

МЕХАНИКА

УДК 539.375

DOI 10.17223/19988621/64/5

В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, О.В. Инченко, А.А. Маркин

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ
АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ В СЛОИСТОМ КОМПОЗИТЕ¹

Исследуется сдвиговое нагружение тонкого адгезионного слоя в слоистом композите. На основе общей вариационной постановки и ее упрощенных постановок в дифференциальном виде получены численные и аналитические решения напряженно-деформированного состояния слоя. Показано, что, используя в качестве критерия разрушения адгезионного слоя произведение приращения его удельной свободной энергии на толщину, называемое энергетическим произведением, возможно проводить прочностные расчеты, принимая значение толщины из некоторого диапазона. При этом величина энергетического произведения практически не изменяется.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, вариационное уравнение, метод конечных элементов, энергетическое произведение

Слоистые композиционные материалы имеют важное значение в машиностроении, авиационной и ракетной технике. Поэтому для механики деформируемого твердого тела актуально построение моделей плоских слоистых материалов, в которых рассматриваются тела, объединенные в композит адгезионным слоем (АС) [1–4].

В слоистых композитах толщина адгезионного слоя (АС) является естественным линейным параметром (ЛП). В зависимости от толщины адгезионного слоя (ядра), относительной жесткости между ядром и сопрягаемыми телами, граничных условий применяют те или иные модели. Постановка и решение задач, учитывающих изгибную жесткость ядра слоистого композита, предложена в работах [5–7]. Так, в работах [5, 6] деформация обжатия ядра полагается постоянной по толщине, а в работе [7] – линейной.

В настоящее время основным подходом в этом направлении является моделирование АС слоем нулевой толщины и использование критериальной базы механики квазихрупкого разрушения [8–12]. В этом случае, как правило, пренебрегают толщиной адгезива, а его механические свойства сводятся к силам взаимодействия склеенных материалов, которые могут иметь разные механические [13] или прочностные свойства [14, 15]. Однако, в этом случае теряется различие между когезионным разрушением АС (по его массиву) и адгезионным механизмом отслоения. Особая роль в этих моделях отводится определению адгезионных сил взаимодействия [16]. Кроме того, если сопрягаемые материалы контактируют не

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и правительства Тульской области в рамках научного проекта № 19-41-710001 p_a, и при финансовой поддержке РФФИ проект № 18-31-20053.

по всей длине, в модели будет присутствовать сингулярность. Аналитические решения для тел конечных размеров в этом случае получаются, как правило, в рамках упрощающих гипотез [17–21]. В работе [22] для консоли с центральной трещиной на основе гипотез теории пластин получено аналитическое решение задачи и на его основе в [23] исследовано значение J -интеграла.

Для случая, когда учитывается размер АС при незначительной его изгибной жесткости, отметим модели с введением «мягкого слоя» [1, 24, 25] и слоя взаимодействия [26–28]. В данных моделях размер АС существенно меньше сопрягаемых им тел, кроме того, отметим, что он не является постоянной величиной в готовой продукции. В этом случае речь может идти об определенном допуске или диапазоне значений, в рамки которого укладывается толщина АС в образцах. Для нахождения напряженно-деформированного состояния (НДС) и связанного с ним критического состояния в рамках известных локальных критериев необходимо знать значение толщины АС, что проблематично. Поэтому представляется рациональным использовать критерий разрушения, независимый от толщины АС в определенном диапазоне ее изменения. В работе [29] было введено понятие энергетического произведения (ЭП) для материального слоя в виде произведения приращения удельной свободной энергии и толщины слоя. В данной работе, для случая сдвигового воздействия на АС, рассматривается зависимость ЭП от толщины слоя в зоне обрыва связей АС с сопрягаемыми телами при упругом деформировании. Показано, что, рассматривая ЭП в качестве критерия разрушения, можно проводить расчеты на прочность тонкого по сравнению с толщинами сопрягаемых тел АС, используя в качестве его толщины фиксированное значение из некоторого диапазона.

Постановка задачи

Рассматривается композитная пластина, состоящая из двух консолей 1 и 2 длиной $\ell + a$, в общем случае с разными толщинами h_1 и h_2 , сопряженными адгезионным слоем 3 толщиной δ_0 по длине ℓ согласно рис. 1. Один торец пластины жестко заделан от перемещений. На противоположных торцах консолей действует горизонтальная распределенная нагрузка постоянной интенсивности с противоположными векторами напряжений $\mathbf{P}$. Вся остальная поверхность пластины свободна от напряжений.

