 0$ распределение плотностей и импульсов предполагается известным:

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_i^0, \quad \rho_i \bar{u}^{(i)}|_{t=0} = \bar{q}^{(i)}|_{t=0} = \bar{q}_0^{(i)} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Глобальные теоремы существования и результаты о стабилизации решений для нестационарных уравнений многоскоростных континуумов вида (1) – (5) в настоящее время получены только в случае одномерного движения с плоскими волнами, когда решение зависит лишь от одной пространственной переменной [3–5]. Первые результаты для модели смеси в приближении Стокса в случае более одной пространственной переменной получены авторами [6, 7]. В [8] проведено исследование так называемой квазистационарной модели смеси сжимаемых жидкостей в ограниченной области со специальными граничными условиями. В работе [9, 10] приведено стационарное решение первой краевой задачи для полных уравнений (1) – (5) в случае трех пространственных переменных, а в [11] – доказательство существования слабых стационарных решений системы уравнений смесей вязких жидкостей с учетом теплопроводности.

Вспомогательные предложения

В этом разделе приводятся сведения из анализа и теории дифференциальных уравнений, которые используются в данной статье.

Пространства непрерывных функций и пространства Соболева. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – открытое ограниченное множество. Символ $D(\Omega)$ обозначает пространство основных функций, а $D'(\Omega)$ – пространство распределений (обобщенных функций) на Ω . Через $C^{m,\beta}(\bar{\Omega})$, $m \geq 0$ – целое, $\beta \in (0; 1]$ обозначим линейное пространство функций, определенных на замыкании $\bar{\Omega}$ и обладающих всеми частными производными до порядка m включительно, непрерывными в $\bar{\Omega}$ по Гельдеру с показателем β . Функция $u \rightarrow \|u\|_{C^{m,\beta}(\bar{\Omega})}$, $m = 0, 1, \dots; \beta \in (0; 1]$,

$$\|u\|_{C^{m,\beta}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\beta}, \quad \text{где } D^\alpha \text{ обозначает}$$

любую производную $u(x)$ по x вида $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ является нор-

мой в линейном пространстве $C^{m,\beta}(\bar{\Omega})$, называемым пространством Гельдера; $L^p(\Omega)$ – банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Ω функций, суммируемых по Ω со степенью $1 \leq p < \infty$. Норма в нем определяется равенством

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$. Измеримость и суммируемость понимается всюду

в смысле Лебега. $W^{l,p}(\Omega)$ ($l \geq 0$ – целое, $p \geq 1$) – банахово пространство, состоящее из всех элементов $L^p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные всех видов до порядка l включительно, суммируемых со степенью p . Норма в $W^{l,p}(\Omega)$

определяется равенством $\|u\|_{W^{l,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$, если $1 \leq p < \infty$ и

$\|u\|_{W^{l,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq l} \left\{ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| \right\}$ для $p = \infty$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$ – замкнутое подпространство пространства $W^{1,p}(\Omega)$, плотным множеством в котором является совокупность $C_0^\infty(\Omega)$ всех бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций.

Для функций, зависящих от $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ и $t \in (0, T) = I$, используются анизотропные функциональные пространства. В общем случае, если X – банахово пространство с нормой $u \rightarrow \|u\|_X$, то через $L^p(I, X)$, $p \geq 1$, обозначается пространство (классов) функций $t \rightarrow u(t) : I = (0, T) \rightarrow X$, измеримых, принимающих

значения из X и таких, что $\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} = \|u\|_{L^p(I, X)} < \infty$. Если $p = \infty$, то эта

норма заменяется нормой $\operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X = \|u(t)\|_{L^\infty(I, X)}$. Нормированное пространство $L^p(I, X)$ является полным.

В статье используются, в частности, пространства $L^p(I, W^{l,q}(\Omega))$, $1 < p \leq \infty$,

$l \geq 0$, с нормой $\|u\|_{L^p(I, W^{l,q}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{W^{l,q}(\Omega)}^p dt \right)^{1/p}$, $C^0(\bar{I}, X)$ – банахово пространство функций $t \rightarrow u(t) : \bar{I} = [0, T] \rightarrow X$, непрерывных, принимающих значения из X и таких, что $\|u\|_{C^0(\bar{I}, X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty$.

Через $E_0^{r,l}(\Omega)$ обозначим замыкание множества $D(\Omega)$ по норме $\bar{g} \rightarrow \|\bar{g}\|_{E^{r,l}} = \|\bar{g}\|_{L^l(\Omega)} + \|\operatorname{div} \bar{g}\|_{L^l(\Omega)}$; $\gamma_n : \bar{\varphi} \rightarrow \gamma_0(\bar{\varphi}) \cdot \bar{n}$ (где γ_0 – оператор следа, а $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω) есть линейный ограниченный плотно определенный в $D(\mathbf{R}^n)$ оператор из $E^{p,p}(\Omega)$ в

$\left[W^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}(\partial\Omega) \right]^*$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Значение $\gamma_n(\vec{\varphi})$ обычно обозначается через $(\vec{\varphi} \cdot \vec{n})|_{\partial\Omega}$.

Пространства со слабой топологией определяются так: $C^0(I, X_{\text{weak}}) = \{ u : I \rightarrow X; \langle v, u \rangle_{X^*, X} \in C^0(I), \forall v \in X^* \}$, X^* – сопряженное пространство к X ; $\langle v, u \rangle_{X^*, X} = v(u)$. Топология в этом пространстве индуцирована слабой топологией в X .

Области. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область, $m \geq 0$ – целое число и $\beta \in (0; 1]$. Мы говорим, что граница $\partial\Omega$ этой области (или соответственно Ω) принадлежит классу $C^{m, \beta}$, обозначая, что $\partial\Omega \in C^{m, \beta}$, если имеет место следующее свойство: для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует окрестность U_{x_0} этой точки в $\mathbf{R}^n$, декартова система координат $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \equiv (\bar{y}, y_n)$ с центром в x_0 и функция $\eta \in C^{m, \beta}(B_{n-1})$, $B_{n-1} = \{ |\bar{y}| < 1 \}$ такие, что в новых координатах $U_{x_0} \cap \partial\Omega = \{ y : y_n = \eta(\bar{y}), \bar{y} \in B_{n-1} \}$. Другими словами, граница $\partial\Omega$ есть график функции класса $C^{m, \beta}$ в окрестности каждой ее точки.

Постановка задачи и основные результаты

С целью построения обобщенного решения задачи (1) – (7) рассмотрим ее регуляризацию:

$$\partial_t(\rho_i \vec{u}^{(i)}) + \text{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \nabla(\rho_i^{\gamma_i}) + \delta \nabla(\rho_i^{\beta_i}) + \varepsilon \nabla \vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i = \text{div} \sigma^{(i)} + \vec{J}^{(i)},$$

$$\text{в } Q_T = (0, T) \times \Omega; \quad (8)$$

$$\partial_t(\rho_i) + \text{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = \varepsilon \Delta \rho_i, \text{ в } Q_T; \quad (9)$$

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_i^0, \quad \rho_i \vec{u}^{(i)}|_{t=0} = \vec{q}_0^{(i)}, \text{ в } \Omega; \quad (10)$$

$$\vec{u}^{(i)} = 0, \text{ на } (0, T) \times \partial\Omega; \quad (11)$$

$$\nabla \rho_i \cdot \vec{n} = 0, \text{ на } (0, T) \times \partial\Omega, i = 1, 2, \quad (12)$$

где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ – малые параметры, а величины $\beta_i, i = 1, 2$ выбираются достаточно большими. Уравнения (9) дополнены однородными граничными условиями Неймана (12).

Цель настоящей работы – построение решения регуляризованной задачи методом конечномерной аппроксимации.

Основные результаты о корректности регуляризованной задачи доставляет следующая теорема.

Теорема 1. Пусть коэффициенты μ_{ij} и λ_{ij} удовлетворяют условиям (4) и показатели адиабаты $\gamma_i > \frac{3}{2}, i = 1, 2$. Пусть параметры $\varepsilon, \delta, \beta_i$ выбраны так, что $\varepsilon > 0, \delta > 0, \beta_i \geq 15, i = 1, 2$. Пусть Ω – ограниченная область класса $C^{2, \theta}$,

$\theta \in (0, 1]$ и $0 < \underline{\rho} \leq \rho_i^0 \leq \bar{\rho} < \infty, \rho_i^0 \in W^{1,\infty}(\Omega), \bar{q}_0^{(i)} \in L^2(\Omega)$. Тогда существует сильное обобщенное решение задачи (8) – (12), $\rho_{i,\varepsilon}, \bar{u}_\varepsilon^{(i)}, \rho_{i,\varepsilon} = \rho_{i,\varepsilon,\delta}, \bar{u}_\varepsilon^{(i)} = \bar{u}_{\varepsilon,\delta}^{(i)}, i = 1, 2$, обладающее свойствами:

$$(i) \rho_{i,\varepsilon} \in C^0(\bar{I}, L_{weak}^{\beta_i}(\Omega)), \rho_{i,\varepsilon} \in C^0(\bar{I}, L^p(\Omega)) \cap L^{\beta_i+1}(Q_T), 1 \leq p < \beta_i.$$

$$\rho_{i,\varepsilon} \geq 0 \text{ п.в. в } Q_T, \rho_{i,\varepsilon}^{\frac{1}{2\beta_i}} \in L^2(I, W^{1,2}(\Omega)),$$

$$\partial_t \rho_{i,\varepsilon} \in L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(Q_T), D^\alpha \rho_{i,\varepsilon} \in \left(L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(Q_T) \right)^{3 \times 3}, |\alpha| = 2,$$

$$\bar{u}_\varepsilon^{(i)} \in L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)), \bar{q}_\varepsilon^{(i)} = \rho_{i,\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \in C^0\left(\bar{I}, L_{weak}^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)\right),$$

$$\bar{q}_\varepsilon^{(i)} \in L^2\left(I, L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega)\right), \rho_{i,\varepsilon} |\bar{u}_\varepsilon^{(i)}|^2 \in L^\infty(I, L^1(\Omega)) \cap L^2\left(I, L^{\frac{6\beta_i}{4\beta_i+3}}(\Omega)\right),$$

$$\nabla \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla \rho_{i,\varepsilon} \in L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(Q_T), \nabla \rho_{i,\varepsilon}, \rho_{i,\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \in L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}\left(I, E_0^{\frac{10\beta_i-6}{3\beta_i+3}, \frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(\Omega)\right),$$

$$\int_\Omega \rho_{i,\varepsilon} dx = \int_\Omega \rho_i^0 dx.$$

(ii) Уравнения (8) выполнены в пространстве распределений $D'(Q_T)$:

$$\begin{aligned} & \partial_t(\rho_{i,\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{(i)}) + \operatorname{div}(\rho_{i,\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \bar{u}_\varepsilon^{(i)}) + \nabla(\rho_{i,\varepsilon}^{\gamma_i} + \delta \rho_{i,\varepsilon}^{\beta_i}) = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \bar{u}_\varepsilon^{(j)} + \\ & + \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \nabla \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(j)} - \varepsilon (\nabla \rho_{i,\varepsilon} \cdot \nabla) \bar{u}_\varepsilon^{(i)} + (-1)^{i+1} a(\bar{u}_\varepsilon^{(2)} - \bar{u}_\varepsilon^{(1)}), i = 1, 2. \end{aligned}$$

(iii) Уравнения

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_{i,\varepsilon} \eta_i dx - \int_\Omega \rho_{i,\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \nabla \eta_i dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla \rho_{i,\varepsilon} \cdot \nabla \eta_i dx dt = 0, \eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3), i = 1, 2,$$

выполнены в $D'(I)$.

(iv) Выполнены следующие соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}(t) \eta_i dx = \int_\Omega \rho_i^0 \eta_i dx, \eta_i \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_\Omega \rho_{i,\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{(i)}(t) \bar{\varphi}^{(i)} dx = \int_\Omega \bar{q}_0^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx, \bar{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega).$$

(v) Если $\delta \in (0, 1)$, то имеют место следующие оценки, равномерные относительно параметра ε :

$$\sum_{i=1}^2 \|\tilde{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{L^2(I, W^{1,2}(\Omega))} \leq L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad \|\rho_{i,\varepsilon}\|_{L^\infty(I, L^{\gamma_i}(\Omega))} \leq L(\gamma_i, \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),$$

$$\delta^{1/\beta_i} \|\rho_{i,\varepsilon}\|_{L^\infty(I, L^{\beta_i}(\Omega))} \leq L(\beta_i, \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad i=1, 2; \quad (13)$$

$$\sqrt{\varepsilon} \|\nabla \rho_{i,\varepsilon}\|_{L^2(Q_T)} \leq L(\delta, \beta_i, \rho_i^0, \bar{q}_0^{(i)}), \quad i=1, 2, \quad \|\rho_{i,\varepsilon} |\tilde{u}_\varepsilon^{(i)}|^2\|_{L^\infty(I, L^1(\Omega))} \leq L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad i=1, 2; \quad (14)$$

$$\|\rho_{i,\varepsilon} |\tilde{u}_\varepsilon^{(i)}|^2\|_{L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{4\beta_i+3}}(\Omega))} \leq L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad i=1, 2, \quad \|\rho_{i,\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{L^\infty(I, L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega))} \leq L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad i=1, 2; \quad (15)$$

$$\|\rho_{i,\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega))} \leq L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad i=1, 2, \quad \|\rho_{i,\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{L^{\frac{10\beta_i-6}{3\beta_i+3}}(Q_T)} \leq L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad i=1, 2; \quad (16)$$

$$\varepsilon \|\nabla \rho_{i,\varepsilon}\|_{L^{\frac{10\beta_i-6}{3\beta_i+3}}(Q_T)} \leq L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad i=1, 2, \quad \varepsilon \|\nabla \rho_{i,\varepsilon} \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(Q_T)} \leq L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad i=1, 2. \quad (17)$$

Здесь величина $\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0} = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0^k |\tilde{u}_0^{(k)}|^2 + \frac{(\rho_0^k)^{\gamma_k}}{\gamma_k - 1} + \frac{\delta (\rho_0^k)^{\beta_k}}{\beta_k - 1} \right\} dx$ определяется на-

чальными данными; L – положительная постоянная, независящая от ε . Более того, если параметр δ не указан в аргументе L , то L не зависит также от δ .

Объем статьи не позволяет изложить доказательство теоремы 1 в деталях. Поэтому мы ограничиваемся описанием общей схемы доказательства и более подробно приводим его ключевые моменты.

Аппроксимация Фаздо – Галеркина вспомогательной задачи (8) – (12)

В этом разделе мы построим схему аппроксимации регуляризованной задачи (8) – (12) посредством конечномерных задач. Изучим локальную, а затем глобальную по времени разрешимость этих задач. Далее, используя априорные оценки решений уравнений Галеркина, докажем возможность предельного перехода, в результате чего получим сильное обобщенное решение задачи (8) – (12).

Предварительные предложения

Выберем систему достаточно гладких функций $\{\tilde{\psi}_i\}_{i=1}^\infty$, образующую ортонормированный базис в $(L^2(\Omega))^3$, а также ортонормированный базис в $(W_0^{1,2}(\Omega))^3$ (с подходящим образом выбранным скалярным произведением).

Рассмотрим последовательность конечномерных евклидовых пространств X_n со скалярным произведением $(\cdot) = (\cdot)_{X_n}$, определенных как $X_n = \text{span}\{\tilde{\psi}_i\}_{i=1}^n$,

$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} dx$, $\vec{u}, \vec{v} \in X_n$, и заметим, что все нормы на X_n и, в частности,

$W^{k,p}(\Omega)$ -нормы, $k=0, 1, \dots$, $1 \leq p \leq \infty$ эквивалентны.

Обозначим через P_n ортогональный проектор из $(L^2(\Omega))^3$ в X_n [12]. Пусть дана функция $g \in C^0(I, L^1(\Omega))$, $\partial_t g \in L^1(Q_T)$, $\operatorname{ess\,inf}_{(t,x) \in Q_T} g(t,x) \geq a > 0$. Так как отображение $\vec{w} \rightarrow l(\vec{w}) = \int_{\Omega} g(t) \vec{v} \cdot \vec{w} dx$ является ограниченным линейным функционалом на X_n и $|l(\vec{w})| \leq \|\vec{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\vec{w}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} g(t) dx$, то по теореме Рисса его можно представить в виде скалярного произведения $(\mathcal{M}_g \vec{v}, \vec{w})$, $\mathcal{M}_{g(t)} \in \mathcal{L}(X_n, X_n)$. Тем самым для всех $t \in \bar{I}$ определено линейное отображение $\mathcal{M}_{g(t)} : X_n \rightarrow X_n$, $(\mathcal{M}_g \vec{v}, \vec{w}) = \int_{\Omega} g(t) \vec{v} \cdot \vec{w} dx$, $\vec{v}, \vec{w} \in X_n$, обладающее свойствами

$$\|\mathcal{M}_{g(t)}\|_{\mathcal{L}(X_n, X_n)} \leq c(n) \int_{\Omega} g(t) dx, \quad t \in \bar{I}.$$

Обратный оператор существует для всех $t \in \bar{I}$, и при этом справедлива оценка

$$\|\mathcal{M}_{g(t)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_n, X_n)} \leq \frac{1}{a}.$$

Лемма 2. Пусть $g \in W^{1,1}(Q_T)$, $\operatorname{ess\,inf}_{(t,x) \in Q_T} g(t,x) \geq a > 0$. Тогда справедливы соотношения

$$\partial_t (\mathcal{M}_g^{-1} \vec{v}, \vec{w}) = -(\mathcal{M}_g^{-1} \mathcal{M}_{\partial_t g} \mathcal{M}_g^{-1} \vec{v}, \vec{w}), \quad \text{в } D'(I), \quad \vec{v}, \vec{w} \in X_n,$$

$$\partial_t (\mathcal{M}_g^{-1} \vec{v}, \vec{w}) = -(\mathcal{M}_g^{-1} \mathcal{M}_{\partial_t g} \mathcal{M}_g^{-1} \vec{v}, \vec{w}) + (\mathcal{M}_g^{-1} \partial_t \vec{v}, \vec{w}), \quad \text{в } D'(I), \quad \vec{v} \in C^1(I, X_n), \quad \vec{w} \in X_n.$$

Уравнение неразрывности с диссипацией

Рассмотрим уравнение

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = \varepsilon \Delta \rho \quad \text{в } Q_T, \quad (18)$$

дополненное начальным условием

$$\rho(0) = \rho_0 \quad \text{в } \Omega \quad (19)$$

и граничным условием

$$\partial_n \rho = 0 \quad \text{на } I \times \partial\Omega. \quad (20)$$

Здесь $\rho(t,x)$, $t \in I$, $x \in \Omega$ – искомая функция, Ω – ограниченная область, $\varepsilon > 0$ – заданная постоянная, ρ_0 – заданная функция и $\vec{u}(t,x)$ – заданное векторное поле, обращающееся в нуль на границе области Ω .

Лемма 3. Пусть $0 < \theta \leq 1$, Ω – ограниченная область класса $C^{2,\theta}$, $0 < \underline{\rho} \leq \bar{\rho} < \infty$ и $\rho_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\underline{\rho} \leq \rho_0 \leq \bar{\rho}$. Тогда существует однозначное отображение $S_{\rho_0} : L^\infty(I, (W_0^{1,\infty}(\Omega))^3) \rightarrow C^0(\bar{I}, W^{1,2}(\Omega))$, такое, что:

- $S_{\rho_0}(\vec{u}) \in R_T = \{\rho : \rho \in L^2(I, W^{2,p}(\Omega)) \cap C^0(\bar{I}, W^{1,p}(\Omega)),$
 $\partial_t \rho \in L^2(I, L^p(\Omega)) \quad 1 < p < \infty\};$

• Функция $\rho = S_{\rho_0}(\bar{u})$ удовлетворяет уравнению (18) п. в. в Q_T , начальному условию (19) п. в. в Ω и граничному условию (20) в смысле следов п. в. в I ;

• Имеет место оценка

$$\underline{\rho} \cdot \exp\left(-\int_0^t \|\bar{u}(\tau)\|_{1,\infty} d\tau\right) \leq [S_{\rho_0}(\bar{u})](t, x) \leq \bar{\rho} \cdot \exp\left(\int_0^t \|\bar{u}(\tau)\|_{1,\infty} d\tau\right), t \in \bar{T}, x \in \Omega;$$

• Если $\|\bar{u}\|_{L^\infty(I, W^{1,\infty}(\Omega))} \leq K$, где $K > 0$, то

$$\|S_{\rho_0}(\bar{u})\|_{L^\infty(I, W^{1,2}(\Omega))} \leq c \|\rho_0\|_{1,2} \cdot \exp\left(\frac{c}{2\varepsilon}(K + K^2)t\right), I_t = (0, t), t \in \bar{T}; \quad (21)$$

$$\|\nabla^2 S_{\rho_0}(\bar{u})\|_{L^2(Q_t)} \leq \frac{c}{\varepsilon} \sqrt{t} \|\rho_0\|_{1,2} \cdot K \cdot \exp\left(\frac{c}{2\varepsilon}(K + K^2)t\right), t \in \bar{T}; \quad (22)$$

$$\|\partial_t S_{\rho_0}(\bar{u})\|_{L^2(Q_t)} \leq c \sqrt{t} \|\rho_0\|_{1,2} \cdot K \cdot \exp\left(\frac{c}{2\varepsilon}(K + K^2)t\right), t \in \bar{T}. \quad (23)$$

$$\|[S_{\rho_0}(\bar{u}_1) - S_{\rho_0}(\bar{u}_2)](t)\|_{L^2(\Omega)} \leq c(K, \varepsilon, T) \|\rho_0\|_{1,2} \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{L^\infty(I, W^{1,\infty}(\Omega))}, t \in \bar{T} \quad (24)$$

Постоянная c в неравенствах (21) – (23) зависит только от Ω (в частности, она не зависит от $\varepsilon, K, T, \rho_0, \bar{u}$). Детали доказательства леммы имеются в [12].

Приближения Галеркина

Для произвольного выбранного $T' \in (0, T]$ ищем вектор-функции

$$\bar{u}^{(i)} \in C^0(\bar{T}, X_n), I' = (0, T'), i = 1, 2,$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_i(t) \bar{u}^{(i)} \cdot \bar{\phi} dx - \int_{\Omega} \bar{q}_0^{(i)} \cdot \bar{\phi} dx = \int_0^t \int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \bar{u}^{(j)} + \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \nabla \operatorname{div} \bar{u}^{(j)} - \right. \\ \left. - \nabla \rho_i^{\gamma} - \delta \nabla \rho_i^{\beta} - \operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)}) - \varepsilon (\nabla \rho_i \cdot \nabla) \bar{u}^{(i)} + (-1)^{i+1} \cdot a(\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}) \right] \bar{\phi} dx d\tau, \\ i = 1, 2, t \in I', \bar{\phi} \in X_n, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\rho_i(t) = [S_{\rho_0}(\bar{u}^{(i)})](t)$ – решение задачи (18) – (20), построенное в лемме 3.

Уравнения (25) представим в виде

$$(\mathcal{M}_{\rho_i(t)} \bar{u}^{(i)}, \bar{\phi})_{X_n} - (P \bar{q}_0^{(i)}, \bar{\phi})_{X_n} = \int_0^t (P[\mathcal{N}_i(S_{\rho_0}(\bar{u}^{(i)}), \bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}), \bar{\phi})_{X_n} d\tau,$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mathcal{N}_i(\rho_i, \bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}) = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \bar{u}^{(j)} + \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \nabla \operatorname{div} \bar{u}^{(j)} - \nabla \rho_i^{\gamma} - \delta \nabla \rho_i^{\beta} - \\ - \operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)}) - \varepsilon (\nabla \rho_i \cdot \nabla) \bar{u}^{(i)} + (-1)^{i+1} \cdot a(\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}), i = 1, 2, \end{aligned}$$

и, следовательно, можем записать их в операторной форме

$$\bar{u}^{(i)}(t) = \mathcal{M}_{[S_{\rho_0}(\bar{u}^{(i)})](t)}^{-1} \left\{ P \bar{q}_0^{(i)} + \int_0^t P[\mathcal{N}_i(S_{\rho_0}(\bar{u}^{(i)}), \bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)})] d\tau \right\}, i = 1, 2. \quad (26)$$

Существование локального решения уравнений (26)

Лемма 4. *Найдется такое $T' > 0$, что на промежутке $0 < t < T'$ существует единственное решение $\bar{u}^{(i)} \in C((0, T'), X_n)$, $i = 1, 2$, системы уравнений (26).*

Доказательство леммы 4 основано на использовании принципа сжимающих отображений.

Существование глобального по времени решения уравнений (26)

Теорема 5. *На любом конечном промежутке $0 < t < T$ система уравнений (26) имеет единственное решение в классе $C^0((0, T), X_n)$.*

Доказательство. Отметим, что возможность продолжения локального решения, построенного в лемме 4, на произвольный конечный интервал $(0, T)$ следует из ограниченности в пространстве $C^0((0, T), L^2(\Omega))$ семейства решений уравнений (26). Действительно, располагая оценкой

$$\|\bar{u}^{(i)}\|_{C^0(I, L^2(\Omega))} \leq C = \text{const}, \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

мы получим

$$\|\bar{u}^{(i)} - \bar{v}_*^{(i)}\|_{C^0(I, X_n)} \leq C + \frac{1}{\rho} \|\bar{q}_0^{(i)}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \bar{v}_*^{(i)} = \mathcal{M}_{\rho_i}^{-1} P_n \bar{q}_0^{(i)},$$

и, следовательно,

$$\left(\sum_{i=1}^2 \|\bar{u}^{(i)} - \bar{v}_*^{(i)}\|_{C^0(I, X_n)}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^2 \left(C + \frac{1}{\rho} \|\bar{q}_0^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \right)^{1/2} = \tilde{K}_1.$$

Таким образом, решение системы уравнений (26) априори принадлежит шару $\mathcal{B}_{\tilde{K}_1, T}(\bar{v}_*)$, $\bar{v}_* = (\bar{v}_*^{(1)}, \bar{v}_*^{(2)})$, и поэтому, выбирая в качестве радиуса K_1 шара $\mathcal{B}_{K_1, \tau_0}$ число $K_1 \geq \tilde{K}_1$, мы за конечное число шагов продолжим локальное решение уравнений (26) на произвольный конечный промежуток времени $[0, T]$.

Докажем теперь (27). Пусть $\bar{u}^{(i)} = \bar{u}_n^{(i)}(t, x) = \sum_{j=1}^n c_j^{(i)}(t) \bar{\psi}_j(x) \in C^0(I, X_n)$ – решение уравнений (26), которые в данном случае удобнее представить в форме (25). Для каждой базисной функции $\bar{\psi}_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, из (25) (после дифференцирования по t) получаем тождества

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \bar{\psi}_k(x) dx &= \int_{\Omega} \left[\text{div} \sigma^{(i)} - \nabla(\rho_i^{\gamma_i}) - \delta \nabla(\rho_i^{\beta_i}) - \text{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)}) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon(\nabla \rho_i \cdot \nabla) \bar{u}^{(i)} + (-1)^{i+1} a \cdot (\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}) \right] \cdot \bar{\psi}_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

$$\text{div} \sigma^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \{ \mu_{ij} \Delta \bar{u}^{(j)} + (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \nabla \text{div} \bar{u}^{(j)} \}.$$

Умножая эти уравнения соответственно на $C_k^{(i)}(t)$ и суммируя по k , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_i |\bar{u}^{(i)}|^2 dx - \int_{\Omega} \rho_i \bar{u}^{(i)} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \left[\operatorname{div} \sigma^{(i)} - \nabla(\rho_i^{\gamma_i}) - \delta \nabla(\rho_i^{\beta_i}) - \right. \\ \left. - \operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)}) - \varepsilon (\nabla \rho_i \cdot \nabla) \bar{u}^{(i)} + (-1)^{i+1} a \cdot (\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}) \right] \cdot \bar{u}^{(i)} dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как $\rho_i(t) = S_{\rho_i^0}(\bar{u}^{(i)})$, $i = 1, 2$, то имеют место следующие тождества:

$$\int_{\Omega} (\nabla(\rho_i^{\gamma_i}), \bar{u}^{(i)}) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho_i^{\gamma_i}}{\gamma_i - 1} dx + \varepsilon \gamma_i \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma_i - 2} |\nabla \rho_i|^2 dx, \quad i = 1, 2; \quad (29)$$

$$\delta \int_{\Omega} (\nabla(\rho_i^{\beta_i}), \bar{u}^{(i)}) dx = \delta \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho_i^{\beta_i}}{\beta_i - 1} dx + \delta \varepsilon \beta_i \int_{\Omega} \rho_i^{\beta_i - 2} |\nabla \rho_i|^2 dx; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\rho_i \bar{u}^{(i)}, \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial t} \right) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_i |\bar{u}^{(i)}|^2 dx + \\ + \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)}), \bar{u}^{(i)}) dx + \varepsilon \int_{\Omega} ((\nabla \rho_i \cdot \nabla) \bar{u}^{(i)}, \bar{u}^{(i)}) dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Из соотношений (28) – (31) и неравенства

$$-\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma^{(i)}, \bar{u}^{(i)}) dx \geq c_0 \int_{\Omega} (|\nabla \bar{u}^{(1)}|^2 + |\nabla \bar{u}^{(2)}|^2) dx$$

получаем следующее энергетическое неравенство на решениях уравнений Галеркина (26):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} \rho_i |\bar{u}^{(i)}|^2 + \frac{\rho_i^{\gamma_i}}{\gamma_i - 1} + \frac{\delta}{\beta_i - 1} \rho_i^{\beta_i} \right] dx + c_0 \int_{\Omega} (|\nabla \bar{u}^{(1)}|^2 + |\nabla \bar{u}^{(2)}|^2) dx + \\ + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \left(\gamma_i \rho_i^{\gamma_i - 2} + \delta \beta_i \rho_i^{\beta_i - 2} \right) |\nabla \rho_i|^2 dx + a \int_{\Omega} |\bar{u}^{(1)} - \bar{u}^{(2)}|^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Из неравенств (32), в частности, следуют оценки

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_{k,n} |\bar{u}_n^{(k)}|^2 dx \leq \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}, \quad k = 1, 2, \\ \int_0^t \left(\|\bar{u}^{(1)}(\tau)\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \|\bar{u}^{(2)}(\tau)\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \right) dx \leq \frac{1}{c_0(\Omega)} \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}, \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (33)$$

В силу оценки (21) леммы 3 имеем

$$\rho_{i,n}(t) = S_{\rho_i^0}(\bar{u}_n^{(i)})(t, x) \geq \underline{\rho} \exp \left\{ - \int_0^t \|\bar{u}_n^{(i)}(\tau)\|_{L_{\infty}} d\tau \right\} \geq \underline{\rho} \exp \left\{ - \int_0^t c(n) \|\bar{u}_n^{(i)}(\tau)\|_{W^{1,2}(\Omega)} d\tau \right\}.$$

Из этого соотношения и неравенства

$$\int_0^t \|\bar{u}_n^{(i)}(\tau)\|_{W^{1,2}(\Omega)} d\tau \leq \sqrt{T} \left(\frac{1}{c_0} \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0} \right)^{1/2}$$

вытекает, что

$$\rho_{i,n}(t) \geq \underline{\rho} \exp \left\{ -c(n) \sqrt{T \frac{1}{c_0} \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}} \right\},$$

и поэтому из первого неравенства в (33) следует, что

$$\int_{\Omega} |\bar{u}_n^{(k)}|^2 dx \leq \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0} \cdot \underline{\rho}^{-1} \cdot \exp \left\{ c(n) \sqrt{T \frac{1}{c_0} \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}} \right\}, \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, оценка (27) и теорема 5 доказаны.

Априорные оценки решений уравнений (26)

Лемма 6. Предположим, что $\beta_i \geq 4$, $i = 1, 2$. Пусть $\bar{u}_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, – решение (26) и $\rho_{i,n} = S_{\rho_i}(\bar{u}_n^{(i)})$, т.е. $\rho_{i,n}$ – решение задач

$$\partial_t(\rho_{i,n}) + \operatorname{div}(\rho_{i,n} \bar{u}_n^{(i)}) = \varepsilon \Delta \rho_{i,n} \quad \text{в } Q_T,$$

$$\nabla \rho_{i,n} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega,$$

$$\rho_{i,n}|_{t=0} = \rho_i^0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда имеют место следующие оценки, не зависящие от номера n ,

$$\sup_{t \in [0, T]} \sum_{i=1}^2 \|\rho_{i,n}(t)\|_{L^{\gamma_i}(\Omega)}^{\gamma_i} \leq \max_k (\gamma_k - 1) \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}, \quad \delta \cdot \operatorname{ess} \sup_{t \in [0, T]} \sum_{i=1}^2 \|\rho_{i,n}(t)\|_{L^{\beta_i}(\Omega)}^{\beta_i} \leq \max_k (\beta_k - 1) \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0},$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \sum_{i=1}^2 \|\sqrt{\rho_{i,n}(t)} \bar{u}_n^{(i)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}, \quad \int_0^T (\|\bar{u}_n^{(1)}(t)\|_{L^{1,2}}^2 + \|\bar{u}_n^{(2)}(t)\|_{L^{1,2}}^2) dt \leq c_0^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}; \quad (34)$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_0^T \|\nabla \rho_{i,n}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C(\beta_i, \delta, \rho_i^0, \bar{q}_0^{(i)}), \quad (35)$$

$$\sum_{i=1}^2 \|\rho_{i,n}\|_{L^{\beta_i+1}(Q_T)} \leq C(\beta_i, \delta, \rho_i^0, \bar{q}_0^{(i)}).$$

Величина $\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}$ определена выше и не зависит от n и параметра ε .

Предельный переход в уравнениях неразрывности с диссипацией

Лемма 7. Из последовательности $\bar{u}_n^{(i)}$, $\rho_{i,n} = S_{\rho_i}(\bar{u}_n^{(i)})$, $n = 1, 2, \dots$, решений уравнений (26), построенных в теореме 5, может быть выделена подпоследовательность (за которой сохраним прежнее обозначение), которая сходится при $n \rightarrow \infty$ в следующем смысле:

$$\rho_{i,n} \rightarrow \rho_i \quad * - \text{слабо в } L^\infty(I, L^{\beta_i}(\Omega)), \quad \nabla \rho_{i,n} \rightarrow \nabla \rho_i \quad \text{слабо в } L^2(Q_T),$$

$$\bar{u}_n^{(i)} \rightarrow \bar{u}^{(i)} \quad \text{слабо в } L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)), \quad (36)$$

$$\rho_{i,n} \bar{u}_n^{(i)} \rightarrow \rho_i \bar{u}^{(i)} \text{ слабо в } L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega)), \quad (37)$$

$$\rho_{i,n} \bar{u}_n^{(i)} \rightarrow \rho_i \bar{u}^{(i)} \text{ * - слабо в } L^\infty(I, L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)), \quad (38)$$

$$\rho_{i,n} \rightarrow \rho_i \text{ сильно в } L^p(Q_T), \quad 1 \leq p < \frac{4}{3}\beta_i. \quad (39)$$

Предельные функции $\bar{u}^{(i)}$, ρ_i , $i=1,2$, принадлежат, следовательно, функциональным классам:

$$\begin{aligned} \rho_i &\in L^\infty(I, L^{\beta_i}(\Omega)), \quad \nabla \rho_i \in L^2(Q_T), \quad \bar{u}^{(i)} \in L^2(I, W^{1,2}(\Omega)), \\ \rho_i \bar{u}^{(i)} &\in L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)) \end{aligned}$$

и удовлетворяют уравнениям неразрывности с диссипацией (9) в том смысле, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_i \eta_i(x) dx - \int_{\Omega} \rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \eta_i(x) dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \rho_i \nabla \eta_i dx = 0 \text{ в } D'(I), \quad \eta_i \in C^\infty(\mathbf{R}^3), \quad i=1,2.$$

Предельный переход в уравнениях баланса импульсов

Предварительно сформулируем дополнительные свойства решений краевой задачи (9), (10), (12), из которых следует, что предельные функции ρ_i , $\bar{u}^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям (9) почти всюду в Q_T и граничным условиям (12) в смысле следов.

Лемма 8. Существуют значения $t_i \in \left[\frac{17}{16}, \frac{5}{4}\right)$, $r_i \in \left[\frac{34}{15}, \frac{10}{3}\right)$, $i=1,2$, такие, что последовательности $\{\partial_t \rho_{i,n}\}$, $\{\nabla^2 \rho_{i,n}\}$, $i=1,2$, ограничены в $L^{t_i}(Q_T)$, последовательности $\{\nabla \rho_{i,n}\}$ ограничены в $L^{t_i}(I, L^{r_i}(\Omega))$, последовательности $\{\rho_{i,n} \bar{u}_n^{(i)}\}$ ограничены в $L^{t_i}(I, E_0^{r_i, t_i}(\Omega))$. Следовательно, предельные функции ρ_i , $\bar{u}^{(i)}$ принадлежат тем же функциональным классам, т. е., в частности,

$$\partial_t \rho_i \in L^{t_i}(Q_T), \quad \nabla \rho_i \in L^{t_i}(I, L^{r_i}(\Omega)), \quad i=1,2,$$

$$\rho_i \bar{u}^{(i)} \in L^{t_i}(I, E_0^{r_i, t_i}(\Omega)), \quad i=1,2.$$

и удовлетворяют уравнениям (9) почти всюду в Q_T . Начальные условия (10) выполнены в том смысле, что

$$\rho_i \in C^0(\bar{I}, L^{p_i}(\Omega)), \quad i=1,2, \quad 1 \leq p_i < \beta_i.$$

Граничные условия (12) выполнены в смысле следа, т. е.

$$j_n(\nabla \rho_i) = 0, \quad j_n(\rho_i \bar{u}^{(i)}) = 0, \quad \text{п.в. в } I.$$

Обратимся теперь к уравнениям баланса импульсов. Поскольку для каждого вектора $\vec{a} \in L^2(Q_T)$, $\partial_t \vec{a} \in L^2(Q_T)$ справедливо равенство $\partial_t(P_n \vec{a}) = P_n \partial_t \vec{a}$ п.в. в Q_T , то из уравнений (25) следуют тождества

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t P_n (\rho_{i,n} \vec{u}_n^{(i)}) \cdot \vec{\phi} dx &= - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \nabla \vec{u}_n^{(j)} : \nabla (P_n \vec{\phi}) dx - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \operatorname{div} \vec{u}_n^{(j)} \cdot \operatorname{div} (P_n \vec{\phi}) dx + \\ &+ \int_{\Omega} (\rho_{i,n} \vec{u}_n^{(i)} \otimes \vec{u}_n^{(i)}) : \nabla (P_n \vec{\phi}) dx + \int_{\Omega} (\rho_{i,n}^{\gamma_i} + \delta \rho_{i,n}^{\beta_i}) \operatorname{div} (P_n \vec{\phi}) dx - \int_{\Omega} \varepsilon (\nabla \rho_{i,n} \cdot \nabla) \vec{u}_n^{(i)} \cdot P_n (\vec{\phi}) dx + \\ &+ \int_{\Omega} (-1)^{i+1} a(\vec{u}_n^{(2)} - \vec{u}_n^{(1)}) P_n \vec{\phi} dx, t \in I, \vec{\phi} \in D(\Omega), i = 1, 2. \end{aligned} \quad (40)$$

В следующей лемме указаны свойства последовательностей, позволяющие совершить предельный переход в (40).

Лемма 9. Последовательность решений уравнений Галеркина (26) обладает свойствами:

- Имеет место равномерная оценка

$$\left\| \partial_t P_n (\rho_{i,n} \vec{u}_n^{(i)}) \right\|_{L^i(I, W^{-2,2}(\Omega))} \leq c(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}, \delta, \varepsilon), i = 1, 2;$$

- $\rho_{i,n} \vec{u}_n^{(i)} \rightarrow \rho_i \vec{u}^{(i)}$ сильно в $L^2(I, W^{-1,2}(\Omega))$, $i = 1, 2$;

$$\rho_{i,n} \vec{u}_n^{(i)} \otimes \vec{u}_n^{(i)} \rightarrow \rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)} \text{ слабо в } L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{4\beta_i+3}}(\Omega)), i = 1, 2; \quad (41)$$

- $\| \rho_{i,n}(t) - \rho_i(t) \|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, равномерно по $t \in [0, T]$;

$$\int_{\Omega} \int_0^t \rho_{i,n}^2 \operatorname{div} \vec{u}_n^{(i)} dx d\tau \rightarrow \int_{\Omega} \int_0^t \rho_i^2 \operatorname{div} \vec{u}^{(i)} dx d\tau;$$

- $\nabla \rho_{i,n} \rightarrow \nabla \rho_i$ сильно в $L^2(Q_T)$, $i = 1, 2$;

- $\nabla \rho_{i,n} \cdot \nabla \vec{u}_n^{(i)} \rightarrow \nabla \rho_i \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}$ слабо в $L^1(Q_T)$, $i = 1, 2$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} (\nabla \rho_{i,n} \cdot \nabla) \vec{u}_n^{(i)} \cdot P_n \vec{\phi} dx dt = \int_{Q_T} (\nabla \rho_i \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} \cdot \vec{\phi} dx dt, \forall \vec{\phi} \in D(\Omega).$$

На основании леммы 9 может быть сделан следующий шаг в доказательстве теоремы 1, а именно доказаны предельные соотношения, перечисленные в следующей лемме.

Лемма 10. Для каждого $\vec{\phi} \in D(\Omega)$ справедливы формулы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}_n^{(j)} : \nabla (P_n \vec{\phi}) - \nabla \vec{u}^{(j)} : \nabla \vec{\phi} \right) dx d\tau = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \operatorname{div} \vec{u}_n^{(j)} \cdot \operatorname{div} (P_n \vec{\phi}) dx d\tau = \int_{Q_T} \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} \cdot \operatorname{div} \vec{\phi} dx d\tau,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} (\rho_{i,n} \vec{u}_n^{(i)} \otimes \vec{u}_n^{(i)}) : \nabla (P_n \vec{\phi}) dx d\tau = \int_{Q_T} (\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) : \nabla \vec{\phi} dx d\tau,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} (\rho_{i,n}^{\gamma_i} + \delta \rho_{i,n}^{\beta_i}) \operatorname{div}(P_n \vec{\varphi}) dx d\tau &= \int_{Q_T} (\rho_i^{\gamma_i} + \delta \rho_i^{\beta_i}) \operatorname{div} \vec{\varphi} dx d\tau, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} \varepsilon (\nabla \rho_{i,n} \cdot \nabla) \vec{u}_n^{(i)} \cdot P_n(\vec{\varphi}) dx d\tau &= \int_{Q_T} \varepsilon (\nabla \rho_i \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} \cdot \vec{\varphi} dx d\tau, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} (-1)^{i+1} a(\vec{u}_n^{(2)} - \vec{u}_n^{(1)}) P_n \vec{\varphi} dx d\tau &= (-1)^{i+1} \int_{Q_T} a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \vec{\varphi} dx d\tau.
\end{aligned}$$

В силу леммы 10 из (40) следует равенство

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t P_n (\rho_{i,n} \vec{u}_n^{(i)}) \cdot \vec{\varphi} dx d\tau = - \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \nabla \vec{u}^{(j)} : \nabla \vec{\varphi} dx d\tau - \\
&- \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} \cdot \operatorname{div} \vec{\varphi} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} (\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) : \nabla \vec{\varphi} dx d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_{\Omega} (\rho_i^{\gamma_i} + \delta \rho_i^{\beta_i}) \operatorname{div} \vec{\varphi} dx d\tau - \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla \rho_i \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} \cdot \vec{\varphi} dx d\tau + (-1)^{i+1} \int_0^t \int_{\Omega} a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \vec{\varphi} dx d\tau.
\end{aligned} \tag{43}$$

Отсюда, с учетом свойств (38) и свойств проектора видим, что

$$\rho_i \vec{u}^{(i)} \in L^\infty(I, L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)), \quad i = 1, 2, \quad \partial_t \int_{\Omega} \rho_i \vec{u}^{(i)} \cdot \vec{\varphi} \in L^1(I), \quad \vec{\varphi} \in D(\Omega),$$

и поэтому существуют $\vec{q}^{(i)} \in C^0(\bar{I}, L_{weak}^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega))$, $i = 1, 2$, такие, что для п. в. $t \in I$ имеет место равенство $\vec{q}^{(i)}(t) = \rho_i(t) \vec{u}^{(i)}(t)$ п. в. в Ω . Более того, в результате изменения поля скоростей $\vec{u}^{(i)}$ на множестве нулевой меры в I получим, что

$$\rho_i \vec{u}^{(i)} \in C^0(\bar{I}, L_{weak}^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)).$$

Отсюда следуют формулы

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \rho_i \vec{u}_n^{(i)} \vec{\varphi} dx = \int_{\Omega} \vec{q}_0^{(i)} \cdot \vec{\varphi} dx, \quad i = 1, 2.$$

Из формулы (43) в силу произвольности $t \in (0, T)$ следуют равенства

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\Omega} \rho_i \vec{u}^{(i)} \cdot \vec{\varphi} dx &= - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \nabla \vec{u}^{(j)} : \nabla \vec{\varphi} dx - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} \cdot \operatorname{div} \vec{\varphi} dx + \\
&+ \int_{\Omega} (\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) : \nabla \vec{\varphi} dx + \int_{\Omega} (\rho_i^{\gamma_i} + \delta \rho_i^{\beta_i}) \operatorname{div} \vec{\varphi} dx - \varepsilon \int_{\Omega} (\nabla \rho_i \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} \cdot \vec{\varphi} dx + \\
&+ (-1)^{i+1} \int_{\Omega} a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \vec{\varphi} dx, \quad \vec{\varphi} \in D(\Omega) \text{ п. в. на } I.
\end{aligned}$$

Отсюда, для каждой функции $g(t) \in D(I)$ получим тождества

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \bar{\varphi} \partial_t g dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \nabla \bar{u}^{(j)} : \nabla (\bar{\varphi} g) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \operatorname{div} \bar{u}^{(j)} \operatorname{div} (\bar{\varphi} g) dx dt + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} (\rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)}) : \nabla (\bar{\varphi} g) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\rho_i^{\gamma_i} + \delta \rho_i^{\beta_i}) \operatorname{div} (\bar{\varphi} g) dx dt - \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \rho_i \cdot \nabla) \bar{u}^{(i)} \cdot (\bar{\varphi} g) dx dt + \\
& + (-1)^{i+1} \int_0^T \int_{\Omega} a(\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}) \bar{\varphi} g dx dt, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{44}$$

Поскольку семейство функций $\{\bar{\varphi}(x) \cdot g(t)\}$, $\bar{\varphi} \in D(\Omega)$, $g \in D(I)$ всюду плотно в $D(Q_T)$, то тождества (44) доказывают, что предельные функции $\rho_i = \rho_{i,\varepsilon,\delta}$, $\bar{u}^{(i)} = \bar{u}_{\varepsilon,\delta}^{(i)}$ удовлетворяют регуляризованным уравнениям баланса импульсов (8).

