

МАТЕМАТИКА

УДК 547.54

И.А. Александров, Л.С. Копанева

ЛЕВНЕРОВСКИЕ СЕМЕЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ
НА ОБЛАСТИ С СИММЕТРИЕЙ ПЕРЕНОСА

Дано интегральное представление семейства отображений верхней полуплоскости на области с симметрией переноса и указаны семейства областей Левнера, сходящиеся к рассмотренным

Дано интегральное представление семейства отображений верхней полуплоскости на области с симметрией переноса и указаны семейства областей Левнера, сходящиеся к рассмотренным областям.

В [1] показано, что конформное однолистное отображение $\omega: \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$ верхней полуплоскости Π^+ комплексной z -плоскости на область D_τ , представляющую собой верхнюю полуплоскость с исключенными идущими из бесконечности конгруэнтными попарно непесекающимися простыми дугами переменной длины и с симметрией переноса на 2π , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \operatorname{ctg} \frac{\lambda(\tau) - \omega}{2}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau^0 < \infty \quad (1)$$

с начальным условием $\omega(0, z) = z, z \in \Pi^+$. Здесь $\lambda(\tau)$ – прообраз конца разреза, определенным образом параметризованного; $\operatorname{Im} \lambda(\tau) = 0$ и $\omega(\tau, z + 2\pi) = \omega(\tau, z) + 2\pi$.

Следующую теорему можно рассматривать как обратную к указанному предложению. Она сформулирована в [2] (теорема 13), но не была сопровождена доказательством.

Теорема 1. Пусть отображение $\lambda: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \lambda = \lambda(\tau)$, непрерывно. Тогда $\omega(\tau, z)$, где $\omega(\tau, z)$ есть решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием $\omega(0, z) = z, z = x + iy \in \Pi^+$, конформно и однолистно в Π^+ и, кроме того, таковым же является отображение $f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\omega(\tau, z) - iz)$.

Доказательство. Проведем в уравнении (1) замены $\zeta = e^{i\omega}, \mu(\tau) = e^{i\lambda(\tau)}$. Поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\lambda(\tau) - \omega}{2} = i \frac{e^{i\lambda(\tau)} + e^{i\omega}}{e^{i\lambda(\tau)} - e^{i\omega}} = i \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta}$, то уравнение (1) примет вид

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta}, \quad (2)$$

где $|\mu(\tau)| = 1, 0 \leq \tau < \infty$. Начальное условие запишется в виде $\zeta(0, z) = e^{iz}, z \in \Pi^+$, показывающем, что точка $\zeta(0, z) = e^{iy} e^{ix}$ принадлежит единичному кругу. В [3] (теорема 5) к исследованию разрешимости этой задачи Коши применен метод последовательных приближений, аналогичный методу Пикара, и установлено существование на $0 < \tau < \infty$ единственного решения задачи. Оно голоморфно в Π^+ , однолистно отображает каждую вертикальную полосу шириной 2π , лежащую в Π^+ , в единичный круг, а семейство функций $e^\tau \zeta(\tau, e^{iz})$ рав-

номерно сходится внутри Π^+ к однолистной относительно e^{iz} функции.

Отображение $\omega(\tau, z) = -i \ln \zeta(\tau, e^{iz})$ однолистно относительно $e^{iz}, z \in \Pi^+$, и обладает симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π : $\omega(\tau, z + 2\pi) = \omega(\tau, z) + 2\pi$.

Пусть $f(\tau, z) = \omega(\tau, z) - i\tau$. Переходя в формуле $f(\tau, z) = -i \ln(e^\tau \zeta(\tau, e^{iz}))$ к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, получим $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau, z) = f(z) = -i \ln q(e^{iz})$, где функция $q(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \zeta(\tau, \omega), |\omega| < 1$, однолисна в единичном круге. Теорема доказана.

Решение уравнения (2) при рассматриваемом начальном условии удовлетворяет условию (см., например, [4]) $\lim_{e^{iz} \rightarrow 0} e^{-iz} \zeta(\tau, e^{iz}) = e^{-\tau}, z = x + iy$, в силу которого

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \ln(e^{-iz} e^{i\omega}) = -\tau \text{ или, что то же самое, } \lim_{y \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0.$$

Теперь легко находим, что $\lim_{y \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0$.