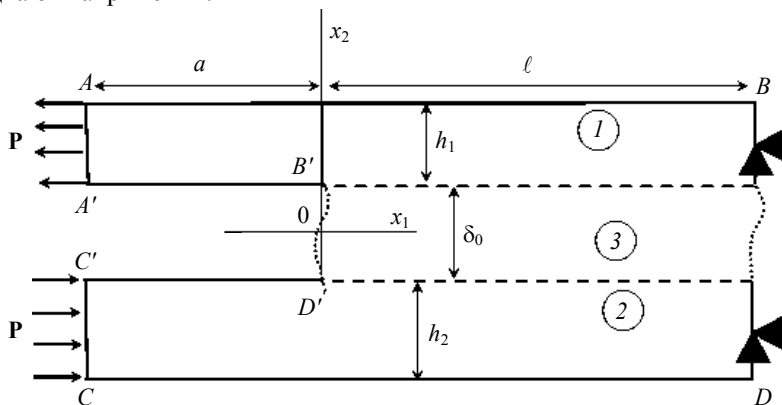


Рис. 1. Схема нагружения композитной пластины
Fig. 1. Schematic diagram of a composite plate loading

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия», развитую в работах [26–29]. В этом случае равновесие тел 1 и 2, согласно [26, 29], запишем в вариационной форме для тела 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl \quad (1)$$

и тела 2:

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + 0.5 \delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (2)$$

где L_1, L_2 – контуры приложения внешней нагрузки в телах 1 и 2; $\cdot$ – скалярное умножение; $\cdot \cdot$ – двойное скалярное умножение; S_1, S_2 – площади поперечных сечений тел 1 и 2; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} + \frac{du_1^-(x_1)}{dx_1} \right), \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} + \frac{du_2^-(x_1)}{dx_1} \right) \right), \quad (4)$$

где u_k^+, u_k^- – соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя; $k = 1, 2$ здесь и далее. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2, а также равенство модулей и противоположность направлений векторов напряжений по границам слоя:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}(x_1, \delta_0/2); \quad \sigma_{2i}^+ \mathbf{e}_i = -\sigma_{2i}(x_1, \delta_0/2) \mathbf{e}_i; \\ \mathbf{u}^- &= \mathbf{u}(x_1, -\delta_0/2); \quad \sigma_{2i}^- \mathbf{e}_i = -\sigma_{2i}(x_1, \delta_0/2) \mathbf{e}_i; \quad x_1 \in [0; \ell]. \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_{2i}^+, \sigma_{2i}^-$ – граничные напряжения слоя; $\mathbf{e}_i, i = 1, 2$, – орты осей координат.

Уравнения (1) и (2) замкнем определяющими соотношениями:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1 + \nu_k} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad (6)$$

где E_k, ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона k -го тела; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемное расширение; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right). \quad (7)$$

Таким образом, решение системы (1) – (7) сводится к определению поля перемещений $u(x_1, x_2)$ в телах 1 и 2 (см. рис. 1) при заданных граничных условиях:

$$\text{на участках } AB, CD, A'B', C'D': \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0; \quad (8)$$

$$\text{на участке } AA': \sigma_{11} = P; \sigma_{12} = 0; \quad (9)$$

$$\text{на участке } CC': \sigma_{11} = -P; \sigma_{12} = 0; \quad (10)$$

$$\text{на участке } BD: u_1 = u_2 = 0. \quad (11)$$

Постановка задачи (1) – (11) не содержит угловых точек в зоне обрыва связей консолей с АС в силу рассмотрения средних по толщине слоя характеристик НДС, и задача может быть решена при ограниченных значениях напряжений.

Постановка задачи с ограничениями

Для упрощения задачи и получения аналитического решения принимаем, что поле перемещений в телах 1 и 2, с учетом условия (5), определено следующим образом:

$$u_1^{(1)}(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi_1(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad u_2^{(1)}(x_1, x_2) = u_2^+(x_1); \quad (12)$$

$$u_1^{(2)}(x_1, x_2) = u_1^-(x_1) - \varphi_2(x_1)(x_2 + \delta_0/2), \quad u_2^{(2)}(x_1) = u_2^-(x_1). \quad (13)$$

Входящие в представления (12) и (13) параметры φ_k имеют геометрический смысл малых углов поворота материальных нормалей к плоскостям $x_2 = \pm \delta_0/2$ в телах 1 и 2. Согласно распределению (12), (13), отличные от нуля деформации в теле 1 будут определяться в виде

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi_1'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{21}^{(1)} = 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi_1(x_1) \right), \quad (14)$$

а в теле 2 –

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{du_1^-(x_1)}{dx_1} - \varphi_2'(x_1)(x_2 + \delta_0/2), \quad \varepsilon_{12}^{(2)} = \varepsilon_{21}^{(2)} = 0.5 \left(\frac{du_2^-(x_1)}{dx_1} - \varphi_2(x_1) \right). \quad (15)$$

Выражения (14), (15), как и теория Тимошенко [20], учитывают сдвиговые деформации и повороты нормалей в телах 1 и 2.