Доказательство априорных оценок (v) теоремы 1

Из неравенств (34), (35) и формул (36) в силу слабой полунепрерывности снизу норм получаем оценки (13), (14). Из (38), (34) следует оценка (15). Оценка (16) вытекает из (37). Оценка (17) есть следствие результатов о регулярности решений параболической задачи Неймана. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rajagopal K.R., Tao L.* Mechanics of Mixtures. Singapore: World Sci., 1995.
2. *Крайко А.Н., Нигматулин Р.И.* Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Сер. гидромеханика. 1972. Т. 6. С. 93–174.
3. *Кажихов А.В., Петров А.Н.* Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси // Динамика сплошной среды. 1978. № 35. С. 61–73.
4. *Петров А.Н.* Корректность начально-краевой задачи для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1982. Вып. 56. С. 105–121.
5. *Злотник А.А.* Равномерные оценки и стабилизация решений системы уравнений одномерного движения многокомпонентной баротропной смеси // Математические заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 307–312.
6. *Frehse J., Goj S., Malek J.* On a Stokes-like system for mixtures of fluids // SIAM J. Math. Anal. 2005. V. 36. No. 4. P. 1259–1281.
7. *Frehse J., Goj S., Malek J.* A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum // Appl. Math. 2005. V. 50. No. 6. P. 527–541.
8. *Frehse J., Weigant W.* On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids // Appl. Math. 2008. V. 53. No. 4. P. 319–345.
9. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Стационарные решения уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 3 (31). С. 52–65.
10. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Корректность первой краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей // Вестник Новосибирского государственного университета. 2009. Т. 9. № 3. С. 33–53.
11. *Кучер Н.А., Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.* Стационарные решения уравнений динамики смесей вязких сжимаемых жидкостей // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 6 (31). С. 1338–1353. DOI: 10.1134/S0037446612060110.
12. *Novotny A., Straskraba I.* Introduction to mathematical theory of compressible flow. New York: Oxford University Press, 2004.

Статья поступила 27.01.2019 г.

Kucher N.A., Zhalnina A.A., Malysenko O.V. (2020) ON THE EXISTENCE OF STRONG SOLUTIONS TO REGULARIZED EQUATIONS OF VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID MIXTURES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 31–47

DOI 10.17223/19988621/64/3

Keywords: mixture of viscous compressible fluids, inhomogeneous boundary value problem, strong solution.

Mathematical results (statements of problems, theorems on the existence and uniqueness, properties of solutions, etc.) on models of multi-velocity continua by which the motion of multicomponent mixtures is described are rather modest in comparison with results on classical one-component media. This paper aims to fill this gap to some extent and is devoted to the study of the global correctness of the initial boundary value problem for equations of unsteady spatial motions of a mixture of viscous compressible fluids.

This paper is the first part of an extensive research that studies regularization of a mathematical model for unsteady spatial flows of a viscous compressible fluids mixture. The construction of the solution of the regularized problem is the key step for the mathematical analysis of the original mixture model because it allows to obtain globally defined solutions of the latter by passing to the limit. In addition, the proposed algorithm for constructing solutions to the regularized problem is constructive. This algorithm is based on the procedure of finite-dimensional approximation of the infinite-dimensional problem and the result is a mathematically well-grounded algorithm for the numerical solution of the boundary value problem of the motion of a viscous compressible fluids mixture in the region bounded by solid walls. The local time solvability of finite-dimensional problems is proved by applying the contraction mapping principle. With the help of a priori estimates, the possibility to extend the local solution for an arbitrary period of time, as well as the possibility of a passage to the limit to an infinite-dimensional problem is established. Finally, we obtain the result on the existence and uniqueness of a globally defined strong solution to the regularized problem.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 35D35, 35Q35, 35B65

Nikolay A. KUCHER (Doctor of Physics and Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: nakycher@rambler.ru

Alexandra A. ZHALNINA (Candidate of Physics and Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: qwert1776@yandex.ru

Olga V. MALYSHENKO (Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation) E-mail: molga81@list.ru

REFERENCES

1. Rajagopal K.R., Tao L. (1995) *Mechanics of Mixtures*. Singapore: World Sci. Publ.
2. Kraiko A.N., Nigmatulin R.I. (1972) Mekhanika mnogofaznykh sred [Mechanics of multiphase media]. *Itogi nauki. Gidromekhanika*. 6. pp. 93–174 [in Russian].
3. Kazhikov A.V., Petrov A.N. (1978) Korrektnost' nachal'no-kraevoy zadachi dlya model'noy sistemy uravneniy mnogokomponentnoy smesi [Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture]. *Dinamika sploshnoy sredy*. 35. pp. 61–73 [in Russian].
4. Petrov A.N. (1982) Korrektnost' nachal'no-kraevoy zadachi dlya odnomernykh uravneniy vzaimopronikayushchego dvizheniya sovershennykh gazov [Well-posedness of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of mutually penetrating motion of perfect gases]. *Dinamika sploshnoy sredy*. 56. pp. 105–121 [in Russian].
5. Zlotnik A.A. (1995) Ravn timerne otsenki i stabilizatsiya resheniy sistemy uravneniy odnomernogo dvizheniya mnogokomponentnoy barotropnoy smesi [Uniform estimates and

- stabilization of solutions to a system of equations of the one-dimensional motion of a multicomponent barotropic mixture]. *Matematicheskie zametki*. 58(2). pp. 307–312 [in Russian].
6. Frehse J., Goj S., Malek J. (2005) On a Stokes-like system for mixtures of fluids. *SIAM J. Math. Anal.* 36(4). pp. 1259–1281.
 7. Frehse J., Goj S., Malek J. (2005) A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum. *Appl. Math.* 50(6). pp. 527–541.
 8. Frehse J., Weigant W. (2008) On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids. *Appl. Math.* 53(4). pp. 319–345.
 9. Kucher N.A., Prokudin D.A. (2009) Statsionarnye resheniya uravneniy smesi vyazkikh szhimaemykh zhidkostey [Stationary solutions to the equations of a mixture of viscous compressible fluids]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 12(3). pp. 52–65 [in Russian].
 10. Kucher N.A., Prokudin D.A. (2009) Korrektnost' pervoy krayevoy zadachi dlya uravneniy smesey vyazkikh szhimayemykh zhidkostey [Well-posedness of the first boundary value problem for equations of mixtures of viscous compressible fluids]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Mat. Mekh. Inform.* 9(3). pp. 52–65 [in Russian].
 11. Kucher N.A., Mamontov A.E., Prokudin D.A. (2012) Stationary solutions to the equations of dynamics of mixtures of heat-conductive compressible viscous fluids. *Sib. Math. J.* 53(6). pp. 1075–1088. DOI: 10.1134/S0037446612060110.
 12. Novotny A., Straskraba I. (2004) *Introduction to mathematical theory of compressible flow*. New York: Oxford University Press.

Received: January 21, 2019

УДК 517.3
DOI 10.17223/19988621/64/4

MSC 93A30

V.V. Churuksaeva, A.V. Starchenko

NUMERICAL MODELLING OF POLLUTION TRANSPORT IN TOM RIVER¹

This work constructs a mathematical model and a computational method to get extensive data about the structure of a river stream essential for predicting the behavior of a river. The model proposed is based on depth-averaged Reynolds-averaged Navier–Stokes equations. The solver is based on the finite volume method on a staggered structured grid and a high-order Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws for convective fluxes. The solution is obtained with a Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations iterative algorithm based on coupled correction of the depth and velocity fields at each time step. The principal innovation of the algorithm proposed is accounting for the variability of the water depth in the source term in the momentum equations. The results show that the approach proposed accurately predicts the flow field and concentration field and demonstrate the significant role of the flow turbulence in transport of pollution in the river stream.

Keywords: *open channel flow turbulence, turbulence simulation and modelling, RANS models, shallow flows, streams and rivers, water quality.*

Shallow water equations (SWE) are a widely used approach to modelling geophysical flows that combines acceptable computational cost and precision of the results obtained. It has wide application to modelling problems from fast-developing flows in dam breaks and tsunami waves to relatively slow flows in river estuaries and transport of sediments in lowland rivers.

SWE [1] are obtained by integrating RANS equations by depth and correctly describe a flow in conditions of the depth being much less than the horizontal dimensions of an investigated area. In averaging, the distribution of pressure is hydrostatic, and flow characteristics are assumed to vary little with depth. In this approach, gravity, bottom and free surface shear stresses, and the Coriolis force are the main forces that drive the flow. Because of the assumptions above, SWE are widely used for modelling the atmosphere and the flow in natural basins.

SWE are used to model flow in lakes and seas when the depth-dependent processes do not play a significant role. For example a series of works [2–4] illustrate the application of SWE to modelling tidal flow and tsunami waves in tidal regions of an ocean. Other works [5–7] show the application of this approach to modelling flows with significant wind shear on the surface of the Sea of Azov and the Caspian Sea.

Applications of SWE to modelling flow in rivers and estuaries are extensive [8–10, 3, 11] and are not limited to two-dimensional formulations. 2D SWE are used to compute the flow in river sections that are very long (from dozens of meters to several kilometers) and have an irregular shape that significantly affects the flow [8, 11]. The geometry of the river is especially important in solving such problems as the transport of pollution in the flow, bed deformation [12, 13], and sediment transport [4]. Nevertheless, applications of

¹ The reported study was funded by Russian Foundation for Basic Research under research project N 18-31-00386.

2D equations to problems of bed deformation and sediment transport are not common due to the very large time scales of these processes. Two of the approaches to modelling processes in a large spatial or time scale are 1D formulations [14–16] and combinations of 1D and 2D models [17, 18] in which 1D computation of the whole river is adjoined with precise 2D computations of the areas of particular interest. 1D solvers can provide accurate information in terms of total sediment load, though they fail at predicting the bed erosion and calculating the final shape of the cross section.

One of the methods to construct the 1D river stream model from 2D depth-averaged equations is integrating them by river width, which gives equations an extra integral parameter—an area of water section. Another approach is omitting the terms that describe the variation of the parameters with one of the spatial coordinates. 1D models are also used when variation of the flow parameters from the river width is negligible compared to longitudinal variation. Very fast-developing flows (such as dam-break problems) or flows in long industrial channels with smooth walls and a flat bottom are examples of flows with such parameters [19].

Solving the fully 3D flow field with specific treatment of the free surface and bottom boundary condition is limited to short river sections adjacent to hydraulic facilities and small-scale flows in laboratory statements [9, 20–22].

In this work, 2D SWE are considered and used as a preferable approach that combines acceptable computational cost for computing long river sections (dozens of kilometers) with the precision of results obtained that is essential for solving such problems as evaluating the anthropogenic changes in the river bed, modelling ice movement and local flooding in spring, and detailing the distribution of pollutants discharged into the river with wastewater.

In many cases, the turbulence of the flow is not accounted for at all (the second derivatives in momentum equations are omitted) [10] or the turbulent viscosity is set as a constant. This approach gives accurate results for cases without recirculation zones or where turbulence is considered mainly to account for energy losses. An example of a flow with such features is coastal waves.

But when turbulent mixing is significant, varying turbulence characteristics should be defined at each point of the flow. To close the SWE, a parabolic eddy viscosity model, a modified mixing length model, and a series of modifications of classical two-parameter difference models such as $k-\varepsilon$ [23, 24], $k-\omega$ [25] have been developed.

The difference in velocity fields obtained for two natural rivers by a depth-averaged solver with standard [26], non-equilibrium [27], and RNG [28] versions of the $k-\varepsilon$ model is not significant [29]. Turbulent viscosity defined with non-equation models significantly differs from that obtained with the standard, non-equilibrium, and RNG $k-\varepsilon$ models, which give very close values. In [24, 30] it is shown that the difference between standard models and the Chu and Barbarutsi modification [31] becomes obvious only for flows mainly driven by bottom friction. Simple turbulence models such as the parabolic eddy viscosity model and the mixing length model that are widely used with depth-averaged equations [8, 32] due to their simplicity tend to under-predict the turbulent eddy viscosity values for flows where turbulence is mostly two-dimensional, as it is in river flows [11].

The aim of the work presented in this article is improving the mathematical model and the numerical method constructed in [33] for turbulent river flow computations by adding the modified Streeter–Phelps [34] model of self-cleaning mechanism and illustrating the capabilities of the model computing several test-cases of pollutant transport in Tom river.

Problem Statement

Steady turbulent flow of the viscous incompressible liquid in an open river bed is considered. The river bed has a complex geometry. Assuming that pressure distribution is hydrostatic and water depth is much less than the horizontal size of the area investigated, this flow can be described with 2D SWE:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{xx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{xy})}{\partial y} + \frac{(\tau_{xz})_s - (\tau_{xz})_b}{\rho} - \bar{F}_x, \\ \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial y} &= -gh \frac{\partial(z_b + h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{yx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{yy})}{\partial y} + \frac{(\tau_{yz})_s - (\tau_{yz})_b}{\rho} - \bar{F}_y, \end{aligned}$$

where $h(x, y)$ is the water depth; $\bar{u}(x, y), \bar{v}(x, y)$ are the depth-averaged horizontal velocities; $z_b(x, y)$ is the bed elevation; ρ is the density; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ is the gravity acceleration; $\bar{\tau}_{xx}, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yx}, \bar{\tau}_{yy}$ are the depth-averaged components of the viscous stresses and Reynolds stresses tensor; $(\tau_{xz})_s, (\tau_{yz})_s, (\tau_{xz})_b, (\tau_{yz})_b$ are corresponding wind stress and bottom friction; and $\bar{F}_x, \bar{F}_y$ are the depth-averaged Coriolis force components.

The components of the Coriolis force are defined as follows:

$$F_x = \frac{-4\pi}{\text{time}} h\bar{v} \sin \varphi, \quad F_y = \frac{4\pi}{\text{time}} h\bar{u} \sin \varphi.$$

Here φ is the geographical latitude, time is the length of a day in seconds.

In the cases studied, wind stresses $(\tau_{xz})_s, (\tau_{yz})_s$ are omitted because their influence is not relevant compared to the effects produced by the slope and bottom friction terms.

Turbulence Modelling

A Boussinesq hypothesis is used to connect Reynolds stresses with components of the strain velocity tensor by defining effective viscosity $(\nu + \bar{\nu}_t)$.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy} &= \rho(\nu + \bar{\nu}_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right); \quad \bar{\tau}_{xx} = 2\rho(\nu + \bar{\nu}_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \bar{k}; \quad \bar{\tau}_{yy} = 2\rho(\nu + \bar{\nu}_t) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \bar{k}; \\ (\bar{\tau}_{xz})_b &= c_f |\bar{w}| u; \quad (\bar{\tau}_{yz})_b = c_f |\bar{w}| v; \quad c_f = \frac{gn^2}{h^{1/3}}. \end{aligned}$$

Here $\bar{k}$ is the depth-averaged turbulence kinetic energy; ν is the kinematic viscosity; $\bar{\nu}_t$ is the eddy viscosity; c_f is the bottom friction coefficient; and n is the Manning coefficient.

In order to account for production, transport, and dissipation of turbulence in the river flow, a depth-averaged high Reynolds $(\bar{\nu}_t \gg \nu)$ $k - \varepsilon$ model is used in this work. This model was constructed by Rastogi and Rodi [26] from the original $k - \varepsilon$ model proposed by Launder and Spalding [35] and was the first differential turbulence model modified for depth-averaged equations.

The equations of the model used are:

$$\bar{v}_t = c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}},$$

$$\frac{\partial(h\bar{u}\bar{k})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}\bar{k})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\bar{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\bar{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right) + (P_h + P_{kv} - \bar{\varepsilon})h,$$

$$\frac{\partial(h\bar{u}\bar{\varepsilon})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}\bar{\varepsilon})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right) + \left(c_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} P_h + P_{\varepsilon v} - c_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} \right) h,$$

where

$$P_h = \bar{v}_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right];$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.3; \sigma_k = 1.0; c_1 = 1.44; c_2 = 1.92; c_\mu = 0.09;$$

$$P_{kv} = c_k \frac{v_*^3}{h}; P_{\varepsilon v} = c_\varepsilon \frac{v_*^4}{h^2}; c_k = \frac{1}{\sqrt{c_f}}; c_\varepsilon = 3.6 \frac{c_2}{c_f^{3/4}} \sqrt{c_\mu}.$$

Here $\bar{k}$ is the depth-averaged turbulence kinetic energy; $\bar{\varepsilon}$ is the energy dissipation; $\bar{v}_t$ is the eddy viscosity; and n is the Manning coefficient.

The constants of the model are assumed to have the same values as in [23] where considerations about their values are also given.

Boundary Conditions

Inflow boundary conditions are obtained from free surface level and relief data. At the inlet boundary, longitudinal velocity is set to a constant obtained from empirical data for the total discharge of the flow. Because water depth is equal to zero on the river boundary, no wall functions are used and no-slip and no-flow conditions for velocity components are used at wet-dry boundaries. Turbulence kinetic energy and its dissipation fluxes are set to zero at the boundary faces. At the outflow boundary, simple gradient conditions are set for both velocity components and turbulence parameters.

Pollutant Transport Modelling

Water in natural basins has important self-cleaning mechanisms. Wastewater discharged into rivers is diluted by pure river water and partially precipitates. Organic matter introduced into the river with wastewater oxidises by dissolved oxygen driven by micro-organisms and algae, and it decomposes from the sun's radiation. The intensity of self-cleaning processes depends on the water level of a river, flow velocity, and the intensity of mixing, which is mainly defined by turbulence. The model proposed contains the following convection–diffusion equation in order to model transport of pollutants whose velocity is equal to the velocity of the flow and whose concentration is relatively small.

$$\frac{\partial h\bar{L}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[h\bar{u}\bar{L} - h \left(\frac{v}{Sc} + \frac{v_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{L}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h\bar{v}\bar{L} - h \left(\frac{v}{Sc} + \frac{v_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{L}}{\partial y} \right] = -k_1 Lh - k_3 Lh.$$

Here $\bar{L}(x, y, t)$ is the depth-averaged concentration of organic matter; k_1 is the deoxy-generation rate; and k_3 is the rate of organic matter sedimentation.

The problem considered assumes that organic matter is present in the river and that its concentration and the water temperature change slightly with water depth.

The modified dissolved oxygen sag equation [41] is also introduced to the model to define biochemical oxygen demand (BOD) as a criterion of water quality:

$$\frac{\partial h\bar{D}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[h\bar{u} \bar{D} - h \left(\frac{v}{Sc} + \frac{v_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{D}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h\bar{v} \bar{D} - h \left(\frac{v}{Sc} + \frac{v_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} \right] = k_1 Lh - k_2 D h,$$

where k_2 is the reaeration rate and $\bar{D}(x, y, t)$ is the depth-averaged oxygen deficit, which is defined as the difference between the dissolved oxygen concentration at saturation and the actual dissolved oxygen concentration. In this research, the constants are

$$\text{set to: } k_1 = \frac{0.3}{\tau}; k_2 = \frac{1.0}{\tau}; k_3 = 0 \text{ [36].}$$

In this approach, oxygen deficit is a criterion of both the intensity of self-cleaning processes and water quality.

Both $\bar{L}(x, y, t)$ and $\bar{D}(x, y, t)$ fluxes are set to zero at the solid boundaries and are set to constants obtained from empirical data at the inflow boundary. At the outflow boundary, simple gradient conditions are used for both variables.

This description of a self-cleaning process is a modification of the classical Streeter–Phelps model. In this model, organic pollution of a river is estimated by BOD and the countervailing influence of atmospheric reaeration. This model could be successfully applied for a timely evaluation of the water quality for a season of the year in several hundred kilometers of a river.

Numerical method

The solver uses a staggered structured mesh to discretise the spatial domain (Fig. 1). Velocity components are defined in the nodes (rhombs) placed in the midpoints of the edges of the initial mesh. All scalar characteristics of the flow are defined in the nodes (circles) of the initial mesh.

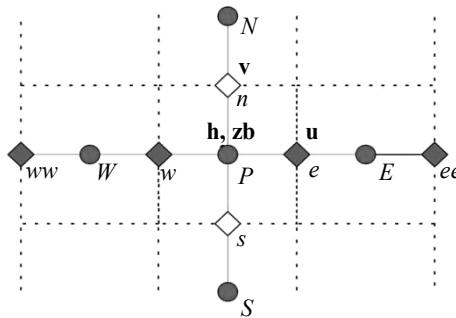


Fig. 1. Control volume and mesh stencil

Discretisation of Convective and Diffusive Terms

Convective fluxes in the momentum equations are approximated with a MUSCL scheme [37] that is up to third-order accurate in regions where function is monotonic.

Values are interpolated from the centers of the mesh cells to the midpoints of the mesh edges with linear function as follows:

$$\bar{\Phi}_e = \Phi_P + \frac{\Delta x}{2} \sigma_e^+, u_e > 0;$$

$$\bar{\Phi}_e = \Phi_E - \frac{\Delta x}{2} \sigma_e^-, u_e \leq 0;$$

where $\sigma_e^+ = \frac{\delta_e}{\Delta x} \phi(\theta_e)$, $\sigma_e^- = \frac{\delta_e}{\Delta x} \phi(\theta_{ee}^{-1})$ are the slopes that are limited by the function $\phi(\theta_e)$. $\phi(\theta)$ is defined as $\phi(\theta) = \max \left[0, \min \left(2\theta, \frac{2+\theta}{3}, 2 \right) \right]$, which gives a numerical scheme that satisfies conditions of Harten's theorem [38]. In this formulation, $\theta_e = \frac{\delta_e}{\delta_w} (\delta_w \neq 0)$; $\delta_e = \Phi_E - \Phi_P$.

An upwind scheme is used to approximate convective terms of the turbulence model equations.

Discretisation of the Source Terms

Bed slope source terms $-gh \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x}$ and $-gh \frac{\partial(z_b + h)}{\partial y}$ in the momentum equations and turbulence generation due to gradients of horizontal velocities in the equations of the $k - \varepsilon$ model are discretised with the central difference scheme

$$\left[gh \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x} \right]_e \approx \begin{cases} gh_e \frac{h_E - h_P + z_{bE} - z_{bP}}{\Delta x}, & h_E \text{ and } h_P > \varepsilon_w > 0 \text{ (in the river),} \\ 0, & h_E \text{ or } h_P < \varepsilon_w \text{ (at the solid boundary nodes)} \end{cases}$$

because of the construction of the mesh and to obtain second-order spatial accuracy.

The source terms in the equations of the $k - \varepsilon$ model are represented as $S = S_1 - S_2 \bar{\Phi}$, $S_1 \geq 0$, $S_2 \geq 0$, where $\bar{\Phi}$ is a scalar characteristic ($\bar{k}$ or $\bar{\varepsilon}$). This formulation ensures that the resulting value of $\bar{\Phi}$ is non-negative.

Computational Method

Equations of the numerical model are solved with an iterative algorithm of coupled correction of the velocity and depth fields that is based on the procedure by Patankar and Spalding for the Reynolds equations [39]. The algorithm used here has been discussed in detail in [33]. The principal innovation of the algorithm is accounting for the variability of the water depth in the source term in the momentum equations. It allows avoiding spurious oscillations and obtaining the correct numerical solution for the fields of velocity and depth. The solver is based on the finite volume method and fictitious areas method and excludes dry cells from computation.

Results and Discussion

The great complexity of modelling flow in a river originates from the complexity of the hydrodynamic model itself, the spatial complexity of the computed domain boundary, the presence of open boundaries, and flow turbulence that affects all processes in a natural basin. Another difficulty is connected with processing the experimental data

about the river bed and general hydrological data about the river, which are essential for initialising the model.

Dommel River Flow Modelling

The mathematical model and the method proposed have been applied to modelling steady turbulent flow in a small shallow river with sharply curved banks . The 250 m section of the Dommel River situated near the border of Belgium and the Netherlands was considered. This object was chosen because the geometry of its bed suggests the formation of large two-dimensional turbulent structures. Another reason is that accurate measurements of its depth, velocity, and bathymetry [40] exist and enable evaluating the results computed.

The bed of the Dommel River is approximately 6 m wide. The flow velocity is set to 0.85 m/s at the inlet boundary, and the water depth is set to 0.3 m at the outlet boundary. The Manning coefficient is set to 0.02 [41]. A structured uniform mesh with 887x401 nodes is used for computations. The convergence of the iterative process is controlled with the value of water discharge at the outlet of the domain. Figure 2 shows the geometry of the studied section of the Dommel River with the traces where measurements of the depth, velocity, and bathymetry were made.

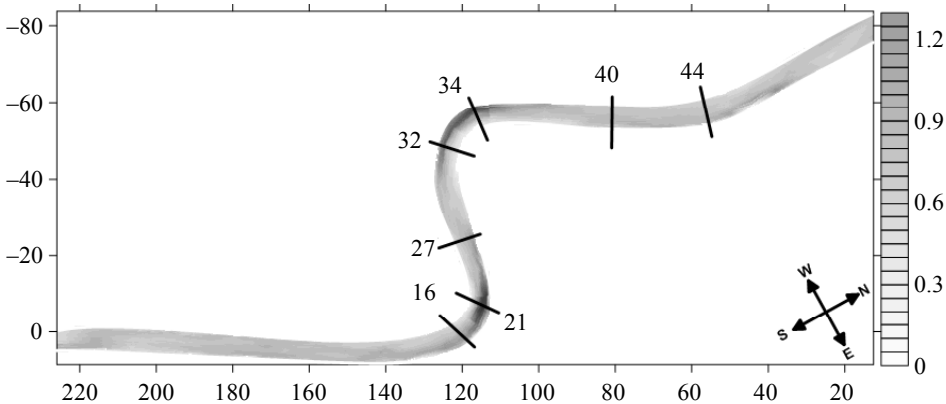


Fig. 2. Geometry of the studied section of the Dommel River (color shows the depth of the river)

Detailed comparison of the numerical and measured velocity fields was made in the cross sections shown in Fig. 2.

As shown in Figure 3, computed and measured values of the depth-averaged flow velocity are in reasonably good agreement within slightly uncertain input data. In the straight parts of the section investigated, velocity profiles are similar to profiles obtained for an open channel accounting for bottom friction and are in good agreement with the data measured. Velocity profiles for cross sections 21 and 34 that are situated in the bends show that the highest velocity magnitude is observed closer to the outer bank of the river and that it gradually decreases toward the inner bank. Recirculation regions form near the inner bank in both bends. The difference between measured and computed velocity values near the banks is connected with the uncertainty in the data about the width of the river. Therefore the results of computations for the S-shaped shallow river show good agreement with measured values and with general concepts.

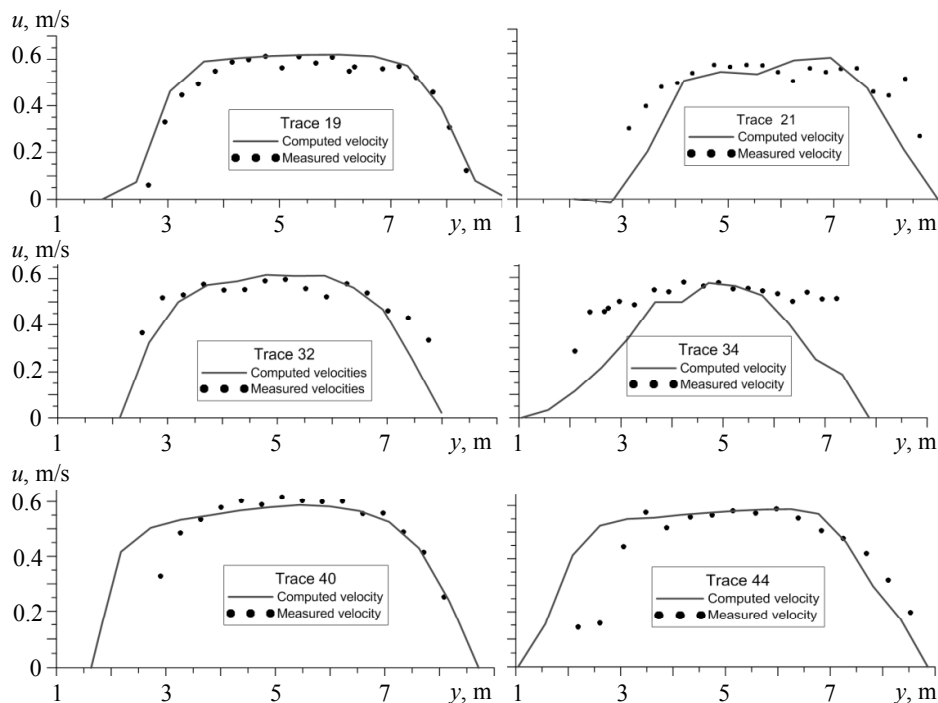


Fig. 3. Velocity magnitude in several cross sections of the Dommel River (y is distance from the left bank of the river)

Tom River Flow Modelling

The main object of the numerical investigations presented in this paper is the flow in the Tom River (Tomsk Region, Russia).

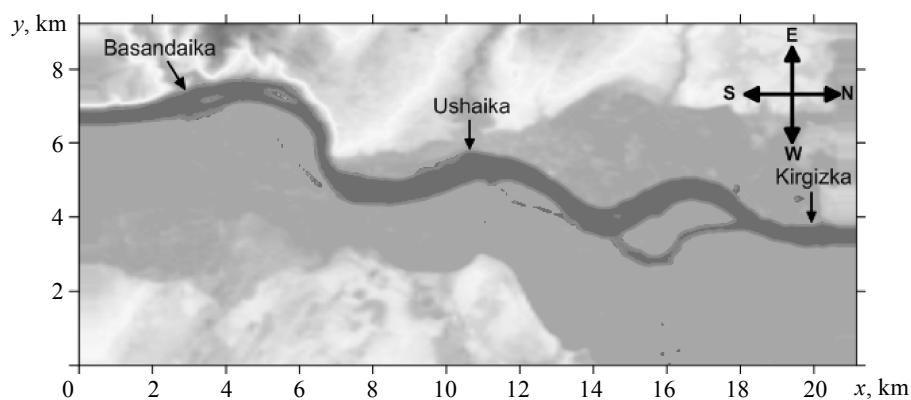


Fig. 4. Studied section of the Tom River

The Tom River is a representative example of a lowland river; its approximate velocity is 0.33 m/s, and total discharge at the beginning of the investigated section is about 750 m³/s (July). The maximum depth in this section is about 8 m and the mean

depth is about 2.5 m. The length of the section investigated is 21 km, and the mean width of the river is 800 m. Within the section the Tom River has three tributaries: the Basandaika River (flow rate 2.34 m³/s), the Ushaika River (flow rate 4.35 m³/s), and the Kirgizka River (flow rate 0.6 m³/s).

In this work, SRTM3 satellite relief data is used to represent the relief of the region. Vertical resolution of the data is 1 m, while the cell is approximately 92×51 m. Local B-spline interpolation [42] is used for data smoothing and defining height in the nodes of the computational mesh.

- Critical problems of the river near the city of Tomsk are:
- local flooding in spring connected with ice jams, which occurs annually because of the morphological characteristics of the river [43];
 - low water quality near Tomsk because the river suffers from anthropogenic pressure that prevents self-cleaning mechanisms. The city of Tomsk is situated on the bank of the section and organic pollutants are introduced to the river with its drainage wastewater. One of the most considerable organic pollutants introduced into the river in this way is petrochemicals [44]; and
 - deformation of the river bed due to anthropogenic and natural factors [43].

Detailed information about the velocity field, depth, and turbulence characteristics is essential to apply mathematical modelling to solving these problems. Part of the research presented here is applying the numerical model constructed to estimating the water quality in the Tom River.

Transport of pollutants in a river stream is mainly defined by the velocity field (Fig. 5) and the eddy viscosity field (Fig. 6), which defines the intensity of the diffusion.

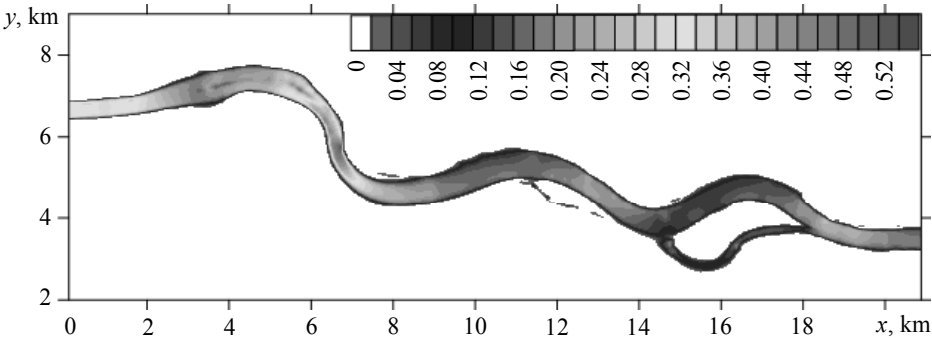


Fig. 5. Velocity magnitude

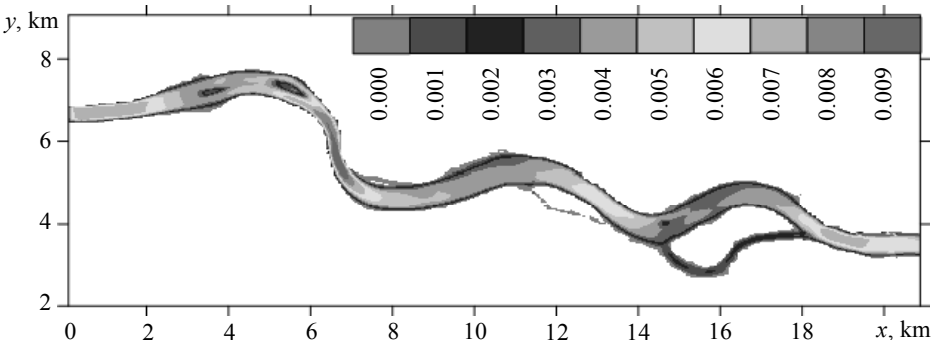


Fig. 6. Eddy viscosity field

The river has a one-branch bed with a small islands in the section studied. The velocity significantly differs from the mean value of 0.33 m/s only in the part between two sharp bends as the bed narrows there. The velocity in the branch between kilometers 14 and 18 is small and pollutants can accumulate in this part of the river. Sharp bends, islands, and inflows situated in the studied area can produce recirculation zones that are the areas of particular interest in this study because they drive the bed deformations and affect the distribution of pollution.

Instant Source Emission Modelling

A case when an organic pollutant has been discharged for 600 s through the inflow boundary in a concentration of 10 mg/l for 600 s has been calculated to simulate a situation when a pollutant has escaped into a small area in a river from an industrial facility failure. Figure 7 illustrates the movement of the polluted water transport and dispersion in a river stream within 30 hours after discharge through the inflow boundary and shows how pollution is transported by the flow and dispersed for 30 hours after the discharge.

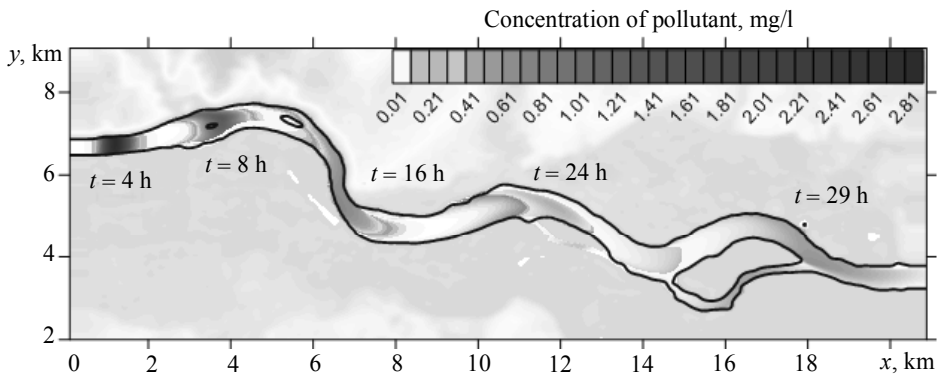


Fig. 7. Transport of the pollution from the instant source

The pollutant is transported by the stream and at the same time its maximal concentration decreases with time because of mixing and oxidizing of the organic substance; pollution is removed from the section computed in approximately 30 hours (Figure 7).

Dispersion of the pollution is maximal at the narrowest section between two bends where large eddy viscosity causes significant turbulence mixing, and convective flux is large due to the highest velocity. Distribution of the pollutant across the river is almost uniform in the initial section. Moving downstream, the distribution substantially expands following the shape of the velocity profile.

The following diagrams show a detailed illustration of the transport of pollution and oxygen deficit variation (for the case with self-cleaning processes considered) along the river with time to estimate the influence of the self-cleaning processes to the water quality in the river.

Maximal concentration computed for the case with the self-cleaning mechanisms considered is lower than concentration computed for the second case. In both cases, concentration of the pollutant significantly decreases (from 1 mg/l to 0.36 mg/l) moving from kilometer 7 to 15 downstream from the initial cross section (Figure 8).

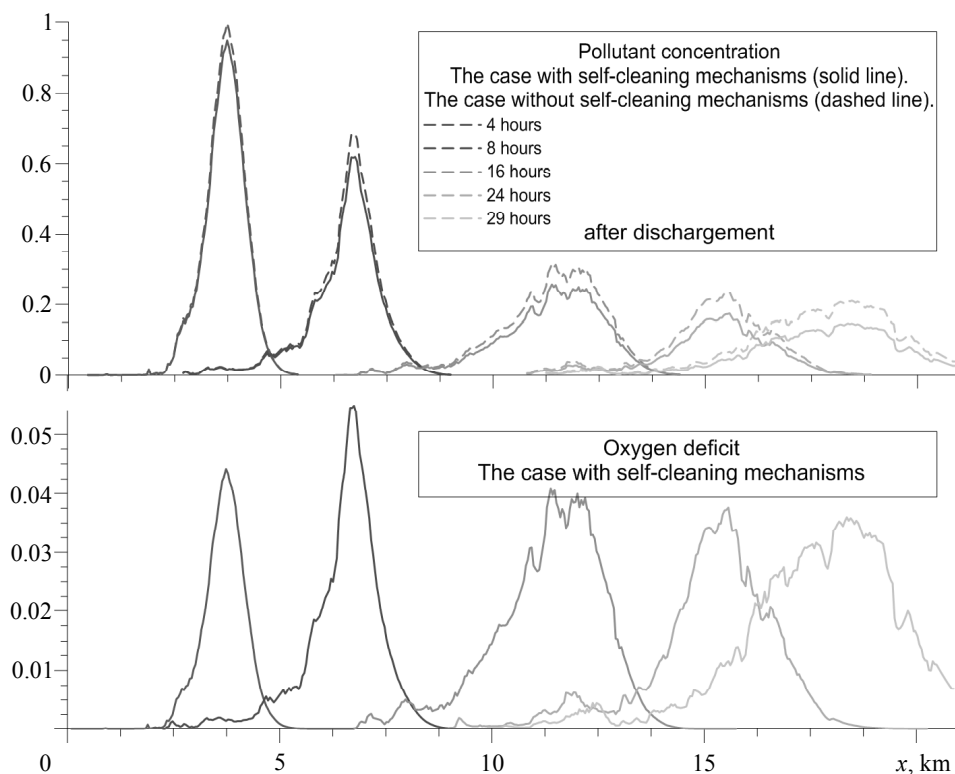


Fig. 8. Variation of the width-averaged values of concentration and oxygen deficit with time

The initial value of the oxygen deficit is set to zero in order to consider that the concentration of the dissolved oxygen is enough to initiate a self-cleaning process. With oxidizing, the deficit increases and reaches a maximum value of 5 mg/l at $t = 8$ h when the oxidation process is the most intensive and then decreases as a result of the decrease in the concentration of the organic matter in the water and reaeration.

Permanent Source Emission

The tributaries of the Tom River flow through the urbanised territory and collect drainage water with a high concentration of organic pollutants (phenol and petrochemicals). The case with permanent sources of pollution at the mouths of the Ushaika and Basandaika rivers was computed to investigate distribution of the pollution that comes to the Tom River from its tributaries. In this case concentration of the pollutant discharged is 10 mg/l.

The intensity of the pollution discharge from the Ushaika is more than that from the Basandaika because its flow rate is larger. The distribution of pollutant near the discharges is significantly non-uniform along the cross section of the river because the tributaries' flow rates are much less than the flow rate in the Tom. Pollution is transported mainly along the bank of the river where tributaries inflow. Near the inflows, concentration of the pollutant is maximal. Moving downstream, pollution is dispersed more uniformly due to the significant turbulence mixing in the river stream.

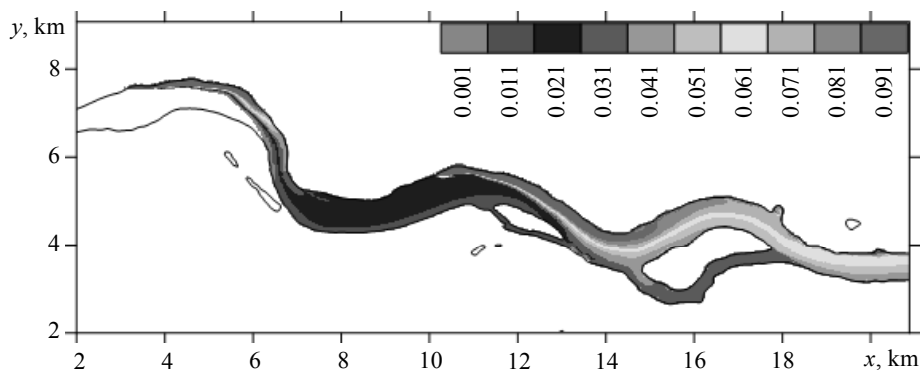


Fig. 9. Concentration of a pollutant discharged from the inflows

Oxygen deficit distribution shown in Figure 10 mainly follows the picture of pollutant concentration – increases in areas with higher concentration due to the intensity of the oxidising process and decreases where there is not much pollutant. Oxygen deficit also high in the recirculation zone after the second bend, indicating a higher concentration of the pollutant there.

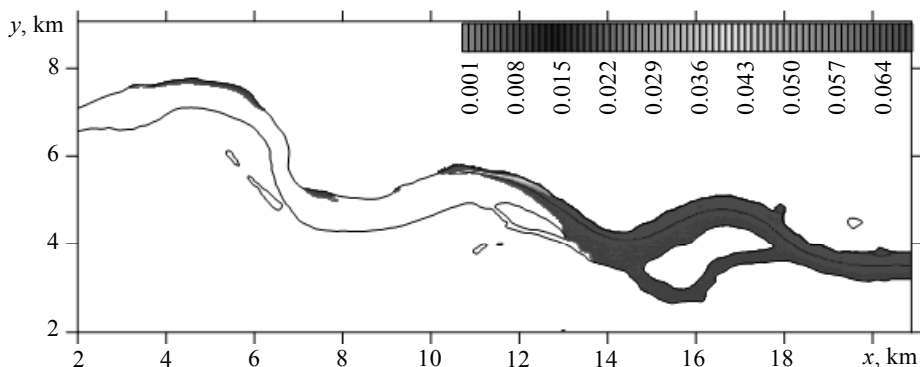


Fig. 10. Oxygen deficit induced by a pollutant discharged from the inflows

To evaluate the influence of the turbulence on pollutant transport, the permanent source emission case was computed without considering turbulence in both the pollutant transport equation and modified dissolved oxygen sag equation. Comparison of the results obtained shows that in the case without the turbulence accounted for, concentration of the pollutant near sources is 15–25% greater because of smaller diffusion in the stream. This quantitative estimate was made in the cross section of the river at $x = 12000$ m.

Conclusions

Recirculating areas are of particular interest for this research because they tend to accumulate pollution. The mathematical model constructed allows identifying both areas with large convective flux and those with intensive turbulent mixing due to large eddy viscosity. The computed fields of the velocity and depth obtained for the Dommel

River show good agreement with measured values, which confirms that the model constructed correctly represents flow in a curved shallow river. Computed values for the velocity and concentration fields in the Tom River show the significant role of the turbulence in the flow structure and in distributing pollutants. Computed values of the concentration have valuable non-uniform distribution along a cross section of the river, so that a mathematical model with two spatial coordinates should be used to obtain correct and detailed data about the distribution of the pollutant.

With precise bathymetric data, the approach proposed could be used to produce a detailed description of the current structure of the river stream and a quantitative forecast for the distribution of the pollutants in the stream.