Множество функций $f(z)$, полученных согласно теореме 1, плотно в классе $X_{2\pi}$, т.е. в классе всех голоморфных однолистных в верхней полуплоскости отображений $f: \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих условиям $f(\Pi^+)$, есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости, $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, и $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) при $\lambda(\tau) = \sigma\tau$. С помощью замены $\sigma\tau - \omega = 2u$ оно сводится к уравнению $\frac{du}{d\tau} = \frac{\sigma - \operatorname{ctg} u}{2}, u(0) = -\frac{z}{2}$. Решение этого дифференциального уравнения неявно определяется равенством $\sigma u + \ln(\sigma \sin u - \cos u) + \frac{\sigma z}{2} - \ln\left(-\sin \frac{z}{2} - \left(-\sigma \sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2}\right)\right) = \frac{(1 + \sigma^2)\tau}{2}$. Выполняя предельный переход при $\tau \rightarrow \infty$, получим отображение $f(z) = \frac{\sigma z}{\sigma + i} - \frac{1}{\sigma + i} \ln(1 + \sin z) + \frac{2}{\sigma + i} \ln \frac{1 - i\sigma}{2}$. При $\sigma = 1$ отсюда получаем отображение $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} [z - \ln(1 + \sin z)] - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\ln 2 + i \frac{\pi}{2}\right)$ верхней полуплоскости Π^+ на плоскость с разрезами по параллельным лучам под углом $-(\pi/4)$ к вещественной оси (рис. 1).

Применим теорему 1 к задаче об интегральном представлении подклассов класса $X_{2\pi}$. С этой целью проинтегрируем уравнение (1) для некоторого семейства функций $\lambda(\tau)$.

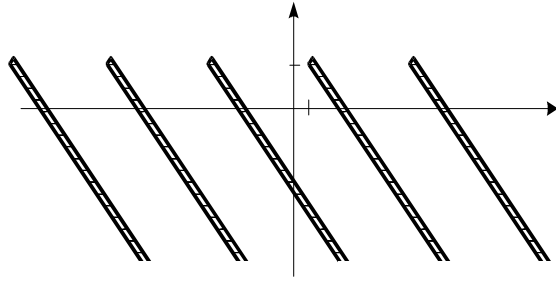


Рис. 1

В уравнении (1) управляющую функцию $\lambda(\tau)$ зададим в виде $\lambda(\tau) = -\delta\tau + (\alpha + \beta)\chi(\tau)$, $0 \leq \tau < \infty$, где δ – вещественная постоянная, α и β – положительные числа, $\chi(\tau)$ – вещественная функция, обращающаяся в нуль при $\tau = 0$, которая будет выбрана далее. Перейдем в уравнении (1) от переменной ω к w по формуле $\omega = -\delta\tau + \beta\chi(\tau) + w$. Получим уравнение $\frac{dw}{d\tau} - \delta + \beta\chi' = \operatorname{ctg} \frac{\alpha\chi - w}{2}$, $w(0) = z$. Так как $\operatorname{ctg} \frac{\alpha\chi - w}{2} = i \frac{e^{i\alpha\chi} - e^{iw}}{e^{i\alpha\chi} + e^{iw}}$, то уравнение можно представить в виде

$$\frac{dw}{d\tau} = (\delta - \beta\chi') \frac{e^{i\varphi} - e^{iw}}{e^{i\alpha\chi} - e^{iw}}, \quad (3)$$

где $e^{i\varphi} = \frac{\delta - \beta\chi' + i}{\delta - \beta\chi' - i} e^{i\alpha\chi}$, $\chi' = \frac{d\chi}{d\tau}$.

Подчиним функцию $\chi(\tau)$ условию: $e^{i\varphi} = \gamma = \operatorname{const}$.

Найдем $\chi(\tau)$, $\chi(0) = 0$, проинтегрировав уравнение $\frac{\beta\chi' - \delta - i}{\beta\chi' - \delta + i} e^{i\alpha\chi} = \gamma$. Сделаем в нем замену $e^{i\alpha\chi} = \eta$, $\eta(0) = 1$.

Получим $\frac{\eta' + 2\bar{m}\eta}{\eta' - 2m\eta} = \gamma$, $\eta' = \frac{d\eta}{d\tau}$, где $m = s(1 + i\delta)$, $s = \frac{\alpha}{2\beta}$.