Условие (11), с учетом (12), (13), приводит к следующим ограничениям на компоненты векторов перемещений границ слоя и функций φ_1 и φ_2 :

$$u_k^\pm(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, \quad \varphi_k(x_1)|_{x_1=\ell} = 0. \quad (16)$$

Из (1) и (2), с учетом представлений полей деформаций (14), (15), приходим к системе дифференциальных уравнений для двух тел на участке $x_1 \in [-a; 0]$, где их взаимодействие отсутствует:

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} = 0; \\ \frac{dM_{11}^{(2)}}{dx_1} - Q_{12}^{(2)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(2)}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}^{(2)}}{dx_1} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Взаимодействие тел, связанных слоем на участке $x_1 \in (0; \ell]$, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21}; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; \\ \frac{dM_{11}^{(2)}}{dx_1} - Q_{12}^{(2)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{21}; & \frac{dQ_{12}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{22}. \end{cases} \quad (18)$$

Условия сопряжения уравнений (17), (18) при $x_1 = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} u_k^\pm, \Phi_k|_{x_1=0} &= u_k^\pm, \Phi_k|_{x_1=+0}; \\ Q_{1k}^{(1)}|_{x_1=0} &= Q_{1k}^{(1)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{1k}|_{x_1=+0}; \\ M_{11}^{(k)}|_{x_1=0} &= M_{11}^{(k)}|_{x_1=+0}; \\ Q_{1k}^{(2)}|_{x_1=0} &= Q_{1k}^{(2)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{1k}|_{x_1=+0}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $Q_{1k}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{1k}^{(1)} dx_2$, $Q_{1k}^{(2)}(x_1) = \int_{-h_2-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \sigma_{1k}^{(2)} dx_2$ – обобщенные силы;
 $M_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}^{(1)} (x_2 - \delta_0/2) dx_2$, $M_{11}^{(2)}(x_1) = \int_{-h_2-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \sigma_{11}^{(2)} (x_2 + \delta_0/2) dx_2$ – обобщенные моменты.

Исходя из определяющих соотношений (6), (7), выражений деформаций (14), (15), а также представления обобщенных сил и моментов, условия равновесия (17), (18) сводятся к замкнутым системам дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных функций: $u_k^\pm, \Phi_k$ с условиями сопряжения (19).

Построение частных решений

Рассмотрим решение поставленной задачи в случае плоской деформации для консолей с одинаковыми механическими свойствами $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$ и высотами $h_1 = h_2$. В этом случае на неизвестные функции наложим связи $u_1^+ = -u_1^-$, $\Phi_1 = -\Phi_2$, $u_2^+ = u_2^-$. Для решения задачи достаточно рассмотреть только систему уравнений (17), (18) для тела 1 на участке $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; \quad \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0; \quad \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} = 0 \quad (20)$$

и на участке $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; \quad \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21}; \quad \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22} \quad (21)$$

при следующих выражениях обобщенных сил и обобщенного момента:

$$Q_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2 = Dh \left(u_1^{+'} - \frac{h}{2} \varphi_1' \right); \quad (22)$$

$$Q_{12}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2 = Lh \left(u_2^{+'} - \varphi_1 \right); \quad (23)$$

$$M_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} (x_2 - \delta_0/2) dx_2 = Dh^2 \left(\frac{u_1^{+'}}{2} - \frac{h}{3} \varphi_1' \right), \quad (24)$$

где $D = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$; $L = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$.

Принимая закон распределения перемещений границ слоя из (12), (13), получим выражения средних напряжений в виде

$$\bar{\sigma}_{11} = 0; \quad (25)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = 0; \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = L_1 \left(\frac{2u_1^{+}}{\delta_0} + u_2^{+'} \right), \quad (27)$$

где $L_1 = \frac{E_3}{2(1+\nu_3)}$.

Рассмотрим правую часть уравнения (1). Работа внешних напряжений с учетом (8), (9) и (12) равна

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl &= - \int_{h+\delta_0/2}^{\delta_0/2} \left(P \delta \left(u_1^{+}(x_1) - \varphi_1(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right) + 0 \delta u_2^{+} \right) (-dx_2) \Big|_{x_1=-a} = \\ &= -Ph \delta u_1^{+} \Big|_{x_1=-a} + \frac{Ph^2}{2} \delta \varphi_1 \Big|_{x_1=-a} + 0 \delta u_2^{+} \Big|_{x_1=-a}. \end{aligned} \quad (28)$$

Граничные условия для системы (20), (21), с учетом (28) и (16), запишем в виде

$$Q_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} = Ph; \quad (29)$$

$$Q_{12}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} = 0; \quad (30)$$

$$M_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} = \frac{Ph^2}{2}; \quad (31)$$

$$u_1^{+} \Big|_{x_1=\ell} = 0; \quad (32)$$

$$u_2^{+} \Big|_{x_1=\ell} = 0; \quad (33)$$

$$\varphi_1 \Big|_{x_1=\ell} = 0. \quad (34)$$

Из (20), с учетом (29) – (31), находим распределение перемещений и угла поворота на участке $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\varphi_1 = \frac{6(C_1 - C_2)}{h}; \quad (35)$$

$$u_1^+ = 4C_1 - 3C_2 + \frac{P}{D} x_1; \quad (36)$$

$$u_2^+ = \frac{6(C_1 - C_2)}{h} x_1 + C_3, \quad (37)$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные.