Acknowledgements

The authors wish to thank Jean Kollantai of Tomsk State University for her assistance with style.

REFERENCES

1. Kuipers J. and Vreugdenhil C.B. (1973) *Calculations of two-dimensional horizontal flow*. Delft Hydraulic laboratory, Delft, Report on basic research S 163.
2. Marchuk A.G. (2015) Computing of tsunami heights above the inclined bottom relief within the wave-ray approach. *Siberian Journal of Numerical Mathematics*. 18(4). pp. 377–388 [in Russian].
3. Sauvaget P., David E., and Soares C. (2000) Modelling tidal currents on the coast of Portugal. *Coastal Engineering*. 40. pp. 393–409.
4. Castro Diaz M.J., Fernandez-Nieto E.D., Ferreira A.M. (2007) Sediment transport models in Shallow Water equations and numerical approach by high order finite volume methods // *Computers & Fluids*. 37. pp. 299–316.
5. Kruker L.A. (2000) Mathematical modeling of hydrodynamic processes in Azov Sea. *Patterns of Oceanographic and Biological Processes in Azov Sea*. Apatity: KSC RAS. pp. 129–163 [in Russian].
6. Chikin A.L. (2001) Construction and numerical investigation of the 3D hydrodynamic model of Azov sea. *Proceedings of International Conference RDAMM-2001*. 6(4). pp. 686–692 [in Russian].
7. Shabas I.N. (2014) Mathematical modeling of the transport of multicomponent contaminant in Azov sea on multiprocessor systems. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 12(161). pp. 200–210 [in Russian].
8. Yu L., Zhu S.P. (1993) Numerical simulation of discharged waste heat and contaminants into the south estuary of the Yangtze River. *Mathematical and Computer Modelling*. 18(12). pp. 107–123.
9. Olsen N.R.B., Stokseth S. (1995) Three-dimensional numerical modelling of water flow in a river with large bed roughness. *Journal of Hydraulic Research*. 33. pp. 571–581.
10. Hou J., Simons F., Mahgoub M., and Hinkelmann R. (2013) A robust well-balanced model on unstructured grids for shallow water flows with wetting and drying over complex topography. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 257. pp. 126–149.
11. Cea L., Puertas J., and Vazquez-Cendon M.E. (2007) Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 14(3). pp. 303–341.
12. Zinov'ev A.T., Marusin K.V., Shibkih A.A., Shlychkov V.A., Zatinatskij M.V. (2006) Mathematical modeling of the flow dynamics and bed deformations on the section of Ob' river near the city of Barnaul. *Polzunovskij vestnik*. 2. pp. 204–209 [in Russian].
13. Zinov'ev A.T., Marusin K.V., Shibkih A.A., Shlychkov V.A., Zatinatskij M.V. (2006) Modeling of bed processes to evaluate results of dredging the river bed. *Polzunovskij vestnik*. 2. pp. 197–203 [in Russian].

14. Lyubimova T.P., Lepihin A.P., Parshakova YA.N., Tiunov A.I. (2010) Numerical modeling of dilution of highly mineralized brines in turbulent flows. *Computational continuum mechanics*. 4(3). pp. 68–79 [in Russian].
15. Karepova E.D. (2008) Modeling of the unsteady flow in the lower pool of the Boguchany HES. *Computational Technologies*. 13(2). pp. 28–38.
16. Belolipetskij V.M., Genova S.N., Petrashkevich V.I. (2001) Numerical modeling of pollutant transport in a river flow. *Proceedings of International conference RDAMM-2001*. pp. 127–133 [in Russian].
17. Finaud-Guyot P., Delenne C., Guinot V., and Llovel C. (2011) 1D–2D coupling for river flow modeling. *Comptes Rendus Mecanique*. 339. pp. 226–234.
18. Fernandez-Nieto E.D., Marin J., and Monnier J. (2010) Coupling superposed 1D and 2D shallow-water models: Source terms in finite volume schemes. *Computers & Fluids*. 39. pp. 1070–1082.
19. Bulatov O.V., Elizarova T.G.: (2011) Regularized shallow water equations and an effective method for numerical modeling of the flow in shallow basins. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1(51). pp. 170–184 [in Russian].
20. Kang S., Lightbody A., Hill C., and Sotiropoulos F. (2011) High-resolution numerical simulation of turbulence in natural waterways. *Advances in Water Resources*. 34. pp. 98–113.
21. Kang S., Sotiropoulos F. (2012) Numerical modeling of 3D turbulent free surface flow in natural waterways. *Advances in Water Resources*. 40. pp. 23–36.
22. Sandiv S.K., Sotiropoulos F., Odgaard A.J. (1998) Three-dimensional numerical model for flow through natural rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*. 124 (1). pp. 13–24.
23. Rodi W. (1984) Models of turbulence in the environment. *Methods of Measuring Turbulent Flows*. pp. 276378 [in Russian].
24. Babarutsi S., Chu V.H. (1998) Modelling transverse mixing layer in shallow open-channel flows. *Journal of Hydraulic Engineering*. 7(124). pp. 718–727.
25. Yu L., Righetto A.M. (2001) Depth-averaged k-omega turbulence model and application. *Advances in Engineering Software*. 32. pp. 375–394.
26. Rastogi A.K., Rodi W. (1978) Predictions of heat and mass transfer on open channels. *J. Hydraul. Div. HY*. pp. 397–420.
27. Kim S.E., Choudhury D. (1995) A near-wall treatment using wall functions sensitized to pressure gradient. *ASME FED. 217, Separated and Complex Flows*.
28. Yakhot V., Orszag S.A., Tangam S., Gatski T.B., and Speziale C.G. (1992) Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys. Fluids A*. 4(7). pp. 1510–1520.
29. Wu W., Wang P., and Chiba N. (2004) Comparison of five depth-averaged 2-D turbulence models for river flows. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*. 51(2). pp. 183–200.
30. Babarutsi S., Nassiri M., and Chu V.H. (1996) Computation of shallow recirculating flow dominated by friction. *Journal of Hydraulic Engineering*. 122(7). pp. 367–372.
31. Barbarutsi S., Chu V.H. (1991) A two-length-scale model for quasi two-dimensional turbulent shear flows. *Proc 24th congr of IAHR*. C. pp. 51–60.
32. River2D Hydrodynamic Model for Fish Habitat [Resource]. River2D: [website]. [2002]. URL: <http://www.river2d.ualberta.ca/>.
33. Churuksaeva V.V., Starchenko A.V. (2015) A mathematical model and numerical method for computation of a turbulent river stream. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(38). pp. 100–114 [in Russian].
34. Gromova V.V., Mihailov M.D. (2011) Numerical modeling of self-cleaning processes in the river accounting for additional wastewater treatment. *Current problems in mathematics and mechanics: The second state young scientists conference devoted to the 90th anniversary from the day of academician N.N. Yanenko's birthday (October 12–14, 2011)*. pp. 254–259 [in Russian].
35. Launder B.E., Spalding D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2(3). pp. 269–289.

36. Vavilin V.A. (1983) *Nelineynye modeli biologicheskoy ochistki i protsessov samoochishcheniya v rekakh* [Nonlinear models of biological wastewater treatment and self-cleaning processes in rivers]. Moscow: Nauka [in Russian].
37. Cada M., Torrilhon M. (2009) Compact third-order limiter functions for finite volume methods. *Journal of Computational Physics*. 228. pp. 4118–4145.
38. Harten A. (1983) High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*. 49. pp. 357–393.
39. Patankar S.V. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. Washington, DC: Hemisphere Publishing Corporation.
40. de Vriend H.J. and Geldof H.J. (1983) *Main flow velocity in short and sharply curved river bends*. Department of Civil Engineering Delft University of Technology. Delft. 83.
41. Chow V.T. (1959) *Open Channel Hydraulics*. New York: McGraw-Hill.
42. Zav'yalov Y.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. (1980) *Metody splayn-funktsiy* [Methods of spline functions]. Moscow: Nauka [in Russian].
43. Tarasov A.S., Vershinin D.A. (2015) Building a predictive model of ice jam occurrence on the branched site of the tom river with hydrological computer modelling. *Tomsk State University Journal*. 390. pp. 218–224 [in Russian].
44. L'gotin V.A., Makushin Y.V., Savichev O.G. (2005) *Information Resources. Tomskgeomonitoring Regional Center*. URL: <http://www.tgm.ru> [in Russian].

Received: December 27, 2019

Vladislava V. CHURUKSAEVA (Candidate of Physics and Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chu.vv@mail.ru

Alexander V. STARCHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: starch@math.tsu.ru

Churksaeva V.V., Starchenko A.V. (2020) NUMERICAL MODELLING OF POLLUTION TRANSPORT IN TOM RIVER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 48–62

DOI 10.17223/19988621/64/4

МЕХАНИКА

УДК 539.375

DOI 10.17223/19988621/64/5

В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, О.В. Инченко, А.А. Маркин

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ
АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ В СЛОИСТОМ КОМПОЗИТЕ¹

Исследуется сдвиговое нагружение тонкого адгезионного слоя в слоистом композите. На основе общей вариационной постановки и ее упрощенных постановок в дифференциальном виде получены численные и аналитические решения напряженно-деформированного состояния слоя. Показано, что, используя в качестве критерия разрушения адгезионного слоя произведение приращения его удельной свободной энергии на толщину, называемое энергетическим произведением, возможно проводить прочностные расчеты, принимая значение толщины из некоторого диапазона. При этом величина энергетического произведения практически не изменяется.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, вариационное уравнение, метод конечных элементов, энергетическое произведение

Слоистые композиционные материалы имеют важное значение в машиностроении, авиационной и ракетной технике. Поэтому для механики деформируемого твердого тела актуально построение моделей плоских слоистых материалов, в которых рассматриваются тела, объединенные в композит адгезионным слоем (АС) [1–4].

В слоистых композитах толщина адгезионного слоя (АС) является естественным линейным параметром (ЛП). В зависимости от толщины адгезионного слоя (ядра), относительной жесткости между ядром и сопрягаемыми телами, граничных условий применяют те или иные модели. Постановка и решение задач, учитывающих изгибную жесткость ядра слоистого композита, предложена в работах [5–7]. Так, в работах [5, 6] деформация обжатия ядра полагается постоянной по толщине, а в работе [7] – линейной.

В настоящее время основным подходом в этом направлении является моделирование АС слоем нулевой толщины и использование критериальной базы механики квазихрупкого разрушения [8–12]. В этом случае, как правило, пренебрегают толщиной адгезива, а его механические свойства сводятся к силам взаимодействия склеенных материалов, которые могут иметь разные механические [13] или прочностные свойства [14, 15]. Однако, в этом случае теряется различие между когезионным разрушением АС (по его массиву) и адгезионным механизмом отслоения. Особая роль в этих моделях отводится определению адгезионных сил взаимодействия [16]. Кроме того, если сопрягаемые материалы контактируют не

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и правительства Тульской области в рамках научного проекта № 19-41-710001 p_a, и при финансовой поддержке РФФИ проект № 18-31-20053.

по всей длине, в модели будет присутствовать сингулярность. Аналитические решения для тел конечных размеров в этом случае получаются, как правило, в рамках упрощающих гипотез [17–21]. В работе [22] для консоли с центральной трещиной на основе гипотез теории пластин получено аналитическое решение задачи и на его основе в [23] исследовано значение J -интеграла.

Для случая, когда учитывается размер АС при незначительной его изгибной жесткости, отметим модели с введением «мягкого слоя» [1, 24, 25] и слоя взаимодействия [26–28]. В данных моделях размер АС существенно меньше сопрягаемых им тел, кроме того, отметим, что он не является постоянной величиной в готовой продукции. В этом случае речь может идти об определенном допуске или диапазоне значений, в рамки которого укладывается толщина АС в образцах. Для нахождения напряженно-деформированного состояния (НДС) и связанного с ним критического состояния в рамках известных локальных критериев необходимо знать значение толщины АС, что проблематично. Поэтому представляется рациональным использовать критерий разрушения, независимый от толщины АС в определенном диапазоне ее изменения. В работе [29] было введено понятие энергетического произведения (ЭП) для материального слоя в виде произведения приращения удельной свободной энергии и толщины слоя. В данной работе, для случая сдвигового воздействия на АС, рассматривается зависимость ЭП от толщины слоя в зоне обрыва связей АС с сопрягаемыми телами при упругом деформировании. Показано, что, рассматривая ЭП в качестве критерия разрушения, можно проводить расчеты на прочность тонкого по сравнению с толщинами сопрягаемых тел АС, используя в качестве его толщины фиксированное значение из некоторого диапазона.

Постановка задачи

Рассматривается композитная пластина, состоящая из двух консолей 1 и 2 длиной $\ell + a$, в общем случае с разными толщинами h_1 и h_2 , сопряженными адгезионным слоем 3 толщиной δ_0 по длине ℓ согласно рис. 1. Один торец пластины жестко заделан от перемещений. На противоположных торцах консолей действует горизонтальная распределенная нагрузка постоянной интенсивности с противоположными векторами напряжений $\mathbf{P}$. Вся остальная поверхность пластины свободна от напряжений.

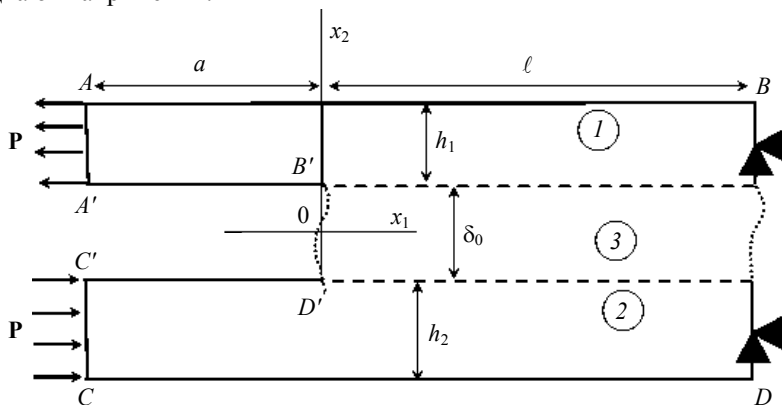


Рис. 1. Схема нагружения композитной пластины
Fig. 1. Schematic diagram of a composite plate loading

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия», развитую в работах [26–29]. В этом случае равновесие тел 1 и 2, согласно [26, 29], запишем в вариационной форме для тела 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl \quad (1)$$

и тела 2:

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + 0.5 \delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (2)$$

где L_1, L_2 – контуры приложения внешней нагрузки в телах 1 и 2; $\cdot$ – скалярное умножение; $\cdot \cdot$ – двойное скалярное умножение; S_1, S_2 – площади поперечных сечений тел 1 и 2; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} + \frac{du_1^-(x_1)}{dx_1} \right), \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} + \frac{du_2^-(x_1)}{dx_1} \right) \right), \quad (4)$$

где u_k^+, u_k^- – соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя; $k = 1, 2$ здесь и далее. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2, а также равенство модулей и противоположность направлений векторов напряжений по границам слоя:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}(x_1, \delta_0/2); & \sigma_{2i}^+ \mathbf{e}_i &= -\sigma_{2i}(x_1, \delta_0/2) \mathbf{e}_i; \\ \mathbf{u}^- &= \mathbf{u}(x_1, -\delta_0/2); & \sigma_{2i}^- \mathbf{e}_i &= -\sigma_{2i}(x_1, \delta_0/2) \mathbf{e}_i; \quad x_1 \in [0; \ell]. \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_{2i}^+, \sigma_{2i}^-$ – граничные напряжения слоя; $\mathbf{e}_i, i = 1, 2$, – орты осей координат.

Уравнения (1) и (2) замкнем определяющими соотношениями:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1 + \nu_k} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad (6)$$

где E_k, ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона k -го тела; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемное расширение; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right). \quad (7)$$

Таким образом, решение системы (1) – (7) сводится к определению поля перемещений $u(x_1, x_2)$ в телах 1 и 2 (см. рис. 1) при заданных граничных условиях:

$$\text{на участках } AB, CD, A'B', C'D': \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0; \quad (8)$$

$$\text{на участке } AA': \sigma_{11} = P; \sigma_{12} = 0; \quad (9)$$

$$\text{на участке } CC': \sigma_{11} = -P; \sigma_{12} = 0; \quad (10)$$

$$\text{на участке } BD: u_1 = u_2 = 0. \quad (11)$$

Постановка задачи (1) – (11) не содержит угловых точек в зоне обрыва связей консолей с АС в силу рассмотрения средних по толщине слоя характеристик НДС, и задача может быть решена при ограниченных значениях напряжений.

Постановка задачи с ограничениями

Для упрощения задачи и получения аналитического решения принимаем, что поле перемещений в телах 1 и 2, с учетом условия (5), определено следующим образом:

$$u_1^{(1)}(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi_1(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad u_2^{(1)}(x_1, x_2) = u_2^+(x_1); \quad (12)$$

$$u_1^{(2)}(x_1, x_2) = u_1^-(x_1) - \varphi_2(x_1)(x_2 + \delta_0/2), \quad u_2^{(2)}(x_1) = u_2^-(x_1). \quad (13)$$

Входящие в представления (12) и (13) параметры φ_k имеют геометрический смысл малых углов поворота материальных нормалей к плоскостям $x_2 = \pm \delta_0/2$ в телах 1 и 2. Согласно распределению (12), (13), отличные от нуля деформации в теле 1 будут определяться в виде

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi_1'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{21}^{(1)} = 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi_1(x_1) \right), \quad (14)$$

а в теле 2 –

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{du_1^-(x_1)}{dx_1} - \varphi_2'(x_1)(x_2 + \delta_0/2), \quad \varepsilon_{12}^{(2)} = \varepsilon_{21}^{(2)} = 0.5 \left(\frac{du_2^-(x_1)}{dx_1} - \varphi_2(x_1) \right). \quad (15)$$

Выражения (14), (15), как и теория Тимошенко [20], учитывают сдвиговые деформации и повороты нормалей в телах 1 и 2.

Условие (11), с учетом (12), (13), приводит к следующим ограничениям на компоненты векторов перемещений границ слоя и функций φ_1 и φ_2 :

$$u_k^\pm(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, \quad \varphi_k(x_1)|_{x_1=\ell} = 0. \quad (16)$$

Из (1) и (2), с учетом представлений полей деформаций (14), (15), приходим к системе дифференциальных уравнений для двух тел на участке $x_1 \in [-a; 0]$, где их взаимодействие отсутствует:

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} = 0; \\ \frac{dM_{11}^{(2)}}{dx_1} - Q_{12}^{(2)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(2)}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}^{(2)}}{dx_1} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Взаимодействие тел, связанных слоем на участке $x_1 \in (0; \ell]$, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21}; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; \\ \frac{dM_{11}^{(2)}}{dx_1} - Q_{12}^{(2)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{21}; & \frac{dQ_{12}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{22}. \end{cases} \quad (18)$$

Условия сопряжения уравнений (17), (18) при $x_1 = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} u_k^\pm, \Phi_k|_{x_1=0} &= u_k^\pm, \Phi_k|_{x_1=+0}; \\ Q_{1k}^{(1)}|_{x_1=0} &= Q_{1k}^{(1)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{1k}|_{x_1=+0}; \\ M_{11}^{(k)}|_{x_1=0} &= M_{11}^{(k)}|_{x_1=+0}; \\ Q_{1k}^{(2)}|_{x_1=0} &= Q_{1k}^{(2)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{1k}|_{x_1=+0}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $Q_{1k}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{1k}^{(1)} dx_2$, $Q_{1k}^{(2)}(x_1) = \int_{-h_2-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \sigma_{1k}^{(2)} dx_2$ – обобщенные силы;
 $M_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}^{(1)}(x_2 - \delta_0/2) dx_2$, $M_{11}^{(2)}(x_1) = \int_{-h_2-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \sigma_{11}^{(2)}(x_2 + \delta_0/2) dx_2$ – обобщенные моменты.

Исходя из определяющих соотношений (6), (7), выражений деформаций (14), (15), а также представления обобщенных сил и моментов, условия равновесия (17), (18) сводятся к замкнутым системам дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных функций: $u_k^\pm, \Phi_k$ с условиями сопряжения (19).

Построение частных решений

Рассмотрим решение поставленной задачи в случае плоской деформации для консолей с одинаковыми механическими свойствами $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$ и высотами $h_1 = h_2$. В этом случае на неизвестные функции наложим связи $u_1^+ = -u_1^-$, $\Phi_1 = -\Phi_2$, $u_2^+ = u_2^-$. Для решения задачи достаточно рассмотреть только систему уравнений (17), (18) для тела 1 на участке $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; \quad \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0; \quad \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} = 0 \quad (20)$$

и на участке $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; \quad \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21}; \quad \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22} \quad (21)$$

при следующих выражениях обобщенных сил и обобщенного момента:

$$Q_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2 = Dh \left(u_1^{+'} - \frac{h}{2} \varphi_1' \right); \quad (22)$$

$$Q_{12}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2 = Lh \left(u_2^{+'} - \varphi_1 \right); \quad (23)$$

$$M_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} (x_2 - \delta_0/2) dx_2 = Dh^2 \left(\frac{u_1^{+'}}{2} - \frac{h}{3} \varphi_1' \right), \quad (24)$$

где $D = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$; $L = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$.

Принимая закон распределения перемещений границ слоя из (12), (13), получим выражения средних напряжений в виде

$$\bar{\sigma}_{11} = 0; \quad (25)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = 0; \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = L_1 \left(\frac{2u_1^{+}}{\delta_0} + u_2^{+'} \right), \quad (27)$$

где $L_1 = \frac{E_3}{2(1+\nu_3)}$.

Рассмотрим правую часть уравнения (1). Работа внешних напряжений с учетом (8), (9) и (12) равна

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl &= - \int_{h+\delta_0/2}^{\delta_0/2} \left(P \delta \left(u_1^{+}(x_1) - \varphi_1(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right) + 0 \delta u_2^{+} \right) (-dx_2) \Big|_{x_1=-a} = \\ &= -Ph \delta u_1^{+} \Big|_{x_1=-a} + \frac{Ph^2}{2} \delta \varphi_1 \Big|_{x_1=-a} + 0 \delta u_2^{+} \Big|_{x_1=-a}. \end{aligned} \quad (28)$$

Граничные условия для системы (20), (21), с учетом (28) и (16), запишем в виде

$$Q_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} = Ph; \quad (29)$$

$$Q_{12}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} = 0; \quad (30)$$

$$M_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} = \frac{Ph^2}{2}; \quad (31)$$

$$u_1^{+} \Big|_{x_1=\ell} = 0; \quad (32)$$

$$u_2^{+} \Big|_{x_1=\ell} = 0; \quad (33)$$

$$\varphi_1 \Big|_{x_1=\ell} = 0. \quad (34)$$

Из (20), с учетом (29) – (31), находим распределение перемещений и угла поворота на участке $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\varphi_1 = \frac{6(C_1 - C_2)}{h}; \quad (35)$$

$$u_1^+ = 4C_1 - 3C_2 + \frac{P}{D} x_1; \quad (36)$$

$$u_2^+ = \frac{6(C_1 - C_2)}{h} x_1 + C_3, \quad (37)$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные.

Из (21), с учетом (32) – (34), находим распределение перемещений и угла поворота на участке $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\varphi_1 = C_4 e^{\lambda_1 x_1} + C_5 e^{\lambda_2 x_1} - C_1 \left(\frac{2M_1 + m_4}{k^2} + M_1 (x_1^2 - \ell^2) \right) + C_6 M_1 (\ell - x_1); \quad (38)$$

$$\begin{aligned} u_1^+ = & \frac{2hs}{3} \left(C_4 \left(e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 \ell} \left(1 + \frac{M_1}{m_5} (x_1^2 - \ell^2) \right) \right) + \right. \\ & + C_5 \left(e^{\lambda_2 x_1} - e^{\lambda_2 \ell} \left(1 + \frac{M_1}{m_5} (x_1^2 - \ell^2) \right) \right) + C_6 M_1 (\ell - x_1) \Big) + \\ & + \frac{C_4 e^{\lambda_1 \ell} + C_5 e^{\lambda_2 \ell}}{s_1 m_5} (x_1^2 - \ell^2) + \frac{C_6}{s_1} (x_1 - \ell); \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} u_2^+ = & \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta_0 L_1}{2hL}} - \frac{1}{\left(\frac{L}{L_1} + \frac{\delta_0}{2h} \right)} \frac{2s}{3} \right) \times \\ & \times \left(\frac{C_4}{\lambda_1} \left(e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 \ell} \right) + \frac{C_5}{\lambda_2} \left(e^{\lambda_2 x_1} - e^{\lambda_2 \ell} \right) - C_4 e^{\lambda_1 \ell} \left(x_1 - \ell + \frac{M_1}{m_5} \left(\frac{x_1^3}{3} - \ell^2 x_1 + \frac{2}{3} \ell^3 \right) \right) \right) - \\ & - C_5 e^{\lambda_2 \ell} \left(x_1 - \ell + \frac{M_1}{m_5} \left(\frac{x_1^3}{3} - \ell^2 x_1 + \frac{2}{3} \ell^3 \right) \right) + C_6 M_1 \left(\ell x_1 - \frac{x_1^2}{2} - \frac{\ell^2}{2} \right) - \\ & - \frac{C_4 e^{\lambda_1 \ell} + C_5 e^{\lambda_2 \ell}}{m_5 \left(Lh + \frac{\delta_0 L_1}{2} \right)} \left(\frac{L_1}{s_1} \left(\frac{x_1^3}{3} - \ell^2 x_1 + \frac{2}{3} \ell^3 \right) - x_1 + \ell \right) + \frac{C_6 L_1}{s_1 \left(Lh + \frac{\delta_0 L_1}{2} \right)} \left(\ell x_1 - \frac{x_1^2}{2} - \frac{\ell^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

где $s = \left(1 + \frac{3\delta_0}{4h} \right) / \left(1 + \frac{\delta_0}{h} \right)$; $s_1 = \frac{Dh^2}{2} \left(1 + \frac{\delta_0}{h} \right)$; $k^2 = \frac{L_1}{m} \left(\frac{2hsm_1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{\delta_0 L_1}{2hL}} \right)$;

$$M_1 = \frac{m_2}{k^2}; \quad m = h^2 D \left(\frac{2s}{3} - \frac{1}{2} \right); \quad m_1 = \frac{2}{\delta_0} - \frac{1}{h \left(\frac{L}{L_1} + \frac{\delta_0}{2h} \right)}; \quad m_2 = \frac{m_1 L_1}{ms_1};$$

$$m_3 = \frac{L_1}{m \left(Lh + \frac{\delta_0 L_1}{2} \right)} - \frac{2Dh}{s_1 m} - m_2 \ell^2; \quad m_4 = \frac{L_1}{m \left(Lh + \frac{\delta_0 L_1}{2} \right)} - \frac{2Dh}{s_1 m}; \quad m_5 = \frac{2M_1 + m_4}{k^2}.$$

Решение (38) – (40) получено при следующем ограничении: $\left(\frac{2s}{3} - \frac{1}{2}\right) > 0$.

В этом случае $k^2 > 0$ и $\lambda_1 = -k$, $\lambda_2 = k$.

Для выражений (35) – (37), (38) – (40), с учетом шести условий сопряжения (19) для консоли I , определим шесть постоянных интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ из решения системы линейных уравнений.

Рассмотрим упрощение постановки задачи в виде (20), (21), положив в аппроксимации поля перемещений (12), (13) $\varphi_1 = -\varphi_2 = 0$; $u_2^+ = u_2^- = 0$. В этом случае система уравнений (20), (21) сводится к одному уравнению на участке $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0 \quad (41)$$

и на участке $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21} \quad (42)$$

с граничными условиями

$$Q_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} = Ph; \quad (43)$$

$$u_1^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0 \quad (44)$$

и условиями сопряжения участков консоли

$$\begin{aligned} u_1^+ \Big|_{x_1=0} &= u_1^+ \Big|_{x_1=+0}; \\ Q_{1k}^{(1)} \Big|_{x_1=0} &= Q_{1k}^{(1)} \Big|_{x_1=+0}. \end{aligned} \quad (45)$$

Решение (41) – (45) на участке консоли, сопряженном со слоем, получено в виде

$$u_1^+ = \frac{Pe^{q_2 x_1}}{q_2 D (1 + e^{(q_2 - q_1)\ell})} \left(1 - e^{(q_2 - q_1)(\ell - x_1)}\right), \quad (46)$$

где $q_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2L_1}{hD\delta_0}}$.

Результаты решений

Проведем сравнение полученных аналитических решений в рамках упрощающих гипотез и численного решения задачи (1) – (11), полученного методом конечных элементов (МКЭ) с квадратичным законом распределения поля перемещений на элементе.

В качестве исследуемого композита рассмотрим образец с механическими характеристиками консолей, соответствующими сплаву Д16, имеющие модуль упругости $E_1 = E_2 = 7.3 \cdot 10^{10}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Механические свойства АС выбираем соответствующие эпоксидной смоле: $E_3 = 3.1 \cdot 10^9$ Па, $\nu_3 = 0.2$. Геометрические характеристики выбираем следующими: $h_1 = h_2 = 0.03$ м; $\ell = 0.1$ м; $a = 0.05$ м; $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м. Распределенная внешняя нагрузка бралась единичной $P = 1$ Па.

На рис. 2 построены графики горизонтальных перемещений верхней границы АС. График 1 построен для случая решения задачи МКЭ, график 2 – по формуле (39), а график 3 соответствует решению (46). Для конечноэлементного решения (КЭР) размер грани конечного элемента (КЭ) в зоне обрыва связей с АС выбирался равным толщине слоя. Решения отнесены к модулю значения перемещения на торце слоя в КЭР. Координата x_1 отнесена к толщине слоя δ_0 .

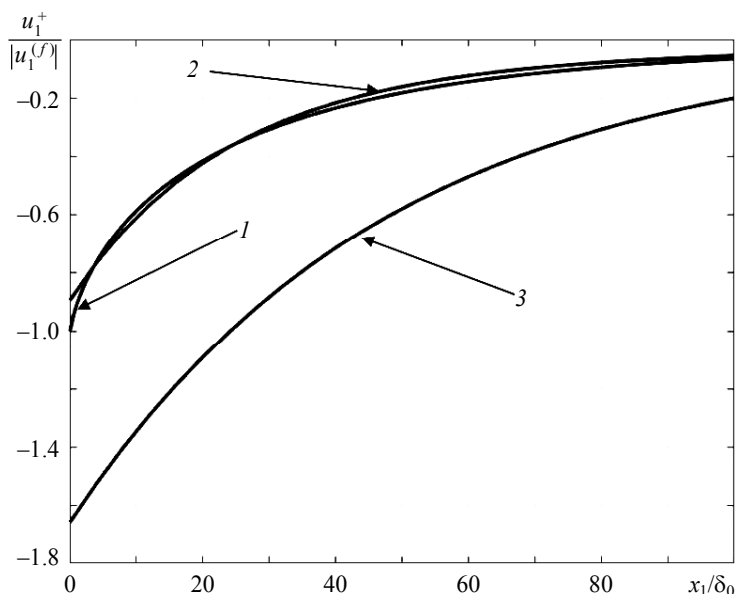


Рис. 2. Горизонтальные перемещения границы слоя
Fig. 2. Horizontal displacements of the layer boundary

Как видно из представленных графиков, решения 1 и 2 практически совпадают, что указывает на важность учета сдвиговых напряжений в консолях.

На рис. 3 рассмотрены вертикальные перемещения слоя при КЭР и при решении в виде (40). Решения отнесены к модулю значения перемещения на торце слоя в КЭ, а координата x_1 отнесена к толщине слоя δ_0 . Как и в случае с горизонтальными перемещениями, имеет место близость решений. Данное обстоятельство позволяет проводить анализ НДС слоя при малых относительно высоты консоли толщинах слоя в рамках решений (39), (40). Прямое КЭР задачи (1) – (11) в этом случае сопряжено с большим объемом вычислений при требовании соответствия размера грани КЭ толщине слоя.

Следуя работе [29], введем в рассмотрение ЭП:

$$2\gamma = \delta_0 \psi,$$

где ψ – приращение удельной свободной (упругой) энергии. Для рассматриваемого случая распределения средних по слою напряжений (27) – (29) имеем

$\psi = 0.5L_1 \left(\frac{2u_1^+}{\delta_0} + u_2^{+'} \right)^2$ для решений (39) – (40) и $\psi = 0.5L_1 \left(\frac{2u_1^+}{\delta_0} \right)^2$ – для упрощенного решения (46).

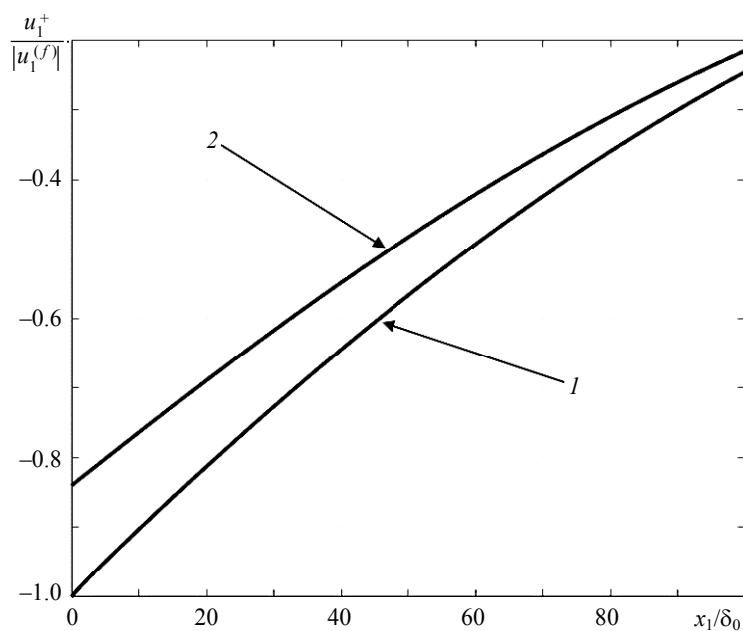


Рис. 3. Вертикальные перемещения границы слоя
Fig. 3. Vertical displacements of the layer boundary

На рис. 4 построена зависимость относительного ЭП γ^* на торце слоя от десятичного логарифма отношения δ_0/h для рассматриваемой нагрузки. График 1 соответствует решению (39), (40), а график 2 – решению (46). Значения ЭП отнесены к значению ЭП для упрощенного решения.

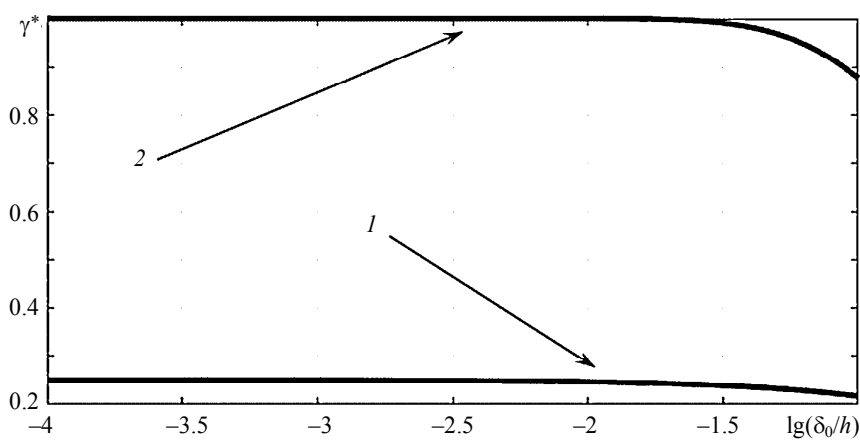


Рис. 4. ЭП на торце слоя
Fig. 4. Energy product (EP) at the end of the layer

Из графиков видно, что при отношении $\delta_0/h \leq 10^{-2}$ значение ЭП практически не меняется. Следовательно, результаты расчетов ЭП при толщинах слоя $\delta_0 \leq 10^{-2}h$ будут приводить к одним значениям. Однако значения ЭП при использовании упрощенной схемы будут существенно превышать значения, вычисленные с учетом сдвиговых деформаций в консолях.

Заключение

На основе вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, сопряженных тонким слоем, получены упрощенные постановки задач в дифференциальном виде. Из сравнения упрощенных аналитических решений с конечноэлементным решением показано, что учет сдвиговых напряжений в сопрягаемых телах вносит существенный вклад в формирование НДС слоя при рассматриваемом нагружении. При этом распределения полей перемещений границы АС, в рамках КЭ решения и упрощенного аналитического решения на основе гипотез типа Тимошенко, оказались близки друг к другу. Из найденных аналитических распределений полей перемещений границы АС получены зависимости ЭП на торце слоя от отношений толщины слоя к толщине консоли. Таким образом, рассматривая критическое значение ЭП в качестве критерия разрушения тонкого АС, можно в определенном диапазоне проводить расчеты без фиксации значения толщины АС. В этом случае методика расчета критического состояния АС может быть следующей. В образце с заданными геометрическими и механическими характеристиками при $\delta_0^* = \delta_0/h \leq 10^{-2}$ из эксперимента определяется внешняя критическая нагрузка. По данной нагрузке находится критическое значение ЭП. Для образцов, выбирая любой относительный параметр из диапазона $\delta_0^* \leq \delta_0$, при данном виде нагружения можно найти критическую внешнюю нагрузку, сопоставляя значение ЭП на торце слоя с критическим. Вопрос об универсальности предлагаемого критерия может быть решен экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. Allen H.G., Feng Z. Classification of Structural Sandwich Panel Behaviour // *Mechanics of Sandwich Structures*. Dordrecht: Springer, 1998. P. 1–12.
4. Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tsuchkova N. Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions // *Acta Mechanica*. 2016. V. 227. P. 127–138. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1422-3>.
5. Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2016. V. 58. P. 172–186. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.01.015>.
6. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Composite Structures*. 2016. V. 137. P. 140–147.
7. Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams // *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2017. V. 61. P. 393–407. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.10.012>.

8. Гольдиштейн Р.В., Осипенко Н.М. Отслоение покрытий под действием термоупругих напряжений (Балочное приближение) // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Т. 54. №4. С. 66–83.
9. Sheinman I., Kardomateas G. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates // International Journal of Solids and Structures. 1997. V. 34. No. 4. P. 451–459. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(96\)00018-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(96)00018-2).
10. Storakers B., Andersson B. Nonlinear plate theory applied to delamination in composites // Journal of Mechanics and Physics Solids. 1988. V. 36. No. 6. P. 689–718. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(88\)90004-X](https://doi.org/10.1016/0022-5096(88)90004-X).
11. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины эквивалентной слою // Изв. РАН. МТТ. 2015. Т. 50. № 1. С. 75–95.
12. Evans A.G., Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling on compressed films // International Journal of Solids and Structures. 1984. V. 20. No. 5. P. 455–466. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90012-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90012-X).
13. Астапов И.С., Астапов Н.С., Корнев В.М. Модель расслоения композита при поперечном сдвиге // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21. № 2. С. 149–161.
14. Baldan A. Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance // Journal of Materials Science. 2004. V. 39. No. 15. P. 4729–4797. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:JMSC.0000035317.87118.ab>.
15. Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media // Engineering Fracture Mechanics. 1987. V. 28. No. 1. P. 13–20. DOI: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90115-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90115-9).
16. Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Поверхностная энергия и энергия адгезии упругих тел // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 76–91.
17. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // International Journal of Fracture. 1990. V. 43. No. 1. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00018123>.
18. Mantari J.L., Yarasca J. A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams // Composite Structures. 2015. V. 134. P. 593–601. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.073>.
19. Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory // Engineering Fracture Mechanics. 2017. V. 169. P. 309–320. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1406-6>.
20. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
21. Осипенко М.А. Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами переменной толщины // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 90–94.
22. Fang X., Charalambides P.G. The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading // Engineering Fracture Mechanics. 2015. V. 149. P. 1–17. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.09.039>.
23. Fang X., Charalambides P.G. A J-integral approach in characterizing the mechanics of a horizontal crack embedded in a cantilever beam under an end transverse force // Engineering Fracture Mechanics. 2017. V. 169. P. 35–53. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.11.010>.
24. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Изгиб двуслойной балки с нежестким контактом между слоями // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 1. С. 112–21.
25. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Обобщенная модель Тимошенко-Рейсснера для многослойной пластины // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 22–35.
26. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 2. С. 34–44.
27. Глаголев В.В., Маркин А.А., Пашинов С.В. Биметаллическая пластина в однородном температурном поле // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 3. С. 331–343.

28. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах когезионного разрушения композита с адгезионным слоем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 45–59.
29. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. 2019. V. 158. P. 141–149. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>.

Статья поступила 19.06.2019 г.

Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Inchenko O.V., Markin A.A. (2020) ON ONE APPROACH TO THE ASSESSING OF THE ADHESIVE LAYER STRENGTH IN A LAYERED COMPOSITE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 63–77

DOI 10.17223/19988621/64/5

Keywords: adhesive layer, composite, variational equation, finite element method, energy product.

The problem of a stress-strain state of a composite with undefined geometry of the face break of the adhesive layer is formulated and solved. A concept of the interactive layer is used which implies uniformity of the stress-strain state over adhesive layer thickness. In accordance with Timoshenko's hypotheses for displacements of the bearing layers, the problem is reduced to a system of linear differential equations. The reliability of the obtained analytical solution is confirmed by the numerical calculation with no additional hypotheses introduced. The product of the specific free energy by layer thickness, referred to as an energy product, is revealed to be applicable as a criterion of the adhesive layer destruction. On the basis of the analytical solution, a threshold value of the adhesive layer thickness is determined. A decrease in the latter does not affect the energy product value. Thus, employing the energy product as a criterion of destruction, calculations can be performed at any value of the adhesive layer thickness arbitrarily chosen in the range of the energy product suability.

Financial support. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research and government of the Tula region, project No. 19–41–710001 p_a, as well as is supported by the Russian Foundation for Basic Research project No. 18–31–20053.

Viktoriya E. BOGACHEVA (Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

Vadim V. GLAGOLEV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Leonid V. GLAGOLEV (Candidate of Physics and Mathematics, JSC «KBP», Tula, Russian Federation). E-mail: len4ic92@gmail.com

Oksana V. INCHENKO (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: inchenko_ov@mail.ru

Aleksey A. MARKIN (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. (1980) *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy* [Mechanics of multilayer constructs]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Cherepanov G.P. (1974) *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow: Nauka.

3. Allen H.G., Feng Z. (1998) Classification of structural sandwich panel behaviour. *Mechanics of Sandwich Structures*. Dordrecht: Springer. pp. 1–12. DOI: 10.1007/978-94-015-9091-4_1.
4. Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. (2016) Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions. *Acta Mechanica*. 227. pp. 127–138. DOI: 10.1007/s00707-015-1422-3.
5. Mattei O., Bardella L. (2016) A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 58. pp. 172–186. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.01.015.
6. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. (2016) Delaminations growth in compression after impact test simulations: influence of cohesive elements parameters on numerical results. *Composite Structures*. 137. pp. 140–147. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.11.018.
7. Panteghini A., Bardella L. (2017) Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 61. pp. 393–407. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.10.012.
8. Gol'dshteyn R.V., Osipenko N.M. (2007) Otsloenie pokrytiy pod deystviem termouprugikh napryazheniy (Balochnoe priblizhenie) [Delamination of coatings under the action of thermoelastic stresses (beam approximation)]. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaya seriya – Vestnik of Samara University. Natural Science Series* 54(4). pp. 66–83.
9. Sheinman I., Kardomateas G. (1997) Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*. 34(4). pp. 451–459. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00018-2.
10. Storakers B., Andersson B. (1988) Nonlinear plate theory applied to delamination in composites. *Journal of Mechanics and Physics solids*. 36(6). pp. 689–718. DOI: 10.1016/0022-5096(88)90004-X.
11. Ustinov K.B. (2015) On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer. *Mechanics of Solids*. 50(1). pp. 62–80. DOI: 10.3103/S0025654415010070.
12. Evams A.G., Hutchinson J.W. (1984) On the mechanics of delamination and spelling on compressed films. *International Journal of Solids and Structures*. 20(5). pp. 455–466. DOI: 10.1016/0020-7683(84)90012-X.
13. Astapov I.S., Astapov N.S., Kornev V.M. (2015) Model' rassloeniya kompozita pri poperechnom sdvige [Model of composite exfoliation with transverse shear]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 21(2) pp. 149–161.
14. Baldan A. (2004) Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance. *Journal of Materials Science*. 39(15). pp. 4729–4797. DOI: 10.1023/B:JMSC.0000035317.87118.ab.
15. Sun C.T., Jih C.J. (1987) On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media. *Engineering Fracture Mechanics*. 28(1). pp. 13–20. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90115-9.
16. Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S. (2017) Surface energy and adhesion energy of elastic bodies. *Mechanics of Solids*. 52(1). pp. 62–74. DOI: 10.3103/S0025654417010083.
17. Suo Z., Hutchinson J.W. (1990) Interface crack between two elastic layers. *International Journal of Fracture*. 43(1). pp. 1–18. DOI: 10.1007/BF00018123.
18. Mantari J.L., Yarasca J. (2015) A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams. *Composite Structures*. 134. pp. 593–601. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.073.
19. Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. (2017) Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory. *Engineering Fracture Mechanics*. 169. pp. 309–320. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2016.10.013.
20. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. (1963) *Plastiny i obolochki* [Plates and shells]. Moscow: Fizmatgiz.
21. Osipenko M.A. Kontaktnaya zadacha ob izgibe dvukhlistovoy ressoy s listami peremennoy tolshchiny [The contact problem for bending of a two-leaf spring with variable thicknesses of

- leaves]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(27). pp. 90–94.
22. Fang X., Charalambides P.G. (2015) The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 149. pp. 1–17. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.09.039.
23. Fang X., Charalambides P.G.A (2017) J-integral approach in characterizing the mechanics of a horizontal crack embedded in a cantilever beam under an end transverse force. *Engineering Fracture Mechanics*. 169. pp. 35–53. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.11.010.
24. Morozov N.F., Tovstik P.Y. (2011) Bending of a two-layer beam with non-rigid contact between the layers. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 75(1). pp. 77–84. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2011.04.012.
25. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. (2016) Generalized Timoshenko-Reissner model for a multilayer plate. *Mechanics of Solids*. 51(5). pp. 527–537. DOI: 10.3103/S0025654416050034.
26. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. (2016) Separation process modeling of composite with adhesive layer. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 34–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.03.
27. Glagolev V.V., Markin A.A., Pashinov S.V. (2017) Bimetallicheskaya plastina v odnorodnom temperaturnom pole [Bimetallic plate in a uniform temperature field]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 23(3). pp. 331–343. DOI: 10.25590/mkmmk.ras.2017.23.03.331_343.03.
28. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. (2017) Modelling the generation of new material surfaces in a composite with an adhesion layer under cohesive destruction. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 45–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03.
29. Glagolev V.V., Markin A.A. (2019) Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*. 158. pp. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002.