Уравнение преобразуется к виду $\frac{\eta - \gamma}{\eta(\eta + \varepsilon\gamma)} d\eta = -2\bar{m}d\tau$,

$\eta(0) = 1$, где $\varepsilon = \frac{m}{\bar{m}} = \frac{1 + i\delta}{1 - i\delta}$. Исключим из рассмотрения случай, когда $\varepsilon\gamma = -1$.

В результате интегрирования уравнения имеем

$$(1 + \bar{\varepsilon})\ln(\eta + \varepsilon\gamma) - \bar{\varepsilon}\ln\eta + 2\bar{m}\tau = (1 + \bar{\varepsilon})\ln(1 + \varepsilon\gamma), \quad \ln 1 = 0. \quad (4)$$

Это уравнение неявно задает функцию $\chi(\tau) = -\frac{i}{\alpha} \ln \eta(\tau)$.

Так как $1 + \bar{\varepsilon} = 1 + \frac{\bar{m}}{m} = \frac{2s}{m} = \frac{2}{1 + i\delta}$, $\bar{\varepsilon} = \frac{1 - i\delta}{1 + i\delta}$, то после умножения левой и правой частей уравнения (4) на $1 + i\delta$ получим формулу $2\ln(\eta + \varepsilon\gamma) - (1 - i\delta)\ln\eta + 2s(1 + \delta^2)\tau = 2\ln(1 + \varepsilon\gamma)$, показывающую, что ее левая часть имеет предел при $\tau \rightarrow \infty$ равный $2\ln(1 + \varepsilon\gamma)$ и что $\eta(\tau) \rightarrow -\varepsilon\gamma$ при $\tau \rightarrow \infty$.

При сделанном выборе функции $\chi(\tau)$ уравнение (3) примет вид $\frac{dw}{d\tau} = -\frac{2\eta i(\gamma - e^{iw})}{(\eta - \gamma)(\eta - e^{iw})}$, $w(0) = z$, поскольку

$\beta\chi' - \delta + i = \frac{2\eta i}{\eta - \gamma}$. Заменяем в нем переменную w на ζ

по формуле $\zeta = e^{iw}$. Получим $\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{2\eta i(\gamma - \zeta)}{(\eta - \gamma)(\eta - \zeta)}$,

$\zeta(0) = e^{iz}$. Перейдем от переменной τ к η , воспользовавшись формулой $d\tau = -\frac{\eta - \gamma}{2\bar{m}\eta(\eta + \varepsilon\gamma)} d\eta$. Получим уравнение

$\frac{d\zeta}{d\eta} = -\frac{\zeta(\gamma - \zeta)}{\bar{m}(\eta + \varepsilon\gamma)(\eta - \zeta)}$, $\zeta|_{\eta=1} = e^{iz}$. Заменяем в нем η на v по формуле $v = 1/(\eta + \varepsilon\gamma)$ и поменяем ролями переменные ζ и v . В результате получим линейное относительно v уравнение

$$\frac{dv}{d\zeta} = -\frac{\bar{m}(\varepsilon\gamma + \zeta)}{(\gamma - \zeta)\zeta} v + \frac{\bar{m}}{\zeta(\gamma - \zeta)}, \quad v|_{\zeta=e^{iz}} = \frac{1}{1 + \varepsilon\gamma}.$$

Решим его. Соответствующее однородное уравнение $\frac{dv}{d\zeta} = -\frac{\bar{m}(\varepsilon\gamma + \zeta)}{(\gamma - \zeta)\zeta} v$ имеет общее решение $v =$

$$= C \frac{(\gamma - \zeta)^{(1+\varepsilon)\bar{m}}}{\zeta^{\varepsilon\bar{m}}} = C \frac{(\gamma - \zeta)^{2s}}{\zeta^m},$$

содержащее произвольную постоянную C . Заменяя ее функцией $C(\zeta)$, получим для этой функции методом вариации уравнение $\frac{(\gamma - \zeta)^{2s}}{\zeta^m} \frac{dC}{d\zeta} = \frac{\bar{m}}{(\gamma - \zeta)\zeta}$. Его общее решение имеет вид

$$C = \bar{m} \int_{e^{iz}}^{\zeta} \frac{u^{m-1}}{e^{iz}(\gamma - u)^{2s+1}} du + D, \quad D = \operatorname{const},$$

а общим решением рассматриваемого неоднородного уравнения будет

$$v = \left[\bar{m} \int_{e^{iz}}^{\zeta} \frac{u^{m-1}}{(\gamma - u)^{2s+1}} du + D \right] \frac{(\gamma - \zeta)^{2s}}{\zeta^m}.$$

Постоянную D находим из условия $v(e^{iz}) = \frac{1}{1 + \varepsilon\gamma}$:

$$D = \frac{e^{imz}}{(1 + \varepsilon\gamma)(\gamma - e^{iz})^{2s}}.$$

Таким образом, для $\omega(\tau, z)$ имеем уравнение

$$\frac{1}{v + \varepsilon\gamma} \frac{\zeta^m}{(\gamma - u)^{2s}} = \bar{m} \int_{e^{iz}}^{\zeta} \frac{u^{m-1}}{(\gamma - u)^{2s+1}} du + \frac{e^{imz}}{(1 + \varepsilon\gamma)(\gamma - e^{iz})^{2s}}, \quad (5)$$

в котором $\zeta = e^{iw}$, $w = \omega + \delta\tau - \beta\chi(\tau)$, $s = \alpha/2\beta$, $m = (1 + i\delta)$, $\varepsilon = (1 + i\delta)/(1 - i\delta)$, $\gamma = e^{i\varphi}$.

Преобразуем правую часть уравнения (5). Воспользовавшись легко проверяемым равенством $t^m/(\gamma - t)^2 = \bar{m} \int_0^t \frac{u^{m-1}(\varepsilon\gamma + u)}{(\gamma - u)^{2s+1}} du$, получаем

$$\frac{e^{imz}}{(\gamma - e^{iz})^{2s}} = \bar{m} \int_{\delta x + y \rightarrow 0}^{e^{iz}} \frac{u^{m-1}(\varepsilon\gamma + u)}{(\gamma - u)^{2s+1}} du.$$

При нахождении нижнего предела интеграла учтено, что $e^{imz} = e^{is(1 + i\delta)(x + iy)} = e^{-s(\delta x + y)} e^{is(x - \delta y)}$ и, следовательно, $e^{imz} \rightarrow 0$ при $\delta x + y \rightarrow \infty$. Правая часть уравнения (5) представляется в виде суммы интегралов

$$\bar{m} \int_{e^{iz}}^{\zeta} \frac{u^{m-1}}{(\gamma - u)^{2s+1}} du + \frac{\bar{m}}{1 + \varepsilon\gamma} \int_{\delta x + y \rightarrow \infty}^{e^{iz}} \frac{u^{m-1}(\varepsilon\gamma + u)}{(\gamma - u)^{2s+1}} du,$$

которая после предельного перехода при $\zeta \rightarrow 0$ принимает значение $\overline{m} \int_{\delta x+y \rightarrow \infty}^{e^z} \frac{u^{m-1}(u-1)}{(1+\varepsilon\gamma)(\gamma-u)^{2s+1}} du$.

Обратимся к левой части уравнения (5), обозначив через U ее логарифм. Имеем

$$\begin{aligned} U &= \ln \frac{\zeta^m}{(v+\varepsilon\gamma)(\gamma-\zeta)^{2s}} = imw - \ln(v+\varepsilon\gamma) - 2s \ln(\gamma-\zeta) = \\ &= -im(\omega+\delta\tau) - im\beta\chi - \ln(v+\varepsilon\gamma) - 2s \ln(\gamma-\zeta) = \\ &= m \left\{ i(\omega-i\tau) - \frac{2s}{m} \ln(\gamma-\zeta) - (1-i\delta)\tau - \frac{1}{m} \ln(v+\varepsilon\gamma) - i\beta\chi \right\}. \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой 1 существует функция $f(z) \in X_{2\pi}$ такая, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[i(\omega-i\tau) - \frac{2s}{m} \ln(\gamma-\zeta) \right] = if(z) - \frac{2s}{m} \ln \gamma.$$

$$\text{Найдем } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[(1-i\delta)\tau + \frac{1}{m} \ln(v+\varepsilon\gamma) + i\beta\chi \right] = H. \text{ Из (4)}$$

следует, что $(1-i\delta)\tau + \frac{1}{m} \ln(v+\varepsilon\gamma) + i\beta\chi = \frac{1}{m} \ln v + \frac{1}{m} \ln(v+\varepsilon\gamma)$ и поэтому $H = \frac{1}{m} \ln(-\varepsilon\gamma) + \frac{1}{m} \ln(1+\varepsilon\gamma)$.