Из (21), с учетом (32) – (34), находим распределение перемещений и угла поворота на участке $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\varphi_1 = C_4 e^{\lambda_1 x_1} + C_5 e^{\lambda_2 x_1} - C_1 \left(\frac{2M_1 + m_4}{k^2} + M_1 (x_1^2 - \ell^2) \right) + C_6 M_1 (\ell - x_1); \quad (38)$$

$$\begin{aligned} u_1^+ = & \frac{2hs}{3} \left(C_4 \left(e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 \ell} \left(1 + \frac{M_1}{m_5} (x_1^2 - \ell^2) \right) \right) + \right. \\ & + C_5 \left(e^{\lambda_2 x_1} - e^{\lambda_2 \ell} \left(1 + \frac{M_1}{m_5} (x_1^2 - \ell^2) \right) \right) + C_6 M_1 (\ell - x_1) \Big) + \\ & + \frac{C_4 e^{\lambda_1 \ell} + C_5 e^{\lambda_2 \ell}}{s_1 m_5} (x_1^2 - \ell^2) + \frac{C_6}{s_1} (x_1 - \ell); \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} u_2^+ = & \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta_0 L_1}{2hL}} - \frac{1}{\left(\frac{L}{L_1} + \frac{\delta_0}{2h} \right)} \frac{2s}{3} \right) \times \\ & \times \left(\frac{C_4}{\lambda_1} \left(e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 \ell} \right) + \frac{C_5}{\lambda_2} \left(e^{\lambda_2 x_1} - e^{\lambda_2 \ell} \right) - C_4 e^{\lambda_1 \ell} \left(x_1 - \ell + \frac{M_1}{m_5} \left(\frac{x_1^3}{3} - \ell^2 x_1 + \frac{2}{3} \ell^3 \right) \right) \right) - \\ & - C_5 e^{\lambda_2 \ell} \left(x_1 - \ell + \frac{M_1}{m_5} \left(\frac{x_1^3}{3} - \ell^2 x_1 + \frac{2}{3} \ell^3 \right) \right) + C_6 M_1 \left(\ell x_1 - \frac{x_1^2}{2} - \frac{\ell^2}{2} \right) - \\ & - \frac{C_4 e^{\lambda_1 \ell} + C_5 e^{\lambda_2 \ell}}{m_5 \left(Lh + \frac{\delta_0 L_1}{2} \right)} \left(\frac{L_1}{s_1} \left(\frac{x_1^3}{3} - \ell^2 x_1 + \frac{2}{3} \ell^3 \right) - x_1 + \ell \right) + \frac{C_6 L_1}{s_1 \left(Lh + \frac{\delta_0 L_1}{2} \right)} \left(\ell x_1 - \frac{x_1^2}{2} - \frac{\ell^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

где $s = \left(1 + \frac{3\delta_0}{4h} \right) / \left(1 + \frac{\delta_0}{h} \right)$; $s_1 = \frac{Dh^2}{2} \left(1 + \frac{\delta_0}{h} \right)$; $k^2 = \frac{L_1}{m} \left(\frac{2hsm_1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{\delta_0 L_1}{2hL}} \right)$;

$$M_1 = \frac{m_2}{k^2}; \quad m = h^2 D \left(\frac{2s}{3} - \frac{1}{2} \right); \quad m_1 = \frac{2}{\delta_0} - \frac{1}{h \left(\frac{L}{L_1} + \frac{\delta_0}{2h} \right)}; \quad m_2 = \frac{m_1 L_1}{ms_1};$$

$$m_3 = \frac{L_1}{m \left(Lh + \frac{\delta_0 L_1}{2} \right)} - \frac{2Dh}{s_1 m} - m_2 \ell^2; \quad m_4 = \frac{L_1}{m \left(Lh + \frac{\delta_0 L_1}{2} \right)} - \frac{2Dh}{s_1 m}; \quad m_5 = \frac{2M_1 + m_4}{k^2}.$$

Решение (38) – (40) получено при следующем ограничении: $\left(\frac{2s}{3} - \frac{1}{2}\right) > 0$.

В этом случае $k^2 > 0$ и $\lambda_1 = -k$, $\lambda_2 = k$.

Для выражений (35) – (37), (38) – (40), с учетом шести условий сопряжения (19) для консоли I , определим шесть постоянных интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ из решения системы линейных уравнений.