Received: June 16, 2019

УДК 532

DOI 10.17223/19988621/64/6

Т.В. Васенина, А.А. Глазунов

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ
ТЕЧЕНИЯ В МГД-КАНАЛАХ¹**

Приведены результаты аналитических исследований стационарного однофазного квазиодномерного течения в тракте магнитогидродинамического генератора (МГДГ) холловского типа. Показано, что в зависимости от условий работы генератора возможно образование двух различных режимов переходных процессов: с образованием ударной волны и без нее. Доказывается, что стационарные решения задачи могут быть неединственными, поэтому в качестве подходящего численного метода решения задач о течении в МГД-каналах в общем случае следует рассматривать метод установления.

Ключевые слова: МГД-генератор, аналитические исследования, нестационарный газодинамический процесс, ударная волна.

Как показано в работах [1, 2] и статьях [3–5], возможны различные режимы движения плазмы в каналах МГД-генераторов фарадеевского и диагонального типов. При некоторых режимах работы в канале и разгонном сопле могут возникать ударные волны, области дозвукового и сверхзвукового течений [6]. Хорошо известно, что удачный выбор численного метода решений задач в значительной мере определяется нашими знаниями о характере этого решения. Поэтому представляют интерес предварительные аналитические исследования решения. Кроме того, эти решения могут использоваться в качестве тестов при обосновании адекватности численных расчетов при решении исходной дифференциальной задачи. В данной статье приведены результаты исследований холловских МГДГ, работающих при малых токах нагрузки. Полученные результаты справедливы также для фарадеевских каналов с секционированными электродами, работающих в режиме короткого замыкания.

Постановка задачи

Для упрощения исследований рассматривается стационарное однофазное (либо двухфазное равновесное) квазиодномерное магнитогидродинамическое течение в тракте холловского МГДГ. На рис. 1 показана модельная схема магнитной газодинамической установки, включающая в себя разгонное сопло, электродный участок и диффузор. Предполагается, что в МГД-канале индукция $\mathbf{B}$ имеет только одну составляющую. До начала переходных процессов в канале генератора реализуется сверхзвуковое течение.

Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии, описывающие такое течение имеют вид

$$S\rho u = G = \text{const}, \quad (1)$$

¹ Данное научное исследование (№ 8.2.12.2018) выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ.

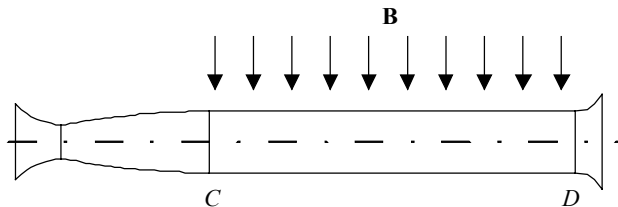


Рис. 1. Модельная схема МГД-генератора
Fig. 1. Schematic diagram of a MHD generator

$$S\rho u \frac{du}{dx} + S \frac{dP}{dx} = -S\sigma u B_z^2 + \beta J B_z, \quad (2)$$

$$S\rho u \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2} + c_p T \right) = -\beta u B_z J + \frac{1+\beta}{\sigma} \frac{J^2}{S}, \quad (3)$$

где G – расход газовой фазы, S – площадь поперечного сечения канала, $\rho, u, P, T, \beta, J, c_p, B_z, x$ – плотность, скорость, давление, температура, параметр Холла, холловский ток, удельная теплоемкость газа при $P = \text{const}$, магнитная индукция, линейная переменная вдоль канала соответственно.

Система (1) – (3) замыкается уравнением состояния

$$\frac{P}{\rho} = RT; \quad (4)$$

зависимостями для проводимости

$$\sigma = \sigma(P, T); \quad (5)$$

параметра Холла

$$\beta = \beta(P, T), \quad (6)$$

а также уравнением для холловского тока $J = \frac{\sigma}{1+\beta^2} (\beta u B_z + E_x)$, где E_x – напряженность электрического поля.

Для дальнейших упрощений оценим члены, стоящие в правой части уравнения (2). С этой целью запишем обобщенный закон Ома для холловского тока в виде

$$-\beta u B_z + \frac{(1+\beta^2)}{\sigma} \frac{J}{S} = \frac{dV}{dx}, \quad (7)$$

где введены полный холловский ток $J = j_x S(x)$ и потенциал $V = -\int_0^x E_x dx$. Заме-

тим, что в холловском генераторе для плотности тока существенна только переменная вдоль канала.

Подставляя (7) в правую часть (3) и интегрируя результат с учетом (1) от начала электродной зоны до сечения с координатой x , получим

$$JV + G \left(\frac{u^2}{2} + c_p T \right) = G \left(\frac{u^2}{2} + c_p T \right) \Big|_C^x. \quad (8)$$

Здесь JV – энергия, отдаваемая МГД-каналом в нагрузку, индекс «C» относится к параметрам на входе в МГД-канал.

Величину $\eta = \frac{JV}{G \left(\frac{u^2}{2} + c_p T \right)_C} \cdot 100\%$ можно рассматривать как коэффициент

полезного действия участка МГД-канала, который для холловского МГДГ не превышает нескольких процентов. Отсюда следует, что мы не совершим большой ошибки, если в уравнении (8) пренебрежем членом JV по сравнению с

$G \left(\frac{u^2}{2} + c_p T \right)_C$. В результате получим

$$\left(\frac{u^2}{2} + c_p T \right) = const. \quad (9)$$

Заметим, что при работе холловского МГДГ с отключенной нагрузкой, когда ток $J = 0$, уравнение (9) является точным интегралом (3).

В разгонном сопле Лаваля в уравнениях (2) и (3) отсутствуют правые части. Поэтому в областях непрерывности решения в разгонном сопле должны выполняться обычные соотношения:

$$\begin{aligned} Spu &= G, \\ \rho u du + dP &= 0, \\ \frac{u^2}{2} + c_p T &= c_p T_0, \\ \frac{P}{\rho} &= RT, \end{aligned} \quad (10)$$

где индекс «0» относится к параметрам торможения, в то время как на разрывах должны сохраняться комплексы:

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \\ \rho_1 u_1^2 + P_1 &= \rho_2 u_2^2 + P_2, \\ \frac{u_1^2}{2} + c_p T_1 &= \frac{u_2^2}{2} + c_p T_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где индекс «1» относится к параметрам перед скачком, а индекс «2» – после скачка.

Введем безразмерную скорость $\lambda = u/a_*$, где a_* – критическая скорость звука. Из (10) имеем известное соотношение между площадями сечений потока и величинами λ в этих сечениях

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\lambda_2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}}{\lambda_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}}, \quad (12)$$

которое при $\lambda_2 = 1$; $S_2 = S_*$, S_* – площадь критического сечения сопла, принимает вид

$$\frac{S_1}{S_*} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left[\lambda_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \right]^{-1}, \quad (13)$$

где k – показатель адиабаты.

Соотношения (2), (3) имеют место в областях непрерывности решения. На ударной волне из (11) для величин λ имеем связь

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (14)$$

В области магнитогидродинамического течения будем предполагать, что площадь S поперечного сечения канала не зависит от координаты x . В этом случае закон сохранения массы (1) принимает вид

$$\rho u = \rho_C u_C, \quad (15)$$

откуда можно выразить ρ как функцию параметра λ

$$\rho = \rho_C \frac{\lambda_C}{\lambda}. \quad (16)$$

Для температуры T имеем известное соотношение

$$T = T_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right). \quad (17)$$

Подставляя в уравнение состояния (4) плотность ρ и температуру T из (15) и (17), найдем связь между величиной λ и давлением:

$$P = \frac{k+1}{2k} \rho_C \lambda_C \frac{a_*^2}{\lambda} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right). \quad (18)$$

Соотношения (17), (18) вместе с (5) и (6) позволяют выразить через функции от λ также проводимость и параметр Холла. Вводя величины проводимости σ_C и параметр Холла β_C на входе в МГД-канал, приведем выражения (5) и (6) для σ и β к виду

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_C \bar{\sigma}(\lambda), \\ \beta &= \beta_C \bar{\beta}(\lambda). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя величины ρu , P , σ и β из (15), (18), (19) в (2), получим дифференциальное уравнение для λ

$$(\lambda^2 - 1) \frac{d\lambda}{d\xi} = -A \lambda^2 [\bar{\sigma}(\lambda) \lambda - \Lambda \bar{\beta}(\lambda)], \quad (20)$$

в котором $A = \frac{2k}{k+1} \frac{\sigma_C B_z^2 L}{\rho_C u_C}$, $\Lambda = \frac{\beta_C J}{S \sigma_C B_z a_*}$ – безразмерные параметры; $\xi = \frac{x}{L}$ – безразмерная координата.

Для дальнейших исследований важно знать знак правой части уравнения (20). Сначала заметим, что для всякого участка МГД-канала, работающего в генераторном режиме, из уравнений (3) следует неравенство

$$\left(-\beta u B_z + \frac{1 + \beta^2}{\sigma S} J \right) J < 0.$$

Его решение для $u > 0$ возможно только при

$$0 < J < \frac{\beta u B_z}{1 + \beta^2} \sigma S. \quad (21)$$

Воспользовавшись (21), оценим правую часть уравнения (2):

$$\left(S \sigma u B_z^2 + \beta J B_z \right) \geq \frac{S \sigma u B_z^2}{1 + \beta^2} > 0.$$

Из него следует, что при работе участка МГД-канала в генераторном режиме правая часть (20) меньше нуля, и, таким образом, сверхзвуковой поток на таком участке замедляется, в то время как дозвуковой – ускоряется.

Режимы непрерывного торможения сверхзвукового потока

Проинтегрируем уравнение (20) от начала электродной зоны МГД-канала до выхода из нее. Полагая $\lambda|_{\xi=0} = \lambda_C$, $\lambda|_{\xi=1} = \lambda_D$, получим выражение для вычисления величины параметра A , при котором на выходе достигается значение $\lambda = \lambda_D$:

$$A = \int_{\lambda_D}^{\lambda_C} \frac{(\lambda^2 - 1) d\lambda}{\lambda^2 [\bar{\sigma} \lambda - \Lambda \bar{\beta}]}. \quad (22)$$

Интегрируя при этом значении A (20) от входа в электродную зону до произвольной точки внутри канала, получим связь между безразмерной координатой ξ и значением λ в этой точке:

$$\xi = \frac{1}{A} \int_{\lambda}^{\lambda_D} \frac{(\lambda^2 - 1) d\lambda}{\lambda^2 [\bar{\sigma} \lambda - \Lambda \bar{\beta}]}. \quad (23)$$

На рис. 2 приведены результаты расчетов торможения сверхзвукового потока по формуле (23) для случая режима разомкнутой цепи нагрузки ($\Lambda = 0$), при котором интеграл (23) является точным решением системы исходных уравнений (1) – (3).

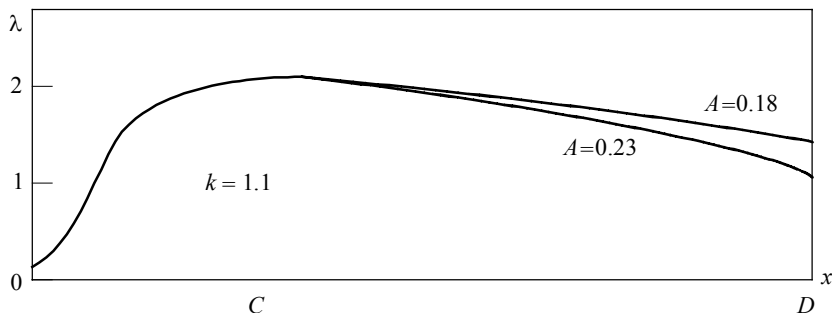


Рис. 2. Зависимость λ от x и от A

Fig. 2. Dependence of λ on x and A

Аппроксимация безразмерной проводимости $\bar{\sigma}$ бралась в виде формулы Саха[1], которая с помощью (17), (18) приводилась к виду

$$\bar{\sigma} = \left[\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2} \right) \right]^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -C \left[\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{-1} - \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2 \right)^{-1} \right] \right\}. \quad (24)$$

Расчеты проводились для значения параметров $\lambda_c = 2.1$; $k = 1.1$; $C = 5$.

Из рис. 2 видно, что с ростом величины параметра взаимодействия A торможение потока усиливается, и при $A = 0.23$ в конце электродной зоны скорость потока становится звуковой.

Влияние параметра нагрузки Λ можно проследить на рис. 3. На этом рисунке сравниваются два решения при $A = 0.18$. Сплошной линией изображено решение при $\Lambda = 0$, штриховой – решение при $\Lambda = 0.2$. Безразмерный параметр Холла $\bar{\beta}$ [1] аппроксимировался с помощью формулы

$$\bar{\beta} = \frac{P_C}{P} \left(\frac{T}{T_C} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\lambda_c} \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

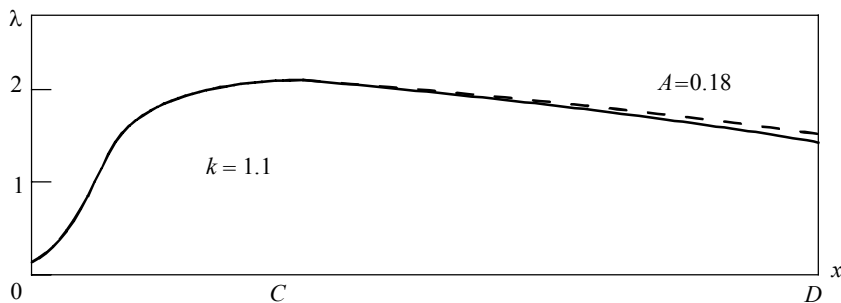


Рис. 3. Зависимость λ от x при $k = 1.1$ и $A = 0.18$

Fig. 3. Dependence of λ on x at $k = 1.1$ and $A = 0.18$

Из рисунка видно, что в холловском канале подключение нагрузки при $\Lambda = 0.2$ приводит к более медленному торможению потока по сравнению с режимом разомкнутой цепи.

Режимы торможения сверхзвукового течения в МГД-канале со скачками уплотнения

По мере увеличения параметра A при некотором его критическом значении $A_* = f(\Lambda)$ на выходе из электродной зоны число Маха становится равным единице. Возникает вопрос, что произойдет со сверхзвуковым потоком плазмы, если продолжать увеличивать параметр A ? С целью выяснения возникающей проблемы запишем уравнение обращения воздействий, являющееся следствием исходных уравнений (1) – (3)

$$(M^2 - 1) \frac{du}{dx} = \frac{u}{S} \frac{dS}{dx} + \frac{j_x E_x}{kP} - \frac{j_x^2}{\sigma P}. \quad (26)$$

Здесь j_x^2 – квадрат модуля плотности тока, $j_x E_x$ – объемная плотность стока энергии, отдаваемой в нагрузку.

Из (26) видно, что для непрерывного торможения плазмы с переходом через скорость звука необходимо, чтобы в точке, в которой $M = 1$, выполнялось соотношение

$$\frac{u}{S} \frac{dS}{dx} + \frac{j_x E_x}{kP} - \frac{j_x^2}{\sigma P} = 0. \quad (27)$$

Однако непрерывное сверхзвуковое решение уже однозначно определено начальными условиями на входе в канал и не содержит никаких свободных параметров для удовлетворения (27). Поэтому непрерывное торможение плазмы с переходом сверхзвукового течения в дозвуковое в общем случае невозможно.

Данная ситуация оказывается разрешимой, если предположить, что при $A > A_*$ торможение происходит в ударной волне. Скорость потока за ударной волной становится дозвуковой, и плазма за скачком в соответствии с (20) ускоряется. При этом решение содержит дополнительный параметр (например, интенсивность ударной волны), который может быть использован для удовлетворения условий на выходе из канала.

Может быть два случая.

Если наружное давление достаточно велико и из канала осуществляется дозвуковое истечение, то на выходе из электродной зоны (сечение D на рис. 1) в предположении дальнейшего адиабатического расширения потока может быть рассчитана величина λ_D . Для этого следует использовать записанное для сечений D и E условие (12), адиабатическое условие для давлений

$$\frac{P_D}{P_E} = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_D^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_E^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (28)$$

и уравнение (18) в точке D .

В том случае, когда истечение из канала сверхзвуковое, переход через скорость звука должен осуществляться одновременно с выполнением (27). Так как при работе в генераторном режиме

$$\frac{j_x E_x}{kP} - \frac{j_x^2}{\sigma P} < 0, \quad (29)$$

то из (26) и (27) следует, что в точке перехода $\frac{dS}{dx} > 0$, а в диффузоре правее этой точки должно выполняться неравенство

$$\frac{dS}{dx} > -\frac{S}{u} \left(\frac{j_x E_x}{kP} - \frac{j_x^2}{\sigma P} \right) > 0. \quad (30)$$

Для данного канала, показанного на рис. 1, непрерывный переход через скорость звука становится возможным, если в конце электродной зоны происходит его расширение, причем так, что в некоторой окрестности слева от точки D сна-

чала выполняется равенство (27), а затем и неравенство (26). Оба условия могут быть удовлетворены выбором профиля указанной окрестности и интенсивности ударной волны, которую следует выбрать так, чтобы в этой окрестности достигалось значение $M = 1$. В дальнейшем для простоты мы будем предполагать, что такая окрестность точки D существует и достаточно мала для того, чтобы граничное условие $M_D = \lambda_D = 1$ можно было брать в точке D .

Заметим, что в реальных МГД-каналах $\frac{dS}{dx} > 0$, а неравенство (26) выполняется в результате непрерывного уменьшения величины тока на выходе из электродной зоны.

Исходя из сказанного, будем искать разрывное решение задачи (20) с граничным условием на входе в электродную зону

$$\lambda|_{\xi=0} = \lambda_C \quad (31)$$

и условием

$$\lambda|_{\xi=1} = 1 \quad (32)$$

на выходе из нее.

Положение разрыва ξ_p и его интенсивность определяются из соотношения на разрыве (14): $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$.

Интегрируя (20) в области дозвукового течения от $\xi = 0$ до $\xi = \xi_p$, получим

$$A\xi_p = \int_{\lambda_1}^{\lambda_C} \frac{(\lambda^2 - 1)d\lambda}{\lambda^2 (\bar{\sigma}\lambda - \Lambda\bar{\beta})}. \quad (33)$$

Интеграл (20) в области дозвукового течения за скачком с учетом граничного условия (32) и соотношения (14) имеет вид

$$A(1 - \xi_p) = \int_{1/\lambda_1}^1 \frac{(1 - \lambda^2)d\lambda}{\lambda^2 (\bar{\sigma}\lambda - \Lambda\bar{\beta})}. \quad (34)$$

Исключая из (33) и (34) координату ξ_p , получим связь

$$A = \int_{\lambda_1}^{\lambda_C} \frac{(\lambda^2 - 1)d\lambda}{\lambda^2 (\bar{\sigma}\lambda - \Lambda\bar{\beta})} + \int_{1/\lambda_1}^1 \frac{(1 - \lambda^2)d\lambda}{\lambda^2 (\bar{\sigma}\lambda - \Lambda\bar{\beta})}, \quad (35)$$

позволяющую для заданного λ_1 вычислить значение параметра A и затем с помощью соотношения (30) найти положение разрыва ξ_p .

Прежде чем перейти к расчетам, предварительно заметим, что они в сильной степени зависят от показателя адиабаты k . Причина такой зависимости лежит в экспоненциальной связи безразмерной проводимости $\bar{\sigma}$ и температуры, которая, в свою очередь, согласно (17) зависит от k как от параметра.

В таблице приведены значения безразмерной проводимости $\bar{\sigma}$, рассчитанные по формуле (14) для значений k от 1.1 до 1.4 при $C = 5$ и $\lambda_C = 2.1$.

Значения безразмерной проводимости $\bar{\sigma}$
для $k = 1.1$ и $k = 1.4$ при $C = 5$ и $\lambda_B = 2.1$

k	λ	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1
1.1	$\bar{\sigma}$	1.83	2.04	2.12	2.10	1.99	1.81	1.56	1.29	1.0
1.2	$\bar{\sigma}$	13.94	14.59	13.93	12.23	9.83	7.12	4.53	2.42	1.0
1.3	$\bar{\sigma}$	441.60	435.97	380.90	293.39	194.20	104.87	41.92	10.24	1.0
1.4	$\bar{\sigma}$	$5.7 \cdot 10^5$	$5.3 \cdot 10^5$	$4.2 \cdot 10^5$	$2.8 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^5$	$5.5 \cdot 10^4$	$1.1 \cdot 10^4$	$5.8 \cdot 10^2$	1.0

Из таблицы следует, что для $k = 1.1$ и $k = 1.4$ значения $\bar{\sigma}$ отличаются на пять порядков, а сами зависимости носят различный характер.

Продифференцируем интегралы (33) и (35) и исключим величину $d\lambda_1$. В результате получим связь между бесконечно малым изменением положения разрыва $d\xi_p$ и приращением dA в виде

$$dA = -A \frac{F(\lambda_1) - F(1/\lambda_1)}{\xi_p F(\lambda_1) + (1 - \xi_p) F(1/\lambda_1)} d\xi_p, \tag{36}$$

где $F(y) = \bar{\sigma}(y)y - \Lambda \bar{\beta}(y)$.

Знак коэффициента в (33) определяется знаком разности $F(\lambda_1) - F(1/\lambda_1)$.

На рис. 4 и 5 приведены функции $F(\lambda_1)$ и $F(1/\lambda_1)$, рассчитанные для показателей адиабаты $k = 1.1$ и $k = 1.3$. Из этих рисунков видно, что при $k = 1.1$ коэффициент в (33) имеет отрицательный знак, а при $k = 1.3$ – положительный. Таким образом, при $k = 1.1$ координата положения ударной волны с ростом параметра взаимодействия A будет перемещаться в сторону разгонного сопла, а при $k = 1.3$ – в противоположном направлении.

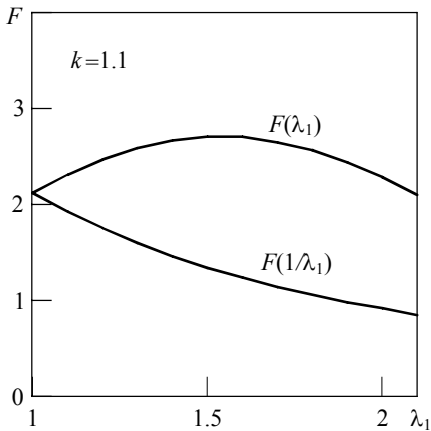


Рис. 4. Графики функций $F(\lambda_1)$ и $F(1/\lambda_1)$ при $k = 1.1$
Fig. 4. Graphs of the function $F(\lambda_1)$ and $F(1/\lambda_1)$ at $k = 1.1$

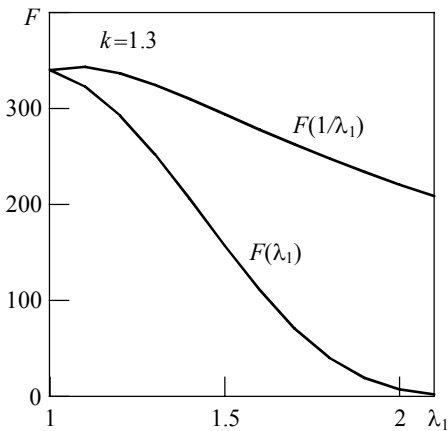


Рис. 5. Графики функций $F(\lambda_1)$ и $F(1/\lambda_1)$ при $k = 1.3$
Fig. 5. Graphs of the function $F(\lambda_1)$ and $F(1/\lambda_1)$ at $k = 1.3$

Координаты положения ударной волны ξ_p в зависимости от величины A для $k = 1.1$ и $\Lambda = 0$ приведены на рис. 6. В этом случае ударная волна с ростом A перемещается в сторону входа в МГД-канал и при $A = 0.5$ располагается на входе в МГД-зону.

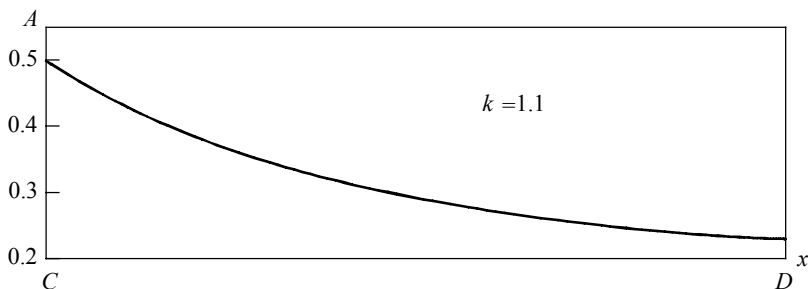


Рис. 6. Положение ударной волны при $k = 1.1$

Fig. 6. Position of the shock wave at $k = 1.1$

Результаты расчетов безразмерной скорости λ при $k = 1.1$ и $\Lambda = 0$ для значений A показаны на рис.7.

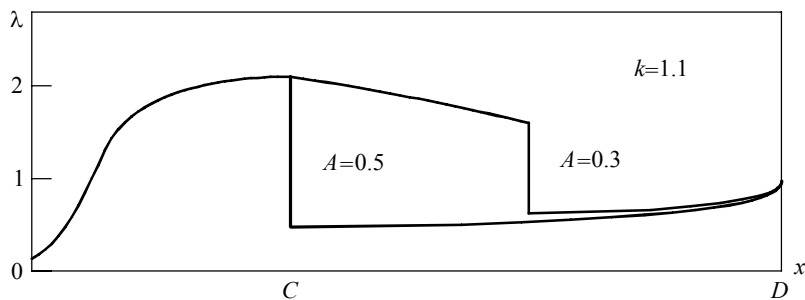
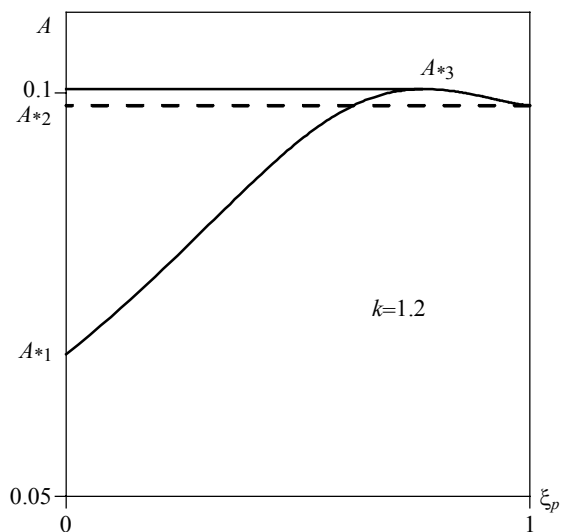
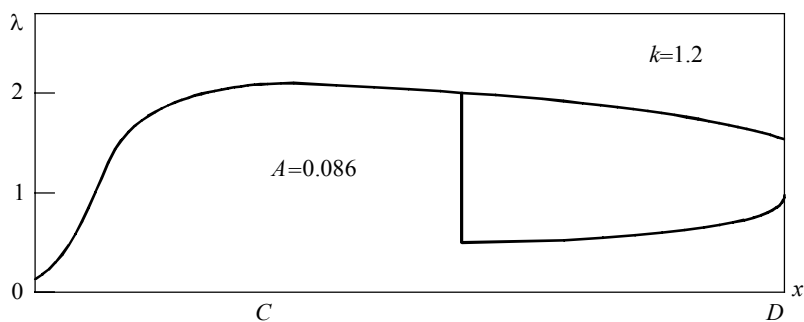
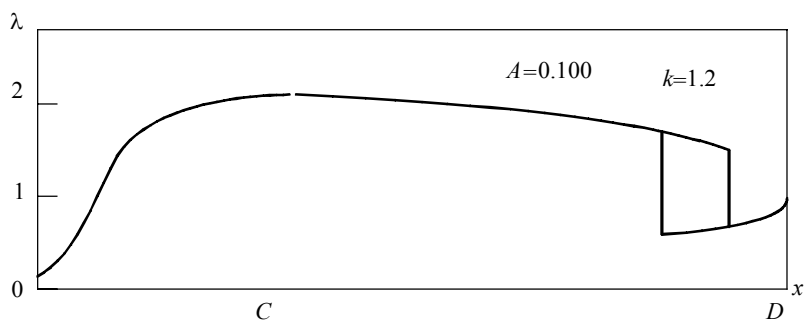


Рис. 7. Зависимость λ от A

Fig. 7. Dependence of λ on A

При $k = 1.2$ картина течения в МГД-канале принципиально меняется по сравнению с рассмотренным случаем $k = 1.1$. Ее особенности можно наблюдать на рис. 8, на котором приведена функция $A = A(\xi_p)$. С ростом A возможность существования разрывного решения возникает сначала на входе в канал при $A > A_*$.

Однако, как показывают расчеты, при $A_{*1} < A < A_{*2}$ параллельно с разрывным решением существует также решение с непрерывным торможением потока (рис. 9), а при $A_{*2} < A < A_{*3}$ — два различных разрывных решения (рис. 10). При $A > A_{*3}$ в канале оказывается возможным существование только дозвукового течения плазмы.

Рис. 8. Положение ударной волны при $k = 1.2$ Fig. 8. Position of the shock wave at $k = 1.2$ Рис. 9. Зависимость λ от x при $k = 1.2$ и $A = 0.086$ Fig. 9. Dependence of λ on x at $k = 1.2$ and $A = 0.086$ Рис. 10. Зависимость λ от x при $k = 1.2$ и $A = 0.100$ Fig. 10. Dependence of λ on x at $k = 1.2$ and $A = 0.100$

В случае $k = 1.3$ два решения (непрерывное торможение и течение с ударной волной) существуют при $0.002 < A < 0.032$. При этом ударная волна возникает сначала на входе в канал и затем с ростом A перемещается к его выходу (рис. 11).

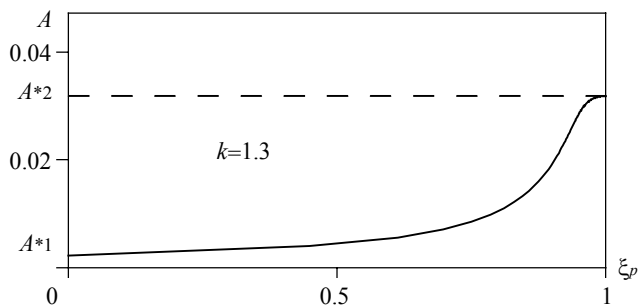


Рис. 11. Положение ударной волны при $k = 1.3$

Fig. 11. Position of the shock wave at $k = 1.3$

Выводы

Таким образом, в общем случае в МГД-канале могут осуществляться как гладкие течения, так и течения с разрывом параметров. Эти течения могут включать дозвуковые области с заранее неизвестными границами. Так как стационарные решения задачи могут быть неединственными, то в реальных ситуациях осуществимость того или иного решения может зависеть от процесса физического установления и, следовательно, от начальных условий. Поэтому в качестве подходящего численного метода решения задач о течении в МГД-каналах в общем случае следует рассматривать метод установления [7], позволяющий моделировать нестационарные физические процессы, учитывать начальные условия задачи, а в случае использования консервативных разностных схем рассчитывать течения с ударными волнами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Резигер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
2. Роза Р. Магнитогидродинамическое преобразование энергии. М.: Мир, 1970. 288 с.
3. Виноградова Г.Н., Панченко В.П. Численное исследование нестационарных процессов в фарадеевском МГД-генераторе // ТВТ. 1981. Т. 19. № 1. С. 164–171.
4. Виноградова Г.Н., Губарев А.В., Панченко В.П. О работе МГД-генератора диагонального типа на нерасчетных режимах // ТВТ. 1987. Т. 25. № 2. С. 383–388.
5. Иванов В.А. Расчет двухфазного течения при сильном МГД-взаимодействии в одномерном монодисперсном приближении // ТВТ. 1991. Т. 29. № 2. С. 393–395.
6. Солоненко В.А. Исследование течения в крупномасштабном импульсном сверхзвуковом МГД-генераторе // Изв. вузов. Физика. 2006. Т. 49. № 6. Приложение. С. 5–12.
7. Костюшин К.В., Шувариов В.А. Сравнение схем типа «MUSCL» для расчета течений идеального газа в соплах Лавала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 79–87. DOI 10.17223/19988621/54/7.

Vasenina T.V., Glazunov A.A. (2020) ANALYTICAL STUDIES OF THE LIMITING FLOW REGIMES IN MHD CHANNELS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 78–90

DOI 10.17223/19988621/64/6

Keywords: MHD generator, analytical studies, unsteady gas-dynamic process, shock wave.

This paper presents the analytical study results for a steady single-phase quasi-one-dimensional flow in a gas-dynamic path of the magnetohydrodynamic (MHD) generator of the Hall-type plasma. It is shown that, depending on generator working conditions, two different regimes of transition are possible: with and without shock wave formation. The parametric studies are carried out in a regime with compression shock waves. The calculated results are highly dependent on the heat capacity ratio, k . For $k = 1.1$, with an increase in the dimensionless interaction parameter A , the shock wave position shifts from the origin of the electrode zone to a diffuser. For $k = 1.2$, at the same value of A , either shock-wave-free recompression or shock-wave recompression can occur. For $k = 1.3$, two different shock-wave recompressions are possible.

Since the solution to a steady-state problem may be non-unique, the false transient method is generally considered as an appropriate numerical method for solving the problems of the flow in MHD channels. This method allows one to simulate unstable physical processes accounting for initial conditions of the problem and also to calculate the flows with shock waves when conservative difference schemes are used.

Financial support. This study was supported by Tomsk State University Competitiveness Improvement Program (grant No. 8.2.12.2018).

Tatyana V. VASENINA (Candidate of Physics and Mathematics, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tvv@niipmm.tsu.ru

Anatoliy A. GLAZUNOV (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Vatazhin A.B., Lyubimov G.A., Regirer S.A. (1970) *Magnitogidrodinamicheskie techeniya v kanalach* [Magnetohydrodynamic flows in channels]. Moscow: Nauka.
2. Rosa R.J. (1968) *Magnetohydrodynamic Energy Conversion*. London: McGraw-Hill.
3. Vinogradova G.N., Panchenko V.P. (1981) Numerical study of unsteady processes in a Faraday MHD generator. *High Temperature*. 19(1). pp. 127–133.
4. Vinogradova G.N., Gubarev A.V., Panchenko V.P. (1987) Operation of a diagonal-type MHD generator outside the design range. *High Temperature*. 25(2). pp. 294–299.
5. Ivanov V.A. (1991) Raschet dvukhfaznogo techeniya pri sil'nom MGD-vzaimodeystvii v odnomernom monodispersnom priblizhenii [Calculation of a two-phase flow with a strong MHD interaction in a one-dimensional monodispersed approximation]. *TVT – High temperature*. 29(2). pp. 393–395.
6. Solonenko V.A. (2006) Issledovanie techeniya v krupnomasshtabnom impul'snom sverkhzvukovom MGD-generatore [Study of the flow in a large-scale pulsed supersonic MHD generator]. *Izvestiya vuzov. Fizika. Prilozhenie*. 49(6). pp. 5–12.
7. Kostyushin K.V., Shuvarikov V.A. (2018) Sravnenie skhem tipa «MUSCL» dlya rascheta techeniy ideal'nogo gaza v soplakh Lavalya [Comparison of the MUSCL-type schemes for a gas flow calculation in de Laval nozzles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 79–87. DOI: 10.17223/19988621/54/7.

Received: December 9, 2019

УДК 539.424, 669.1

DOI 10.17223/19988621/64/7

**А.Б. Ворожцов, П.А. Данилов, И.А. Жуков, М.Г. Хмелева,
В.В. Платов, В.Д. Валихов**

**ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА РАСПЛАВ
И НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦ НА СТРУКТУРУ
И МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЕГКИХ СПЛАВОВ
НА ОСНОВЕ АЛЮМИНИЯ И МАГНИЯ¹**

Проведены исследования влияния структуры алюминиевых и магниевых сплавов, дисперсно-упрочненных наноразмерными керамическими частицами, на их механические характеристики. Показано влияние концентрации частиц оксида алюминия от 0.1 до 1 масс. % на зеренную структуру, микротвердость и механическое поведение при растяжении чистого алюминия. Изучено влияние дисперсности частиц диборида титана на структуру и механическое поведение сплава АМг5. Проведены исследования магниевых сплавов МЛ12, упрочненных 1.5 масс. % частицами нитрида алюминия.

Ключевые слова: *алюминий, магний, наноразмерные частицы, оксид алюминия, нитрид алюминия, диборид титана, структура, твердость, прочность, предел текучести*

Основной задачей современного машиностроения является снижение массы элементов ответственных механизмов и конструкций при одновременном повышении их эксплуатационных свойств. Решение данной задачи позволит улучшить функциональные характеристики, повысить долговечность узлов оборудования и снизить энергопотребление [1]. В данном направлении важными являются исследования методов модификации легких конструкционных сплавов на основе алюминия и магния, обладающих высоким потенциалом к увеличению показателей удельной прочности. Добиться заданных целей можно с помощью модификации внутренней структуры материалов. Основополагающим методом дисперсионного упрочнения интерметаллическими фазами, такими, как Al-Sc, Al-Zr, Al-Cu, для получения высоких механических свойств является искусственное старение алюминия и магния [2–7]. Альтернативой ему могут служить деформационные методы, описанные в работах [8–11], где показано, что путем измельчения зерна до субмикронных размеров с использованием интенсивной пластической деформации получают ультрамелкозернистые сплавы алюминия и магния с улучшенными физико-механическими свойствами по сравнению с их крупнокристаллическими аналогами. В данном случае активируется несколько методов упрочнения, дополнительный вклад в улучшение свойств вносит дисперсионное упрочнение интерметаллидными наноразмерными включениями, образовавшимися из твердого раствора в процессе обработки при взаимодействии примесных атомов.

¹ Исследование сплавов Al-Mg выполнено за счет Гранта Президента Российской Федерации (МК-506.2019.8). Исследование материалов, упрочненных наноразмерным оксидом алюминия и на основе алюминия технической чистоты, выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-20081.

Известно, что упомянутых механизмов упрочнения можно добиться недеформационными методами при введении упрочняющих частиц в сплавы непосредственно при литье. При этом благодаря оригинальным технологиям *ex situ* введения в расплав небольшого количества (до 0.1–1.5 мас.%) нано- и микроразмерных нейтральных тугоплавких керамических частиц таких как, Al_2O_3 , TiB_2 , SiC , при этом, помимо дисперсного упрочнения также можно добиться значительного уменьшения средних размеров зерна. Эти технологии позволяют существенно повысить механические свойства легких сплавов – твердость, предел текучести, предел прочности, пластичность [12–14]. Это связано с тем, что при введении керамических частиц в расплав они являются центрами кристаллизации и приводят к получению мелкозернистой структуры слитков и, как следствие, повышению механических свойств согласно закону Холла – Петча. Также эффект упрочнения достигается за счет действия механизма Орована, так как керамические частицы являются препятствием для движения дислокаций [15]. Основным требованием при получении таких композиций является равномерность распределения частиц в объеме, чего не так просто добиться из-за склонности порошковых систем к агломерации и флотации. Указанное требование достигается при неукоснительном соблюдении технологии введения лигирующих компонент с одновременной обработкой расплавов внешними воздействиями (ультразвуковая и вибрационная обработки, механическое перемешивание).

Цель настоящей работы – исследование влияния тугоплавких наноразмерных частиц Al_2O_3 , AlN , TiB_2 и внешней обработки расплава на структуру и свойства сплавов на основе алюминия и магния.

Материалы и методика

Алюминий технической чистоты, упрочненный наноразмерным оксидом алюминия

Лабораторная плавка была проведена с использованием алюминиевого сплава А0 (99 мас.% Al, 0.8 мас.% Si, 0.04 мас.% Mg, остальное Fe, Ti и др.) с введением лигатур, содержащих неметаллические наночастицы Al_2O_3 . Введение лигатур сопровождалось ультразвуковым воздействием. Использовались наночастицы оксида алюминия со средним размером 50 нм, синтезированные методом электро-взрыва проводника [12]. Лигатуры были изготовлены ударно-волновым компактированием смесей алюминиевого порошка (средний размер частиц < 5 мкм) с порошком Al_2O_3 в количестве 5 мас.%. Подробное описание процесса приготовления лигатуры и данные о структуре и свойствах Al_2O_3 приведено в [12, 16]. Расплав алюминиевого сплава готовили в электропечи в графитовом тигле при температуре 730 °С. Ультразвуковая обработка осуществлялась с использованием магнитострикционного водоохлаждаемого преобразователя при мощности 4.1 кВт и частоте 17.6 кГц. Ультразвуковая обработка и введение лигатуры в литейный сплав производились одновременно при температуре 730 °С в течение 2 мин. После этого обработанный расплав был отлит в призматический стальной кокиль размером 100×150×10 мм. Перед проведением экспериментальных исследований проводился отжиг полученных сплавов при температуре 300 °С в течение одного часа для гомогенизации внутренней структуры и снятия внутренних напряжений.

Алюминий, упрочненный частицами диборида титана

В качестве исходного сплава использован алюминиевый сплав АМг5 (91.90–94.68 % Al, 4.8–5.8 % Mg). 1 кг сплава помещали в тигель, расплавляли в муфельной печи (780 °С) и выдерживали в течение двух часов. Для введения частиц TiB_2 использовались лигатуры, полученные методом СВС. Подробное описание структуры и методики получения лигатур приведено в [17, 18]. Лигатуры представляли собой частицы диборида титана, смешанные и спрессованные с алюминиевым микропорошком. Для введения частиц диборида титана использовались лигатуры (МА), полученные методом СВС из исходной порошковой смеси алюминия, титана и бора. Фазовый состав лигатур приведен в табл. 1.

Таблица 1

Фазовый состав применяемых лигатур

МА	Фаза	Содержание, мас. %	Параметр решетки, Å	$\Delta d/d \cdot 10^{-3}$
1	TiB_2	30	$a = 3.0296$ $c = 3.2260$	1.0
	$TiAl_3$	26	$a = 4.0123$	2.7
	Ti_3Al	9	$a = 5.6683$ $c = 4.5854$	2.1
	$TiAl$	35	$a = 4.0115$	2.2
2	TiB_2	30	$a = 3.0293$ $c = 3.2257$	0.9
	$TiAl_3$	22	$a = 3.9484$	0.6
	Ti_3Al	14	$a = 5.6640$ $c = 4.6344$	2.2
	$TiAl$	16	$a = 4.0278$	2.4
	Al_3Ti	18	$a = 3.8800$ $c = 8.4989$	1.1
3	$TiAl$	57	$a = 4.0319$	10.2
	TiB_2	43	$a = 3.0140$ $c = 3.2000$	6.0

Гистограммы распределения частиц TiB_2 по размерам в используемых лигатурах приведены на рис. 1.

Затем тигель с помощью захвата извлекли из печи и ввели лигатуру при одновременном воздействии ультразвуковой обработки при температуре расплава 730 °С. Ультразвуковая обработка осуществлялась с использованием магнитострикционного водоохлаждаемого преобразователя при мощности 4.1 кВт и частоте 17.6 кГц. После полного растворения лигатуры ультразвуковая обработка осуществлялась в течение 2 мин, расплав помещался в печь на 30 мин, а затем ультразвуковая обработка проводилась в течение 2 мин. При температуре 720 °С расплав заливался в стальной кокиль размером 150×100×20 мм.