Теперь имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} U &= m \left(if(z) - \frac{2s}{m} \ln \gamma \right) - \ln(-\varepsilon\gamma) - \ln(1+\varepsilon\gamma) = \\ &= mif(z) - (2s+1) \ln \gamma - \ln(-1) - \ln(1+\varepsilon\gamma) - \ln m + \ln \overline{m}. \end{aligned}$$

В результате выполненных предельных переходов в уравнении (5) при $\tau \rightarrow \infty$ получаем

$$\left[e^{if(z)} \right]^m \frac{1}{\gamma^{2s+1}} \frac{1}{1+\varepsilon\gamma} \frac{\overline{m}}{m} e^{-\ln(-1)} = \overline{m} \int_{\delta x+y \rightarrow \infty}^{e^z} \frac{u^{m-1}(1-u)}{(1-\overline{\gamma}u)^{2s+1}} du$$

$$\text{и окончательно } \left[e^{if(z)} \right]^m = m \int_{\delta x+y \rightarrow \infty}^{e^z} \frac{u^{m-1}(1-u)}{(1-\overline{\gamma}u)^{2s+1}} du.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть α и β – положительные числа, δ – вещественная постоянная, $s = \alpha / 2\beta$, $m = s(1+i\delta)$, γ , $|\gamma| = 1$, – комплексная постоянная, $\gamma \neq (1-i\delta) / (1+i\delta)$. Тогда

функция $f(z) = -i \ln \left[m \int_{\delta x+y \rightarrow \infty}^{e^z} \frac{u^{m-1}(1-u)}{(1-\overline{\gamma}u)^{2s+1}} du \right]^{\frac{1}{m}}$ одноли-

стно и конформно отображает верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π .

В частности, при $\delta = 0$, $s = 1$, $\gamma = 1$ получаем отображение $f(z) = \frac{z}{2} + i \ln \sin \frac{z}{2} + \frac{\pi}{2} + i \ln 2$ полуплоскости Π^+ на плоскость с исключенными замкнутыми областями $D_k = D + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, где $\partial D = \{w \in \mathbf{C} : 2w = t + i \ln(1 - \cos t) + \pi + i \ln 2, -2\pi < t \leq 0\}$ (рис. 2).

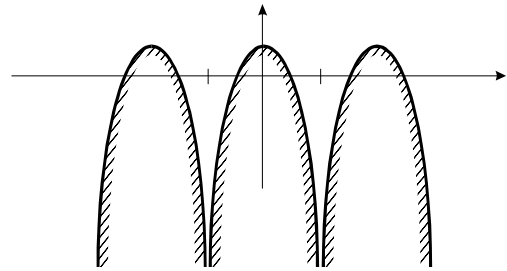


Рис. 2

В работе [1] в случае, если $\lambda(\tau) = \lambda_0 = \text{const}$, из дифференциального уравнения (1) получено отображение $f(z) = \lambda_0 + 2i \ln \left(2 \cos \frac{z - \lambda_0}{2} \right)$ полуплоскости Π^+ на плоскость с разрезами $l_k = l + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $l = \{w \in \mathbf{C} : -\infty < \operatorname{Im} w < 2 \ln 2, \operatorname{Re} w = \lambda_0\}$ (рис. 3).

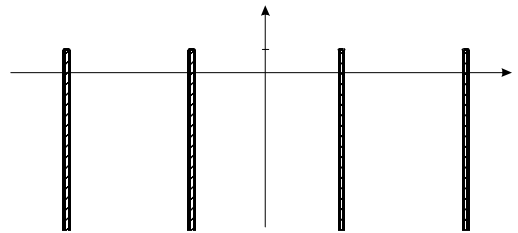


Рис. 3

Это отображение связано с известным отображением Лобачевского [5].

ЛИТЕРАТУРА.

1. Копанева Л.С. Параметрические представления отображений с симметрией переноса // Исследования по математическому анализу и алгебры. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. С. 135–144.
2. Копанева Л.С. Геометрические и экстремальные задачи для отображений с симметрией переноса // Кандидатская диссертация, Томск, 2003. 85 с.
3. Сыркашев А.Н. О вариационном и параметрическом методах в теории однолистных функций // Вестник ТГУ, № 280, 2003. С. 86–96.
4. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
5. Лобачевский Н.И. Полн. собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. Т. 3.

Статья представлена кафедрой математического анализа и лабораторией математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 28 октября 2004 г.