Рассмотрим упрощение постановки задачи в виде (20), (21), положив в аппроксимации поля перемещений (12), (13) $\varphi_1 = -\varphi_2 = 0$; $u_2^+ = u_2^- = 0$. В этом случае система уравнений (20), (21) сводится к одному уравнению на участке $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0 \quad (41)$$

и на участке $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21} \quad (42)$$

с граничными условиями

$$Q_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} = Ph; \quad (43)$$

$$u_1^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0 \quad (44)$$

и условиями сопряжения участков консоли

$$\begin{aligned} u_1^+ \Big|_{x_1=0} &= u_1^+ \Big|_{x_1=+0}; \\ Q_{1k}^{(1)} \Big|_{x_1=0} &= Q_{1k}^{(1)} \Big|_{x_1=+0}. \end{aligned} \quad (45)$$

Решение (41) – (45) на участке консоли, сопряженном со слоем, получено в виде

$$u_1^+ = \frac{Pe^{q_2 x_1}}{q_2 D (1 + e^{(q_2 - q_1)\ell})} \left(1 - e^{(q_2 - q_1)(\ell - x_1)}\right), \quad (46)$$

где $q_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2L_1}{hD\delta_0}}$.

Результаты решений

Проведем сравнение полученных аналитических решений в рамках упрощающих гипотез и численного решения задачи (1) – (11), полученного методом конечных элементов (МКЭ) с квадратичным законом распределения поля перемещений на элементе.

В качестве исследуемого композита рассмотрим образец с механическими характеристиками консолей, соответствующими сплаву Д16, имеющие модуль упругости $E_1 = E_2 = 7.3 \cdot 10^{10}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Механические свойства АС выбираем соответствующие эпоксидной смоле: $E_3 = 3.1 \cdot 10^9$ Па, $\nu_3 = 0.2$. Геометрические характеристики выбираем следующими: $h_1 = h_2 = 0.03$ м; $\ell = 0.1$ м; $a = 0.05$ м; $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м. Распределенная внешняя нагрузка бралась единичной $P = 1$ Па.

На рис. 2 построены графики горизонтальных перемещений верхней границы АС. График 1 построен для случая решения задачи МКЭ, график 2 – по формуле (39), а график 3 соответствует решению (46). Для конечноэлементного решения (КЭР) размер грани конечного элемента (КЭ) в зоне обрыва связей с АС выбирался равным толщине слоя. Решения отнесены к модулю значения перемещения на торце слоя в КЭР. Координата x_1 отнесена к толщине слоя δ_0 .

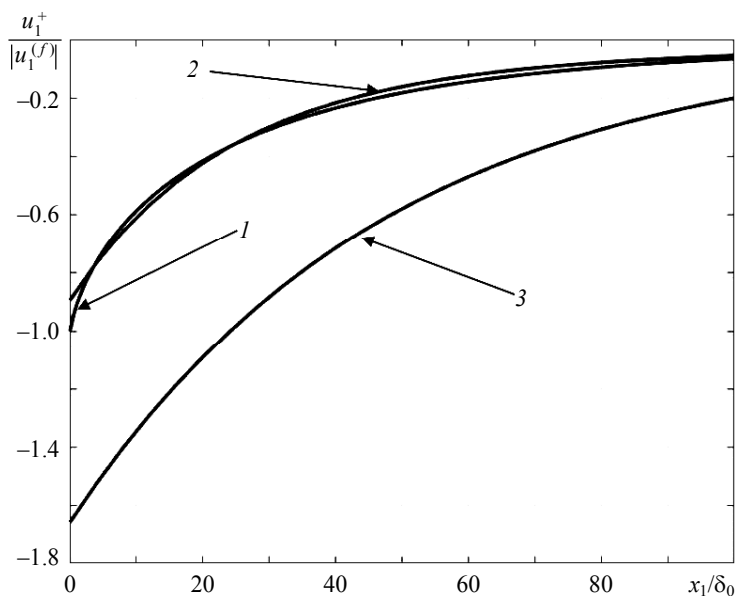


Рис. 2. Горизонтальные перемещения границы слоя
Fig. 2. Horizontal displacements of the layer boundary

Как видно из представленных графиков, решения 1 и 2 практически совпадают, что указывает на важность учета сдвиговых напряжений в консолях.

На рис. 3 рассмотрены вертикальные перемещения слоя при КЭР и при решении в виде (40). Решения отнесены к модулю значения перемещения на торце слоя в КЭ, а координата x_1 отнесена к толщине слоя δ_0 . Как и в случае с горизонтальными перемещениями, имеет место близость решений. Данное обстоятельство позволяет проводить анализ НДС слоя при малых относительно высоты консоли толщинах слоя в рамках решений (39), (40). Прямое КЭР задачи (1) – (11) в этом случае сопряжено с большим объемом вычислений при требовании соответствия размера грани КЭ толщине слоя.

Следуя работе [29], введем в рассмотрение ЭП:

$$2\gamma = \delta_0 \psi,$$

где ψ – приращение удельной свободной (упругой) энергии. Для рассматриваемого случая распределения средних по слою напряжений (27) – (29) имеем

$\psi = 0.5L_1 \left(\frac{2u_1^+}{\delta_0} + u_2^{+'} \right)^2$ для решений (39) – (40) и $\psi = 0.5L_1 \left(\frac{2u_1^+}{\delta_0} \right)^2$ – для упрощённого решения (46).

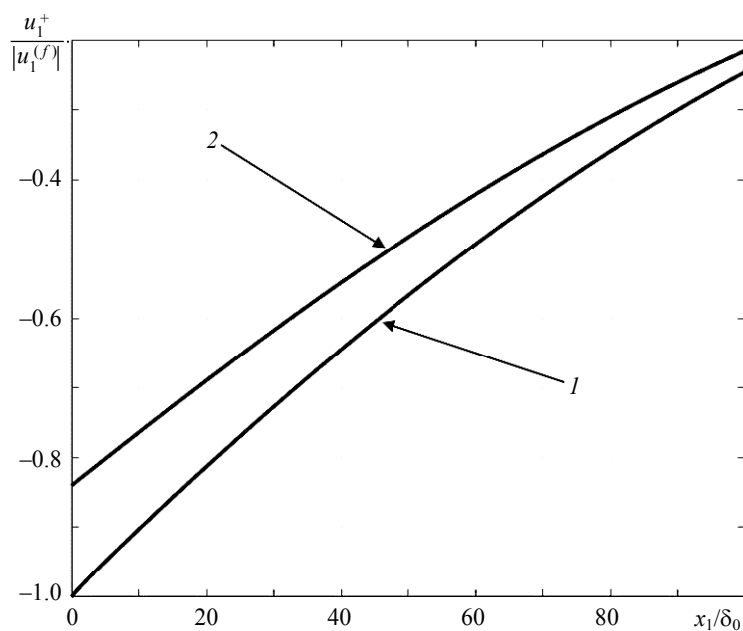


Рис. 3. Вертикальные перемещения границы слоя
Fig. 3. Vertical displacements of the layer boundary

На рис. 4 построена зависимость относительного ЭП γ^* на торце слоя от десятичного логарифма отношения δ_0/h для рассматриваемой нагрузки. График 1 соответствует решению (39), (40), а график 2 – решению (46). Значения ЭП отнесены к значению ЭП для упрощенного решения.

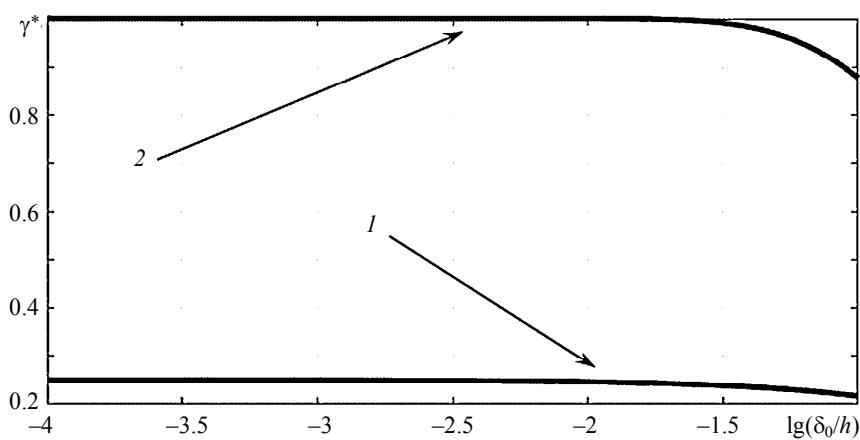


Рис. 4. ЭП на торце слоя
Fig. 4. Energy product (EP) at the end of the layer

Из графиков видно, что при отношении $\delta_0/h \leq 10^{-2}$ значение ЭП практически не меняется. Следовательно, результаты расчетов ЭП при толщинах слоя $\delta_0 \leq 10^{-2}h$ будут приводить к одним значениям. Однако значения ЭП при использовании упрощенной схемы будут существенно превышать значения, вычисленные с учетом сдвиговых деформаций в консолях.

Заключение

На основе вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, сопряженных тонким слоем, получены упрощенные постановки задач в дифференциальном виде. Из сравнения упрощенных аналитических решений с конечноэлементным решением показано, что учет сдвиговых напряжений в сопрягаемых телах вносит существенный вклад в формирование НДС слоя при рассматриваемом нагружении. При этом распределения полей перемещений границы АС, в рамках КЭ решения и упрощенного аналитического решения на основе гипотез типа Тимошенко, оказались близки друг к другу. Из найденных аналитических распределений полей перемещений границы АС получены зависимости ЭП на торце слоя от отношений толщины слоя к толщине консоли. Таким образом, рассматривая критическое значение ЭП в качестве критерия разрушения тонкого АС, можно в определенном диапазоне проводить расчеты без фиксации значения толщины АС. В этом случае методика расчета критического состояния АС может быть следующей. В образце с заданными геометрическими и механическими характеристиками при $\delta_0^* = \delta_0/h \leq 10^{-2}$ из эксперимента определяется внешняя критическая нагрузка. По данной нагрузке находится критическое значение ЭП. Для образцов, выбирая любой относительный параметр из диапазона $\delta_0^* \leq \delta_0$, при данном виде нагружения можно найти критическую внешнюю нагрузку, сопоставляя значение ЭП на торце слоя с критическим. Вопрос об универсальности предлагаемого критерия может быть решен экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. Allen H.G., Feng Z. Classification of Structural Sandwich Panel Behaviour // *Mechanics of Sandwich Structures*. Dordrecht: Springer, 1998. P. 1–12.
4. Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tsuchkova N. Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions // *Acta Mechanica*. 2016. V. 227. P. 127–138. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1422-3>.
5. Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2016. V. 58. P. 172–186. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.01.015>.
6. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Composite Structures*. 2016. V. 137. P. 140–147.
7. Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams // *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2017. V. 61. P. 393–407. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.10.012>.

8. Гольдиштейн Р.В., Осипенко Н.М. Отслоение покрытий под действием термоупругих напряжений (Балочное приближение) // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Т. 54. №4. С. 66–83.
9. Sheinman I., Kardomateas G. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates // International Journal of Solids and Structures. 1997. V. 34. No. 4. P. 451–459. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(96\)00018-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(96)00018-2).
10. Storakers B., Andersson B. Nonlinear plate theory applied to delamination in composites // Journal of Mechanics and Physics Solids. 1988. V. 36. No. 6. P. 689–718. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(88\)90004-X](https://doi.org/10.1016/0022-5096(88)90004-X).
11. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины эквивалентной слою // Изв. РАН. МТТ. 2015. Т. 50. № 1. С. 75–95.
12. Evans A.G., Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling on compressed films // International Journal of Solids and Structures. 1984. V. 20. No. 5. P. 455–466. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90012-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90012-X).
13. Астапов И.С., Астапов Н.С., Корнев В.М. Модель расслоения композита при поперечном сдвиге // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21. № 2. С. 149–161.
14. Balcan A. Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance // Journal of Materials Science. 2004. V. 39. No. 15. P. 4729–4797. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:JMSC.0000035317.87118.ab>.
15. Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media // Engineering Fracture Mechanics. 1987. V. 28. No. 1. P. 13–20. DOI: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90115-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90115-9).
16. Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Поверхностная энергия и энергия адгезии упругих тел // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 76–91.
17. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // International Journal of Fracture. 1990. V. 43. No. 1. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00018123>.
18. Mantari J.L., Yarasca J. A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams // Composite Structures. 2015. V. 134. P. 593–601. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.073>.
19. Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory // Engineering Fracture Mechanics. 2017. V. 169. P. 309–320. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1406-6>.
20. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
21. Осипенко М.А. Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами переменной толщины // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 90–94.
22. Fang X., Charalambides P.G. The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading // Engineering Fracture Mechanics. 2015. V. 149. P. 1–17. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.09.039>.
23. Fang X., Charalambides P.G. A J-integral approach in characterizing the mechanics of a horizontal crack embedded in a cantilever beam under an end transverse force // Engineering Fracture Mechanics. 2017. V. 169. P. 35–53. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.11.010>.
24. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Изгиб двуслойной балки с нежестким контактом между слоями // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 1. С. 112–21.
25. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Обобщенная модель Тимошенко-Рейсснера для многослойной пластины // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 22–35.
26. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 2. С. 34–44.
27. Глаголев В.В., Маркин А.А., Пашинов С.В. Биметаллическая пластина в однородном температурном поле // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 3. С. 331–343.

28. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах когезионного разрушения композита с адгезионным слоем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 45–59.
29. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. 2019. V. 158. P. 141–149. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>.

Статья поступила 19.06.2019 г.

Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Inchenko O.V., Markin A.A. (2020) ON ONE APPROACH TO THE ASSESSING OF THE ADHESIVE LAYER STRENGTH IN A LAYERED COMPOSITE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 63–77

DOI 10.17223/19988621/64/5

Keywords: adhesive layer, composite, variational equation, finite element method, energy product.

The problem of a stress-strain state of a composite with undefined geometry of the face break of the adhesive layer is formulated and solved. A concept of the interactive layer is used which implies uniformity of the stress-strain state over adhesive layer thickness. In accordance with Timoshenko's hypotheses for displacements of the bearing layers, the problem is reduced to a system of linear differential equations. The reliability of the obtained analytical solution is confirmed by the numerical calculation with no additional hypotheses introduced. The product of the specific free energy by layer thickness, referred to as an energy product, is revealed to be applicable as a criterion of the adhesive layer destruction. On the basis of the analytical solution, a threshold value of the adhesive layer thickness is determined. A decrease in the latter does not affect the energy product value. Thus, employing the energy product as a criterion of destruction, calculations can be performed at any value of the adhesive layer thickness arbitrarily chosen in the range of the energy product suitability.

Financial support. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research and government of the Tula region, project No. 19–41–710001 p_a, as well as is supported by the Russian Foundation for Basic Research project No. 18–31–20053.

Viktoriya E. BOGACHEVA (Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

Vadim V. GLAGOLEV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Leonid V. GLAGOLEV (Candidate of Physics and Mathematics, JSC «KBP», Tula, Russian Federation). E-mail: len4ic92@gmail.com

Oksana V. INCHENKO (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: inchenko_ov@mail.ru

Aleksey A. MARKIN (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. (1980) *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy* [Mechanics of multilayer constructs]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Cherepanov G.P. (1974) *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow: Nauka.

3. Allen H.G., Feng Z. (1998) Classification of structural sandwich panel behaviour. *Mechanics of Sandwich Structures*. Dordrecht: Springer. pp. 1–12. DOI: 10.1007/978-94-015-9091-4_1.
4. Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. (2016) Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions. *Acta Mechanica*. 227. pp. 127–138. DOI: 10.1007/s00707-015-1422-3.
5. Mattei O., Bardella L. (2016) A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 58. pp. 172–186. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.01.015.
6. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. (2016) Delaminations growth in compression after impact test simulations: influence of cohesive elements parameters on numerical results. *Composite Structures*. 137. pp. 140–147. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.11.018.
7. Panteghini A., Bardella L. (2017) Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 61. pp. 393–407. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.10.012.
8. Gol'dshteyn R.V., Osipenko N.M. (2007) Otsloenie pokrytiy pod deystviem termouprugikh napryazheniy (Balochnoe priblizhenie) [Delamination of coatings under the action of thermoelastic stresses (beam approximation)]. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaya seriya – Vestnik of Samara University. Natural Science Series* 54(4). pp. 66–83.
9. Sheinman I., Kardomateas G. (1997) Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*. 34(4). pp. 451–459. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00018-2.
10. Storakers B., Andersson B. (1988) Nonlinear plate theory applied to delamination in composites. *Journal of Mechanics and Physics solids*. 36(6). pp. 689–718. DOI: 10.1016/0022-5096(88)90004-X.
11. Ustinov K.B. (2015) On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer. *Mechanics of Solids*. 50(1). pp. 62–80. DOI: 10.3103/S0025654415010070.
12. Evams A.G., Hutchinson J.W. (1984) On the mechanics of delamination and spelling on compressed films. *International Journal of Solids and Structures*. 20(5). pp. 455–466. DOI: 10.1016/0020-7683(84)90012-X.
13. Astapov I.S., Astapov N.S., Kornev V.M. (2015) Model' rassloeniya kompozita pri poperechnom sdvige [Model of composite exfoliation with transverse shear]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 21(2) pp. 149–161.
14. Baldan A. (2004) Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance. *Journal of Materials Science*. 39(15). pp. 4729–4797. DOI: 10.1023/B:JMSC.0000035317.87118.ab.
15. Sun C.T., Jih C.J. (1987) On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media. *Engineering Fracture Mechanics*. 28(1). pp. 13–20. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90115-9.
16. Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S. (2017) Surface energy and adhesion energy of elastic bodies. *Mechanics of Solids*. 52(1). pp. 62–74. DOI: 10.3103/S0025654417010083.
17. Suo Z., Hutchinson J.W. (1990) Interface crack between two elastic layers. *International Journal of Fracture*. 43(1). pp. 1–18. DOI: 10.1007/BF00018123.
18. Mantari J.L., Yarasca J. (2015) A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams. *Composite Structures*. 134. pp. 593–601. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.073.
19. Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. (2017) Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory. *Engineering Fracture Mechanics*. 169. pp. 309–320. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2016.10.013.
20. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. (1963) *Plastiny i obolochki* [Plates and shells]. Moscow: Fizmatgiz.
21. Osipenko M.A. Kontaktnaya zadacha ob izgibe dvukhlistovoy ressoy s listami peremennoy tolshchiny [The contact problem for bending of a two-leaf spring with variable thicknesses of

- leaves]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(27). pp. 90–94.
22. Fang X., Charalambides P.G. (2015) The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 149. pp. 1–17. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.09.039.
 23. Fang X., Charalambides P.G.A (2017) J-integral approach in characterizing the mechanics of a horizontal crack embedded in a cantilever beam under an end transverse force. *Engineering Fracture Mechanics*. 169. pp. 35–53. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.11.010.
 24. Morozov N.F., Tovstik P.Y. (2011) Bending of a two-layer beam with non-rigid contact between the layers. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 75(1). pp. 77–84. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2011.04.012.
 25. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. (2016) Generalized Timoshenko-Reissner model for a multilayer plate. *Mechanics of Solids*. 51(5). pp. 527–537. DOI: 10.3103/S0025654416050034.
 26. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. (2016) Separation process modeling of composite with adhesive layer. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 34–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.03.
 27. Glagolev V.V., Markin A.A., Pashinov S.V. (2017) Bimetallicheskaya plastina v odnorodnom temperaturnom pole [Bimetallic plate in a uniform temperature field]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 23(3). pp. 331–343. DOI: 10.25590/mkmmk.ras.2017.23.03.331_343.03.
 28. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. (2017) Modelling the generation of new material surfaces in a composite with an adhesion layer under cohesive destruction. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 45–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03.
 29. Glagolev V.V., Markin A.A. (2019) Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*. 158. pp. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002.

Received: June 16, 2019