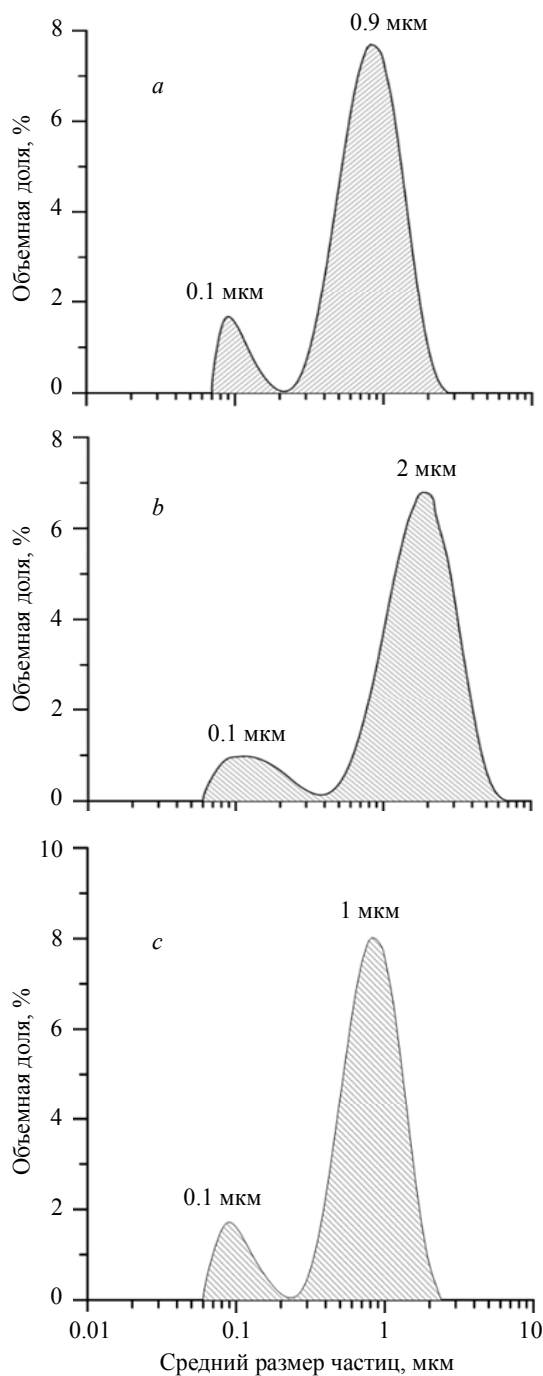


Рис. 1. Гистограммы распределения частиц TiB_2 по размерам в лигатурах: а) МА1, б) МА2, с) МА3
Fig. 1. Histograms of a size distribution of TiB_2 particles in the master alloys: (a) MA1, (b) MA2, and (c) MA3

Магний, упрочненный нитридом алюминия

Для упрочнения магниевого сплава МЛ12 (Fe – 0.01 %; Si – 0.03 %; Ni – 0.005 %; Al – 0.02 %; Cu – 0.03; Zr – 1.1 %; Be – 0.001 %; Zn – 5 %; Mg – основа) использован наноразмерный порошок нитрида алюминия (AlN), синтезированного методом электрического взрыва проводника. Средний размер частиц нитрида алюминия по данным просвечивающей электронной микроскопии составил ~ 80 нм. Для получения отливок применялась стандартная технология литья в цилиндрический кокиль, а введение частиц осуществлялось при разливе в струю расплава с последующей вибрационной обработкой при его кристаллизации. Содержание наночастиц в полученных дисперсно-упрочненных сплавах составило 0.75 и 1.5 мас. %.

Исследования

Исследование микроструктуры и текстуры сплавов проводили методами дифракции обратного рассеяния электронов (EBSD) на электронном микроскопе Tescan Vega II LMU, снабженном дополнительным устройством дифракции обратного рассеяния электронов. Поверхность исследуемых образцов была подготовлена методом предварительной механической полировки (полуавтоматическая шлифовально-полировальная машина Buehler Ecomet 250) с последующим ионным травлением на аппарате SEMPrep2. Анализ полученных данных проводился с использованием лицензионного программного обеспечения HKL-Channel 5. Исследование материалов методом оптической микроскопии осуществлялось на оптическом микроскопе Olympus GX71 в поляризованном свете. Для исследований поверхность подвергалась электрохимическому оксидированию, которое позволяет окрашивать зерна в различные цвета. Методом электроэрозионной резки, в соответствии со стандартом ASTM E-8M-08, подготовлены плоские образцы для экспериментов по одноосному растяжению с размерами: длина рабочей части 25 мм; толщина 2 мм; ширина 6 мм; радиус скругления 14 мм. Эксперименты по одноосному растяжению проведены с использованием электромеханической испытательной машины Instron 3369 со скоростью деформации 0.001 с^{-1} при температуре 24 °С. Измерения твердости по Бринеллю (НВ) проведены в соответствии со стандартом ASTM E103 в разных частях широкой стороны отливки. Для проведения эксперимента использовался автоматический твердомер Duramin 500. Внедрение сферического индентора радиусом 5 мм проводили с усилием 250 кг и выдержкой 30 с. Исследуемые поверхности подготавливались с помощью механической шлифовки.

Результаты и обсуждение

Алюминий технической чистоты, упрочненный наноразмерным оксидом алюминия

Изображения структуры и гистограммы исследуемых сплавов, иллюстрирующие распределение зерен по размерам, представлены на рис. 2, где d_g – размеры зерен, N и n – общее количество измерений и количество зерен определенного размера. Исходный сплав А0 имеет средний размер зерна 200 мкм, дисперсно-упрочненные сплавы – 112 и 69 мкм, содержащие Al_2O_3 0.5 и 1 мас. % соответственно.

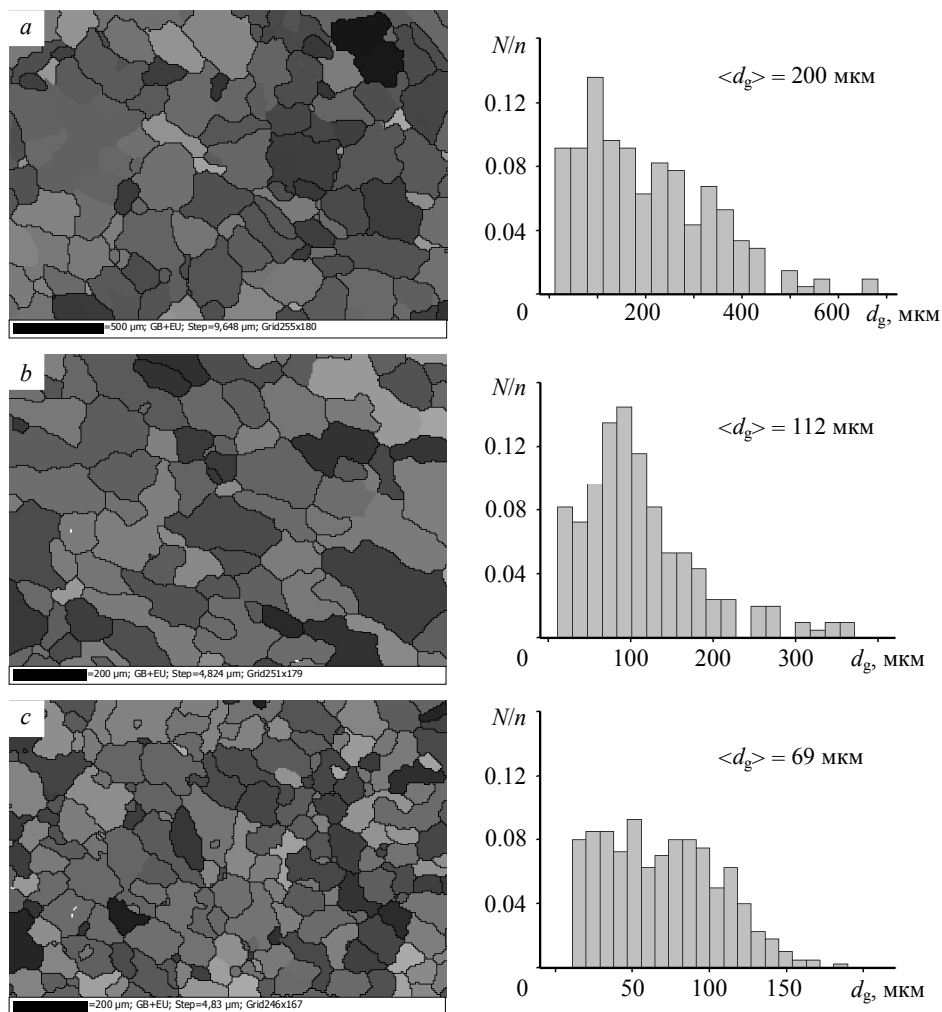


Рис. 2. Изображения структуры, полученные с использованием сканирующего электронного микроскопа и гистограммы распределения зерен по размерам в исследуемых алюминиевых образцах: *a*) исходный сплав A0, *b*) A0–0.5 мас.% Al_2O_3 , *c*) A0–1 мас.% Al_2O_3

Fig. 2. EBSD images of the structure and histograms of the grain size distribution in the studied aluminum samples: (*a*) initial alloy A0, (*b*) A0–0.5 wt% Al_2O_3 , and (*c*) A0–1 wt% Al_2O_3

Данные результаты подтверждают, что нахождение в расплаве частиц малого размера оказывает влияние на размеры зерен. Это связано с тем, что система «расплав – частица» находится в слабоустойчивом состоянии, поэтому любые термические воздействия, которые оказывают частицы-инокуляторы, приводят к изменению агрегатного состояния расплава на их поверхности. В результате этого начинается кристаллизация матрицы, и чем меньше размеры зародыша кристаллизации, тем мельче образовавшееся зерно. А гомогенное распределение инокуляторов в расплаве ведет к равномерности образованной структуры во всем объеме отливки. Полученные сплавы свободны от присутствия макропор. Это еще одно весомое преимущество использования ультразвукового воздействия на рас-

плав, которое отражается в эффекте дегазации через снижение концентрации водорода в расплаве [19, 20].

Результаты экспериментов по одноосному растяжению в виде типичных диаграмм зависимости инженерных напряжений от условных деформаций представлены на рис. 3. Обобщенные результаты обработки деформационных кривых и твердости представлены в табл. 2. Из первых оценок видно, что с увеличением концентрации частиц в сплаве увеличиваются условный предел текучести ($\sigma_{0.2}$) и предел прочности (σ_B). Значение максимального удлинения ($\epsilon_{\max}$) при этом уменьшается.

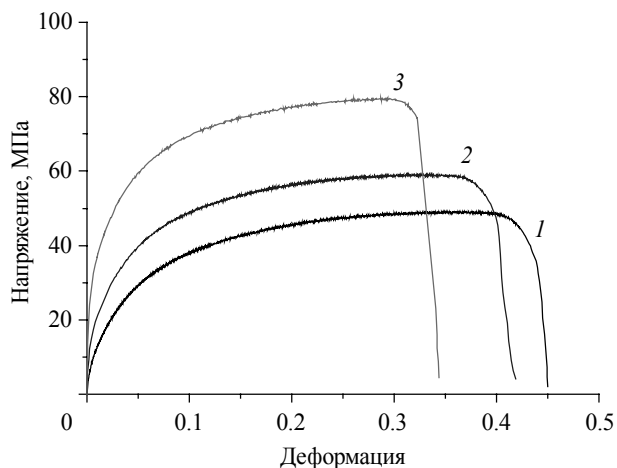


Рис. 3. Деформационные зависимости исследуемых сплавов, полученные при одноосном растяжении: кр. 1 – исходный сплав А0, кр. 2 – А0–0.5 мас.% Al_2O_3 , кр. 3 – А0–1 мас.% Al_2O_3

Fig. 3. Stress-strain curves for the studied alloys obtained under uniaxial tension: 1, initial alloy А0; 2, А0–0.5 wt% Al_2O_3 ; and 3, А0–1 wt% Al_2O_3

Таблица 2

**Обобщенные результаты исследований физико-механических свойств
алюминиевых сплавов на основе А0**

Сплав	$\rho \cdot 10^3, \text{ г/см}^3$	$\sigma_{0.2}, \text{ МПа}$	$\sigma_B, \text{ МПа}$	$\epsilon_{\max}, \%$	НВ
А0	2.68	12 ± 0.6	48 ± 2.4	45	19.36
А0–0.5 мас.% Al_2O_3	2.66	16 ± 0.8	58 ± 2.9	41	20.08
А0–1 мас.% Al_2O_3	2.69	27 ± 1.3	79 ± 4.0	34	21.73

На рис. 4 отражены результаты экспериментов по определению значений условного предела текучести, предела прочности и твердости, показаны полиномиальные зависимости изменения приведенных величин от концентрации частиц в сплаве. Из оценок результатов измерений видно, что значения показателей прочности возрастают с увеличением концентрации упрочняющих частиц и уменьшением среднего размера зерна. Интервалы достоверности, являющиеся среднеквадратичным отклонением, характеризуют разброс экспериментальных данных, полученных на образцах, изготовленных из отливок различных партий.

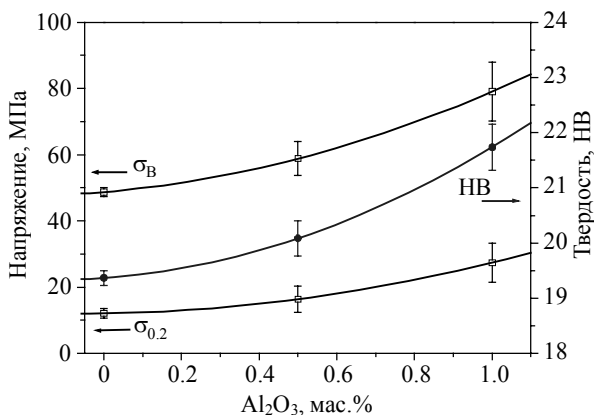


Рис. 4. Зависимости изменения условного предела текучести ($\sigma_{0.2}$), предела прочности (σ_B) и твердости (НВ) исследуемых сплавов от содержания частиц Al_2O_3

Fig. 4. Dependences of the offset yield strength ($\sigma_{0.2}$), tensile strength (σ_B), and hardness (НВ) of the studied alloys on the content of Al_2O_3 particles

Обобщая результаты исследований механических свойств дисперсно-упрочненного технически чистого алюминия А0, можно сделать выводы, что введение наночастиц в малых дозах (до 1 %) способствует увеличению механических свойств и уменьшению пластичности через уменьшение среднего размера зерна. Аналогичные эксперименты, проведенные на сплавах алюминия, содержащих значительное количество примесных элементов, показывают противоположный результат по пластичности [15, 21, 22]. Причиной этому может стать образование вторичных фаз субмикронных размеров при кристаллизации в зернах и межзеренном пространстве из-за наличия в сплавах примесных элементов, что также влияет на изменение деформационного поведения материала.

Алюминий, упрочненный частицами диборида титана

На рис. 5 представлены оптические изображения микроструктуры сплава АМг5 с частицами диборида титана и исходного сплава без частиц.

Средний размер зерна исходного сплава АМг5 после ультразвуковой обработки составил 205 ± 30 мкм (рис. 5, а). Ультразвуковая обработка сплава АМг5 позволяет получать микроструктуру с равноосными зёрнами. При этом, несмотря на кажущуюся однородность, в структуре сплава АМг5 выделяются отдельные зёрна размером более 250 мкм. Введение лигатуры МА1 с ультразвуковой обработкой позволило существенно снизить средний размер зерна АМг5 с 205 ± 30 до 164 ± 12 мкм (рис. 5, б). Введение лигатуры МА2 также позволило снизить средний размер зерна с 205 ± 30 до 163 ± 18 мкм (рис. 5, в). Введение в сплав АМг5 лигатуры МА3 понизило значение среднего размера зерна с 205 ± 30 до 158 ± 8 мкм (рис. 5, д). Для оценки влияния ультразвуковой обработки на процесс введения и распределения частиц был получен сплав с лигатурой МА1 без обработки, средний размер зерна которого составил 250 ± 17 мкм.

На рис. 6 представлены диаграммы, полученные при одноосном растяжении плоских образцов из исследуемых алюминиевых сплавов на основе АМг5.

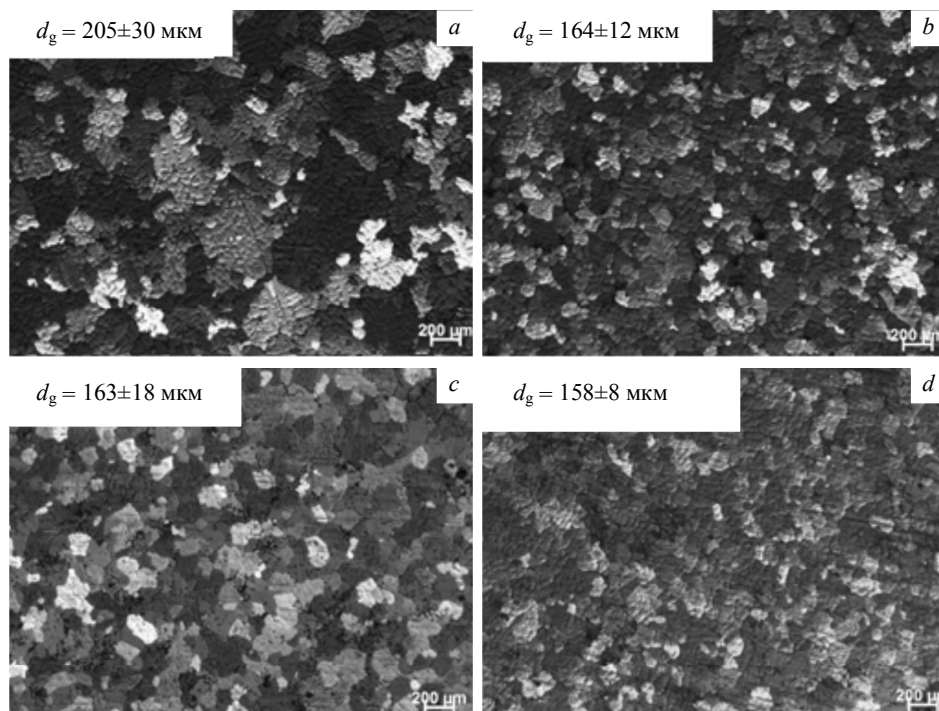


Рис. 5. Оптические изображения микроструктуры сплавов:

a – AMg5+Y3, *b* – AMg5+MA1+Y3, *c* – AMg5+MA2+Y3, *d* – AMg5+MA3+Y3

Fig. 5. Optical images of the alloys' microstructure: (*a*) AMg5+ultrasound, (*b*) AMg5+MA1+ultrasound, (*c*) AMg5+MA2+ultrasound, and (*d*) AMg5+MA3+ultrasound

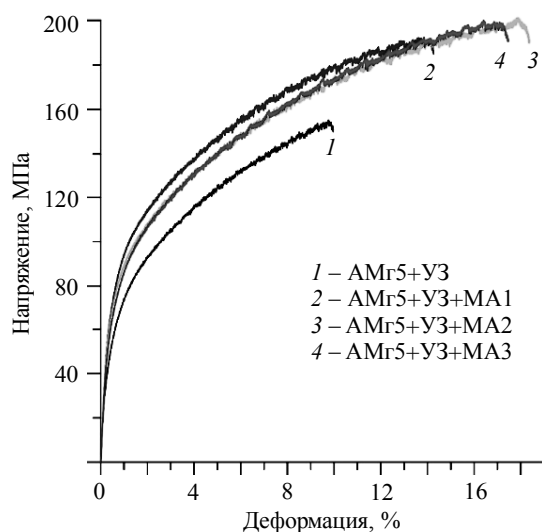


Рис. 6. Сравнение зависимостей, полученных при одноосном растяжении исследуемых сплавов на основе AMr5

Fig. 6. Comparison of the dependences obtained under uniaxial tension of the studied AMg5-based alloys

При обработке экспериментальных диаграмм установлено, что значения условного предела текучести, предела прочности и пластичность литого сплава АМг5 составили 57 МПа, 155 МПа и 11 % соответственно (табл. 3). После модифицирования сплава лигатурой МА1 его механические характеристики значительно увеличились, предел текучести с 57 до 74 МПа, предел прочности с 155 до 192 МПа, пластичность с 11 до 14 % (табл. 3). Введение частиц лигатурой МА2 также привело к увеличению предела текучести с 57 до 71 МПа, предела прочности с 155 до 201 МПа и пластичности с 11 до 18 % (табл. 3). Введение лигатуры МА3 позволило увеличить предел прочности с 57 до 69 МПа, предел прочности с 155 до 200 МПа и пластичности с 11 до 17 % (табл. 3). Введение лигатуры МА1 в сплав без ультразвуковой обработки приводит к снижению предела текучести с 57 до 53 МПа с незначительным увеличением предела прочности с 155 до 159 МПа и пластичности с 11 до 14 %. Использование лигатуры без применения ультразвуковой обработки не позволяет ввести частицы и распределить их в объеме слитка. В структуре наблюдаются темные включения неравномерно распределенной лигатуры, из-за чего не удастся достичь модифицирования зерна АМг5, средний размер которого составил 250 ± 17 мкм.

Таблица 3

**Обобщенные результаты исследования физико-механических свойств
алюминиевых сплавов на основе АМг5**

Сплав	$\rho \cdot 10^3, \text{ г/см}^3$	$\sigma_{0.2}, \text{ МПа}$	$\sigma_B, \text{ МПа}$	$\epsilon_{\max}, \%$
АМг5+УЗ	2.6 ± 0.03	57 ± 4	155 ± 11	11
АМг5+УЗ+МА1	2.64 ± 0.04	74 ± 7	192 ± 14	14
АМг5+УЗ+МА2	2.6 ± 0.04	71 ± 6	201 ± 12	18
АМг5+УЗ+МА3	2.47 ± 0.03	69 ± 8	200 ± 10	17

Вклад в увеличение механических характеристик сплава АМг5 с лигатурой МА1 может быть обусловлен измельчением зерна сплава за счет модифицирования структуры микрочастицами диборида титана (закон Холла – Петча), который согласно выражению (1), составил 9.63 МПа:

$$\Delta\sigma_{GR} = k_y (D^{-1/2} - D_0^{-1/2}), \quad (1)$$

где k_y – параметр Холла – Петча ($\sim 68 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$), D – средний размер зерна с лигатурой, D_0 – средний размер зерна сплава в исходном состоянии [23].

Дополнительный вклад в увеличение механических свойств вносит упрочнение металлической матрицы алюминиевого сплава АМг5 наночастицами (~ 0.1 мкм) диборида титана в лигатуре МА1 по механизму Орована. Наночастицы диборида титана также могут обеспечивать перераспределение нагрузки в матрице

$$\sigma_{\text{load}} = 0.5 V_p \sigma_{0.2}. \quad (2)$$

Его вклад, согласно выражению (2), составляет 8.4 МПа, где V_p – объемное содержание частиц, $\sigma_{0.2}$ – предел текучести матрицы.

Одновременное увеличение предела текучести, прочности и пластичности может быть связано с перераспределением нагрузки в матрице за счет введения и распределения наночастиц, как было ранее предположено в работах [21, 24].

Вклад измельчения зерна при использовании лигатуры МА2 снижается, поскольку структура сплава с лигатурой МА2 является менее однородной, хотя рас-

четное значение составляет 9.72 МПа. Значение механизма Орована, напротив, увеличивается за счет вовлечения в процесс деформирования частиц размером ~ 2 мкм. Немаловажным является роль более мелкодисперсных частиц размером ~ 0.1 мкм, которые в процессе деформирования позволяют увеличивать пластичность сплава АМг5 с 11.5 до 18 %.

В сплаве с лигатурой МА3 наблюдается аналогичная картина для сплава, содержащего лигатуру МА1, однако из-за более однородного размера зерна, доверительный интервал которого составил ± 8 мкм, реализуется более эффективное перераспределение нагрузки от частиц к матрице, за счет чего пластичность увеличивается с 11 до 17 % (табл. 3).

Магний, упрочненный нитридом алюминия

Исследования микроструктуры (рис. 7) полученных дисперсно-упрочненных сплавов показали, что в образцах, содержащих нитрид алюминия, наблюдается уменьшение среднего размера зерна до 230 мкм (МЛ12 – 0.75 вес. % AlN) и до 85 мкм (МЛ12 – 1.5 вес. % AlN) по сравнению с исходным сплавом МЛ12 (1270 мкм). Уменьшение размера структурных элементов, по всей видимости, связано с формированием новых центров кристаллизации вокруг неметаллических включений и значительным сдерживанием роста кристаллов за счет их разрушения при субзвуковом воздействии, возникающим в процессе вибрационной обработки расплава. Увеличение количества частиц до 1.5 мас.% обеспечивает большее количество центров кристаллизации, чем при 0.75 мас.%, способствуя тем самым измельчению зерна. При этом, средний размер зерна является постоянной величиной во всем объеме упрочненного магниевого сплава, что свидетельствует о гомогенности распределения наночастиц в матрице.

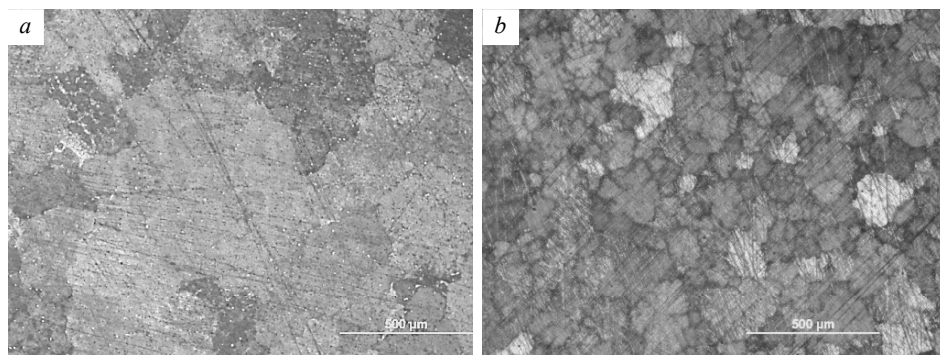


Рис. 7. Оптические изображения микроструктуры: *a* – исходный сплав МЛ12, *b* – дисперсно-упрочненный сплав МЛ12+1.5 мас.% AlN

Fig. 7. Optical images of the microstructure of the (a) initial alloy ML12 and (b) dispersion-hardened alloy ML12+1.5 wt% AlN

Механические испытания исследуемых магниевых сплавов при растяжении (рис. 8, табл. 4) показали, что при введении 1.5 мас.% наночастиц нитрида алюминия предел текучести магниевого сплава увеличился на 139 %, предел прочности на разрыв – на 140 % и пластичность – на 160 %. Увеличение механических характеристик дисперсно-упрочненных сплавов МЛ12-AlN, по-видимому, связано с вкладом двух механизмов. Первым является механизм Орована, возможность

реализации которого обусловлена наличием наночастиц в мягкой металлической матрице магниевого сплава, основанного на препятствии твердых частиц движению дислокаций, при котором не происходит «перерезания» частиц, и линия дислокации изгибается. Реализация второго механизма представляется возможной благодаря закону Холла – Петча, который основывается на зависимости прочности материала от размера зерна, который снижается в дисперсно-упрочненных сплавах более чем в три раза по отношению к исходному сплаву.

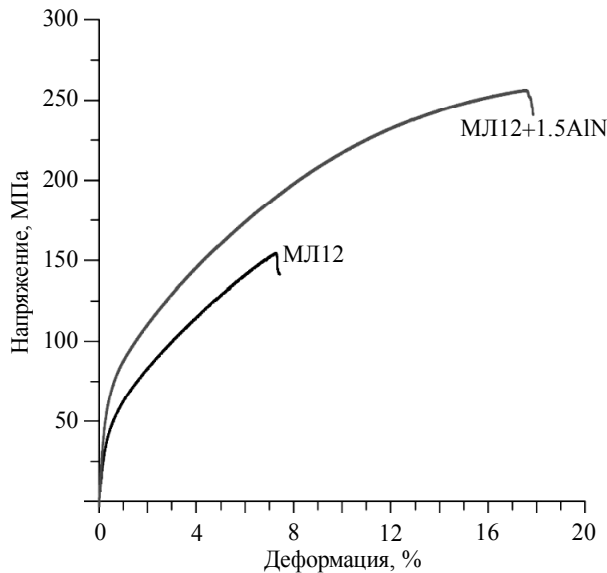


Рис. 8. Сравнение зависимостей, полученных при одноосном растяжении исследуемых сплавов на основе МЛ12
Fig. 8. Comparison of the dependences obtained under uniaxial tension of the studied ML12-based alloys

Таблица 4

Обобщенные результаты исследования физико-механических свойств магниевых сплавов на основе МЛ12

Сплав	d_g , μm	HV	$\rho \cdot 10^3$, г/см^3	$\sigma_{0.2}$, МПа	σ_B , МПа	ϵ_{max} , %
МЛ12	1270 ± 301.3	48 ± 4.0	1.78 ± 0.04	45 ± 6	156 ± 19	7
МЛ12+1.5 AlN	84 ± 6.2	46 ± 6	1.78 ± 0.03	74 ± 3	259 ± 6	17.5

Заключение

Выявлено, что ультразвуковое воздействие способствует получению беспористого материала и гомогенному распределению упрочняющих наноразмерных частиц в объеме отливок алюминия.

Уменьшение среднего размера зерна во всем объеме отливок на основе алюминия технической чистоты свидетельствует о равномерном распределении наночастиц оксида алюминия, выступающих в роли инокуляторов при кристаллизации. При этом уменьшение среднего размера зерна пропорционально увеличению концентрации введенных наночастиц оксида алюминия.

Установлено, что изменение зеренной структуры отразилось на механических свойствах исследуемого сплава. Показана прямая зависимость увеличения значений твердости, предела текучести, предела прочности и уменьшения пластичности от уменьшения среднего размера зерна и увеличения концентрации частиц в алюминиевом сплаве, упрочненном наночастицами оксида алюминия. Измельчение зерна и упрочнение наночастицами позволяет повышать твердость с 19 до 22 НВ, предел текучести с 12 до 27 МПа, предел прочности с 48 до 79 МПа технически чистого алюминия.

Установлено, что введение частиц диборида титана в расплав алюминия АМг5 позволяет измельчать зерно литого алюминиевого сплава с 205 до 158 мкм, за счет чего повышается его предел текучести, предел прочности и пластичность с 57 до 71 МПа, с 155 до 201 МПа и с 11 до 18 % соответственно. Наибольший эффект измельчения структуры достигается при использовании лигатуры, содержащей частицы диборида титана размером до 1 мкм.

Обнаружено, что введение наночастиц нитрида алюминия в магниевый сплав способствует получению мелкозернистой структуры получаемых отливок и, как следствие, увеличению механических характеристик сплава. Предел текучести увеличился на 103 %, предел прочности на разрыв – на 115 % и пластичность – на 140 % по сравнению с исходным (без частиц) сплавом. При этом механизм Холла – Петча внес основной вклад в упрочнение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Malaki M., Xu W., Kasar A.K., Menezes P.L., Dieringa H., Varma R.S., Gupta M. Advanced metal matrix nanocomposites // *Metals*. 2019. V. 9. No. 3. P. 330–1–330–39.
2. Yin Z., Pan Q., Zhang Y., Jiang F. Effect of minor Sc and Zr on the microstructure and mechanical properties of Al–Mg based alloys // *Materials Science and Engineering: A*. 2000. V. 280. No. 1. P. 151–155.
3. Feng X., Liu H., Babu S.S. Effect of grain size refinement and precipitation reactions on strengthening in friction stir processed Al–Cu alloys // *Scripta Materialia*. 2011. V. 65. No. 12. P. 1057–1060.
4. Kendig K.L., Miracle D.B. Strengthening mechanisms of an Al–Mg–Sc–Zr alloy // *Acta Materialia*. 2002. V. 50. No. 16. P. 4165–4175.
5. De Luca A., Dunand D.C., Seidman D.N. Mechanical properties and optimization of the aging of a dilute Al–Sc–Er–Zr–Si alloy with a high Zr/Sc ratio // *Acta Materialia*. 2016. V. 119. P. 35–42.
6. Spierings A.B., Dawson K., Heeling T., Uggowitzer P.J., Schäublin R., Palm F., Wegener K. Microstructural features of Sc- and Zr-modified Al–Mg alloys processed by selective laser melting // *Materials & Design*. 2017. V. 115. P. 52–63.
7. Gao T., Ceguerra A., Breen A., Liu X., Wu Y., Ringer S. Precipitation behaviors of cubic and tetragonal Zr-rich phase in Al–(Si–) Zr alloys // *Journal of Alloys and Compounds*. 2016. V. 674. P. 125–130.
8. Valiev R.Z., Murashkin M.Y., Sabirov I. A nanostructural design to produce high-strength Al alloys with enhanced electrical conductivity // *Scripta Materialia*. 2014. V. 76. P. 13–16.
9. Москвичев Е.Н., Скрипняк В.А., Скрипняк В.В., Козулин А.А., Лычагин Д.В. Исследование структуры и механических свойств алюминиевого сплава 1560 после интенсивной пластической деформации методом прессования с рифлением // *Физическая мезомеханика*. 2017. Т. 20. № 4. С. 85–93.
10. Murashkin M.Y., Sabirov I., Kazykhanov V.U., Bobruk E.V., Dubravina A.A., Valiev R.Z. Enhanced mechanical properties and electrical conductivity in ultrafine-grained Al alloy processed via ECAP-PC // *Journal of Materials Science*. 2013. V. 48. No. 13. P. 4501–4509.
11. Krasnovеikin V.A., Kozulin A.A., Skripnyak V.A. Detection of structural changes and mechanical properties of light alloys after severe plastic deformation // *Journal of Physics: Con-*

- ference Series 6. "6th International Conference Current Issues of Continuum Mechanics and Celestial Mechanics, CICMCM 2016". 2017. 919. P. 012012.
12. *Vorozhtsov S., Zhukov I., Vorozhtsov A., Zhukov A., Eskin D., Kvetinskaya A.* Synthesis of micro-and nanoparticles of metal oxides and their application for reinforcement of Al-based alloys // *Advances in Materials Science and Engineering*. 2015. V. 2015. P. 1–6.
 13. *Vorozhtsov S., Minkov L., Dammer V., Khrustalyov A., Zhukov I., Promakhov V., Khmeleva M.* Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: modeling and experiment // *JOM*. 2017. V. 69. No. 12. P. 2653–2657.
 14. *Naydenkin E., Mishin I., Khrustalyov A., Vorozhtsov S., Vorozhtsov A.* Influence of combined helical and pass rolling on structure and residual porosity of an AA6082-0.2 wt% Al₂O₃ composite produced by casting with ultrasonic processing // *Metals*. 2017. V. 7. No. 12. P. 544-1–544-7.
 15. *Vorozhtsov S., Zhukov I., Promakhov V., Naydenkin E., Khrustalyov A., Vorozhtsov A.* The influence of ScF₃ nanoparticles on the physical and mechanical properties of new metal matrix composites based on A356 Aluminum Alloy // *JOM*. 2016. V. 68. No. 12. P. 3101–3106.
 16. *Vorozhtsov S., Vorozhtsov A., Kudryashova O., Zhukov I., Promakhov V.* Structural and mechanical properties of aluminium-based composites processed by explosive compaction // *Powder Technology*. 2017. V. 313. P. 251–259.
 17. *Жуков И.А., Промахов В.В., Матвеев А.Е., Платов В.В., Хрусталева А.П., Дубкова Я.А., Ворожцов С.А., Потеев А.И.* Закономерности формирования структуры и фазового состава композиционных лигатур систем Al-Ti-B/B₄C, используемых для модификации алюминиевых сплавов // *Изв. вузов. Физика*. 2017. Т. 60. №. 11. С. 158–163.
 18. *Zhukov I.A., Kozulin A.A., Khrustalyov A.P., Matveev A.E., Platov V.V., Vorozhtsov A.B., Zhukova T.V., Promakhov V.V.* The impact of particle reinforcement with Al₂O₃, TiB₂, and TiC and severe plastic deformation treatment on the combination of strength and electrical conductivity of pure aluminum // *Metals*. 2019. V. 9. No. 1. P. 65-1–65-10.
 19. *Danilov P.A., Khrustalev A.P., Vorozhtsov A.B., Zhukov I.A., Promakhov V.V., Khmeleva M.G., Pikushchak E.V., Kvetinskaya A.V.* Analysis of the effect of external physical fields on the casting of light alloys // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta // Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*. 2018. V. 55. P. 84–98.
 20. *Kudryashova O.B., Eskin D.G., Khrustalev A.P., Vorozhtsov S.A.* Ultrasonic effect on the penetration of the metallic melt into submicron particles and their agglomerates // *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*. 2017. V. 58. No 4. P. 427–433.
 21. *Vorozhtsov S.A., Eskin D.G., Tamayo J., Vorozhtsov A.B., Promakhov V.V., Averin A.A., Khrustalyov A.P.* The application of external fields to the manufacturing of novel dense composite master alloys and aluminum-based nanocomposites // *Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science*. 2015. V. 46. No. 7. P. 2870–2875.
 22. *Vorozhtsov S.A., Kudryashova O.B., Promakhov V.V., Dammer V.Kh., Vorozhtsov A.B.* Theoretical and experimental investigations of the process of vibration treatment of liquid metals containing nanoparticles // *JOM*. 2016. V. 68. No 12. P. 3094–3100.
 23. *Sreekumar V.M., Hari Babu N., Eskin D.G., Fan Z.* Structure–property analysis of in-situ Al–MgAl₂O₄ metal matrix composites synthesized using ultrasonic cavitation // *Materials Science & Engineering A*. 2015. V. 628. P. 30–40.
 24. *Belov N.A.* Effect of eutectic phases on the fracture behavior of high-strength castable aluminum alloys // *Metal Science and Heat Treatment*. 1995. V. 37. P. 237–242.

Vorozhtsov A.B., Danilov P.A., Zhukov I.A., Khmeleva M.G., Platov V.V., Valikhov V.D. (2020) THE EFFECT OF EXTERNAL ACTIONS ON A MOLTEN METAL AND THE INFLUENCE OF NONMETALLIC NANOPARTICLES ON THE STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF THE LIGHT ALLOYS BASED ON ALUMINUM AND MAGNESIUM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 91–107

DOI 10.17223/19988621/64/7

Keywords: aluminum, magnesium, nanosized particles, aluminum oxide, aluminum nitride, titanium diboride, structure, hardness, tensile strength, yield strength.

In this paper, the studies of the effect of aluminum and magnesium alloys' structures, which are dispersion-hardened by nanosized ceramic particles, on their mechanical characteristics are carried out. The influence of the aluminum oxide particles' concentration ranging from 0.1 to 1 wt% per grain structure on the microhardness and mechanical tensile behavior of pure aluminum is shown. It is found that with an increase in the nanosized alumina concentration from 0.1 to 1 wt% in the structure of aluminum, the tensile strength increases from 49 up to 79 MPa, and the yield strength increases from 12 up to 27 MPa in the tested samples. The impact of the dispersion of titanium diboride particles on the structure and mechanical behavior of AMg5 alloy is studied. It is revealed that the maximum grain refinement and increase in the tensile mechanical properties are observed when the titanium diboride particles of the size from 50 nm to 3 μm are used for the alloying of AMg5. The magnesium alloys ML12 hardened by 1.5 wt% particles of aluminum nitride are studied. It is found that the introduction of the aluminum nitride particles into a magnesium melt contributes to a decrease in the average grain size from ~ 1270 to 85 μm in the obtained castings and, as a result, to an increase in the mechanical properties.

Financial support. The study of Al-Mg alloys was performed with a financial support from the Russian Federation President Grant (MK-506.2019.8). The study of the materials hardened by nanosized aluminum oxide and based on technical-purity aluminum was funded by RFBR according to the research project No. 18-38-20081.

Aleksander B. VOROZHTSOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: abv1953@mail.ru

Pavel A. DANILOV (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: padanilov@gmail.com

Il'ya A. ZHUKOV (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

Marina G. KHMELEVA (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: khmelmg@gmail.com

Vladimir V. PLATOV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vova.platov.85@mail.ru

Vladimir D. VALIKHOV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: valihov.snobs@gmail.com

REFERENCES

1. Malaki M., Xu W., Kasar A.K., Menezes P.L., Dieringa H., Varma R.S., Gupta M. (2019) Advanced metal matrix nanocomposites. *Metals*. 9(3). pp. 330–1–330–39. DOI: 10.3390/met9030330.
2. Yin Z., Pan Q., Zhang Y., Jiang F. (2000) Effect of minor Sc and Zr on the microstructure and mechanical properties of Al–Mg based alloys. *Materials Science and Engineering: A*. 280(1). pp. 151–155. DOI: 10.1016/S0921-5093(99)00682-6.
3. Feng X., Liu H., Babu S.S. (2011) Effect of grain size refinement and precipitation reactions on strengthening in friction stir processed Al–Cu alloys. *Scripta Materialia*. 65(12). pp. 1057–1060. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2011.09.009.
4. Kendig K.L., Miracle D.B. (2002) Strengthening mechanisms of an Al–Mg–Sc–Zr alloy. *Acta Materialia*. 50(16). pp. 4165–4175. DOI: 10.1016/S1359-6454(02)00258-6.
5. De Luca A., Dunand D.C., Seidman D.N. (2016) Mechanical properties and optimization of the aging of a dilute Al–Sc–Er–Zr–Si alloy with a high Zr/Sc ratio. *Acta Materialia*. 119. pp. 35–42. DOI: 10.1016/j.actamat.2016.08.018.
6. Spierings A.B., Dawson K., Heeling T., Uggowitzer P.J., Schäublin R., Palm F., Wegener K. (2017) Microstructural features of Sc- and Zr-modified Al–Mg alloys processed by selective laser melting. *Materials & Design*. 115. pp. 52–63. DOI: 10.1016/j.matdes.2016.11.040.
7. Gao T., Ceguerra A., Breen A., Liu X., Wu Y., Ringer S. (2016) Precipitation behaviors of cubic and tetragonal Zr-rich phase in Al–(Si–) Zr alloys. *Journal of Alloys and Compounds*. 674. pp. 125–130. DOI: 10.1016/j.jallcom.2016.02.236.
8. Valiev R.Z., Murashkin M.Y., Sabirov I. (2014) A nanostructural design to produce high-strength Al alloys with enhanced electrical conductivity. *Scripta Materialia*. 76. pp. 13–16. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2013.12.002.
9. Moskvichev E.N., Skripnyak V.A., Skripnyak V.V., Kozulin A.A., Lychagin D.V. (2018) Structure and mechanical properties of aluminum 1560 alloy after severe plastic deformation by groove pressing. *Physical Mesomechanics*. 21(6). pp. 515–522. DOI: 10.1134/S1029959918060061.
10. Murashkin M.Y., Sabirov I., Kazykhanov V.U., Bobruk E.V., Dubravina A.A., Valiev R.Z. (2013) Enhanced mechanical properties and electrical conductivity in ultrafine-grained Al alloy processed via ECAP-PC. *Journal of Materials Science*. 48(13). pp. 4501–4509. DOI: 10.1007/s10853-013-7279-8.
11. Krasnoveikin V.A., Kozulin A.A., Skripnyak V.A. (2017) Detection of structural changes and mechanical properties of light alloys after severe plastic deformation. *Journal of Physics: Conference Series* 6. pp. 012012. DOI: 10.1088/1742-6596/919/1/012012.
12. Vorozhtsov S., Zhukov I., Vorozhtsov A., Zhukov A., Eskin D., Kvetinskaya A. (2015) Synthesis of micro- and nanoparticles of metal oxides and their application for reinforcement of Al-based alloys. *Advances in Materials Science and Engineering*. pp. 1–6. DOI: 10.1155/2015/718207.
13. Vorozhtsov S., Minkov L., Dammer V., Khrustalyov A., Zhukov I., Promakhov V., Khmeleva M. (2017) Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: modeling and experiment. *JOM*. 69(12). pp. 2653–2657. DOI: 10.1007/s11837-017-2594-1.
14. Naydenkin E., Mishin I., Khrustalyov A., Vorozhtsov S., Vorozhtsov A. (2017) Influence of combined helical and pass rolling on structure and residual porosity of an AA6082–0.2 wt% Al₂O₃ composite produced by casting with ultrasonic processing. *Metals*. 7(12). pp. 544–1–544–7. DOI: 10.3390/met7120544.
15. Vorozhtsov S., Zhukov I., Promakhov V., Naydenkin E., Khrustalyov A., Vorozhtsov A. (2016) The influence of ScF₃ nanoparticles on the physical and mechanical properties of new metal matrix composites based on A356 aluminum alloy. *JOM*. 68(12). pp. 3101–3106. DOI: 10.1007/s11837-016-2141-5.
16. Vorozhtsov S., Vorozhtsov A., Kudryashova O., Zhukov I., Promakhov V. (2017) Structural and mechanical properties of aluminium-based composites processed by explosive compaction. *Powder Technology*. 313. pp. 251–259. DOI: 10.1016/j.powtec.2017.03.027.

17. Zhukov I.A., Promakhov V.V., Matveev A.E., Platov V.V., Khrustalev A.P., Dubkova Ya.A., Vorozhtsov S.A., Potekaev A.I. (2018) Principles of structure and phase composition formation in composite master alloys of the Al–Ti–B/B₄C systems used for aluminum alloy modification. *Russian Physics Journal*. 60(11). pp. 2025–2031. DOI: 10.1007/s11182-018-1319-4.
18. Zhukov I.A., Kozulin A.A., Khrustalyov A.P., Matveev A.E., Platov V.V., Vorozhtsov A.B., Zhukova T.V., Promakhov V.V. (2019) The impact of particle reinforcement with Al₂O₃, TiB₂, and TiC and severe plastic deformation treatment on the combination of strength and electrical conductivity of pure aluminum. *Metals*. 9(1). pp. 65-1–65-10. DOI: 10.3390/met9010065.
19. Danilov P.A., Khrustalev A.P., Vorozhtsov A.B., Zhukov I.A., Promakhov V.V., Khmeleva M.G., Pikushchak E.V., Kvetinskaya A.V. (2018) Analiz vliyaniya vneshnikh fizicheskikh vozdeystviy na protsessy lit'ya legkikh splavov [Analysis of the effect of external physical fields on the casting of light alloys]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 84–98. DOI: 10.17223/19988621/55/8.
20. Kudryashova O.B., Eskin D.G., Khrustalev A.P., Vorozhtsov S.A. (2017) Ultrasonic effect on the penetration of the metallic melt into submicron particles and their agglomerates. *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*. 58(4). pp. 427–433. DOI: 10.3103/S1067821217040101.
21. Vorozhtsov S.A., Eskin D.G., Tamayo J., Vorozhtsov A.B., Promakhov V.V., Averin A.A., Khrustalyov A.P. (2015). The application of external fields to the manufacturing of novel dense composite master alloys and aluminum-based nanocomposites. *Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science*. 46(7). pp. 2870–2875. DOI: 10.1007/s11661-015-2850-3.
22. Vorozhtsov S.A., Kudryashova O.B., Promakhov V.V., Dammer V., Vorozhtsov A.B. (2016) Theoretical and experimental investigations of the process of vibration treatment of liquid metals containing nanoparticles. *JOM*. 68(12). pp. 3094–3100. DOI: 10.1007/s11837-016-2147-z.
23. Sreekumar V.M., Hari Babu N., Eskin D.G., Fan Z. (2015) Structure–property analysis of in-situ Al–MgAl₂O₄ metal matrix composites synthesized using ultrasonic cavitation. *Materials Science & Engineering A*. 628. pp. 30–40. DOI: 10.1016/j.msea.2015.01.029.
24. Belov N.A. (1995) Effect of eutectic phases on the fracture behavior of high-strength castable aluminum alloys. *Metal Science and Heat Treatment*. 37. pp. 237–242.

Received: October 3, 2019

УДК 533.6

DOI 10.17223/19988621/64/8

Е.Е. Мазепа, П.И. Кусайнов, О.Ю. Лукашов, А.Ю. Крайнов**О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ГОРНЫХ ВЫРАБОТКАХ ШАХТЫ**

Представлена физико-математическая модель распространения воздушных ударных волн (ВУВ) в сети выработок угольной шахты после мгновенного взрыва метано-воздушной смеси на заданном участке. Представлен подход к реализации метода решения задач о распространении воздушных ударных волн в разветвленной сети горных выработок с учетом произвольных углов их сопряжения. Приведены результаты расчетов распространения воздушных ударных волн в модельных сетях выработок шахты.

Ключевые слова: *сеть выработок шахты, взрыв метана, воздушные ударные волны, математическая модель, методика решения.*

В соответствии с «Правилами безопасности в угольных шахтах...» [1] угольные шахты являются опасными производственными объектами. В [2] перечислены виды аварий, характерных для шахт, где взрывы метана и угольной пыли являются наиболее тяжелыми. Опасными факторами взрыва являются избыточное давление, высокая температура, высокая концентрация токсичных продуктов взрыва и высокая скорость воздушных потоков, увлекающая за собой тяжелые предметы. Вследствие этих факторов взрывы часто приводят к человеческим жертвам и почти всегда к многомиллионным убыткам. Согласно статистике [3], с 1991 по 2017 год произошло 208 аварий с общим числом жертв 1600 человек, поэтому вопросы локализации взрыва, гашения воздушных ударных волн остаются до сих пор актуальными.

Практическое определение границ зон поражения по разным факторам осуществляется с помощью специальных отраслевых методик. В России применялись или применяются три из них [4–6], при этом, действующая методика [6] основана на газодинамическом подходе с использованием системы классических уравнений газовой динамики, состоящей из уравнений сохранения массы, импульса и энергии. Такой подход обладает значительным преимуществом перед методом с использованием чисто эмпирических соотношений – он позволяет учитывать волновые эффекты и вводить в математическую модель новые физические особенности, оставаясь физически и математически корректным. Таковыми могут быть учет водяных и сланцевых заслонов [7–10], автоматических установок взрыволокализации и др.

Наряду с преимуществами использование газодинамической модели привносит и свои сложности: скорость расчетов низкая из-за использования при расчетах численных методов по сравнению с расчетами с использованием эмпирических методик; модернизация математической модели влечет за собой существенное изменение программного кода, используемого для решения задач. Тем не менее модернизация математической модели является актуальной в связи с требованиями учета инженерных взрывозащитных сооружений.

В настоящей статье предлагается методика организации расчетных структур и декомпозиции расчетов при решении задач распространения ВУВ в сети горных выработок, которая упрощает модернизацию численных расчетов при изменении математической модели распространения ВУВ, ускоряет расчет за счет распараллеливания вычислений на современных многоядерных или многопроцессорных компьютерах.

Математическая модель

Математическая модель, описывающая распространение ВУВ в разветвленной сети горных выработок, описывается системой нестационарных газодинамических уравнений. Подробное описание модели рассматривается в [9].

Уравнения сохранения массы, импульса и энергии газа для прямолинейных участков выработок:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_f S}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f u S}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p) S}{\partial x} = -\tau_f \Pi + p \frac{\partial S}{\partial x}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho E S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E u + p u) S}{\partial x} = q \Pi, \quad E = c_v T + \frac{u^2}{2}; \quad (4)$$

$$p = \rho R T. \quad (5)$$

В зонах изменения конфигурации и сечения горных выработок (сопряжения горных выработок, примыкания вертикальных выработок, повороты) будем использовать трехмерный подход. Течение газа в этой области описывается трехмерными уравнениями газовой динамики. Будем называть эту область выработок «узел». Каждый узел представляется в виде одной трехмерной ячейки, к сторонам которой могут примыкать смежные ветви различного сечения под разными углами. В декартовой системе координат x, y, z уравнения газовой динамики имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_f v}{\partial y} + \frac{\partial \rho_f w}{\partial z} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial \rho v w}{\partial z} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w^2 + p)}{\partial z} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E u + p u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho E v + p v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho E w + p w)}{\partial z} = 0, \quad E = c_v T + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}; \quad (11)$$

$$p = \rho R T. \quad (12)$$

Предполагая, что известны координаты, протяженность, значения состояния среды после взрыва в зоне взрыва, а также параметры рудничной атмосферы, ставим следующие начальные условия для прямолинейных участков выработок:

$$p(x, 0) = \begin{cases} P_b & x \in BM, \\ P_0 & x \notin BM, \end{cases} \quad T(x, 0) = \begin{cases} T_b & x \in BM, \\ T_0 & x \notin BM, \end{cases}$$

$$\rho_f(x, 0) = \begin{cases} \rho_f & x \in BM, \\ 0 & x \notin BM, \end{cases} \quad u(x, 0) = 0, \quad (13)$$

и для сопряжений:

$$p(x, y, z, 0) = \begin{cases} P_b & \text{в } BM, \\ P_0 & \text{вне } BM, \end{cases} \quad T(x, y, z, 0) = \begin{cases} T_b & \text{в } BM, \\ T_0 & \text{вне } BM, \end{cases}$$

$$\rho_f(x, y, z, 0) = \begin{cases} \rho_f & \text{в } BM, \\ 0 & \text{вне } BM, \end{cases} \quad (14)$$

$$u(x, y, z, 0) = 0, \quad v(x, y, z, 0) = 0, \quad w(x, y, z, 0) = 0.$$

Граничные условия для уравнений (1) – (4) и (6) – (11) задаются в зависимости от конфигурации и сечения прилегающей выработки, с которой она граничит. Если граница выработки тупик или изолирующая переемычка, то используется условие непротекания

$$u|_{\text{гр}} = 0. \quad (15)$$

Если выработка выходит на поверхность

$$p|_{\text{гр}} = p_{\text{атм}}, \quad \rho|_{\text{гр}} = \rho_{\text{атм}}. \quad (16)$$

Принятые обозначения: t – время, x, y, z – оси декартовой системы координат, ρ – плотность газа, ρ_f – парциальная плотность продуктов сгорания, u, v, w – компоненты вектора скорости, p – давления, E – полная энергия газа, T – температура, S – площадь проходного сечения канала, Π – периметр сечения канала, τ_{fr} – сила трения о стенки, q – поток тепла в стенки, R – газовая постоянная, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Индексы: 0 – атмосферные условия, b – параметры в зоне взрыва, f – продукты сгорания, BM – зона взрыва метана.

Для решения системы уравнений используется метод С.К. Годунова [11].

Реализация алгоритма численного расчета

В обобщенном виде алгоритм расчета можно описать следующим образом:

1. Прямолинейные участки горных выработок (ветви) разбиваются на серии одномерных расчетных ячеек (рис. 1);
2. В сопряжениях, поворотах и точках изменения геометрических параметров выработок (узлах) размещаются трехмерные ячейки;
3. Во всех ячейках устанавливаются начальные условия;
4. Выполняется расчетный цикл:

- 4.1) на текущем временном слое определяется шаг по времени с учетом критерия Куранта;
- 4.2) на границе каждой пары смежных ячеек решается задача о распаде произвольного разрыва;
- 4.3) в ячейках производится решение уравнений (1) – (5) или (6) – (12), и нахождение параметров среды на новом временном слое;
5. Процедура итеративно повторяется до факта достижения критерия остановки.

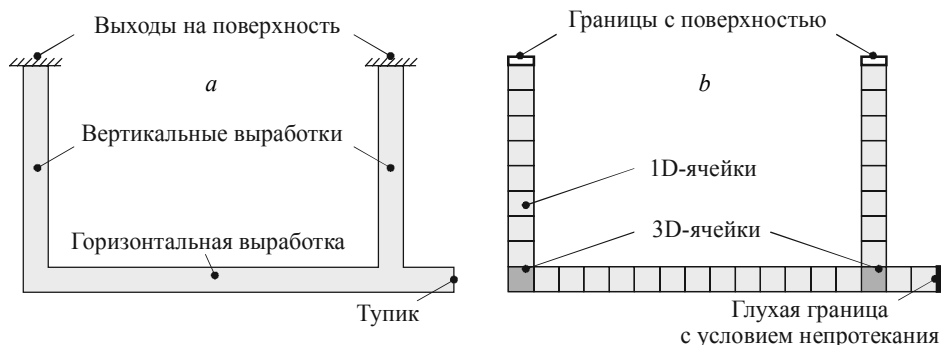


Рис. 1. Простейшая модельная сеть выработок (а) и соответствующая ей дискретная расчетная область (б)

Fig. 1. (a) The simplest model network of workings and (b) the corresponding discrete computational domain

Первичная реализация алгоритма [9] с выделением объектов типа «узел» и «ветвь» и объединением этих объектов в массивы (рис. 2), показала, что этот вариант является рабочим, но низкоэффективным в плане адаптации к последующему развитию математической модели и метода решения:

- использование массивов усложняет связывание ячеек на границах областей с разными размерностями ячеек;
- при распараллеливании расчетов путем геометрической декомпозиции расчетной области сложно выполнять балансировку нагрузки на вычислительные потоки, так как основными единицами являются не отдельные расчетные ячейки, а ветви с существенно различающимися длинами;

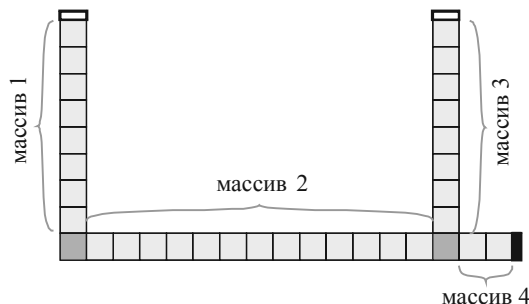


Рис. 2. Демонстрация подхода, когда в качестве основной расчетной единицы принята ветвь с массивом ячеек внутри

Fig. 2. Demonstration of the approach when a branch with an array of cells inside is accepted as a main calculation unit

- отсутствует универсальный механизм изменения граничных условий. Такой механизм, например, нужен при наличии глухих взрывоустойчивых перемычек, когда до разрушения перемычки соответствующая ей граница должна рассматриваться как глухая, а после разрушения стать проходной;

- отсутствует универсальный механизм замены математической модели. Такой подход может быть полезен, когда в сети выработок имеются, например, водоналивные перемычки – до их срабатывания имеет смысл использовать газодинамическую модель, а после срабатывания – модель с учетом капель воды в газе.

Опыт использования и модернизации первичного варианта алгоритма [9] показал, что возможен более эффективный подход к реализации расчетного алгоритма. Он основан на идее, заложенной в методе контрольных объемов – выделении элементарного объема, имеющего связи со смежными ячейками, в котором реализуется алгоритм решения системы уравнений математической модели. Связи между смежными ячейками устанавливаются на каждой границе объема, а количество этих границ соответствует размерности данной ячейки (рис. 3). Это делает ячейку *элементарной* (описывающую поведение системы в данном элементарном объеме), *изолированной* (остаются лишь сама ячейка и ее связи со смежными объемами) и *самодостаточной* (для расчета параметров газа есть все необходимое – уравнения математической модели, граничные и начальные условия).

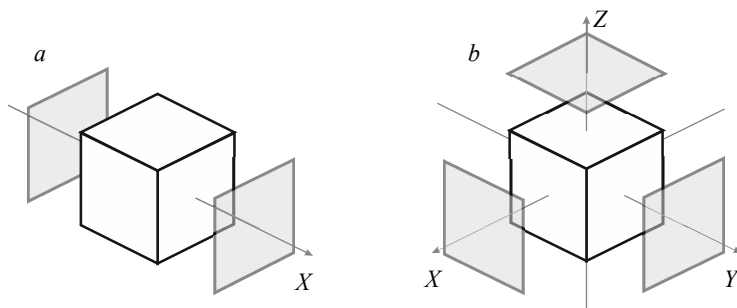


Рис. 3. Контрольные объемы в случаях одномерной (а) и трехмерной (b) ячеек, и границы, через которые устанавливаются связи между смежными ячейками

Fig. 3. Control volumes for (a) one-dimensional and (b) three-dimensional cells, and the connecting boundaries between adjacent cells

Предлагается универсальный механизм связывания ячеек: достаточно создать экземпляры этих ячеек, связать их и указать используемую математическую модель, описывающую поведение системы именно в этом объеме. Причем таких моделей может быть одна или несколько, они могут динамически меняться в зависимости от разных физических факторов в процессе выполнения численных расчетов (с соблюдением соответствующих правил трансформации между моделями и с соблюдением законов сохранения).

В результате экспериментов по реализации алгоритма расчета ВУВ «граница» была выделена в виде самостоятельного элемента алгоритма с наличием данных о двух смежных ячейках, которые она соединяет (рис. 4, а). Основными исходными данными для решения задачи о распаде произвольного разрыва выступают плотность, давление и скорости потоков в смежных ячейках. Эти данные не зависят от размерности смежных ячеек, поэтому «граница» позволяет единообразно связывать ячейки любых размерностей (рис. 4, b).

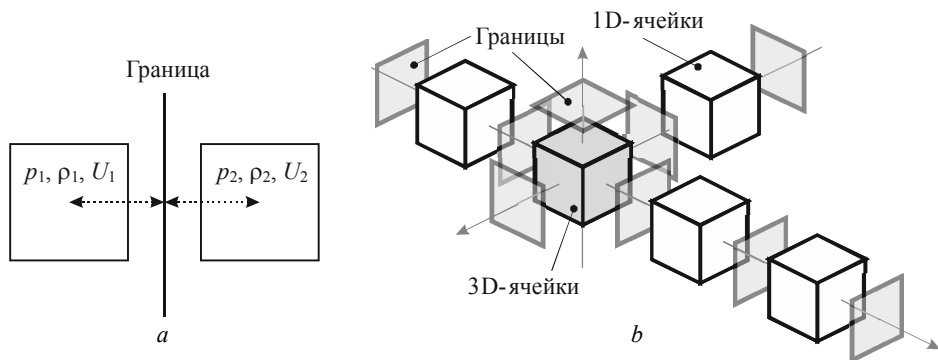


Рис. 4. Связывание двух смежных ячеек через границу (а), пример организации связей в сопряжении нескольких ветвей (b)

Fig. 4. (a) Binding of two adjacent cells through a boundary; (b) an example of linking in a conjugation of several branches

«Границу» также удобно использовать для моделирования особых граничных случаев – выходы поверхность, тупик. Это может достигаться за счет применения как специальных видов ячеек, находящихся зеркально по отношению к соответствующим пограничным ячейкам расчетной области, так и использованием специальных видов «границ», имитирующих наличие таких ячеек. Во втором случае удобно моделировать наличие вентиляционных сооружений (дверей) и взрывоустойчивых перегородок с последующей заменой типа границы в случае разрушения перегородки (рис. 5).

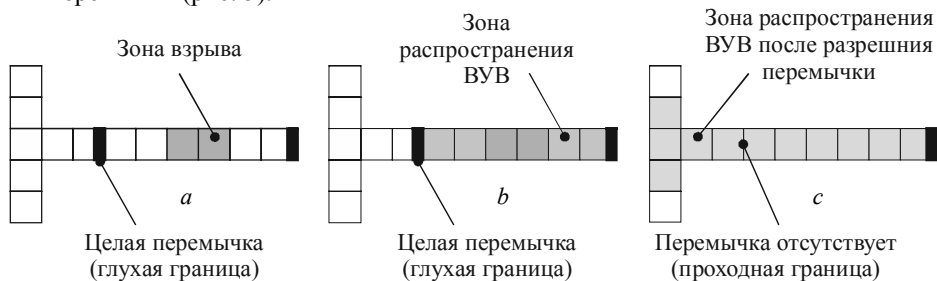


Рис. 5. Пример замены типа границы: а – изолированный тупик, в котором ожидается взрыв; b – распространение ВУВ после взрыва перед моментом разрушения перегородки; с – распространение ВУВ после разрушения перегородки. Разрушение перегородки сопровождается заменой граничного условия в месте установки перегородки с условия не протекания на расчет в ветви

Fig. 5. An example of the boundary type alternation: (a) an isolated dead end in which an explosion is expected; (b) the shock wave propagation induced by the explosion before the stopping is destroyed; and (c) the shock wave propagation following the destruction of the stopping. The destruction is accompanied by a replacement of the boundary condition on the stopping installation site from the impermeability condition to the calculation in the branch

Необходимо отметить еще один важный момент – необходимость учета углов, под которыми сопрягаются между собой реальные горные выработки. Это выражается в наличии таких углов между крайними одномерными ячейками ветвей с трехмерными ячейками смежных узлов и необходимостью расчета соответствующих проекций – нормальных и тангенциальных составляющих скоростей. Для

автоматизации расчета этих проекций была создан дополнительный элемент алгоритма – «грань» ячейки, которая выполняет эти действия на основе информации о номере стороны расчетной ячейки, к которой она прилегает, и углов сопряжения смежных ветвей (рис. 6).

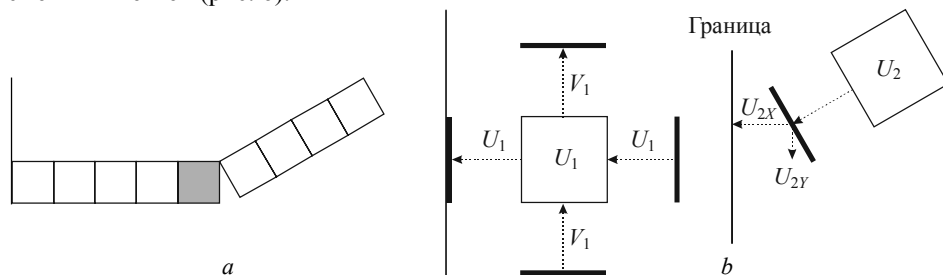


Рис. 6. Дискретная модель поворота горной выработки (а) и соответствующая ему связка ячеек, граней и границ (б)

Fig. 6. (a) A discrete model of the bend in a mine working and (b) the corresponding binding of the cells, faces, and boundaries

С учетом определения понятий «ячейка», «грань» и «граница» в алгоритме порядок расчета можно детализировать следующим образом:

1. Прямолинейные участки горных выработок (ветви) разбиваются на серии одномерных расчетных «ячеек»;
2. В сопряжениях, поворотах и точках изменения геометрических параметров выработок (узлах) размещаются трехмерные «ячейки»;
3. Для каждой одномерной «ячейки» создается по две «грани», которые присоединяются к участвующим в вычислениях сторонам «ячейки», для каждой трехмерной «ячейки» создается по шесть «граней» – для всех ее сторон;
4. Создаются «границы», каждая из которых связывается с двумя «гранями» смежных «ячеек»;
5. Во всех «ячейках» устанавливаются начальные условия;
6. Выполняется расчетный цикл:
 - 6.1) на текущем временном слое определяется шаг по времени с учетом критерия Куранта;
 - 6.2) проверяются факторы, определяющие замену границ, например непротекаемых на проходные;
 - 6.3) на границе каждой пары смежных ячеек решается задача о распаде произвольного разрыва, при этом нормальные составляющие векторов скоростей определяются через смежные грани;
 - 6.4) в ячейках производится решение уравнений (1) – (5) или (6) – (12) и нахождение параметров среды на новом временном слое. На этом этапе требуется лишь решение уравнений, непосредственно составляющих исходную математическую модель. При необходимости, модель может быть динамически заменена;
7. Процедура итеративно повторяется до факта достижения критерия остановки.

Проверка алгоритма расчета

Для проверки корректности расчетов с использованием описанного алгоритма был проведен ряд модельных и тестовых расчетов. Модельные схемы каналов (выработок) показаны на рис. 7.

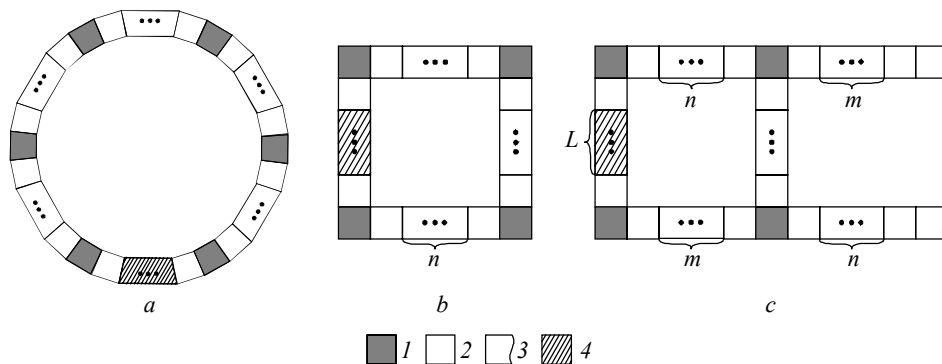


Рис. 7. Модельные схемы каналов: *a* – окружность, *b* – замкнутый квадрат, *c* – «разрезная печь»: 1 – 3D ячейка, 2 – 1D ячейка, 3 – ячейка с открытой границей, 4 – зона повышенного давления, *L*, *n*, *m* – длины ветвей

Fig. 7. (a) A circle, (b) a closed square, and (c) a “crosscut”: 1, a 3D cell; 2, a 1D cell; 3, a cell with an open boundary; and 4, a pressure zone; *L*, *n*, *m* are the branch lengths

Все схемы являются модельными, однако позволяют оценить корректность нового алгоритма расчета параметров ВУВ: проверить выполнимость основных законов сохранения, симметричность распространения ударных волн при симметричности геометрии каналов и параметров взрыва.

Проведен расчет распространения ВУВ в канале, представляющем собой кольцо (рис. 7, *a*). Зона взрыва задавалась в нижней части кольца, давление в зоне взрыва составляло 570 кПа. Результаты расчета показаны на рис. 8. Видно, что ВУВ распространяются симметрично в разные стороны. В момент времени $t = 0.6$ с образуется новый пик давления, обусловленный взаимодействием волн давления, распространяющихся навстречу друг другу.

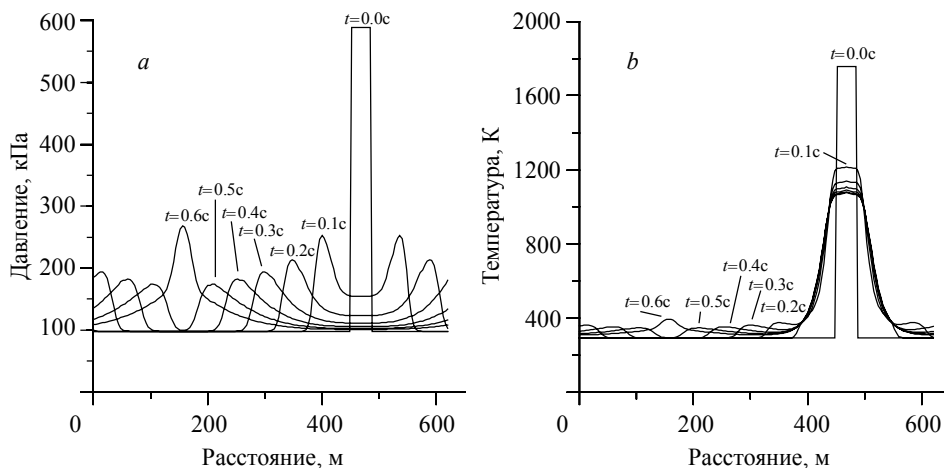


Рис. 8. Распределения давления (*a*) и температуры (*b*) в разные моменты времени в кольцевом канале

Fig. 8. Distribution of the (a) pressure and (b) temperature in the annular channel at various time instants

Результаты расчета распространения ВУВ в замкнутой квадратной конфигурации каналов (горных выработок, рис. 7, *b*) представлены на рис. 9. В момент времени $t = 0.1$ с образуется два пика на одинаковом расстоянии, связанные с поворотом канала на 90° . В противоположенной от места взрыва ветви ударные волны сходятся и наблюдается всплеск давления в момент времени 0.6 с.

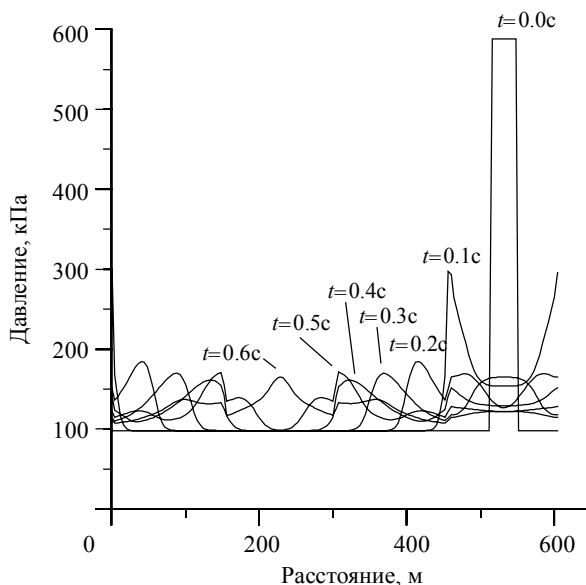


Рис. 9. Распределения давления в разные моменты времени в канале квадратной конфигурации

Fig. 9. Pressure distributions in the square channel at various time instants

Следующий расчет был проведен для конфигурации каналов «разрезная печь» (рис. 7, *c*). Результаты расчетов в виде распределений давления по путям распространения ударных волн, изображенным на рис. 10 штриховой и штрихпунктирной линиями, представлены на рис. 11.

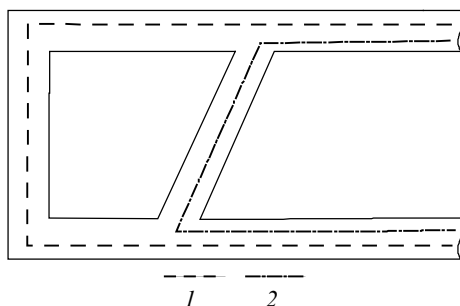


Рис. 10. Схемы отображения топологии рис. 7, *c*: 1 – путь № 1, 2 – путь № 2

Fig. 10. Topology diagrams for Fig. 7c: 1, way No. 1 and 2, way No. 2

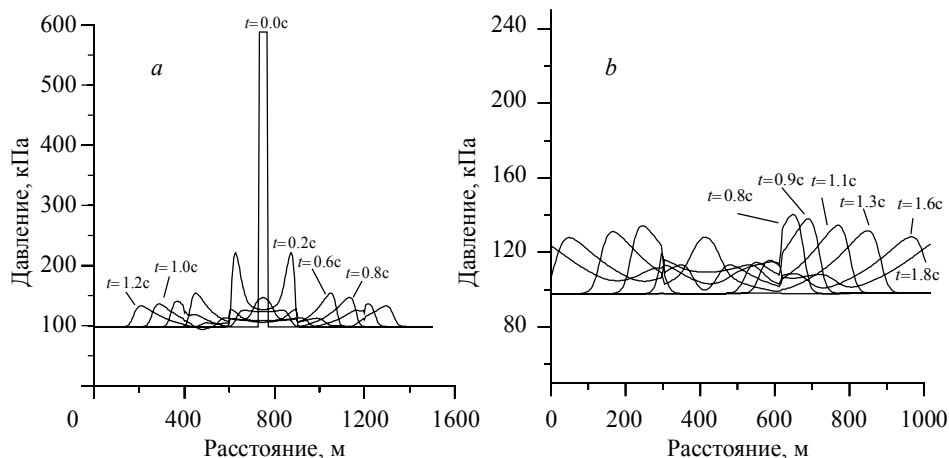


Рис. 11. Распределения давления по путям № 1 и № 2
«разрезной печи» в разные моменты времени

Fig. 11. Pressure distributions along tracks No. 1 and No. 2
in the “crosscut” at various time instants

Из полученных результатов, представленных на рис. 11, видно, что ударная волна, распространяющаяся по пути № 1, при прохождении мест сопряжения с перемикающей выработкой немного уменьшает свою интенсивность. На пути № 2 в примыкающей выработке в момент времени 0.9 с наблюдается всплеск давления, изображенный на рис. 11, *b*, обусловленный встречным взаимодействием ударных волн, идущих по ней от двух сопряжений с выработками пути № 1.

В процессе всех расчетов, результаты которых представлены на рис. 8, 9, 11, контролировалась выполнимость законов сохранения массы и полной энергии газа в выработках. Полная масса газа и полная энергия газа в выработках при численном решении сохраняется с точностью 99.95 %. При симметричной геометрии каналов и места взрыва расчетные распределения давления в каналах при распространении ударных волн также симметричны.

Вариант алгоритма [9] используется при составлении плана ликвидации аварий (ПЛА) на горнорудном предприятии. Оперативная часть ПЛА разрабатывается для руководства действиями обслуживающего персонала шахты при возникновении аварийной ситуации или аварии [7]. Оперативной частью ПЛА должны охватываться все виды возможных аварий и аварийных ситуаций в шахте, в связи с чем скорость получения результатов влияет на убытки предприятия и человеческие жертвы. Изложенный в данной статье алгоритм может быть доработан с целью распараллеливания. Это позволит ускорить проведение массовых расчетов для составления ПЛА.

Заключение

Разработан подход к реализации метода решения задач о распространении ВУВ в разветвленной сети горных выработок с учетом произвольных углов их сопряжения. Подход базируется на использовании метода С.К. Годунова и выделении элементов алгоритма «ячейка», «грань» и «граница». Каждый из указанных элементов алгоритма отвечает за этап вычислений: «граница» – за решение задачи

о распаде произвольного разрыва в параметрах газа, «грань» – за определение нормальных и касательных к «границе» компонентов векторов скоростей в ячейках, «ячейка» – за численное решение уравнений, составляющих математическую модель распространения ВУВ. Предлагаемая декомпозиция расчетов направлена на достижение сразу нескольких целей:

- существенное снижение трудозатрат при развитии математической модели за счет введения в нее новых физических процессов, например учета водяных и сланцевых заслонов;

- упрощение распараллеливания вычислений;

- упрощение установления связей между ячейками с разными размерностями;

- существенное упрощение реализации расчетов распространения ВУВ в геометрически сложных областях.

Указанный подход реализован в виде компьютерной программы, выполнены тестовые расчеты, решены модельные задачи с проверкой выполнения законов сохранения массы, импульса, энергии. Разработанный подход планируется применять при решении задач промышленной безопасности на угольных шахтах России.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Об утверждении Правил безопасности в угольных шахтах*: постановление Госгортехнадзора России от 05.06.2003 № 50.
2. *Алешин А.В.* Федеральные нормы и правила в области промышленной безопасности «Инструкция по составлению планов ликвидации аварий на угольных шахтах». 2016.
3. *Воробьева О.В., Костеренко В.Н., Тимченко А.Н.* Анализ причин взрывов с целью повышения эффективности системы управления безопасностью труда угледобывающих предприятий. М.: Горная книга, 2018. 16 с.
4. *Устав ВГСЧ по организации и ведению горноспасательных работ.* М.: Недра, 1986. 254 с.
5. *Устав военизированной горноспасательной части (ВГСЧ) по организации и ведению горноспасательных работ на предприятиях угольной и сланцевой промышленности.* М., 1997. 201 с.
6. *О введении в действие Методики газодинамического расчета параметров воздушных ударных волн при взрывах газа и пыли*: 27 апреля 2004. 16 с.
7. *Криволапов В.Г., Палеев Д.Ю.* Распространение ударной воздушной волны по выработкам выемочного участка при взрыве в выработанном пространстве // Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. 2011. № 1. С. 77–80.
8. *Руденко Ю.Ф.* Управление распространением ударных волн в сети выработок угольной шахты при взрыве газа и пыли: дис. ... канд. физ-мат наук. Томск: Томский государственный университет, 2009.
9. *Васенин И.М., Шрагер Э.Р., Крайнов А.Ю., Лукашов О.Ю., Палеев Д.Ю., Потапов В.П., Рашевский В.В., Артемьев В.Б., Руденко Ю.Ф., Костеренко В.Н.* Математическое моделирование горения и взрыва высокоэнергетических систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. 322 с.
10. *Миньков Л.Л., Гольдина Н.В.* Особенности численного решения задачи о распространении ударной волны по газовоздуси с мелкими частицами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 49. С. 94–14.
11. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 09.01.2020 г.

Mazepa E.E., Kusainov P.I., Lukashov O.Yu., Kraynov A.Yu. (2020) ON THE NUMERICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF AIR SHOCK WAVE PROPAGATION IN MINE WORKINGS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 108–120

DOI 10.17223/19988621/64/8

Keywords: network of mine workings, methane explosion, air shock waves, mathematical model, solution technique.

Coal mines are hazardous production facilities, where various accidents are possible. The most destructive accidents are gas and dust explosions. They lead to enormous financial and often human losses. Since 2004, an industry methodology has been used to calculate the parameters of the air shock waves and impact areas. The methodology is based on a system of unsteady gas-dynamic equations in a one- and three-dimensional formulation. The main source of data is a spatial network of mine workings.

An approach is developed to apply the method for solving the problems of the propagation of shock waves in an extensive network of mine workings with allowance for arbitrary angles of their linking. The approach is based on the use of the Godunov method and the selection of entities: “computational cell”, “cell face”, and “boundary between cells”.

The calculations are performed for the following test topologies: circle, square, and “crosscut”. The implementation of the laws of conservation of mass and energy is verified. The symmetry is observed in the circle and square topologies.

Evgeniy E. MAZEPA (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: evgenimazep@yandex.ru

Pavel I. KUSAINOV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: descmn@mail.ru

Oleg Yu. LUKASHOV (Candidate of Physics and Mathematics, LLC “SHAHTEKSPERT – Systems”, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: mail@minesoft.ru

Alexey Yu. KRAYNOV (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. *Ob utverzhdenii Pravil bezopasnosti v ugol'nykh shakhtakh: postanovlenie Gosgortekhnadzora Rossii ot 05.06.2003 № 50* [On approval of the Safety Regulations in coal mines: Resolution of the Gosgortekhnadzor of Russia dated 5.6.2003 No. 50].
2. Aleshin A.V. (2016) *Federal'nye normy i pravila v oblasti promyshlennoy bezopasnosti “instruktsiya po sostavleniyu planov likvidatsii avariyy na ugol'nykh shakhtakh”* [Federal norms and regulations in industrial safety “instruction on drawing of emergency response plans for coal mines”].
3. Vorob'eva O.V., Kosterenko V.N., Timchenko A.N. (2018) Analiz prichin vzryvov s tsel'yu povysheniya effektivnosti sistemy upravleniya bezopasnost'yu truda ugledobyvayushchikh predpriyatiy [Analysis of the causes of explosions for the purpose of improving the efficiency of the occupational safety management systems in coal mining enterprises]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 12.
4. *Ustav VGSCh po organizatsii i vedeniyu gornospasatel'nykh rabot* [Regulation for mine rescue brigades on management of mine rescue operations]. (1986). Moscow: Nedra.
5. *Ustav voenizirovannoy gornospasatel'noy chasti (VGSCh) po organizatsii i vedeniyu gornospasatel'nykh rabot na predpriyatiyakh ugol'noy i slantsevoy promyshlennosti* [Regulation for mine rescue brigades on management of mine rescue operations at the enterprises of coal and shale industry]. (1997). Moscow.

6. *Vvedenii v deystvie Metodiki gazodinamicheskogo rascheta parametrov vozdukhnykh udarnykh voln pri vzryvakh gaza i pyli* [On implementation of the Methodology for a gas-dynamic calculation of the parameters of air shock waves during gas and dust explosions]. (2004).
7. Krivolapov V.G., Paleev D.Yu. (2011) Rasprostranenie udarnoy vozduшной volny po vyrabotkam vyemochного uchastka pri vzryve v vyrabotannom prostranstve [Propagation of an air shock wave in the mining site grooves during an explosion in a worked-out area]. *Vestnik Nauchного tsentra po bezopasnosti rabot v ugol'noy promyshlennosti – Bulletin of Research Center for Safety in Coal Industry*. 1. pp. 77–80.
8. Rudenko Yu.F. (2009) *Upravlenie rasprostraneniem udarnykh voln v seti vyrabotok ugol'noy shakhty pri vzryve gaza i pyli* [Control of the propagation of shock waves in a network of the coal mine workings during a gas and dust explosion]. Dissertat. Tomsk: Tomsk State University.
9. Vasenin I.M., Shrager E.R., Kraynov A.Yu., Lukashov O.Yu., Paleev D.Yu., Potapov V.P., Rashevskiy V.V., Artem'ev V.B., Rudenko Yu.F., Kosterenko V.N. (2006) *Matematicheskoe modelirovanie goreniya i vzryva vysokoenergeticheskikh sistem* [Mathematical modeling of the combustion and explosion of high-energy systems]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.
10. Min'kov L.L., Gol'dina N.V. (2017) Osobennosti chislennogo resheniya zadachi o rasprostranении udarnoy volny po gazovzvesi s melkimi chastitsami [Peculiarities of a numerical solution of the problem of shock wave propagation over a gas suspension with small particles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvenного universiteta. Matematika i mekhanika –Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 94–14. DOI: 10.17223/19988621/49/9.
11. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution to multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.

Received: January 9, 2020

УДК 539.375

DOI 10.17223/19988621/64/9

М.В. Мир-Салим-заде

РАВНОПРОЧНОЕ ОТВЕРСТИЕ ДЛЯ СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ

На основе принципа равнопрочности дается решение обратной упругой задачи об определении оптимальной формы контура отверстия для стрингерной пластины, ослабленной двумя прямолинейными трещинами. Критерием, определяющим оптимальную форму отверстия, служит условие отсутствия концентрации напряжений на поверхности отверстия и требование равенства нулю коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин.

Ключевые слова: *стрингерная пластина, трещины, равнопрочное отверстие.*

Усиленные стрингерами тонкие пластины с технологическими отверстиями используются в различных конструкциях. Отверстия при этом являются концентраторами напряжений и могут привести к преждевременному разрушению. Поэтому представляет интерес найти такой контур отверстия в пластине, подкрепленной ребрами жесткости (стрингерной пластине), который не имеет каких-либо предпочтительных для хрупкого разрушения или пластической деформации участков (равнопрочный контур) [1]. Задачи по определению равнопрочных контуров рассматривались в работах [1–23]. Весьма важно при определении равнопрочного контура учитывать возможность наличия в теле трещин [24], однако к настоящему времени эта проблема не изучена. В настоящей статье решается задача по отысканию оптимальной формы контура отверстия для стрингерной пластины, ослабленной двумя прямолинейными трещинами. Требуется, чтобы отсутствовала концентрация напряжений вблизи отверстия, а трещины не росли.

Постановка задачи

Рассмотрим неограниченную тонкую пластину, усиленную регулярной системой стрингеров. Пластина толщиной h ослаблена отверстием и двумя прямолинейными трещинами (рис. 1). Полагается, что пластина и стрингеры изотропные и выполнены из различных упругих материалов. На бесконечности усиленная пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$.

Принимаются следующие допущения: при деформации толщина стрингеров остается неизменной, а напряженное состояние – одноосным. Стрингеры изгиба не подвергаются и работают лишь на растяжение; в пластине реализуется плоское напряженное состояние; система стрингеров ферменного типа, ослабление стрингеров за счет постановки точек крепления не учитывается; пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления; все точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами.

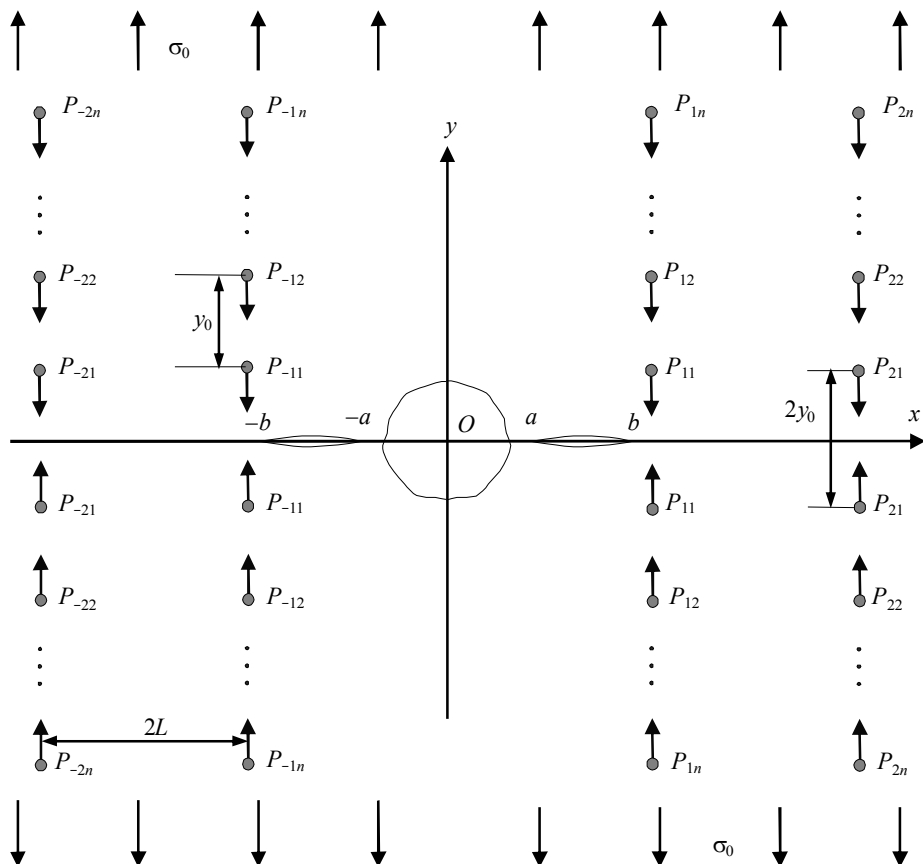


Рис. 1. Расчетная схема задачи
Fig. 1. Schematic diagram of the problem

Действие точек крепления моделируется действием сосредоточенных сил, приложенных в точках, соответствующих центрам точек крепления. Считается, что крепления стрингеров расположены в дискретных точках $z = \pm(2m + 1)L \pm iky_0$ ($m = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$) с постоянным шагом по всей длине стрингера, симметрично относительно поверхности пластины.

Действие стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер с пластиной. Величины сосредоточенных сил подлежат определению в ходе решения задачи.

На неизвестном контуре L_0 отверстия граничные условия имеют вид

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0; \quad (1)$$

на берегах трещин

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad a \leq |x| \leq b. \quad (2)$$

Здесь t и n – касательная и нормаль к контуру отверстия.

Требуется найти такую форму отверстия, при которой не будет происходить рост трещин, а тангенциальное нормальное напряжение σ_t , действующее на кон-

туре, будет постоянной величиной. Согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина – Орована, за параметр, характеризующий напряженное состояние в окрестности вершин трещин принят коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, требуем, чтобы выполнялись условия

$$\text{на контуре отверстия } \sigma_t = \sigma_* = \text{const}; \quad (3)$$

$$K_I^a = 0, \quad K_I^b = 0. \quad (4)$$

Здесь K_I^a , K_I^b – коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин. Так как трещины расположены симметрично, $K_I^a = K_I^{-a}$, $K_I^b = K_I^{-b}$.

Отверстия, удовлетворяющие условию (3), называются равнопрочными [2].

Граничное условие (3) и дополнительное условие (4) служат для определения оптимальной (равнопрочной) формы отверстия. Величина σ_* неизвестна и определяется в процессе решения задачи.

Рассматриваемая задача состоит в определении равнопрочного контура отверстия, величин сосредоточенных сил P_{mn} , напряженно-деформированного состояния усиленной пластины.

Метод решения

Будем искать неизвестный заранее контур L_0 отверстия в классе контуров, близких к круговым. Представим неизвестный контур L_0 в виде

$$r = \rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta), \quad (5)$$

в котором функция $H(\theta)$ подлежит определению в процессе решения обратной задачи. Здесь $\varepsilon = R_{\max}/R$ – малый параметр; $R_{\max}$ – наибольшая высота неровности профиля контура L_0 отверстия от окружности $r = R$.

Отыскание неизвестного контура в виде (5) упрощает решение задачи, кроме того, такие отверстия проще технологически изготовить.

Не уменьшая общности рассматриваемой задачи, принимаем, что искомая функция $H(\theta)$ симметрична относительно координатных осей и может быть представлена в виде ряда Фурье $H(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} \cos 2k\theta$.

Искомые функции (напряжения, перемещения, сосредоточенные силы P_{mn} , коэффициенты интенсивности напряжений) будем искать в виде разложений по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_n^{(0)} + \varepsilon \sigma_n^{(1)} + \dots, \quad \sigma_t = \sigma_t^{(0)} + \varepsilon \sigma_t^{(1)} + \dots, \quad \tau_{nt} = \tau_{nt}^{(0)} + \varepsilon \tau_{nt}^{(1)} + \dots, \\ u_n &= u_n^{(0)} + \varepsilon u_n^{(1)} + \dots, \quad v_n = v_n^{(0)} + \varepsilon v_n^{(1)} + \dots, \\ P_{mn} &= P_{mn}^{(0)} + \varepsilon P_{mn}^{(1)} + \dots, \\ K_I &= K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε степени выше первой.

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости.

Значения компонент тензора напряжений при $r = \rho(\theta)$ получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R$. Воспользовавшись известными формулами [25] для компонент напряжений σ_n и $\tau_{n\theta}$, краевые условия задачи примут следующий вид:

для нулевого приближения:

$$\text{на контуре } r = R \quad \sigma_r^{(0)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0; \quad (7)$$

$$\text{на берегах трещин } \sigma_x^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0, \quad a \leq |x| \leq b; \quad (8)$$

для первого приближения:

$$\text{на контуре } r = R \quad \sigma_r^{(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T; \quad (9)$$

$$\text{на берегах трещин } \sigma_x^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0, \quad a \leq |x| \leq b. \quad (10)$$

$$\text{Здесь } N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}^{(0)}}{R} \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta}, \quad T = -H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}}{R} \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta}.$$

На основании формул Колосова – Мусхелишвили [25] и граничных условий (7), (8) на контуре отверстия и берегах трещин задача в нулевом приближении сводится к определению двух аналитических функций $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ из краевого условия

$$\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau)] = 0 \quad \text{при } \tau = R e^{i\theta}; \quad (11)$$

$$\Phi^{(0)}(x) + \overline{\Phi^{(0)}(x)} + x \overline{\Phi^{(0)'}}(x) + \overline{\Psi^{(0)}(x)} = 0, \quad a \leq |x| \leq b. \quad (12)$$

Решение краевой задачи (11) – (12) ищем в виде ($k = 0$)

$$\Phi^{(k)}(z) = \Phi_0^{(k)}(z) + \Phi_1^{(k)}(z) + \Phi_2^{(k)}(z), \quad \Psi^{(k)}(z) = \Psi_0^{(k)}(z) + \Psi_1^{(k)}(z) + \Psi_2^{(k)}(z). \quad (13)$$

Здесь потенциалы $\Phi_0^{(0)}(z)$, $\Psi_0^{(0)}(z)$ описывают поле напряжений и деформаций в сплошной пластине под действием системы сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$ и σ_0 и определяются следующими формулами:

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \frac{1}{4} \sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{mn} P_{mn}^{(0)} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(0)}(z) = & \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{mn} P_{mn}^{(0)} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] + \\ & + \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{mn} P_{mn}^{(0)} \left[\frac{mL - iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν – коэффициент Пуассона материала пластины; штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс $m = n = 0$.

Функции $\Phi_1^{(0)}(z)$ и $\Psi_1^{(0)}(z)$ ищем в виде

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{g^{(0)}(t)}{t - z} dt, \quad (15)$$

$$\Psi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{(t-z)^2} \right] g^{(0)}(t) dt,$$

где $L_1 = [a, b] + [-a, -b]$; $g^{(0)}(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)]$; μ – модуль сдвига материала пластины.

Неизвестная функция $g^{(0)}(x)$ и потенциалы $\Phi_2^{(0)}(z)$ и $\Psi_2^{(0)}(z)$ должны быть определены из краевых условий (11) – (12). Представим граничное условие (12) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_2^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_2^{(0)\prime}(\tau) + \Psi_2^{(0)}(\tau)] = \\ = -\Phi_*^{(0)}(\tau) - \overline{\Phi_*^{(0)}(\tau)} + e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_*^{(0)\prime}(\tau) + \Psi_*^{(0)}(\tau)], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Phi_*^{(0)}(\tau) = \Phi_0^{(0)}(\tau) + \Phi_1^{(0)}(\tau)$, $\Psi_*^{(0)}(\tau) = \Psi_0^{(0)}(\tau) + \Psi_1^{(0)}(\tau)$.

Для решения краевой задачи (16) (определения потенциалов $\Phi_2^{(0)}(z)$ и $\Psi_2^{(0)}(z)$) воспользуемся решением Н.И. Мусхелишвили [25]. В результате имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(0)}(z) = \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{1-t^2}{t(1-tz)} + \frac{z-t}{(1-tz)^2} \right] g^{(0)}(t) dt - \\ - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{(mL - iny_0)(mL + iny_0) - 1}{(mL - iny_0)[z(mL - iny_0) - 1]^2} - \frac{(mL + iny_0)(mL - iny_0) - 1}{(mL + iny_0)[z(mL + iny_0) - 1]^2} \right\} + \\ + \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{1}{z[z(mL - iny_0) - 1]} - \frac{1}{z[z(mL + iny_0) - 1]} \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(0)}(z) = \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{\Phi_2^{(0)}(z)}{z^2} - \frac{\Phi_2^{(0)\prime}(z)}{z^2} + \frac{1}{2\pi z} \int_{L_1} \left[\frac{2}{tz} - \frac{t}{z(1-tz)} + \frac{t^2 z - z - t}{z(1-tz)^2} - \frac{2t(z-t)}{(1-tz)^3} \right] g^{(0)}(t) dt + \\ + \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)z} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{1}{z(mL - iny_0) - 1} - \frac{1}{z(mL + iny_0) - 1} + \frac{1}{z(mL - iny_0)} - \frac{1}{z(mL + iny_0)} \right\}. \end{aligned}$$

В формулах (17) все линейные размеры отнесены к радиусу кругового отверстия R .

Требуя, чтобы функции (13) при $k=0$ удовлетворяли краевому условию (12) на берегах трещин, получим после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение относительно $g^{(0)}(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g^{(0)}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(t, x) g^{(0)}(t) dt = F(x), \quad (18)$$

$$K(t, x) = \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2 t} + \frac{1}{2} \left[\frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3 - x - 2t + 2t^2 x - x^3 t^2}{x^2(1-tx)^2} \right],$$

$$F(x) = f_0^{(0)}(x) + f_1^{(0)}(x),$$

$$\begin{aligned}
f_0^{(0)}(x) = & -\sigma_0 + \frac{\kappa + 2}{\pi h(1 + \kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n y_0 \left[\frac{1}{(x - mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} n y_0 \left[\frac{1}{(x + mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} - \\
& - \frac{1}{\pi h(1 + \kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x - mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x - mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x + mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x + mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\}, \\
f_1^{(0)}(x) = & -\frac{1}{2\pi(1 + \kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n \left\{ \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right. \\
& \times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \frac{2\kappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \\
& + \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right. \\
& - 4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \\
& - \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
& + \frac{2\kappa_0}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \left. \right\rangle + \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \times \\
& \times \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + \right. \\
& + 4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \frac{\sigma_0}{2x^2} - \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{x^4}.
\end{aligned}$$

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения (18) используем метод прямого решения сингулярных уравнений [26, 27]. Переходя к безразмерным переменным, решение представим в виде

$$g^{(0)}(\eta) = \frac{g_0^{(0)}(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (19)$$

где $g_0^{(0)}(\eta)$ – ограниченная функция, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$; она заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам.

Используя процедуру алгебраизации [26, 27], получим, что сингулярное интегральное уравнение (18) при дополнительном условии, которое обеспечивает однозначность перемещений при обходе контуров трещин

$$\int_a^b g_0^{(0)}(t)dt = 0, \quad \int_{-a}^{-b} g_0^{(0)}(t)dt = 0, \quad (20)$$

сводится к системе M линейных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g^{(0)}(\tau_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(0)} = f_0^{(0)}(\eta_m) + f_1^{(0)}(\eta_m), \\ \sum_{k=1}^M g_k^{(0)}(\eta_m) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где $m = 1, 2, \dots, M - 1$; $A_{mk} = \frac{1}{M} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + K_0(\eta_m, \tau_k) \right]$;

$g_k^{(0)} = g^{(0)}(\tau_k)$; $\eta_m = \cos \theta_m$; $\theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi$; $\eta_m = \cos \theta_m$; $\tau_k = \eta_k$.

Для определения неизвестных сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$ используем закон Гука, согласно которому величина сосредоточенной силы $P_{mn}^{(0)}$, действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, равна

$$P_{mn}^{(0)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(0)} \quad (m, n = 1, 2, \dots), \quad (21)$$

где E_s – модуль Юнга материала стрингера, A_s – поперечное сечение стрингера, $2y_0 n$ – расстояние между точками крепления, $\Delta v_{mn}^{(0)}$ – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через a_0 радиус точки крепления. Примем [28] естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек $mL + i(ny_0 - a_0)$ и $mL - i(ny_0 - a_0)$ в рассматриваемой задаче теории упругости равно взаимному смещению точек крепления $\Delta v_{mn}^{(0)}$. Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет отыскать решение задачи.

Используя формулы Колосова – Мусхелишвили [25] и соотношения (13) – (15), (17), найдем взаимное смещение $\Delta v_{mn}^{(0)}$ указанных точек. Ввиду громоздкости эти выражения не приводятся. Решая системы (20) и (21), определим величины сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$, приближенные значения $g^{(0)}(\tau_m)$ в узловых точках и тем самым комплексные потенциалы нулевого приближения.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины при $x = a$ в нулевом приближении имеем

$$K_1^{(0)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g^{(0)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi, \quad (22)$$

в окрестности вершины трещины $x = b$:

$$K_1^{(0)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^m g^{(0)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

По формулам Колосова – Мухелишвили и соотношениям (13) находятся компоненты напряжений в усиленной пластине в нулевом приближении. Зная напряженное состояние в нулевом приближении, находим функции N и T .

После нахождения решения в нулевом приближении переходим к решению задачи в первом приближении. Граничные условия задачи для первого приближения запишутся в виде

$$\Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - e^{2i\theta} \left[\overline{\tau \Phi^{(1)'}}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = N - iT; \quad (23)$$

$$\Phi^{(1)}(x) + \overline{\Phi^{(1)}(x)} + x \overline{\Phi^{(1)'}}(x) + \overline{\Psi^{(1)}(x)} = 0, \quad a \leq |x| \leq b. \quad (24)$$

Решение краевой задачи (23) аналогично нулевому приближению ищем в виде (13) при $k = 1$, где потенциалы $\Phi_0^{(1)}(z)$ и $\Psi_0^{(1)}(z)$ описывают поле напряжений и деформаций под действием системы сосредоточенных сил $P_{mn}^{(1)}$ и определяются формулами, аналогичными (14), в которых следует положить σ_0 равными нулю и $P_{mn}^{(0)}$ заменить на $P_{mn}^{(1)}$.

Потенциалы $\Phi_1^{(1)}(z)$ и $\Psi_1^{(1)}(z)$ ищем в виде, аналогичном (15), при этом функцию $g^{(0)}(x)$ следует заменить на $g^{(1)}(x)$.

$\Phi_2^{(1)}(z)$ и $\Psi_2^{(1)}(z)$ находим из граничного условия (23), вновь используя метод Н.И. Мухелишвили:

$$\Phi_2^{(1)}(z) = \Phi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{-2k}, \quad \Psi_2^{(1)}(z) = \Psi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{-2k}. \quad (25)$$

Здесь $\Phi_*^{(1)}(z)$, $\Psi_*^{(1)}(z)$ определяются формулами, аналогичными (17), в которых следует положить σ_0 равным нулю, $P_{mn}^{(0)}$ заменить на $P_{mn}^{(1)}$, $g^{(0)}(x)$ заменить на $g^{(1)}(x)$. Коэффициенты a_{2k} и b_{2k} находятся по формулам

$$a^{2n} = C_{2n} R^{2n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_0 = 0, \\ b_{2n} = (2n-1)R^2 a_{2n-2} - R^{2n} a_{-2n+2} \quad (n \geq 2), \quad (26)$$

$$b_0 = 0, \quad b_2 = -C_0 R^2, \quad N - iT = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{2k} e^{-2ki\theta}.$$

Для сосредоточенных $P_{mn}^{(1)}$ имеем

$$P_{mn}^{(1)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(1)}, \quad (27)$$

где взаимное смещение $\Delta v_{mn}^{(1)}$ определяется аналогично нулевому приближению.

Требуя, чтобы функции (13) при $k = 1$ удовлетворяли краевому условию (24) на берегах трещин в первом приближении, получим после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение относительно $g^{(1)}(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g^{(1)}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(t, x) g^{(1)}(t) dt = F^{(1)}(x), \quad (28)$$

$$K(t, x) = \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2 t} + \frac{1}{2} \left[\frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3-x-2t+2t^2x-x^3t^2}{x^2(1-tx)^2} \right],$$

$$F^{(1)}(x) = f_0^{(1)}(x) + f_1^{(1)}(x),$$

$$f_0^{(1)}(x) = \frac{\kappa+2}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(1)} n y_0 \left[\frac{1}{(x-mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(1)} n y_0 \left[\frac{1}{(x+mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} -$$

$$- \frac{1}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(1)} n y_0 \frac{(x-mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x-mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(1)} n y_0 \frac{(x+mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x+mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\},$$

$$f_1^{(1)}(x) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(1)} n \left\{ \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right.$$

$$\times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \frac{2\kappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle +$$

$$+ \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right.$$

$$\left. -4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left\} -$$

$$- \frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(1)} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\kappa_0}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \times$$

$$\times \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + \right. \\ \left. + 4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \Bigg\}.$$

Как и в нулевом приближении, используя процедуру алгебраизации [26, 27], сингулярное интегральное уравнение (28) при дополнительном условии, обеспечивающем однозначность перемещений при обходе контуров трещин в первом приближении

$$\int_a^b g_0^{(1)}(t) dt = 0, \quad \int_{-a}^{-b} g_0^{(1)}(t) dt = 0, \quad (29)$$

сводим к системе M линейных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g^{(1)}(\tau_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(1)} = f_0^{(1)}(\eta_m) + f_1^{(1)}(\eta_m), \\ \sum_{k=1}^M g_k^{(1)}(\eta_m) = 0, \end{cases} \quad (30)$$

где $m = 1, 2, \dots, M-1$; $g_k^{(1)} = g^{(1)}(\tau_k)$.

В первом приближении для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины при $x = a$ имеем

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g^{(1)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi, \quad (31)$$

в окрестности вершины трещины $x = b$:

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^m g^{(1)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Полученные системы уравнений первого приближения не являются пока замкнутыми, так как в правые части этих систем входят коэффициенты d_{2k} разложения функции $H(\theta)$ в ряд Фурье.

Для построения недостающих уравнений используем граничное условие (3) при дополнительных ограничениях (4). С помощью полученного решения, найдем σ_t в поверхностном слое контура L_0 ($r = \rho(\theta)$) с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра ε

$$\sigma_t = \sigma_t^{(0)}(\theta) \Big|_{r=R} + \varepsilon \left[H(\theta) \frac{\sigma_t^{(0)}(\theta)}{\partial r} + \sigma_t^{(1)}(\theta) \right] \Big|_{r=R}. \quad (32)$$

Напряжения $\sigma_t^{(1)}(\theta)$ зависят от коэффициентов d_{2k} ряда Фурье искомой функции $H(\theta)$. Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить коэффициенты d_{2k} , требуем, чтобы обеспечивалось распределение напряжений на контуре отверстия, близкое к равномерному.

Снижение концентрации напряжений на контуре отверстия осуществляем путем минимизации критерия

$$U = \sum_{i=1}^M [\sigma_i(\theta_i) - \sigma_*]^2 \rightarrow \min. \quad (33)$$

Здесь σ_* – неизвестное оптимальное значение нормального тангенциального напряжения в поверхностном слое отверстия.

Поставленная задача оптимизации состоит в том, чтобы найти значения неизвестных коэффициентов d_{2k} , обеспечивающие наилучшим образом величины функции $\sigma_i(\theta_i)$ согласно условию (3) при дополнительных ограничениях (4). Функция U и коэффициенты интенсивности напряжений зависят от коэффициентов d_{2k} , и таким образом, приходим к задаче на условный экстремум функции $U(\sigma_*, d_{2k})$, когда коэффициенты d_{2k} связаны с дополнительным условием

$$K_1^a = 0, \quad K_1^b = 0. \quad (34)$$

Необходимо найти минимальное значение функции $U(\sigma_*, d_{2k})$, причем $k + 1$ аргумент этой функции не являются независимыми, а подчинены двум добавочным условиям (34).

Для решения задачи на условный экстремум используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$U_0 = U + \lambda_1 K_1^a + \lambda_2 K_1^b$$

с двумя неопределенными множителями λ_1, λ_2 .

$k + 1$ необходимых условий экстремума имеют вид

$$\frac{\partial U_0}{\partial d_{2k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_*} = 0. \quad (35)$$

Полученные $n + 1$ уравнение с двумя добавочными уравнениями (34) составляют систему уравнений с $n + 1 + 2$ неизвестными σ_*, d_{2k} ($k = 1, 2, \dots, n$), λ_1, λ_2 . Добавляя эту систему уравнений к полученным ранее алгебраическим системам (27), (30), получаем замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных, в том числе σ_* и коэффициентов d_{2k} .

Система уравнений (35) совместно с полученными алгебраическими системами задачи теории упругости в нулевом и первом приближениях позволяет определить форму равнопрочного контура, напряженно-деформированное состояние стрингерной пластины, а также оптимальное значение нормального тангенциального напряжения σ_* .

При выполнении расчетов полученные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента. Отрезок $[0, 2\pi]$ изменения переменной θ разбивали на M равных частей, где $M > 2m + 1$, m – число оставленных параметров для практических расчетов.

Расчеты проводились для следующих значений свободных параметров: $a_0/L = 0.01$; $y_0/L = 0.25$. Стрингеры считались выполненными из композита АІ-сталь, а пластина из сплава В95, $E = 7.1 \cdot 10^4$ МПа; $E_s = 11.5 \cdot 10^4$ МПа. Для упрощения было принято: $A_s/y_0h = 1$. Число стрингеров и точек крепления принималось равным 14, а величина $M = 72$. Результаты расчетов коэффициентов разложения искомой функции $H(\theta)$ приводятся в таблице.

Значения коэффициентов Фурье для равнопрочного контура

a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}	a_{14}
0.1081	-0.0874	0.0562	0.0372	-0.0234	0.0016	0.0007

Выводы

Таким образом, предложен критерий и метод решения задачи по предотвращению разрушения стрингерной пластины с отверстием. Полученное решение дает возможность повысить прочность подкрепленной стрингерами пластины с отверстием. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая найти оптимальную форму контура отверстия для стрингерной пластины, ослабленной двумя прямолинейными трещинами в зависимости от геометрических и механических характеристик пластины и стрингеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Обратная упругопластическая задача в условиях плоской деформации // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 2. С. 57–60.
2. Черепанов Г.П. Обратные задачи плоской теории упругости // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 963–979. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(75\)90085-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(75)90085-4).
3. Мирсалимов В.М. Об оптимальной форме отверстия для перфорированной пластины при изгибе // Прикл. механика и техн. физика. 1974. Т. 15. № 6. С. 133–136. <https://doi.org/10.1007/BF00864606>.
4. Мирсалимов В.М. Обратная задача теории упругости для анизотропной среды // Прикл. механика и техн. физика. 1975. Т. 16. № 4. С. 190–193. <https://doi.org/10.1007/BF00858311>.
5. Куришин Л.М., Оноприенко П.Н. Определение форм двухсвязных сечений стержней максимальной крутильной жесткости // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1078–1084. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90144-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90144-1).
6. Вигдергауз С.Б. Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 566–569. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90046-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90046-0).
7. Wheeler L. On the role of constant-stress surfaces in the problem of minimizing elastic stress concentration // Int. J. of Solids and Structures. 1976. V. 12. Iss. 11. P. 779–789. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(76\)90042-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(76)90042-1).
8. Баничук Н.В. Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 920–925. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(77\)90179-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90179-4).
9. Мирсалимов В.М. Обратная двоякопериодическая задача термоупругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1977. Т. 12. № 4. С. 147–154.
10. Вигдергауз С.Б. Об одном случае обратной задачи двумерной теории упругости // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 902–908. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(77\)90176-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90176-9).
11. Мирсалимов В.М. Равнопрочная выработка в горном массиве // Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 1979. Т. 15. №4. С. 24–28. <https://doi.org/10.1007/BF02499529>.
12. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
13. Остросаблин Н.И. Равнопрочное отверстие в пластине при неоднородном напряженном состоянии // Прикладная механика и техническая физика. 1981. № 2. С. 155–163. <https://doi.org/10.1007/BF00907959>.
14. Wheeler L.T. Stress minimum forms for elastic solids // ASME. Appl. Mech. Rev. 1992. V. 45. Iss. 1. P. 1–12. doi:10.1115/1.3119743.

15. Cherepanov G.P. Optimum shapes of elastic solids with infinite branches // J. Appl. Mech. ASME. 1995. V. 62. Iss. 2. P. 419–422. doi:10.1115/1.2895947.
16. Саврук М.П., Кравец В.С. Применение метода сингулярных интегральных уравнений для определения контуров равнопрочных отверстий в пластинах // Физико-химическая механика материалов. 2002. Т. 38. № 1. С. 31–40. <https://doi.org/10.1023/A: 1020116613794>.
17. Bantsuri R., Mzhavanadze Sh. The mixed problem of the theory of elasticity for a rectangle weakened by unknown equi-strong holes // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. 2007. V. 145. P. 23–34.
18. Мир-Салим-заде М.В. Обратная упругопластическая задача для клепаной перфорированной пластины // Совр. проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сб. статей. Тверь: ТГТУ, 2007. С. 238–246.
19. Kapanadze G. On one problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. 2007. V. 143. P. 61–71.
20. Мир-Салим-заде М.В. Определение формы равнопрочного отверстия в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Материалы, технологии, инструменты. 2007. Т. 12. № 4. С. 10–14.
21. Cherepanov G.P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Физ. мезомеханика. 2015. Т. 18. № 5. С. 114–123. <https://doi.org/10.1134/S1029959915040116>.
22. Калантарлы Н.М. Равнопрочная форма отверстия для торможения роста трещины продольного сдвига // Проблемы машиностроения. 2017. Т. 20. № 4. С. 31–37.
23. Vigdergauz S. Simply and doubly periodic arrangements of the equi-stress holes in a perforated elastic plane: The single-layer potential approach // Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. V. 23. Iss. 5. P. 805–819. <https://doi.org/10.1177/1081286517691807>.
24. Мирсалимов В.М. Максимальная прочность выработки в горном массиве, ослабленном трещиной // Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2019. Т. 55. № 1. С. 12–21. DOI: 10.15372/FTPRPI20190102.
25. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
26. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
27. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976.
28. Мирсалимов В.М. Некоторые задачи конструкционного торможения трещины // Физико-химическая механика материалов. 1986. Т. 22. №1. С. 84–88. <https://doi.org/10.1007/BF00720871>.

Статья поступила 21.03.2019 г.

Mir-Salim-zada M.V. (2020) AN EQUI-STRESS HOLE FOR A STRINGER PLATE WITH CRACKS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 121–135

DOI 10.17223/19988621/64/9

Keywords: stringer plate, cracks, equi-stress hole.

Based on the equivalent strength criterion, an effective solution to the inverse elastic problem of the determining of an optimal shape of the hole contour is proposed for an elastic infinite plate reinforced by stringers. The plate is weakened by two rectilinear cracks. According to the Irwin-Orowan theory of quasi-brittle fracture, the stress intensity factor in the vicinity of the cracks' tips is adopted as a parameter characterizing the stress state in this same region. The criterion determining the optimal shape of the hole is represented as a condition of the absence of the stress concentration on the hole surface and a requirement that the stress intensity factors are zero in the vicinity of the crack tips. An apparatus of the theory of analytic functions and theory of singular integral equations is used. The formulated problem is reduced to a conditional extremum problem. A closed system of algebraic equations is obtained, which allows minimization of the stress state

and stress intensity factors depending on the geometric and mechanical characteristics of the stringer plate. The action of the stringers is replaced by unknown equivalent concentrated forces at the points where the stringers join the plate.

Minavar V. MIR-SALIM-ZADA (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan). E-mail: minavar.mirsalimzade@imm.az

REFERENCES

1. Cherepanov G.P. (1963) Obratnaya uprugoplasticheskaya zadacha v usloviyakh ploskoy deformatsii [Inverse elastic-plastic problem under plane deformation]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika i mashinostroyeniye*. 2. pp. 57–60.
2. Cherepanov G.P. (1974) Inverse problems of the plane theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 38(6). pp. 915–931. DOI: 10.1016/0021-8928(75)90085-4.
3. Mirsalimov V.M. (1974) On the optimum shape of apertures for a perforated plate subject to bending. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 15(6). pp. 842–845. DOI: 10.1007/BF00864606.
4. Mirsalimov V.M. (1975) Converse problem of elasticity theory for an anisotropic medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 16(4). pp. 645–648. DOI: 10.1007/BF00858311.
5. Kurshin L.M., Onoprienko P.N. (1976) Determination of the shapes of doubly-connected bar sections of maximum torsional stiffness. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 40(6). pp. 1020–1026. DOI: 10.1016/0021-8928(76)90144-1.
6. Vigdergauz S.B. (1976) Integral equations of the inverse problem of the theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 40(3). pp. 518–522. DOI: 10.1016/0021-8928(76)90046-0.
7. Wheeler L. (1976) On the role of constant-stress surfaces in the problem of minimizing elastic stress concentration. *International Journal of Solids and Structures*. 12(11). pp. 779–789. DOI: 10.1016/0020-7683(76)90042-1.
8. Banichuk N.V. (1977) Optimality conditions in the problem of seeking the hole shapes in elastic bodies. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 41(5). pp. 946–951. DOI: 10.1016/0021-8928(77)90179-4.
9. Mirsalimov V.M. (1977) Inverse doubly periodic problem of thermoelasticity. *Mechanics of Solids* 12(4). pp. 147–154.
10. Vigdergauz S.B. (1977) On a case of the inverse problem of two-dimensional theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 41(5). pp. 927–933. DOI: 10.1016/0021-8928(77)90176-9.
11. Mirsalimov V.M. (1979) A working of uniform strength in the solid rock. *Soviet Mining*. 15(4). pp. 327–330. DOI: 10.1007/BF02499529.
12. Banichuk N.V. (1980) *Optimizatsiya form uprugikh tel* [Shape optimization for elastic bodies]. Moscow: Nauka.
13. Ostrosablin N.I. (1981) Equal-strength hole in a plate in an inhomogeneous stress state. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 22(2). pp. 271–277. DOI: 10.1007/BF00907959.
14. Wheeler L.T. (1992) Stress minimum forms for elastic solids. *Applied Mechanics Reviews*. ASME. 45(1). pp. 1–12. DOI: 10.1115/1.3119743.
15. Cherepanov G.P. (1995) Optimum shapes of elastic solids with infinite branches. *Journal of Applied Mechanics*. ASME. 62(2). pp. 419–422. DOI: 10.1115/1.2895947.
16. Savruk M.P., Kravets V.S. (2002) Application of the method of singular integral equations to the determination of the contours of equistrong holes in plates. *Materials Science*. 38(1). pp. 34–46. DOI: 10.1023/A:1020116613794.
17. Bantsuri R., Mzhavanadze Sh. (2007) The mixed problem of the theory of elasticity for a rectangle weakened by unknown equi-strong holes. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*. 145. pp. 23–34.

18. Mir-Salim-zada M.V. (2007) Obratnaya uprugoplasticheskaya zadacha dlya klepanoy perforirovannoy plastiny [Inverse elastoplastic problem for a riveted perforated plate]. *Sbornik statey "Sovremennye problemy prochnosti, plastichnosti i ustoychivosti" – Collected papers "Modern problems of strength, plasticity, and stability"*. Tver': TGTU. pp. 238–246.
19. Kapanadze G. (2007) On one problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*. 143. pp. 61–71.
20. Mir-Salim-zada M.V. (2007) Opredelenie formy ravnoprochnogo otverstiya v izotropnoy srede, usilennoy regul'yarnoy sistemoy stringerov [Determination of an equistrong hole shape in isotropic medium reinforced by a regular system of stringers]. *Materialy, tekhnologii, instrumenty*. 12(4): 10–14.
21. Cherepanov G.P. (2015) Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels. *Physical Mesomechanics*. 18. pp. 391–401. DOI: 10.1134/S1029959915040116.
22. Kalantarly N.M. (2017) Ravnoprochnaya forma otverstiya dlya tormozheniya rosta treshchiny prodol'nogo sdviga [Equistrong hole shape for a crack growth deceleration under longitudinal shear]. *Problemy mashinostroeniya – Journal of Mechanical Engineering*. 20(4). pp. 31–37.
23. Vigdergauz S. (2018) Simply and doubly periodic arrangements of the equi-stress holes in a perforated elastic plane: The single-layer potential approach. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 23(5). pp. 805–819. DOI: 10.1177/1081286517691807.
24. Mirsalimov V.M. (2019) Maximum strength of opening in crack-weakened rock mass. *Journal of Mining Science*. 55(1). pp. 9–17. <https://doi.org/10.1134/S1062739119015228>.
25. Muskhelishvili N.I. (1977) *Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity*. Amsterdam: Kluwer.
26. Kalandiya A.I. (1973) *Matematicheskie metody dvumernoy uprugosti* [Mathematical methods for two-dimensional elasticity]. Moscow: Nauka.
27. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. (1976) *Raspredelenie napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Stress distribution around cracks in plates and shells]. Kiev: Naukova Dumka.
28. Mirsalimov V.M. Some problems of structural arrest of cracks. *Soviet Materials Science*. 1986. 22(1). pp. 81–85. DOI: 10.1007/BF00720871.

Received: March 21, 2019

УДК 531.554

DOI 10.17223/19988621/64/10

Н.П. Скибина, Н.Р. Гимаева, Н.В. Савкина, Е.А. Маслов**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОНУЮЩИХ ТЕЛ ДВУХ ВИДОВ
ПРИ РАЗНЫХ УГЛАХ АТАКИ**

Представлены результаты математического моделирования газодинамического процесса обтекания двух компонентующих тел разделяющей составной системы сверхзвуковым потоком. Моделирование основано на численном решении уравнений движения сплошной среды Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу, с использованием модели турбулентности. Получены аэродинамические характеристики тел при скоростях набегающего потока $M = 2$ и $M = 4$, угол атаки изменялся в диапазоне от 0° до 20° . Проведен анализ результатов для компонентующих тел разной геометрии. Достоверность численного расчета подтверждается хорошим согласованием с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: *аэродинамика, математическое моделирование, сверхзвуковые течения, коэффициент лобового сопротивления, подъемная сила.*

Непрерывное развитие промышленности и усовершенствование имеющихся технологий открывает возможности использования военных разработок в гражданских целях [1]. В качестве примера можно рассмотреть применение составных систем (снарядов) с целью устранения очагов возгорания в лесных и степных зонах [2–4]. Так, например, одним залпом разработанной в Китае артиллерийской пожаротушительной «Системы 119» была устранена линия огня в 200 м [5].

Пожаротушительный снаряд может представлять собой сложную составную систему, состоящую из элементов, внутри которых содержится огнегасительная порошковая смесь. Направленное разделение и управляемое рассеивание частей специализированного снаряда позволяет погасить очаг на большом расстоянии, сэкономив время полной ликвидации пожара.

Составные системы (снаряды) состоят из набора элементов (простых по конфигурации тел), сгруппированных по массово-геометрическим и аэродинамическим характеристикам. Существует несколько видов компоновки таких снарядов: пакетная компоновка – расположение концентрированных элементов по кругу так, что при этом продольные оси всех элементов параллельны центральной продольной оси снаряда, и осевая компоновка – когда элементы компонуются друг за другом. Основными технологическими и эксплуатационными требованиями для снарядов такого вида являются: простота изготовления и компоновки; возможность получения большого коэффициента наполнения; легко реализуемая и надежная система разделения, обеспечивающая необходимое рассеивание на заданной дальности. Цилиндрические и призматические составные элементы снаряда удовлетворяют перечисленным требованиям, что делает их потенциально применимыми для решения задач пожаротушения. При этом для выполнения условий качественного управления рассеиванием элементов необходимо комплексное ис-

следование их аэродинамических характеристик. Движение тел в газовой среде сопряжено со сложной структурой поля течения – например, срывами и присоединениями потока, которые оказывают существенное влияние на аэродинамические характеристики движущегося тела.

Получение детальной и достоверной информации о влиянии сверхзвуковых отрывных течений на аэродинамические характеристики элементов компоновки дает возможность смоделировать механизм разделения и оценить область рассеивания тел.

Постановка задачи

В качестве объектов исследования выбраны прямоугольная призма (ПП) (рис. 1, *a*), отвечающая условию оптимального наполнения снаряда, и цилиндрическое тело с выточками (ЦТ) (рис. 1, *b*), обладающее аэродинамической устойчивостью в полете. Расчет параметров обтекания производился при атмосферных условиях: давление $p = 10^5$ Па, температура $T = 293.15$ К, плотность воздуха $\rho = 1.2054$ кг/м³, диапазон изменений чисел Маха $M = 2-4$.

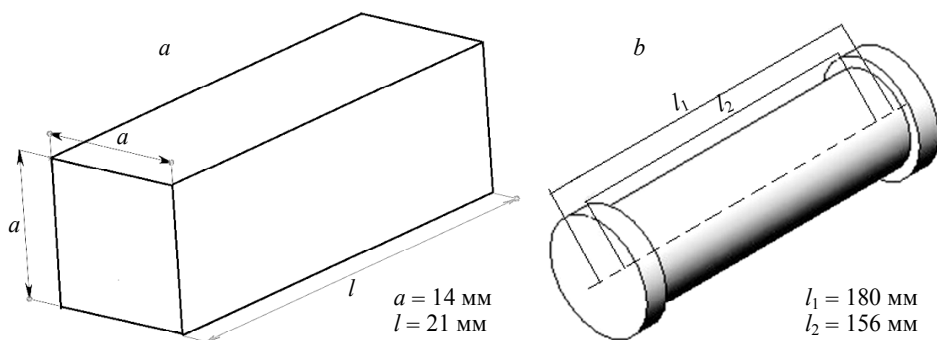


Рис. 1. Геометрия обтекаемых тел: *a* – четырехугольная призма, *b* – цилиндр с выточкой

Fig. 1. Geometry of aerodynamic bodies: (*a*) a quadrangular prism and (*b*) a cylinder with a groove

Для математического моделирования процесса обтекания тела вязким сжимаемым газом использована система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса [6, 7], в состав которой входят уравнения сохранения массы, импульса и энергии. Для учета турбулентного характера течения выбрана SST-модель, имеющая следующую формулировку:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - Y_k, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \omega u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) - Y_\omega + D_\omega, \end{cases} \quad (1)$$

где Γ_k и Γ_ω – эффективная диффузия для величин k и ω ; Y_k и Y_ω – диссипация величин k и ω в турбулентном потоке.

Функции смешивания, отвечающие за переключение уравнений модели, имеют вид

$$F_1 = \text{th}(\Phi_1^4), \quad (2)$$

$$\text{где } \Phi_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega,2} D_{\omega}^+ y^2} \right];$$

$$F_2 = \text{th}(\Phi_2^2), \quad (3)$$

$$\text{где } \Phi_2 = \max \left[2 \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right];$$

$$D_{\omega}^+ = \max \left[2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right], \quad (4)$$

где y – расстояние до ближайшей поверхности; D_{ω}^+ – положительная часть кросс-диффузионного члена [8].

Посредством функции F_1 осуществляется переключение моделей турбулентности: вблизи поверхностей работает k - ω -модель, вдали от поверхностей – k - ε -модель. Функция F_2 активирует ограничение в выражении для определения величины турбулентной вязкости. Члены Y_k и Y_{ω} описывают диссипацию кинетической энергии турбулентности и турбулентных пульсаций соответственно. Данные величины определяются аналогично стандартной k - ω -модели, разница заключается в оценке слагаемых в рамках SST-модели: если в стандартной k - ω -модели f_b^* определяется как кусочная функция, то для SST-модели $f_b^* = 1$.

Таким образом: $Y_k = \rho \beta^* k \omega$.

Так как SST-модель базируется на стандартных k - ω - и k - ε -моделях, для их объединения вводится термин кросс-диффузии:

$$D_{\omega} = 2(1 - F_1) \rho \frac{1}{\omega \sigma_{\omega,2}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (5)$$

Модельные константы имеют следующие значения:

$$\sigma_{\omega,1} = 2.0, \quad \sigma_{k,2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega,2} = 1.168,$$

$$\alpha_1 = 0.31, \quad \beta_{i,1} = 0.075, \quad \beta_{i,2} = 0.0828.$$

Значения всех дополнительных констант совпадают со значениями в стандартной k - ω -модели.

Геометрия расчетных областей для поставленной задачи внешнего обтекания представляет собой пространства в виде цилиндра (рис. 2, *a*) и параллелепипеда (рис. 2, *b*), внутри которых находятся модели. Ось x декартовой системы координат совпадает с осью симметрии, общей для модели и расчетной области. В обоих случаях размеры расчетной области выбраны относительно большими, чтобы дальние граничные условия не искажали поле течения вблизи тела.

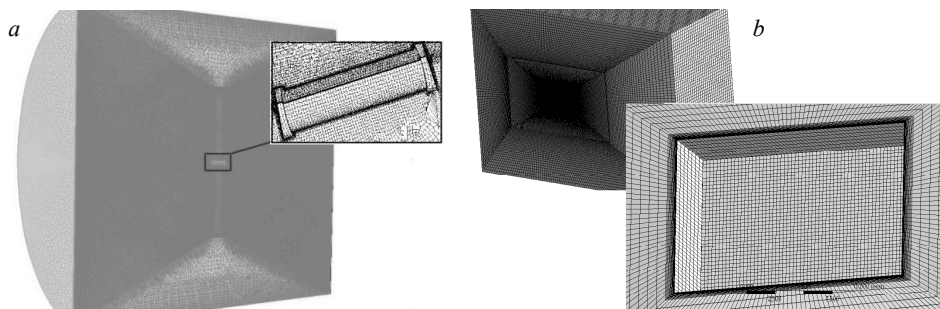


Рис. 2. Общий вид расчетных сеток:
a – для цилиндрического тела, *b* – для прямоугольной призмы
Fig. 2. General arrangement of computational grids
 for the (a) cylindrical body and (b) quadrangular prism

Для задания граничных условий использованы данные, полученные в ходе экспериментов. На входной границе расчетной области задано условие вида

$$U = U_0 \cos \alpha; \quad V = U_0 \sin \alpha; \quad W = 0; \quad (6)$$

$$T_0 = 293.15 \text{ K}; \quad p_0 = 10^5 \text{ Па}; \quad I = 5\%; \quad \omega_{\text{inlet}} = \rho \frac{k}{\mu_t}; \quad k_{\text{inlet}} = \frac{3}{2} I^2 U^2; \quad \varepsilon_{\text{inlet}} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\mu_t}, \quad (7)$$

где T_0 – начальная температура, p_0 – начальное давление.

На выходе из рабочей области реализованы мягкие граничные условия:

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial n^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 k}{\partial n^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} = 0, \quad (8)$$

где p_s – статическое давление на выходе, n – вектор нормали к поверхности, ε , k и ω – соответствующие параметры, используемые при моделировании турбулентности.

На поверхности тела выполняется условие прилипания:

$$U = V = W = 0, \quad (9)$$

где U , V и W – компоненты вектора скорости в декартовой системе координат (x, y, z) .

Граничное условие на оси симметрии

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \phi = \{U, V, W, T, p, k, \varepsilon, \omega\}. \quad (10)$$

Результаты исследования

Для оценки качественного согласования результатов численного расчета и эксперимента сопоставлялись фрагменты визуализации обтекания моделей, полученных в ходе экспериментальных исследований их характеристик, и поля распределений газодинамических величин, рассчитанные при моделировании обтекания в идентичных условиях.

На рис. 3, *a* представлена картина обтекания, полученная при проведении экспериментов на аэродинамической установке в НИИ «Геодезия», на рис. 3, *b* – поле распределения плотности, полученное в расчете. В обоих случаях скорость набе-

гающего потока $M = 2$, угол атаки $\alpha = 0^\circ$. Скачок уплотнения в головной части тела на рис.3а не попал в наблюдательное окно рабочей части используемой аэродинамической установки, поэтому отсутствует на кадре визуализации процесса обтекания, но видно, что локализация и форма отошедших ударных волн совпадает.

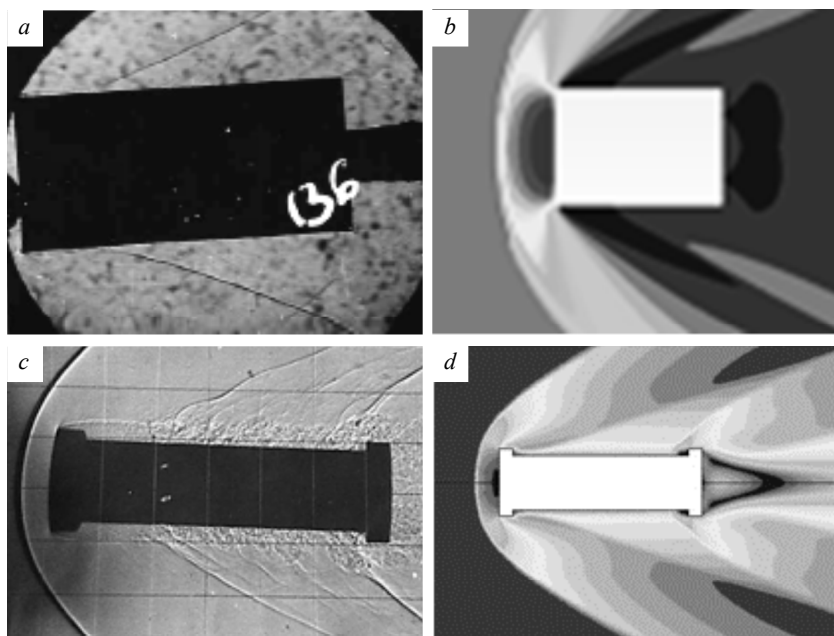


Рис. 3. Качественное сравнение результатов эксперимента и расчета:
а и б – модель ПП, с и d – модель ЦТ

Fig. 3. Qualitative comparison of experimental data and calculated results
for the (a), (b) quadrangular prism and (c), (d) cylindrical body

На рис. 3, с – фотография обтекания цилиндра с выточкой, полученная на баллистической трассе НИИ ПММ ТГУ, на рис. 3, d – поле распределения скоростей для набегающего потока с числом Маха $M = 2$ и углом атаки $\alpha = 0^\circ$. Отчетливо видна ударная волна в головной части модели и отошедшие волны вдоль тела вниз по потоку.

После рассмотрения случая обтекания моделей при нулевом угле атаки, исследовалось влияние угла α на аэродинамику моделей при обтекании потоком с числами Маха в диапазоне $M = 2-4$.

На рис. 4 приведены вычисленные значения аэродинамических коэффициентов для двух моделей с различной геометрией в зависимости от угла атаки α в сравнении с экспериментальными данными, число Маха в набегающем потоке $M = 2$. Диапазон изменения угла атаки для модели на рис. 1, а (ПП) – $\alpha = 0-20^\circ$, для модели на рис. 1, б (ЦТ) – $\alpha = 0-15^\circ$.

Рассогласование экспериментальных данных с результатами расчета для коэффициента лобового сопротивления C_x составило 4 %, для коэффициента подъемной силы C_y – 6 %, для коэффициента момента тангажа m_z не превысило 7 %. Как и ожидалось, увеличение угла атаки приводит к росту коэффициента подъемной силы C_y и уменьшению величины момента тангажа m_z .

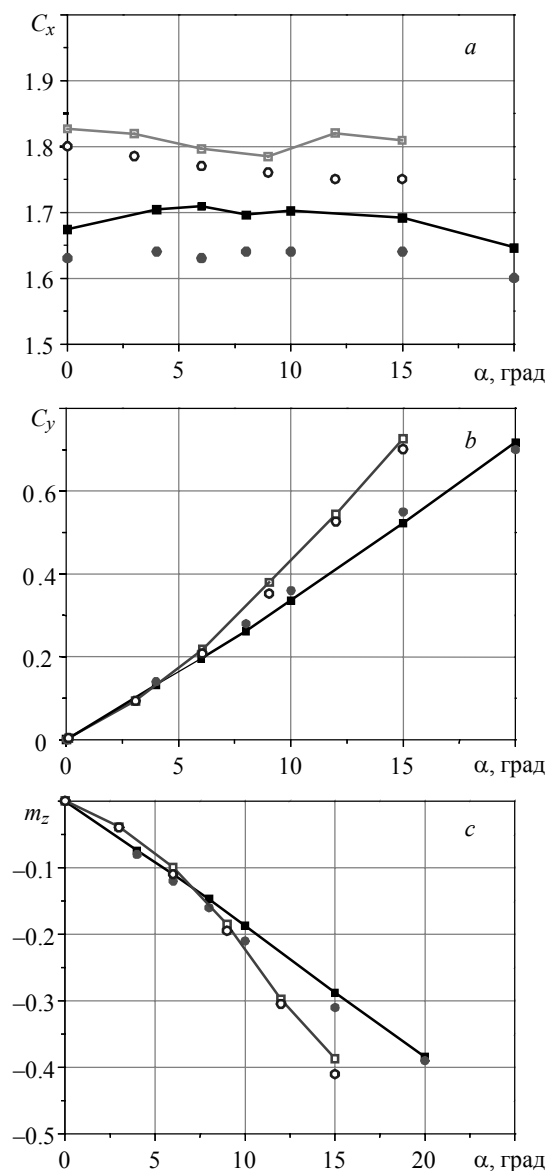


Рис. 4. Зависимости: *a* – коэффициента лобового сопротивления C_x , *b* – коэффициента подъёмной силы C_y , *c* – момента тангажа m_z от угла атаки α (при $M = 2$): —■—■—■— — ПП, расчет; ● — ПП, эксперимент; —□—□—□— — ЦТ, расчет; ○ — ЦТ, эксперимент

Fig. 4. Dependences of the (*a*) aerodynamic drag coefficient C_x , (*b*) aerodynamic lift coefficient C_y , and (*c*) pitch moment m_z on the angle of attack α (at $M = 2$) for the rectangular prism: —■—■—■— — calculation, ● — experiment; and for the cylindrical body: —□—□—□— — calculation, ○ — experiment

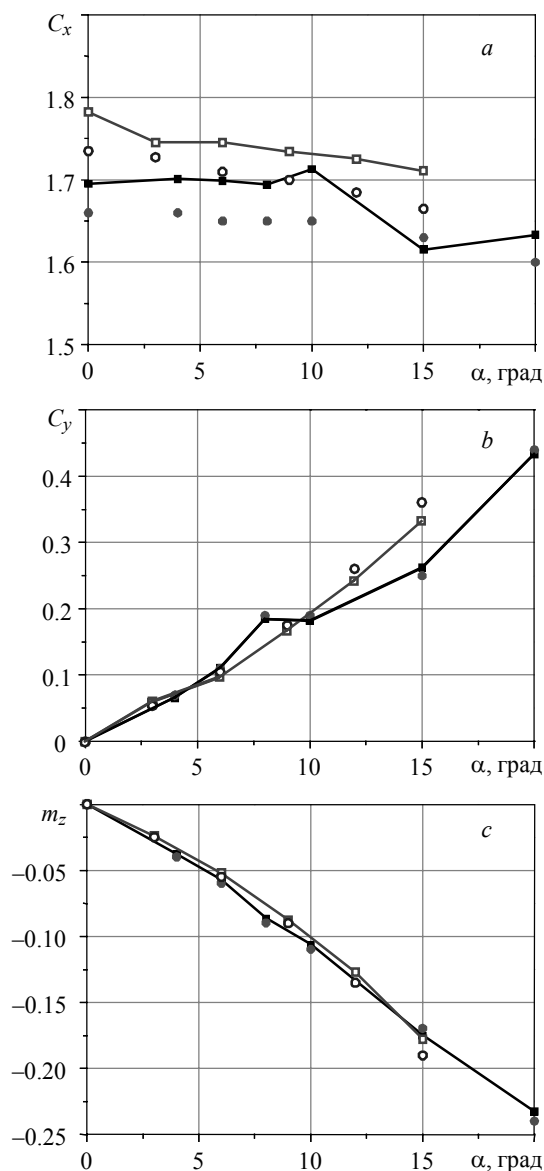


Рис. 5. Зависимости: *a* – коэффициента лобового сопротивления, *b* – коэффициента подъёмной силы, *c* – момента тангажа от угла атаки α (при $M=4$): —■—■—■— ПП, расчет; •— ПП, эксперимент; —□—□—□— ЦТ, расчет; ○— ЦТ, эксперимент

Fig. 5. Dependences of the (*a*) aerodynamic drag coefficient, (*b*) aerodynamic lift coefficient, and (*c*) pitch moment on the angle of attack α (at $M=4$) for the rectangular prism: —■—■—■— calculation, •— experiment; and for the cylindrical body: —□—□—□— calculation, ○— experiment

Из данных, представленных на рис.4, видно, что функция коэффициента силы лобового сопротивления – C_x – почти постоянная. При малых углах атаки основную долю лобового сопротивления составляет сопротивление трения, которое практически не зависит от изменения угла атаки. Коэффициент подъемной силы C_y по мере увеличения угла атаки растет: это происходит за счет уменьшения давления на верхней стороне призмы и увеличения давления на нижней.

Зависимости для m_z и C_y носят одинаковый характер – при увеличении угла атаки увеличивается момент тангажа относительно передней кромки призмы. Это объясняется тем, что момент тангажа, создаваемый аэродинамическими силами относительно передней части призмы возникает главным образом под действием подъемной силы, поэтому при увеличении подъемной силы увеличивается момент, поворачивающий профиль.

Также приведены аналогичные результаты для скорости набегающего потока с числом Маха $M = 4$. На рис. 5 представлены зависимости аэродинамических коэффициентов C_x , C_y и m_z от угла атаки α .

Отличие расчетных данных от экспериментальных составило: для коэффициента лобового сопротивления C_x – 3 %, для коэффициента подъемной силы C_y и момента тангажа m_z – 5 %. Характер изменения аэродинамических коэффициентов аналогичен для случаев обтекания моделей потоками со скоростями $M = 2$ и $M = 4$.

Выводы

В ходе работы получено хорошее качественное согласование результатов эксперимента и расчета – структура течения, полученная в ходе визуализации обтекания, идентична полям распределения газодинамических параметров (p и M). Рассогласование численного решения с экспериментальными данными по величинам основных аэродинамических характеристик составляет не более 5 %.

В диапазоне изменения угла атаки от 0° до 10° отличие аэродинамических коэффициентов для цилиндрического тела и прямоугольной призмы по C_x составляет до 10 %, по C_y и m_z до 5 %. В случае изменения угла атаки до 15° и выше различие аэродинамических характеристик для рассмотренных тел становятся более существенными (до 30 %).

Проведенное исследование аэродинамических характеристик элементов составной системы показало, что при малых углах атаки для наполнения снаряда в равной степени применимы прямоугольная призма и цилиндрическое тело. На основании информации об аэродинамических коэффициентах компоновочных тел можно провести расчет их баллистических траекторий и тем самым оценить площадь рассеивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Todd W. Erickson, Golshany, Lynnwood, A. Songstad, Everett, Adriana W. Blom, Jacqueline A. Artis, Christopher R. Holtorf, Natalie Daughtry. Fire-retarding artillery shell. Patent US, no. 20160216091A1, 2014.
2. Anders Clark. Boeing Patents a System to Fight Fire With Artillery // Disciples of Flight: Информационный ресурс. 27.08.2016. URL: <https://disciplesofflight.com/boeing-artillery-fire-fighting-system/> (дата обращения 07.05.2019)
3. Жуйков Д.А. Разработка метода пожаротушения с использованием стволовой установки контейнерной доставки огнетушащих веществ на удаленное расстояние: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Тольяттинский государственный университет. М., 2007.

4. *Потапенко В.В.* Математическое моделирование баллистических процессов ствольных систем метания контейнеров с огнетушащими веществами: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России, 2012.
5. *В Кутае* применили артиллерию для тушения лесного пожара // nakanune.ru: Информационное агентство «Накануне.RU». 08.04.2019. URL: <https://www.nakanune.ru/news/2019/04/08/22537748/> (дата обращения 06.05.2019).
6. *Снегирёв А.Ю.* Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.
7. *Фарапонов В.В., Савкина Н.В., Дьячковский А.С., Чунашев А.В.* Расчет аэродинамического коэффициента лобового сопротивления тела в дозвуковых и трансзвуковых режимах движения с помощью пакета ANSYS Fluent // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4. № 4. С. 845–853.
8. *Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.* Ten Years of Experience with the SST Turbulence Model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4* / Ed. by K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers. Begell House Inc., 2003. P. 625–632.
9. *Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н.* Внешняя баллистика: учеб. для вузов. 4-е изд. М.: Машиностроение, 2005. 608 с.
10. *Кусаинов К., Танашева Н.К., Тургунов М.М., Алибекова А.Р.* Исследование аэродинамических характеристик вращающихся пористых цилиндров // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 5. С. 23–26.

Статья поступила 27.09.2019 г.

Skibina N.P., Gimaeva N.R., Savkina N.V., Maslov E.A. (2020) NUMERICAL INVESTIGATION OF AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF TWO DIFFERENT COMPONENT BODIES AT VARIOUS ANGLES OF ATTACK. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 136–145

DOI 10.17223/19988621/64/10

Keywords: aerodynamics, mathematical modeling, supersonic flows, aerodynamic drag coefficient, lift force.

The paper presents mathematical modeling results for a supersonic flow around two types of component elements in a composite system designed for fire extinguishing shells. Such shells represent a complex composite system which consists of the elements with a fire extinguishing powder mixture contained inside. Directional separation and controlled dispersion of the parts of the purpose-designed shell allow one to extinguish a fire bed over a long distance and to reduce the time of fire suppression. Complete and reliable information about supersonic separated flow effects on the aerodynamic characteristics of the component elements makes it possible to simulate a separation mechanism and to assess dispersion of the arranged bodies. The paper presents the calculated values of the aerodynamic coefficients for the models of two geometry types depending on the angle of attack and a comparison with experimental data. Discrepancy between the theoretical results obtained and experimental data on the main aerodynamic characteristics does not exceed 5%. For the bodies under consideration, the difference in drag coefficients is up to 10%; as for lift and pitch moment coefficients, the difference is less than 5 % for the angle of attack in the range of 0° and 10°, and reaches 30% when the angle is more than 15°.

Nadezhda P. SKIBINA (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: uss.skibina@gmail.com

Nataliya R. GIMAEVA (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: natalia.gimaeva@inbox.ru

Nadezhda V. SAVKINA (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: savkina@ftf.tsu.ru

Evgeniy A. MASLOV (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: maslov_eugene@mail.ru

REFERENCES

1. Erickson T.W., Golshany S., Songstad S.A., Blom A.W., Artis J.A., Holtorf C.R., Daughtry N. (2014) *Fire-Retarding Artillery Shell*. US Patent 20160216091A1.
2. Clark A. (2019) *Boeing Patents a System to Fight Fire With Artillery*. Access mode: <https://disciplesofflight.com/boeing-artillery-fire-fighting-system> (submitted on July 7, 2019).
3. Zhuykov D.A. (2007) *Razrabotka metoda pozharotusheniya s ispol'zovaniem stvolovoy ustanovki konteynernoy dostavki ognetushashchikh veshchestv na udalennoe rasstoyanie* [Development of a fire extinguishing method using a barrel installation for a container delivery of extinguishing agents to a remote distance]. Extended abstract of PhD dissertation. Togliatti State University. Moscow.
4. Potapenko V.V. (2012) *Matematicheskoe modelirovanie ballisticheskikh protsessov stvol'nykh sistem metaniya konteynerov s ognetushashchimi veshchestvami* [Mathematical modeling of ballistic processes with barrel systems for throwing containers with extinguishing agents]. Extended abstract of PhD dissertation. Saint Petersburg University of State Fire Service of EMERCOM of Russia, Saint Petersburg.
5. V Kitae primenili artilleriyu dlya tusheniya lesnogo pozhara [China used artillery to extinguish a forest fire]. Access mode: <https://www.nakanune.ru/news/2019/04/08/22537748/> (submitted on May 6, 2019).
6. Snegirev A.Yu. (2009) *Vysokoproizvoditel'nye vychisleniya v tekhnicheskoy fizike. Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techeniy* [High-performance computing in technical physics. Numerical modeling of turbulent flows]. Saint Petersburg: Polytechnic University Publ.
7. Faraponov V.V., Savkina N.V., Diachkovsky A.S., Chupashev A.V. (2012) Calculation of aerodynamic factor of front resistance of a body in subsonic and transonic modes of movement by means of an ANSYS Fluent package. *Computer Research and Modeling*. 4(4). pp. 845–853. DOI: 10.20537/2076-7633-2012-4-4-845-853.
8. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. (2003) Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence, Heat and Mass Transfer*. 4. pp. 625–632.
9. Dmitrievskiy A.A., Lysenko L.N. (2005) *Vneshnyaya ballistika* [External ballistics]. Moscow: Mashinostroenie.
10. Kusainov K., Tanasheva N.K., Turgunov M.M., Alibekova A.R. (2015) Analysis of aerodynamic characteristics of rotating porous cylinders. *Technical Physics Letters*. 60(5). pp. 656–659. DOI: 10.1134/S1063784215050126.

Received: September 27, 2019

УДК 517.958:531.32
DOI 10.17223/19988621/64/11

О.Н. Шабловский

СФЕРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Построены точные частные решения уравнений Эйлера, определяющие стационарное сферическое движение несжимаемой невязкой жидкости. Даны примеры влияния структуры пространственной неоднородности силового поля на гидродинамические параметры течения: задача о протекании жидкости сквозь ядро сферического слоя; широтные и меридианные течения; поведение изобар и линий равных скоростей в потенциальном, соленоидальном и лапласовом силовых полях.

Ключевые слова: сферический слой; задача протекания; широтное и меридианное течения; потенциальное, соленоидальное и лапласово силовые поля.

Уравнения стационарного сферического течения идеальной несжимаемой жидкости являются важным элементом теории гидродинамических явлений в атмосфере, океане и технических сооружениях. Запишем эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad (1)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} (v_\theta^2 + v_\varphi^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r, \quad (2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} v_r v_\theta - \frac{v_\varphi^2}{r} \operatorname{ctg} \theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta, \quad (3)$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} v_\varphi v_r + \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi. \quad (4)$$

Здесь r, θ, φ – сферические координаты; $v(v_r, v_\theta, v_\varphi)$ – вектор скорости жидкости; p – давление; ρ – плотность; $F(F_r, F_\theta, F_\varphi)$ – вектор ускорения под воздействием массовой силы (далее для краткости применяем термин «массовая сила»).

Сформулируем основные предпосылки данной работы.

1. Точные решения уравнений (1) – (4) представляют не только самостоятельный интерес, но и служат средством тестирования вычислительных программ при моделировании гидродинамических процессов в сферических слоях. Отдельные классы решений, а также библиография проблемы точного аналитического описания невязких и вязких сферических и осесимметричных течений несжимаемой жидкости имеется в работах [1–5]. Отметим, что известные точные решения системы уравнений (1) – (4) получены, в основном, при отсутствии массовых сил.

2. Заслуживает внимания вопрос о сферических течениях жидкости в силовых полях, физическая природа которых обусловлена гравитационными, электриче-

скими и другими явлениями. Речь идет о массовой силе, векторное поле которой является потенциальным, соленоидальным либо лапласовым. В качестве примера назовем публикацию [6], в которой изложены свойства двухмерного вязкого течения при наличии соленоидальной массовой силы.

3. Задача протекания для уравнений Эйлера [7, 8] и Навье – Стокса [9] относится к актуальным проблемам математической гидродинамики. Современное состояние методов вычислительного моделирования двухмерного невязкого течения сквозь замкнутую область представлено в [10]. В теоретическом отношении важное значение имеет задача протекания в трехмерной области типа сферического слоя [11].

Цель работы: получить точные частные решения системы уравнений (1) – (4) и указать примеры протекания жидкости через границы сферического слоя; рассмотреть воздействие потенциального, соленоидального и лапласова силовых полей на скорость и давление жидкости.

Протекание жидкости сквозь ядро сферического слоя

Непосредственно подстановкой можно проверить, что системе (1) – (4) удовлетворяет частное решение, полученное из эвристических соображений:

$$v_r = A_1(1-2R)\cos\theta, \quad v_\theta = 2A_1R\sin\theta, \quad v_\varphi \equiv 0; \quad (5)$$

$$(p-p_0)/\rho = A_1^2 \left[2R\cos^2\theta - \sin^2\theta - (R^2/2) \right];$$

$$F_r = 3A_1(R/r)\cos 2\theta, \quad F_\theta = -3A_1^2(R/r)\sin 2\theta, \quad F_\varphi \equiv 0; \quad (6)$$

$$R = \ln(r/r_0), \quad 0 < r_0 < \infty, \quad 0 \leq R \leq (1/2),$$

где A_1 – произвольная постоянная; условие $p>0$ обеспечивается подходящим выбором константы p_0 . Течение происходит в сферическом слое конечной толщины: $r \in [r_0, r_w]$, $r_w = r_0 \exp(1/2)$. Внешняя граница слоя непротекаемая: $r = r_w$, $R = 1/2$, $v_r(R = 1/2) = 0$. Жидкость протекает через внутреннюю границу слоя ($r = r_0$, $R = 0$): $v_\theta(R = 0) = 0$, $v_r(R = 0) = A_1 \cos\theta$. Возьмем для определенности $A_1 > 0$. Тогда в северной ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) части слоя жидкость вытекает из ядра: $R = 0$, $v_r > 0$. На экваторе ($\theta = \pi/2$) протекания нет: $v_r = 0$. В южной ($\pi/2 < \theta \leq \pi$) части слоя жидкость течет внутрь ядра: $R = 0$, $v_r < 0$. Обсудим поведение градиента давления на границах слоя.

На внутренней протекаемой сфере:

$$r = r_0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{A_1^2}{r_0} (1 + \cos 2\theta), \quad \frac{1}{r_0 \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{A_1^2}{r_0} \sin 2\theta.$$

На внешней непротекаемой сфере:

$$r = r_w, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{A_1^2}{r_w} \left(\frac{1}{2} + \cos 2\theta \right), \quad \frac{1}{r_w \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{A_1^2}{r_w} \sin 2\theta.$$

Отсюда видим, что на обеих границах $\partial p / \partial \theta$ меняет знак при переходе через экватор. Вместе с тем $\partial p / \partial r$ ведет себя иначе. На границе ядра эта производная неотрицательна: она обращается в ноль на экваторе. На внешней сфере ситуация нетривиальная: $\partial p / \partial r < 0$ в конечной окрестности по обе стороны экватора, а именно там, где $(1/2) + \cos 2\theta < 0$. При переходе через пороговые значения $\theta = \theta_i$, $i = 1, 2$, где

$(1/2) + \cos 2\theta_i = 0$, $\partial p / \partial r = 0$, производная $\partial p / \partial r$ меняет знак. На экваторе $\text{grad} p$ направлен вдоль радиуса.

Завихренность $\omega = (1/2) \text{rot } v$ имеет вид $\omega_r \equiv 0$, $\omega_\varphi \equiv 0$, $\omega_\theta = (3/2r) A_1 \sin \theta$. Значит, $\omega_\theta = 0$ только на полюсах $\theta = 0$, $\theta = \pi$; при каждом фиксированном r завихренность неотрицательная и достигает максимума на экваторе. Данное течение вызвано действием силы (6), имеющей модуль $|F| = 3A_1^2 R / r$, который постоянен на сферах $r = \text{const}$. По мере возрастания радиуса ядра r_0 модуль силы монотонно убывает, потому что r_0 – нижняя граница значений радиальной координаты. Поступая известным образом, можно представить вектор F с компонентами (6) в виде суммы потенциального $F^{(P)}$ и соленоидального $F^{(S)}$ векторов:

$$F = F^{(P)} + F^{(S)}, \quad (7)$$

$$\text{rot } F^{(P)} = 0, \quad \text{div } F^{(S)} = 0, \quad F^{(P)} = \text{grad } \Phi, \quad \Delta \Phi = \text{div } F,$$

где $\Delta \Phi$ – оператор Лапласа, действующий на скалярную функцию $\Phi = \Phi_0(\theta) + R\Phi_1(\theta)$. При этом оказывается (подробная запись выражений Φ_0 , Φ_1 здесь не приводится), что $F^{(P)}$ и $F^{(S)}$ имеют на полюсах $\theta = 0$, $\theta = \pi$ особенности вида $1/\sin \theta$, и эти особенности взаимно уничтожаются при суммировании (7).

Отметим еще, что $(\text{rot } F)_r \equiv 0$, $(\text{rot } F)_\theta \equiv 0$, $(\text{rot } F)_\varphi = (3A_1^2 / r^2)(2R - 1) \sin 2\theta$.

Это значит, что завихренность данного силового поля равна нулю на внешней непротекаемой границе $R = 1/2$, а также в плоскости экватора $\theta = \pi/2$ и вдоль полярных радиусов $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Интенсивность источников силы F : $J = \text{div } F = (3A_1^2 / r^2)[R - 1 + 2 \cos^2 \theta (1 - 2R)]$. Отсюда ясно, что на внешней непротекаемой границе $J(R = 1/2) \equiv \text{const}$. На поверхности ядра функция $J_0(\theta) \equiv J(R = 0) = (3A_1^2 / r_0^2) \cos 2\theta$ знакопеременная и дважды обращается в ноль; по обе стороны экватора имеем сток: $J_0(\theta) < 0$ при $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$; в конечной окрестности полюсов имеем источник: $J_0(\theta) > 0$ при $\theta \in [0, \pi/4)$ и $\theta \in (3\pi/4, \pi]$.

Чтобы определить температурное поле $T = T(r, \theta)$, соответствующее невязкому нетеплопроводному течению (5), запишем уравнение энергии в виде

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

Отсюда находим

$$T - T_0 \equiv \tau(\chi), \quad \chi = \frac{r}{r_0} (1 - 2R)^{1/2} \sin \theta,$$

$$R \in [0, 1/2], \quad \theta \in [0, \pi],$$

где T_0 – отсчетное значение температуры; $\tau(\chi)$ – дифференцируемая функция аргумента χ , которая должна быть ограниченной вместе со своей производной, а в остальном она произвольная. Конкретизация функции $\tau(\chi)$ означает задание температурной зависимости скорости протекания сквозь ядро сферического слоя. Рассмотрим два примера.

Пусть $\tau = T_1 \chi^{n_1}$, $n_1 \geq 2$, $\chi \geq 0$; $T_1, n_1 - \text{const}$; $\tau/T_1 > 0$. Тогда скорость протекания зависит от температуры поверхности ядра степенным образом:

$$R = 0, \quad v_r^2 = A_1^2 \left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_1} \right)^{2/n_1} \right] \geq 0.$$

Пусть $\tau = T_1 \ln(1 + b_1^2 \chi^2)$, $T_1 \geq 0$, $b_1^2 > 0$. Тогда скорость протекания зависит от температуры поверхности ядра экспоненциальным образом:

$$R = 0, \quad v_r^2 = \frac{A_1^2}{b_1^2} \{ 1 + b_1^2 - \exp[(T - T_0)/T_1] \} \geq 0.$$

Широтное течение

Рассмотрим класс широтных движений

$$v_r \equiv 0, \quad v_\theta \equiv 0, \quad v_\varphi = v_\varphi(r, \theta), \quad p = p(r, \theta); \quad (8)$$

$$F_r = F_r(r, \theta), \quad F_\theta = F_\theta(r, \theta), \quad F_\varphi \equiv 0. \quad (9)$$

Область определения решения указана далее при анализе отдельных примеров. На основе уравнений (1) – (4) получаем

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - F_r, \quad \frac{v_\varphi^2}{r} \operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - F_\theta, \quad (10)$$

а это значит, что должно быть выполнено равенство

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho r (F_r \operatorname{ctg} \theta - F_\theta). \quad (11)$$

Будем рассматривать потенциальное и соленоидальное силовые поля, удовлетворяющие связи

$$F_r \cos \theta = F_\theta \sin \theta, \quad (12)$$

при которой правая часть уравнения (11) равна нулю, т.е.

$$p - p_0 = \Pi(\zeta), \quad \zeta = r \sin \theta. \quad (13)$$

Произвольную функцию $\Pi(\zeta)$ следует выбирать из физических соображений так, чтобы получить непрерывное и ограниченное решение. Отметим еще, что ζ есть расстояние от точки (r, θ) до оси z декартовой системы координат, т.е. семейство линий $\zeta = \text{const}$ есть семейство окружностей, имеющих радиус ζ , а центр на оси z ; плоскости этих окружностей ортогональны оси z . Условие потенциальности силового поля

$$\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) = \frac{\partial F_r}{\partial \theta}$$

совместно с (12) дает две компоненты массовой силы

$$F_r^{(P)} = \frac{1}{r} B(\zeta), \quad F_\theta^{(P)} = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} B(\zeta), \quad (14)$$

где $B(\zeta)$ – функция непрерывная и ограниченная, а в остальном ее выбор произволен. Квадрат скорости течения находим из (10):

$$v_{\varphi}^2 = \frac{\zeta}{\rho} \frac{d\Pi(\zeta)}{d\zeta} - B(\zeta) \geq 0. \quad (15)$$

Приведем пример:

$$B = -b_1^2 \zeta, \quad \Pi = p_1^2 \sin^2 k \zeta, \quad 0 \leq \zeta < \infty,$$

$$F_r^{(P)} = -b_1^2 \sin \theta, \quad F_{\theta}^{(P)} = -b_1^2 \cos \theta,$$

$$v_{\varphi}^2 = \zeta \left(\frac{p_1^2 k}{\rho} \sin 2k \zeta + b_1^2 \right), \quad b_1^2 \geq \frac{p_1^2 k}{\rho},$$

$$b_1^2, \quad p_1^2, \quad k - \text{const}; \quad r \in [0, r_w], \quad \theta \in [0, \pi].$$

Течение происходит внутри непротекаемой сферы радиуса r_w . В центре сферы и вдоль полярных радиусов жидкость неподвижна, а внутри сферы скорость и давление изменяются периодическим образом по отношению к аргументу ζ . Линии равных скоростей (изотакхи) являются изобарами.

Перейдем к рассмотрению соленоидальных сил. Для случая (9) условие $\text{div} F = 0$ совместно со связью (12) дает

$$F_r^{(S)} = \frac{1}{r} A(z), \quad F_{\theta}^{(S)} = \frac{\text{ctg} \theta}{r} A(z), \quad z = r \cos \theta, \quad (16)$$

где $A(z)$ – функция непрерывная и ограниченная. Давление по-прежнему определяется формулой (13). Квадрат скорости жидкости равен

$$v_{\varphi}^2 = \frac{\zeta}{\rho} \frac{d\Pi(\zeta)}{d\zeta} - A(z). \quad (17)$$

Выбор произвольных функций $\Pi(\zeta)$, $A(z)$ должен обеспечивать условие $v_{\varphi}^2 \geq 0$.

Декартова координата z есть расстояние от плоскости окружности $\zeta = \text{const}$ до центра $r = 0$.

Зависимость $A(z)$ является основным элементом структуры неоднородности соленоидального поля (16). В потенциальном случае (14) неоднородность обусловлена зависимостью от координаты ζ , которая отсчитывается в направлении, ортогональном оси z . Это различие между (14) и (16) приводит к тому, что в потенциальном силовом поле широтная скорость (15) «одномерна» по отношению к аргументу ζ , а в соленоидальном случае скорость зависит от двух аргументов z , ζ . Завихренность силового поля (16) имеет одну отличную от тождественного нуля компоненту $(\text{rot} F)_{\varphi} = (1/\zeta)(dA/dz)$.

Решение (13), (16), (17) описывает течение в части пространства, внешней по отношению к двум непротекаемым конусам вращения:

$$r \geq 0, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2], \quad z \in (-\infty, \infty), \quad \zeta \in [0, \infty); \quad (18)$$

$$0 < \theta_1 < \pi/2, \quad \theta_2 = \pi - \theta_3, \quad 0 < \theta_3 \leq \pi/2.$$

Расположение конусов напоминает песочные часы: у них общая ось, вершины соприкасаются и обращены навстречу друг другу; θ_1 и θ_3 есть углы осью и образующими конусов.

Приведем пример: периодическая неоднородность силового поля описывается функцией $A = -A_1^2 \sin^2(k_1 z)$; $A_1, k_1 - \text{const}$. Это значит, что в плоскости экватора

$F_r^{(S)} = 0$, $F_\theta^{(S)} = 0$, а по обе стороны этой плоскости при каждом фиксированном θ из интервалов $[\theta_1, \pi/2]$ и $(\pi/2, \theta_2]$ компоненты силы (16) изменяются по отношению к $r \geq 0$ в режиме затухающих колебаний. Частота колебаний $k_1 \cos \theta$ увеличивается по мере приближения к поверхностям непротекающих конусов. Функцию давления возьмем в виде

$$p = p_\infty + \Pi(\zeta) > 0, \quad \Pi(\zeta) = -p_1^2 \sin^2(\pi E), \quad E = \exp(-p_2^2 \zeta)$$

и получим

$$v_\varphi^2 = \frac{\pi \zeta}{\rho} p_1^2 p_2^2 E \cos(\pi E) + A_1^2 \sin^2(k_1 z).$$

Данное решение определено в области (18). Параметры течения в центре $r = 0$: $v_\varphi = 0$, $p = p_0 = p_\infty$, $(\text{rot } F)_\varphi = -2A_1^2 k_1^2 \text{ctg } \theta$. При $r \rightarrow \infty$ имеем $p \rightarrow p_\infty = p_0$, $v_\varphi^2 \rightarrow A_1^2 \sin^2(k_1 z)$, $(\text{rot } F)_\varphi \rightarrow 0$.

Отметим интересный частный случай. Если $\theta_2 = \theta_3 = \pi/2$, см. (18), то непротекаемыми границами течения являются конус и экваториальная плоскость.

Известно, что силовое поле Лапласа (L) является одновременно и потенциальным и соленоидальным: $F^{(L)} = \text{grad } \Phi$, $\text{div } F^{(L)} = \Delta \Phi = 0$, где $\Phi = \Phi(r, \theta, \varphi)$ – гармоническая функция. Продолжим исследование класса движений (8), (9) и возьмем простейший случай $\Phi = ar \cos \theta \equiv az$, $a \equiv \text{const}$:

$$F_r^{(L)} = a \cos \theta, \quad F_\theta^{(L)} = -a \sin \theta.$$

Проинтегрировав уравнение (11), находим давление

$$p = p_0 + \Pi(\zeta) + \rho a z > 0.$$

Далее с помощью формул (10) получаем

$$v_\varphi^2 = (\zeta/\rho)(d\Pi/d\zeta) \geq 0.$$

Приведем пример течения внутри непротекаемой сферы радиуса r_w :

$$\Pi(\zeta) = p_1^2 \exp[-p_2^2 (r_w - \zeta)^2],$$

$$v_\varphi^2 = \frac{2p_1^2 p_2^2}{\rho} \zeta (r_w - \zeta) \exp[-p_2^2 (r_w - \zeta)^2]; \quad p_1, p_2 - \text{const};$$

$$0 \leq r \leq r_w < \infty, \quad \theta \in [0, \pi], \quad 0 \leq \zeta \leq r_w.$$

В центре $r = 0$, вдоль полярных радиусов и на линии экватора жидкость неподвижна. Здесь так же, как в соленоидальном случае, линии равных скоростей не являются изобарами.

Меридианное течение

Движение вида

$$v_r \equiv 0, \quad v_\theta = v_\theta(r, \theta), \quad v_\varphi \equiv 0;$$

$$F_r = F_r(r, \theta), \quad F_\theta = F_\theta(r, \theta), \quad F_\varphi \equiv 0$$

определяется, согласно (1) – (4), соотношениями

$$v_\theta = m(r)/\sin \theta, \quad (19)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r} + F_r, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = r F_\theta - v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta},$$

где $m = m(r)$ – произвольная функция. Отсюда получаем

$$\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \left[\frac{d(m^2)}{dr} + \frac{2m^2}{r} \right] = \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta). \quad (20)$$

Для потенциальных сил правая часть этого выражения равна нулю. Обсудим отдельные примеры потенциального, соленоидального и лапласова силовых полей.

Сначала рассмотрим безвихревое течение, взяв $m = m_1/r$:

$$v_\theta = m_1/(r \sin \theta), \quad (21)$$

где m_1 – произвольная постоянная. Потенциальное силовое поле:

$$F_r^{(P)} = a \sin \theta, \quad F_\theta^{(P)} = a \cos \theta, \quad a \equiv \text{const};$$

$$(p - p_0)/\rho = ar \sin \theta - \left[m_1^2 / (2r^2 \sin^2 \theta) \right]. \quad (22)$$

Лапласово силовое поле:

$$F_r^{(L)} = \left(a - \frac{2b}{r^3} \right) \cos \theta, \quad F_\theta^{(L)} = - \left(a + \frac{b}{r^3} \right) \sin \theta; \quad a, b - \text{const};$$

$$\frac{(p - p_0)}{\rho} = \left(ar + \frac{b}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{m_1^2}{2r^2 \sin^2 \theta}. \quad (23)$$

Решения (21) – (23) имеют физически содержательное истолкование в следующих интервалах радиальной и угловой координат:

$$r \in [r_w^{(1)}, r_w^{(2)}], \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]; \quad (24)$$

$$0 < r_w^{(1)} < r_w^{(2)} < \infty, \quad 0 < \theta_1 < \pi/2, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1, \quad 0 < \theta_3 \leq \pi/2.$$

Течение происходит в области, ограниченной двумя концентрическими сферами и двумя конусами с углами θ_1 и θ_3 между их образующими и общей осью. Обе сферы непротекаемые, имеют радиусы $r_w^{(1)}$ и $r_w^{(2)}$. Расположение конусов такое же, как при интерпретации решения (13), (16) – (18), но есть отличия: вершины конусов находятся в центре внутренней сферы, и жидкость перетекает из одного конуса в другой сквозь их проницаемые стенки. Например, при $m_1 > 0$ жидкость поступает внутрь сферического слоя через стенку верхнего конуса (его ось – луч $\theta = 0$); жидкость уходит из области (24) через стенку нижнего конуса (его ось – луч $\theta = \pi$). Заслуживает внимания частный случай с углами $\theta_2 = \theta_3 = \pi/2$, когда нижний конус вырождается в плоскость и жидкость удаляется из сферического слоя через круговое кольцо, расположенное в экваториальной плоскости. Отметим еще, что при $a = 0$ лапласов вариант (23) можно применять при $r \geq r_w^{(1)} > 0$. Для решения (23), в отличие от потенциального варианта (22), линии равных скоростей не являются изобарами. Такой же результат мы наблюдали для широтных течений (8), (9). Вместе с тем имеется существенное различие в структурах поля скоростей для широтного (15) и меридианного (21) течений под действием потенциальных

сил: линиями равных скоростей являются соответственно $\zeta \equiv r \sin \theta = \text{const}$ и $z \equiv r \cos \theta \equiv \text{const}$.

Рассмотрим пример вихревого меридианного течения под действием соленоидальной силы, радиальная компонента которой зависит только от координаты ζ :

$$F_r^{(S)} = -\frac{b_1}{2(r \sin \theta)^2}, \quad F_\theta^{(S)} \equiv 0, \quad F_\phi^{(S)} \equiv 0. \quad (25)$$

Здесь b_1 – произвольная постоянная; допускается значение $b_1 = 0$. Из (20) находим

$$m^2(r) = \frac{b_1}{r} + \frac{m_1^2}{r^2}; \quad (26)$$

постоянная m_1^2 тоже произвольная, нужно только обеспечить условие $m^2(r) > 0$.

Согласно (19), скорость и давление имеют вид

$$v_\theta = [m^2(r)]^{1/2} / \sin \theta, \quad (27)$$

$$(p - p_0) / \rho = -m^2(r) / (2 \sin^2 \theta). \quad (28)$$

Физическая модель течения такая же, как для решений (21) – (23): жидкость движется в области (24) и перетекает из верхнего конуса в нижний. Возможен случай протекания жидкости через систему «конус – круговое кольцо», а также допускается область решения $r \geq r_w^{(1)} > 0$.

Соленоидальный вариант (25) – (28) интересен тем, что для него линии равных скоростей так же, как и для рассмотренных выше потенциальных полей, являются изобарами. Причина в том, что здесь отсутствует меридианная компонента массовой силы. Именно эта компонента оказывает основное влияние на поведение изотак и изобар. Если взять соленоидальную силу, которая, в дополнение к (25), имеет компоненту $F_\theta^{(S)} = -b_2 / (r \sin \theta)$, $b_2 \equiv \text{const}$, то выражения (26), (27) останутся без изменений, а в правой части формулы (28) для давления появится слагаемое

$$(b_2 / 2) \ln [(1 + \cos \theta) / (1 - \sin \theta)].$$

Тогда даже при $b_1 = 0$, $F_r^{(S)} \equiv 0$ получаем, как и для рассмотренных выше соленоидальных полей, что линии равных скоростей не являются изобарами.

Заключение

Построены невязкие стационарные сферические течения, генерируемые пространственно-неоднородными массовыми силами. Дан пример (5) точного решения задачи протекания жидкости через ядро сферического слоя; приведены примеры степенной и экспоненциальной зависимостей скорости протекания от температуры поверхности ядра. Рассмотрены широтные и меридианные течения, происходящие в потенциальном, соленоидальном и лапласовом силовых полях. Приведены примеры, демонстрирующие условия, при которых линии равных скоростей являются/не являются изобарами. Показано, что меридианная компонента массовой силы – основной фактор влияния на поведение этих линий. Физическими моделями представленных решений служат: течение вида (15) внутри непротекаемой сферы; течение вида (17) в части пространства, внешней по отношению к двум непротекаемым конусам; меридианное протекание (21) и (27) через сферический слой, ограниченный проницаемыми конусами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
2. Грын В.И. О семействах точных решений стационарных уравнений Эйлера и Навье – Стокса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1421–1422.
3. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
4. Иванов М.И. Тангенциальные колебания дифференциально вращающегося сферического слоя жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 2. С. 146–154.
5. Шабловский О.Н. Сферическое течение вязкой жидкости с источниками импульса и энергии // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 15. М.: Янус-К, 2013. С. 219–235.
6. Мануйлович С.В. Продольно-периодическое течение вязкой жидкости, порождаемые пристеночной объемной силой // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 4. С. 59–67.
7. Юдович В.И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Математический сборник. 1964. Т. 64. № 4. С. 562–588.
8. Кажихов А.В. Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44. № 5. С. 947–949.
9. Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначев В.В., Руссо Р. Задача протекания для уравнений Навье – Стокса // Успехи математических наук. 2014. Т. 69. Вып. 6. С. 115–176.
10. Говорухин В.Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 6. С. 1133–1147.
11. Пухначев В.В. Трехмерная симметричная задача протекания для уравнений Навье – Стокса // Вестник Южно-Уральского гос. университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2015. Т. 8. № 2. С. 95–104.

Статья поступила 11.03.2019 г.

Shablovsky O.N. SPHERICAL FLOW OF AN IDEAL FLUID IN A SPATIALLY NONUNIFORM FIELD OF FORCE. (2020) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 146–155

DOI 10.17223/19988621/64/11

Keywords: spherical layer, flow problem, zonal and meridional flows; potential, solenoidal, and Laplace force fields.

Exact particular solutions to Euler equations are obtained for a steady spherical flow of an incompressible inviscid fluid. The effect of the structure of the force field spatial nonuniformity on hydrodynamic parameters of the flow is studied. An exact solution to a flux problem is obtained. In this problem, the fluid flows in a spherical layer of finite thickness whose external boundary is impermeable. In the northern part of the layer, the fluid flows out of the core; in the southern part, into the core. There is no flowing at the equator. The peculiarities of the pressure gradient on the layer boundaries are discussed in detail. The intensity of mass force sources is calculated. Both exponential and power-law dependences of the flow velocity on the core surface temperature are proposed. The zonal and meridional flows occurring in potential, solenoidal, and Laplace force fields are considered. Examples of the conditions under which the velocity contours are or are not isobars are given. The behavior of these lines is shown to be mainly affected by a meridional component of the mass force. Physical models corresponding to the given solutions are presented. An example of the zonal flow inside an impermeable sphere is indicated. A zonal flow is considered in the external space of two impermeable cones. Arrangement of the cones has

a sandglass-like shape. They have a common axis, a common vertex, and opposite bases. In a partial case, the impermeable boundaries are represented as a cone and an equatorial plane. The same arrangement of the cones is used for a hydrodynamic interpretation of the meridional flow, where the vertices of the cones are located in the center of the internal sphere, and the fluid flows out of the upper cone into the lower one through their permeable walls. The flow region is radially confined by external and internal impermeable spheres. In a specific case, the lower cone degenerates into a plane, and the fluid outflows from the spherical layer through a round ring located in the equatorial plane.

Oleg N. SHABLOVSKY (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Republic of Belarus). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

REFERENCES

1. Goldshtik M.A., Shtern V.N., Yavorskiy N.I. (1989) *Vyazkie techeniya s paradoksalnymi svoystvami* [Viscous flows with paradoxical properties]. Novosibirsk: Nauka.
2. Gryn' V.I. (1998) O semeystvakh tochnykh resheniy statsionarnykh uravneniy Eylera i Nav'e-Stoksa [On families of exact solutions to the steady-state Euler and Navier-Stokes equations]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 38. pp. 1421–1422.
3. Shmyglevskiy Yu.D. (1999) *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti* [Analytical studies of gas and fluid dynamics]. Moscow: Editorial URSS.
4. Ivanov M.I. (2009) Tangentsial'nye kolebaniya differentsialno vrashchayushchegosya sfericheskogo sloya zhidkosti [Tangential vibrations of a differentially rotating spherical layer of a fluid]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Fluid and Gas Mechanics*. 2. pp. 146–154.
5. Shablovsky O.N. (2013) Sfericheskoe techenie vyazkoy zhidkosti s istochnikami impul'sa i energii [A spherical flow of a viscous fluid with momentum and energy sources]. *Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tekhniko-tehnologicheskikh sistem*. 15. pp. 219–235.
6. Manuylovich S.V. (2015) Prodol'no-periodicheskie techeniya vyazkoy zhidkosti, porozhdaemye pristenochnoy ob'emnoy siloy [Longitudinally periodic flow of a viscous fluid generated by near-wall volume force]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza – Fluid Dynamics*. 4. pp. 59–67.
7. Yudovich V.I. (1964) Dvumernaya nestatsionarnaya zadacha o protekании ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti cherez zadannuyu oblast' [Two-dimensional unsteady problem of an ideal incompressible fluid flow through a given region]. *Matematicheskii sbornik – Sbornik: Mathematics*. 64. pp. 562–588.
8. Kazhikhov A.V. (1980) Zamechanie k postanovke zadachi protekaniya dlya uravneniy ideal'noy zhidkosti [A remark on the flux problem formulation in equations for an ideal fluid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 44. pp. 947–949.
9. Korobkov M.V., Piletskas K., Pukhnachev V.V., Russo R. (2014) The flux problem for the Navier–Stokes equations. *Russian Mathematical Surveys*. 69(6). pp. 1065–1122. DOI: 10.4213/rm9616.
10. Govorukhin V.N. (2011) A vortex method for computing two-dimensional inviscid incompressible flows. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 51(6). pp. 1061–1073.
11. Pukhnachev V.V. (2015) Trekhmernaya simmetrichnaya zadacha protekaniya dlya uravneniy Nav'e-Stoksa [Three-dimensional flux problem for the Navier-Stokes equations]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*. 8(2). pp. 95–104. DOI: 10.14529/mmp150208.

Received: March 11, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БОГАЧЕВА Виктория Эдуардовна – студентка кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

БУКУШЕВА Алия Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия. E-mail: bukusheva@list.ru

БЫЧИН Игорь Валерьевич – старший преподаватель кафедры прикладной математики Сургутского государственного университета; младший научный сотрудник отдела исследования гидродинамических, магнитных и теплообменных задач филиала Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Сургут, Россия. E-mail: igor-bychin@yandex.ru;

ВАЛИХОВ Владимир Данилович – студент кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: valihov.snobls@gmail.com

ВАСЕНИНА Татьяна Вениаминовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tvv@niipmm.tsu.ru

ВОРОЖЦОВ Александр Борисович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: abv1953@mail.ru

ГИМАЕВА Наталья Радиковна – студентка кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: natalia.gimaeva@inbox.ru

ГЛАГОЛЕВ Вадим Вадимович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: vadim@tsu.tula.ru

ГЛАГОЛЕВ Леонид Вадимович – кандидат физико-математических наук, ведущий инженер ОАО «КБП», г. Тула, Россия. E-mail: len4ic92@gmail.com

ГЛАЗУНОВ Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

ГОРЕЛИКОВ Андрей Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики Сургутского государственного университета, заведующий отделом исследования гидродинамических, магнитных и теплообменных задач филиала Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Сургут, Россия. E-mail: gorelikov_a@list.ru;

ДАНИЛОВ Павел Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: padanilov@gmail.com

ЖАЛНИНА Александра Анатольевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета, г. Кемерово, Россия. E-mail: qwert1776@yandex.ru

ЖУКОВ Илья Александрович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: gofra930@gmail.com

ИНЧЕНКО Оксана Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: inchenko_ov@mail.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, декан физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

КУСАИНОВ Павел Иванович – аспирант кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: descmn@mail.ru

КУЧЕР Николай Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета, г. Кемерово, Россия. E-mail: nakucher@rambler.ru

ЛУКАШОВ Олег Юрьевич – кандидат физико-математических наук, директор ООО «ШАХТЭКСПЕРТ – Системы», г. Кемерово, Россия. E-mail: mail@minesoft.ru

МАЗЕПА Евгений Евгеньевич – аспирант кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: evgenimazep@yandex.ru

МАЛЫШЕНКО Ольга Владимировна – старший преподаватель кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета, г. Кемерово, Россия. E-mail: molga81@list.ru

МАРКИН Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: markin-nikram@yandex.ru

МАСЛОВ Евгений Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и промышленной теплотехники Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: maslov_eugene@mail.ru

МИР-САЛИМ-ЗАДЕ Минавар Вагиф гызы – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан. E-mail: mir-salim-zade@mail.ru

ПЛАТОВ Владимир Владимирович – аспирант кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: vova.platov.85@mail.ru

РЯХОВСКИЙ Алексей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Сургутского государственного университета, г. Сургут, Россия. E-mail: echo47@rambler.ru;

САВКИНА Надежда Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры динамики полета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: savkina@ftf.tsu.ru

СКИБИНА Надежда Петровна – ассистент кафедры динамики полета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: uss.skibina@gmail.com

СТАРЧЕНКО Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, декан механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: starch@math.tsu.ru

ХМЕЛЕВА Марина Григорьевна – аспирантка кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: khmelmg@gmail.com

ЧУРУКСАЕВА Владислава Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: chu.vv@mail.ru

ШАБЛОВСКИЙ Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой машиностроительного факультета Гомельского государственного технического университета, г. Гомель, Республика Беларусь. E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 17.04.2020. Выпуск в свет 24.04.2020.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 12.74. Уч.-изд. л. 14.27. Тираж 250 экз. Заказ № 6. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4299.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru