

## ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ПОНЯТИЯ $u$ -ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Вводится понятие  $fu$ -эквивалентности топологических пространств, являющееся частным случаем понятия  $u$ -эквивалентности. Доказано, что любые два счётные отрезка ординалов  $fu$ -эквивалентны.

Известно, что гомеоморфизм пространств  $C_p(X)$  и  $C_p(Y)$  порождает многозначное отображение пространства  $X$  в  $Y$ . Такое отображение, называемое носителем, часто используется при доказательстве теорем об инвариантности различных топологических свойств. Так, в [1] использовались носители линейных гомеоморфизмов пространств функций. О. Окунев в [2] ввёл понятие  $\varepsilon$ -носителя для произвольных гомеоморфизмов пространств функций. Особый интерес в данном контексте представляют носители равномерных гомеоморфизмов этих пространств. Использование многозначных отображений в некоторых случаях является основным приёмом в доказательстве. Примером является аналог носителя, введённый С.П. Гулько в [3]. Носитель равномерных гомеоморфизмов, рассматриваемый в этой статье, аналогичен носителю, построенному в [2], однако в отличие от него обладает рядом новых свойств, например полунепрерывностью. Значениями носителя в общем случае являются счётные множества. Добавив дополнительное условие конечности носителя, получаем модификацию понятия  $u$ -эквивалентности топологических пространств –  $fu$ -эквивалентность, которая является промежуточным понятием между  $l$ - и  $u$ -эквивалентностью. Основным результатом статьи является теорема 8, дающая пример  $fu$ -эквивалентных пространств, не являющихся  $l$ -эквивалентными, что позволяет различать эти понятия.

### ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Все рассматриваемые ниже топологические пространства предполагаются вполне регулярными, а отображения – непрерывными. Пространства  $X$  и  $Y$  называем  $u$ -эквивалентными ( $l$ -эквивалентными), если  $C_p(X)$  и  $C_p(Y)$  равномерно гомеоморфны (линейно гомеоморфны). Если  $X$  и  $Y$  – нормированные топологические пространства, для которых существует линейный гомеоморфизм  $h: X \rightarrow Y$ , сохраняющий норму, то будем отождествлять их и писать  $X \approx Y$ .

Символы  $X \oplus Y$ ,  $\bigoplus_{s \in S} X_s$  означают прямую сумму топологических пространств,  $c_0$  – пространство всех сходящихся к нулю последовательностей, наделённое нормой  $\|\{x_n\}_{n \in N}\| = \max\{|x_n| : n \in N\}$ , где  $\{x_n\}_{n \in N} \in c_0$ . Если  $(E_n, \|\cdot\|)$  – нормированные пространства,  $n \in N$ , то  $c_0$ -произведением  $E = \left( \prod_{n \in N} E_n \right)_{c_0}$  мы будем называть множество всех последовательностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$ ,  $x_n \in E_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_n = 0$ . Само  $c_0$ -произведение наделяется нормой  $\|x\| = \sup_{n \in N} \|x_n\|_n$ .  $C_p(X|F)$  – пространство всех непрерывных функций на  $X$ , равных нулю на множестве  $F$ , наделённое топологией поточечной сходимости, где  $F$  – некоторое подмножество пространства  $X$ . Буквой  $\omega$  обозначаем первый бесконечный ординал, буквой  $\omega_1$  – первый несчётный ординал. Если  $f$  – отображение с областью определения  $X$  и  $F \subset X$ , то через  $f|_F$  обозначается сужение  $f$  на  $F$ .

### ПОНЯТИЕ НОСИТЕЛЯ И ЕГО СВОЙСТВА

**Определение 1.** Пусть  $X$  – топологическое пространство. Линейное подпространство  $A \subset R^X$  будем называть достаточным, если для любой точки  $y \in X$ , любой её открытой окрестности  $O_y$  и любых двух функций  $f_1, f_2 \in A$  существует функция  $f_3 \in A$ , такая, что  $f_3(x) = f_1(x)$  для всех  $x \in X \setminus O_y$  и  $f_3(y) = f_2(y)$ .

Примерами достаточных линейных подпространств являются  $C_p(X) \subset R^X$ ,  $C_p(X|F) \subset R^X$ , где  $F$  – некоторое подмножество пространства  $X$ .

**Определение 2.** Пусть  $X, Y$  – топологические пространства;  $A, B$  – достаточные линейные подпространства пространств  $R^X$  и  $R^Y$  соответственно;  $h: B \rightarrow A$  – равномерный гомеоморфизм, переводящий нулевую функцию  $O_y \in B$  в нулевую функцию  $O_x \in A$ . Зафиксируем точку  $x \in X$  и  $\varepsilon > 0$ . Точку  $y \in Y$  будем называть  $\varepsilon$ -существенной для  $x$  (относительно гомеоморфизма  $h$ ), если для любой окрестности  $O_y$  точки  $y$  существуют функции  $g_1, g_2 \in B$ , совпадающие на множестве  $Y \setminus O_y$ , для которых выполняется неравенство  $|h(g_1)(x) - h(g_2)(x)| > \varepsilon$ .

Точку  $y$ , не являющуюся  $\varepsilon$ -существенной для  $x$ , будем называть  $\varepsilon$ -несущественной для  $x$ . Множество всех  $\varepsilon$ -существенных точек для точки  $x$  будем называть  $\varepsilon$ -носителем точки  $x$  (относительно гомеоморфизма  $h$ ) и будем обозначать его  $\text{supp}_\varepsilon^h x$ . Объединение всех  $\varepsilon$ -носителей точки  $x$  (относительно гомеоморфизма  $h$ ) по всем  $\varepsilon > 0$  будем называть носителем точки  $x$  (относительно гомеоморфизма  $h$ ) и будем обозначать его  $\text{supp}^h x$ . Если известно, о каком гомеоморфизме  $h$  идёт речь, будем писать просто  $\text{supp}_\varepsilon x$  или  $\text{supp} x$ .

Очевидно, что если  $\varepsilon < \delta$ , то  $\text{supp}_\delta x \subset \text{supp}_\varepsilon x$ , поэтому  $\text{supp} x = \bigcup_{n \in N} \text{supp}_{1/n} x$ .

В предыдущей работе [4] было доказано, что носитель обладает следующими свойствами:

- (i) – для любого  $x \in X$ , для любого  $\varepsilon > 0$   $\text{supp}_\varepsilon x$  – конечное подмножество из  $Y$ ;
- (ii) –  $\text{supp}: X \rightarrow Y$  есть многозначное полунепрерывное снизу отображение;
- (iii) – если  $A = C_p(X)$ ,  $B = C_p(Y)$ , то для любого  $x \in X$ , для любого  $\varepsilon > 0$   $\text{supp}_\varepsilon x$  – непустое множество.

В общем случае мощность носителя не более чем счётна. Особый интерес представляет случай, когда носитель конечен, поэтому имеет смысл выделить в классе  $u$ -эквивалентных пространств подкласс, любые два пространства  $X$  и  $Y$  из которого допускают равномерный гомеоморфизм  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  с конечным носителем.

**Определение 3.** Пусть  $X, Y$  – топологические пространства;  $A, B$  – достаточные линейные подпространства пространств  $C_p(X)$  и  $C_p(Y)$  соответственно, и пусть

$h: B \rightarrow A$  – равномерный гомеоморфизм. Будем называть отображение  $h$   $fu$ -гомеоморфизмом, если  $\sup^h x$  – конечное множество для любого  $x \in X$  и  $\sup^{h^{-1}} y$  – конечное множество для любого  $y \in Y$ . В этом случае пространства  $A$  и  $B$  будем называть  $fu$ -гомеоморфными и писать  $A \stackrel{fu}{\cong} B$ .

**Определение 4.** Пусть  $X, Y$  – топологические пространства. Будем называть их  $fu$ -эквивалентными ( $X \sim Y$ ), если существует  $fu$ -гомеоморфизм  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ .

Для того чтобы введённое понятие  $fu$ -эквивалентности на самом деле являлось отношением эквивалентности, оно должно быть рефлексивным, симметричным и транзитивным. Первые два свойства очевидны, для доказательства транзитивности потребуются некоторые факты, доказанные в [4].

Пусть  $X, Y$  –  $u$ -эквивалентные топологические пространства;  $A, B$  – достаточные линейные подпространства пространств  $C_p(X)$  и  $C_p(Y)$  соответственно, и пусть  $h: B \rightarrow A$  – равномерный гомеоморфизм, переводящий нулевую функцию  $0_Y \in B$  в нулевую функцию  $0_X \in A$ . Зафиксируем точку  $x \in X$ ,  $\delta > 0$  и некоторое конечное подмножество  $K \subset Y$  и определим  $a(x, K, \delta) = \sup |h(g_1)(x) - h(g_2)(x)|$ , где супремум берётся по всем  $g_1, g_2 \in B$ , таким, что  $|g_1(y) - g_2(y)| < \delta$  для всех  $y \in K$ . Это определение было введено С.П. Гулько в [3]. Также определим  $a(x, K, 0) = \sup |h(g_1)(x) - h(g_2)(x)|$ , где супремум берётся по всем  $g_1, g_2 \in B$ , совпадающим на множестве  $K$  (если  $K$  – пустое множество, то супремум берётся по всем  $g_1, g_2 \in B$ ). Очевидно, что если  $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$ , то  $a(x, K, \delta_1) \leq a(x, K, \delta_2)$ , и если  $K_1 \subset K_2 \subset Y$ , то  $a(x, K_2, \delta) \leq a(x, K_1, \delta)$  для любого  $\delta \geq 0$ .

**Теорема 1** [4]. Если  $a(x, K, 0) < \infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что  $a(x, K, \delta) \leq a(x, K, 0) + \varepsilon$ .

**Теорема 2** [4]. Для любого  $x \in X$ , для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta \geq 0$   $a(x, \sup_\varepsilon x, \delta) < \infty$ .

Далее, зафиксируем точку  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  и определим множество  $K_\varepsilon(x)$  следующим образом. Так как  $h$  – равномерный гомеоморфизм, то существует  $\delta > 0$  и конечное подмножество  $K \subset Y$ , такие, что  $a(x, K, \delta) \leq \varepsilon$ , а следовательно, и  $a(x, K, 0) \leq \varepsilon$ . Выберем подмножество  $M \subseteq K$ , такое, что  $a(x, M, 0) \leq \varepsilon$ , а для любого собственного подмножества  $M' \subset M, M' \neq M$  выполняется неравенство  $a(x, M', 0) > \varepsilon$ . Такое множество может оказаться не единственным, тогда возьмём любое из них и обозначим его  $K_\varepsilon(x)$ . Итак, для  $K_\varepsilon(x)$  справедливы неравенства:  $a(x, K_\varepsilon(x), 0) \leq \varepsilon$ ,  $a(x, K', 0) > \varepsilon$  для каждого  $K' \subset K_\varepsilon(x)$ ,  $K' \neq K_\varepsilon(x)$ .

**Теорема 3** [4]. Для любого  $x \in X$  и любого  $\varepsilon > 0$   $\sup_\varepsilon x \subset K_\varepsilon(x)$ .

**Теорема 4** [4]. Для любого  $x \in X$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что  $K_\varepsilon(x) \subset \sup_\delta x$ .

**Следствие 5** [4]. Для любого  $x \in X$ , для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что  $a(x, \sup_\delta x, 0) \leq \varepsilon$ .

Теперь сформулируем и докажем теорему, из которой следует транзитивность отношения  $fu$ -эквивалентности.

**Теорема 6.** Пусть  $X, Y, Z$  – топологические пространства;  $A, B, C$  – достаточные линейные подпространства пространств  $C_p(X)$ ,  $C_p(Y)$  и  $C_p(Z)$  соответственно;  $\varphi_1: B \rightarrow A$  и  $\varphi_2: C \rightarrow B$  – равномерные гомеоморфизмы, и пусть  $\varphi_0 = \varphi_1 \circ \varphi_2: C \rightarrow A$  – их композиция. Тогда  $\sup^{\varphi_0} x \subset \bigcup \{\sup^{\varphi_2} y : y \in \sup^{\varphi_1} x\}$  для любого  $x \in X$ .

**Доказательство.** Возьмём точку  $z \notin \bigcup \{\sup^{\varphi_2} y : y \in \sup^{\varphi_1} x\} \subset Z$  и покажем, что  $z \notin \sup^{\varphi_0} x$ . Для произвольного  $\varepsilon > 0$  зафиксируем  $K_{\varepsilon/2}(x) \subset X$  (относительно гомеоморфизма  $\varphi_1: B \rightarrow A$ ). По теореме 4 найдётся  $\delta > 0$ , такое, что  $K_{\varepsilon/2}(x) \subset \sup_\delta^{\varphi_1} x$ , поэтому  $a(x, \sup_\delta^{\varphi_1} x, 0) \leq \varepsilon/2$ . По теореме 1 найдётся  $\varepsilon_1 > 0$ , такое, что  $a(x, \sup_\delta^{\varphi_1} x, \varepsilon_1) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ . Если  $\sup_\delta^{\varphi_1} x \subset \sup^{\varphi_1} x$  и  $z \notin \bigcup \{\sup^{\varphi_2} y : y \in \sup^{\varphi_1} x\}$ , то  $z \notin \sup_{\varepsilon_1}^{\varphi_2} y$  для каждого  $y \in \sup_\delta^{\varphi_1} x$ , т.е. для каждого  $y \in \sup_\delta^{\varphi_1} x$  найдётся окрестность  $O_y(z)$  точки  $z$  (зависящая от  $y$ ), такая, что для любых  $h_1, h_2 \in C$ , совпадающих на множестве  $Z \cap O_y(z)$ , выполняется неравенство  $|\varphi_2(h_1)(y) - \varphi_2(h_2)(y)| \leq \varepsilon_1$ . Возьмём открытую окрестность  $O(z) = \bigcap \{O_y(z) : y \in \sup_\delta^{\varphi_1} x\}$  (так как множество  $\sup_\delta^{\varphi_1} x$  – конечно). Тогда для любых  $h_1, h_2 \in C$ , совпадающих на множестве  $Z \cap O(z)$ , неравенство  $|\varphi_2(h_1)(y) - \varphi_2(h_2)(y)| \leq \varepsilon_1$  выполняется для всех  $y \in \sup_\delta^{\varphi_1} x$ , но, так как  $a(x, \sup_\delta^{\varphi_1} x, \varepsilon_1) \leq \varepsilon$ , то  $|\varphi_1 \circ \varphi_2(h_1)(x) - \varphi_1 \circ \varphi_2(h_2)(x)| \leq \varepsilon$ ,

следовательно,  $z \notin \sup_\varepsilon^{\varphi_0} x$  для любого  $\varepsilon > 0$ , поэтому  $z \notin \sup^{\varphi_0} x$ . Теорема доказана.

**Следствие 7.** Пусть  $X, Y, Z$  – топологические пространства,  $A, B, C$  – достаточные линейные подпространства пространств  $C_p(X)$ ,  $C_p(Y)$  и  $C_p(Z)$  соответственно, такие, что  $A \stackrel{fu}{\cong} B$ ,  $B \stackrel{fu}{\cong} C$ . Тогда  $A \stackrel{fu}{\cong} C$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_1: B \rightarrow A$  и  $\varphi_2: C \rightarrow B$  – равномерные гомеоморфизмы с конечными носителями и пусть  $\varphi_0 = \varphi_1 \circ \varphi_2: C \rightarrow A$  – их композиция, тогда по предыдущей теореме  $\sup^{\varphi_0} x \subset \bigcup \{\sup^{\varphi_2} y : y \in \sup^{\varphi_1} x\}$  для любого  $x \in X$ , т.е. содержится в конечном множестве. Следовательно, он сам конечен. Аналогично доказываем, что носитель  $\sup^{\varphi_0^{-1}} z$  для каждого  $z \in Z$  конечен. Следовательно,  $A \stackrel{fu}{\cong} C$ . Следствие доказано.

Из доказанного следует транзитивность отношения  $fu$ -эквивалентности:

$$\begin{aligned} X \stackrel{fu}{\sim} Y, Y \stackrel{fu}{\sim} Z &\Rightarrow C_p(X) \stackrel{fu}{\cong} C_p(Y), C_p(Y) \stackrel{fu}{\cong} C_p(Z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_p(X) \stackrel{fu}{\cong} C_p(Z) \Rightarrow X \stackrel{fu}{\sim} Z \end{aligned}$$

## fu-ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие *fu*-эквивалентности является промежуточным понятием между *l*- и *u*-эквивалентностями (носители линейных гомеоморфизмов  $C_p$ -пространств конечны, см. [1]). Естественно возникает вопрос о различении этих отношений эквивалентности. В этом параграфе приведён пример *fu*-эквивалентных пространств, не являющихся *l*-эквивалентными. Центральной теоремой параграфа является

**Теорема 8.** Пусть  $\alpha, \beta$  – счётные ординалы. Тогда  $C_p([1, \alpha]) \stackrel{fu}{\cong} C_p([1, \beta])$ .

Теорема основывается на леммах, доказанных С.П. Гулько. Для её доказательства потребуются результаты из [5].

**Лемма 9[5].** Пусть  $R^2$  – евклидова плоскость с нормой  $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$  и пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда существуют функции  $\varphi_\varepsilon : R^2 \rightarrow R$  и  $\psi_\varepsilon : R^2 \rightarrow R$ , такие, что:

(а) – функции  $\varphi_\varepsilon$  и  $\psi_\varepsilon$  являются липшицевыми с константами  $A(\varepsilon)$  и  $B(\varepsilon)$  соответственно, т.е.  $|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(y)| \leq A(\varepsilon)\|x - y\|$ ,  $|\psi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(y)| \leq B(\varepsilon)\|x - y\|$  для любых  $x, y \in R^2$ ;

(б) – отображение  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, \varphi_\varepsilon(x_1, x_2))$  есть равномерный гомеоморфизм евклидовой плоскости  $R^2$  на себя, и обратное к нему отображение имеет вид  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, \psi_\varepsilon(x_1, x_2))$ ;

(в) –  $\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) = 0$  при  $x_1 = x_2$ ;

(г) –  $(1 + \varepsilon)^{-1}\|(x_1, x_2)\| \leq \|(x_1, \varphi_\varepsilon(x_1, x_2))\| \leq \|(x_1, x_2)\|$  для каждого  $(x_1, x_2) \in R^2$ .

**Лемма 10 [5].** Для любого псевдокомпактного пространства  $X$ , для любого  $x_0 \in X$  и любого  $\varepsilon > 0$  отображение  $S_\varepsilon : C_p(X) \rightarrow R \times C_p(X \setminus \{x_0\})$ , определённое формулой  $S_\varepsilon(f) = (f(x_0), \varphi_\varepsilon(f(x_0), f(\cdot)))$  есть равномерный гомеоморфизм, такой, что

$$(1 + \varepsilon)^{-1}\|f\| \leq \|S_\varepsilon(f)\| \leq \|f\|, f \in C_p(X),$$

где  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

**Следствие 11.** отождествим пространство  $R \times C_p(X \setminus \{x_0\})$  из предыдущей леммы с пространством  $C_p(X \oplus \{a\} \setminus \{x_0\})$ , где  $a$  – точка, не принадлежащая  $X$ . Тогда отображение  $S_\varepsilon$  из леммы 10  $S_\varepsilon : C_p(X) \rightarrow C_p(X \oplus \{a\} \setminus \{x_0\})$  есть *fu*-гомеоморфизм.

**Доказательство.** Имеем  $S_\varepsilon(g)(x) = g(x_0)$ , если  $x = a$  и  $S_\varepsilon(g)(x) = \varphi_\varepsilon(g(x_0), g(x))$ , если  $x \neq a$ , где  $g \in C_p(X)$ ,  $S_\varepsilon^{-1}(f)(x) = f(a)$ , если  $x = x_0$  и  $S_\varepsilon^{-1}(f)(x) = \psi_\varepsilon(f(a), f(x))$ , если  $x \neq x_0$ , где  $f \in C_p(X \oplus \{a\} \setminus \{x_0\})$ .

Обозначим отображение  $S_\varepsilon$  за  $h_1$ , отображение  $S_\varepsilon^{-1}$  за  $h_2$  и покажем, что  $\text{supp}^{h_1} x \subseteq \{x_0, x\}$  для любого  $x \in X \oplus \{a\}$  и  $\text{supp}^{h_2} x \subseteq \{a, x\}$  для любого  $x \in X$ .

Рассмотрим отображение  $h_1$ . Заметим, что  $\text{supp}^{h_1} x_0 = \emptyset$ , так как для любых  $g_1, g_2 \in C_p(X)$  выполнено

$$\begin{aligned} & |h_1(g_1)(x_0) - h_1(g_2)(x_0)| = \\ & = |\varphi_\varepsilon(g_1(x_0), g_1(x_0)) - \varphi_\varepsilon(g_2(x_0), g_2(x_0))| = 0. \end{aligned}$$

Скажем, что  $K_\delta(a) \subseteq \{x_0\}$  для любого  $\delta > 0$ . Действительно, если  $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ , где  $g_1, g_2 \in C_p(X)$ , то

$$|h_1(g_1)(a) - h_1(g_2)(a)| = |g_1(x_0) - g_2(x_0)| = 0 < \delta \text{ для любого } \delta > 0,$$

а так как  $\text{supp}_\delta^{h_1} a \subset K_\delta(a)$  (теорема 3), то  $\text{supp}^{h_1} a \subseteq \{x_0\}$ . Возьмём теперь  $x \in X \setminus \{x_0\}$  и покажем что  $K_\delta(x) \subseteq \{x, x_0\}$  для любого  $\delta > 0$ . Действительно, если  $g_1(x_0) = g_2(x_0)$  и  $g_1(x) = g_2(x)$ , где  $g_1, g_2 \in C_p(X)$ , то

$$\begin{aligned} & |h_1(g_1)(x) - h_1(g_2)(x)| = \\ & = |\varphi_\varepsilon(g_1(x_0), g_1(x)) - \varphi_\varepsilon(g_2(x_0), g_2(x))| \leq \\ & \leq A(\varepsilon) \max\{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|, |g_1(x) - g_2(x)|\} = 0 < \delta \end{aligned}$$

для любого  $\delta > 0$ , следовательно,  $K_\delta(x) \subseteq \{x_0, x\}$  для любого  $\delta > 0$ , поэтому  $\text{supp}_\delta^{h_1} x \subseteq \{x_0, x\}$  для любого  $\delta > 0$ , и, окончательно,  $\text{supp}^{h_1} x \subseteq \{x_0, x\}$ .

Рассмотрим отображение  $h_2$ . Покажем, что  $K_\delta(x_0) \subseteq \{a\}$  для любого  $\delta > 0$ . Действительно, если  $f_1(a) = f_2(a)$ , где  $f_1, f_2 \in C_p(X \oplus \{a\} \setminus \{x_0\})$ , то  $|h_2(f_1)(x_0) - h_2(f_2)(x_0)| = |f_1(a) - f_2(a)| = 0 < \delta$  для любого  $\delta > 0$ , следовательно,  $\text{supp}^{h_2} x_0 \subseteq \{a\}$ .

Возьмём  $x \neq x_0$  и покажем, что  $K_\delta(x) \subseteq \{a, x\}$  для любого  $\delta > 0$ . Действительно, если  $f_1(a) = f_2(a)$  и  $f_1(x) = f_2(x)$ , где  $f_1, f_2 \in C_p(X \oplus \{a\} \setminus \{x_0\})$ , то

$$\begin{aligned} & |h_2(f_1)(x) - h_2(f_2)(x)| = \\ & = |\psi_\varepsilon(f_1(a), f_1(x)) - \psi_\varepsilon(f_2(a), f_2(x))| \leq \\ & \leq B(\varepsilon) \max\{|f_1(a) - f_2(a)|, |f_1(x) - f_2(x)|\} = 0 < \delta \end{aligned}$$

для любого  $\delta > 0$ , следовательно,  $K_\delta(x) \subseteq \{a, x\}$  для любого  $\delta > 0$ , поэтому  $\text{supp}_\delta^{h_2} x \subseteq \{a, x\}$  для любого  $\delta > 0$ , и, окончательно,  $\text{supp}^{h_2} x \subseteq \{a, x\}$ . Итак, отображение  $S_\varepsilon$  есть *fu*-гомеоморфизм. Следствие доказано.

**Лемма 12.** Пусть имеется два семейства  $\{X_s\}_{s \in S}$  и  $\{Y_s\}_{s \in S}$  топологических пространств и для каждого  $s \in S$  существуют достаточные линейные подпространства  $A_s \subset C_p(X_s)$  и  $B_s \subset C_p(Y_s)$  и равномерный гомеоморфизм  $h_s : B_s \rightarrow A_s$ . Обозначим  $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ ,  $Y = \bigoplus_{s \in S} Y_s$  и определим множества  $A = \{f \in C_p(X) : f|_{X_s} \in A_s\} \subset C_p(X)$  и  $B = \{g \in C_p(Y) : g|_{Y_s} \in B_s\} \subset C_p(Y)$ . Отображение  $h : B \rightarrow A$ , определённое формулой  $h(g)|_{X_s} = h_s(g|_{Y_s})$ , где  $g \in B$ , является равномерным гомеоморфизмом, причём  $\text{supp}^h x = \text{supp}^{h_s} x$  для любой точки  $x \in X$ , где  $s$  – индекс пространства  $X_s$ , содержащего точку  $x$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $h$  является равномерным гомеоморфизмом пространства  $B$  на  $A$ . Покажем, что  $\text{supp}^h x \supset \text{supp}^{h_s} x$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ , точку  $y \in \text{supp}_\varepsilon^{h_s} x \subset Y_s$  и произвольную окрестность  $O_y$  точки  $y$ . Тогда существуют  $g'_s, g''_s \in B_s$  такие, что  $g'_s = g''_s$  на

множестве  $Y_s \setminus O_y$  и  $|h_s(g'_s)(x) - h_s(g''_s)(x)| > \varepsilon$ . Определим функции  $g', g'' \in C_p(Y) : g'(y) = \begin{cases} g'_s(y), y \in Y_s \\ 0, y \in Y \setminus Y_s \end{cases}$ ,

$$g''(y) = \begin{cases} g''_s(y), y \in Y_s \\ 0, y \in Y \setminus Y_s \end{cases} \quad g'(y) = g''(y)$$

для любого  $y \in Y \setminus O_y$ ,

$$|h(g')(x) - h(g'')(x)| = |h_s(g'_s)(x) - h_s(g''_s)(x)| < \varepsilon,$$

следовательно,  $y \in \text{supp}^h x \subset \text{supp}^{h_s} x$  и  $\text{supp}^{h_s} x \subset \text{supp}^h x$ .

Докажем обратное включение:  $\text{supp}^h x \subset \text{supp}^{h_s} x$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$  и точку  $y \notin \text{supp}^{h_s} x$ . Возможны два случая:

(а) —  $y \in Y_s, t \neq s$ . В качестве окрестности  $O_y$  точки  $y$  можно взять  $Y_t$ , тогда для любых  $g', g'' \in C_p(Y)$ , совпадающих на множестве  $Y \setminus O_y$ , выполняется равенство  $|h(g')(x) - h(g'')(x)| = |h_s(g'|_{Y_s})(x) - h_s(g''|_{Y_s})(x)| = 0$ , следовательно,  $y \notin \text{supp}^h x$ .

(б) —  $y \in Y_s$ . Существует окрестность  $O_y$  точки  $y$  в пространстве  $Y$  такая, что для любых  $g'_s, g''_s \in B_s$ , совпадающих на множестве  $Y_s \setminus O_y$ , выполняется неравенство  $|h_s(g'_s)(x) - h_s(g''_s)(x)| \leq \varepsilon$ . Тогда для любых  $g', g'' \in C_p(Y)$ , совпадающих на множестве  $Y \setminus O_y$ , выполняется неравенство

$$|h(g')(x) - h(g'')(x)| = |h_s(g'|_{Y_s})(x) - h_s(g''|_{Y_s})(x)| \leq \varepsilon,$$

следовательно,  $y \notin \text{supp}^h x$ . Получаем, что  $\text{supp}^h x \subset \text{supp}^{h_s} x$  для любого  $\varepsilon > 0$ , следовательно,  $\text{supp}^h x \subset \text{supp}^{h_s} x$ . Лемма доказана.

**Следствие 13.** Если в условии леммы каждый равномерный гомеоморфизм  $h_s: B_s \rightarrow A_s$  является  $fu$ -гомеоморфизмом, то  $h: B \rightarrow A$  также является  $fu$ -гомеоморфизмом.

**Определение 5.** Пусть  $X_n$  — псевдокомпактное пространство,  $n \in N$ . Определим норму на  $C_p(X_n)$ :  $\|f\|_{X_n} = \sup_{x \in X_n} |f(x)|$ , где  $f \in C_p(X)$ . Будем обозначать

$$C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)_0 = \left\{ f \in C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f|_{X_n}\|_n = 0 \right\}.$$

Очевидно, что  $C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)_0$  — достаточное линейное под-

пространство пространства  $C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)$ .

**Следствие 14.** Пусть имеется две последовательности  $\{X_n\}_{n \in N}$  и  $\{Y_n\}_{n \in N}$  псевдокомпактных топологических пространств и для каждого  $n \in N$  существуют достаточные линейные подпространства  $A_n \subset C_p(X_n)$  и  $B_n \subset C_p(Y_n)$ ,  $fu$ -гомеоморфизм  $h_n: B_n \rightarrow A_n$  и положительные числа  $a, b$ , такие, что  $a\|g_n\|_{Y_n} \leq \|h_n(g_n)\|_{X_n} \leq b\|g_n\|_{Y_n}$  для каждого  $g_n \in B_n, n \in N$ . (i)

$$\text{Определим множества } A = \left\{ f \in C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right) : f|_{X_n} \in A_n \right\}$$

$$\text{и } B = \left\{ g \in C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right) : g|_{Y_n} \in B_n \right\}, \quad \text{и отображение}$$

$$\begin{aligned} h: B \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)_0 &\rightarrow A, \text{ заданное формулой } h(g)|_{X_n} = \\ &= h_n(g|_{Y_n}), \text{ где } g \in B. \text{ Тогда } h\left(B \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)_0\right) = \\ &= A \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)_0 \quad (\text{ii}) \text{ и отображение } h \text{ является } fu\text{-го-} \\ &\text{меоморфизмом из } B \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)_0 \text{ на } A \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)_0. \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, что  $A \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)_0$  и

$$B \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)_0$$

являются достаточными линейными подпространствами пространств  $C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)$  и  $C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)$  соответственно. Равенство (ii) следует из условия (i), остальная часть доказательства дословно повторяет доказательство леммы 12.

Доказательство теоремы 8. Для счётного ординала  $\alpha$  рассмотрим следующее индуктивное предположение ( $a_\alpha$ ): для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $fu$ -гомеоморфизм  $T_\varepsilon: C_p([1, \alpha]) \rightarrow C_p([1, \omega] \setminus \{\omega\})$ , такой, что

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \|f\| \leq \|T_\varepsilon(f)\| \leq \|f\|, \quad f \in C_p([1, \alpha]).$$

Для  $\alpha = \omega$  по следствию 11 существует  $fu$ -гомеоморфизм  $S_\varepsilon: C_p([1, \omega]) \rightarrow R \times C_p([1, \omega] \setminus \{\omega\}) \approx C_p([0, \omega] \setminus \{\omega\})$ .

Очевидно, что  $C_p([0, \omega] \setminus \{\omega\})$  можно линейно топологически отождествить с пространством  $C_p([1, \omega] \setminus \{\omega\})$  без изменения норм элементов  $C_p([0, \omega] \setminus \{\omega\}) C_p([1, \omega] \setminus \{\omega\})$ , а поскольку линейный гомеоморфизм является  $fu$ -гомеоморфизмом, то по следствию 7 композиция  $fu$ -гомеоморфизмов  $T_\varepsilon: C_p([1, \omega]) \rightarrow C_p([1, \omega] \setminus \{\omega\})$  также будет  $fu$ -гомеоморфизмом, что доказывает утверждение ( $a_\omega$ ).

Если  $\alpha = \beta + 1$ , то  $C_p([1, \alpha]) \approx C_p([1, \beta])$ , поэтому ( $a_\alpha$ ) следует из ( $a_\beta$ ).

Пусть  $\alpha$  — предельный ординал и пусть  $\alpha = \sup_{n \in N} \alpha_n$ ,

где  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$  — возрастающая последовательность счётных ординалов. Возьмём  $\delta > 0$  так, чтобы  $(1 + \delta)^2 \leq 1 + \varepsilon$ . По следствию 11 существует  $fu$ -гомеомор-

физм  $S_\delta: C_p([1, \alpha]) \rightarrow C_p([1, \alpha] \setminus \{\alpha\})$  (так как  $C_p([1, \alpha]) \stackrel{fu}{\cong} R \times C_p([1, \alpha] \setminus \{\alpha\}) \approx C_p([1, \alpha] \setminus \{\alpha\})$ ), такой, что

$$(1 + \delta)^{-1} \|f\| \leq \|S_\delta(f)\| \leq \|f\|, \quad f \in C_p([1, \alpha]). \quad (1)$$

Легко видеть, что  $C_p([1, \alpha] \setminus \{\alpha\}) \approx C_p\left(\bigoplus_{n \in N} (\alpha_{n-1}, \alpha_n]\right)_0$ , а каждый полуинтервал  $(\alpha_{n-1}, \alpha_n]$  гомеоморфен некоторому сегменту  $[1, \beta_n]$ , причём  $\beta_n < \alpha$ . Обозначим  $X_n = [1, \omega]$ ,

$$Y_n = [1, \beta_n], n \in N, \text{ тогда } C_p([1, \alpha] \setminus \{\alpha\}) \approx C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)_0.$$

Так как  $\beta_n < \alpha$ , то по индуктивному предположению для каждого  $n \in N$  существует  $fu$ -гомеоморфизм  $h_n: C_p(Y_n) \rightarrow$

$\rightarrow C_p([1, \omega] | \{\omega\})$  такой, что для каждого  $g_n \in C_p(Y_n)$  выполнено неравенство

$$(1 + \delta)^{-1} \|g_n\|_{Y_n} \leq \|h_n(g_n)\|_{X_n} \leq \|g_n\|_{Y_n}. \quad (2)$$

Обозначим  $A_n = C_p([1, \omega] | \{\omega\}) \subset C_p(X_n)$ ,  $B_n = C_p(Y_n)$ .

Определим множества

$$A = \left\{ f \in C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right) : f|_{X_n} \in A_n \right\};$$

$$B = \left\{ g \in C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right) : g|_{Y_n} \in B_n \right\} = C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)$$

и отображение  $h : B \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)_0 = C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)_0 \rightarrow A$ , определённое формулой  $h(g)|_{X_n} = h_n(g|_{Y_n})$ , где  $g \in B$ . Таким образом, мы находимся в условиях следствия 14, откуда получаем, что  $h$  является  $fu$ -гомеоморфизмом из  $C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)_0$  на  $A \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)_0$ . Из формулы (2) следует также неравенство

$$(1 + \delta)^{-1} \|g\|_Y \leq \|h(g)\|_X \leq \|g\|_Y, \quad g \in C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right). \quad (3)$$

Ясно, что  $A \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)_0 \approx \left(\prod_{n \in N} A_n\right)_{C_0}$  и  $A_n \approx c_0, n \in N$ .

Таким образом,  $A \cap C_p\left(\bigoplus_{n \in N} X_n\right)_0 \approx (c_0 \times c_0 \times \dots)_{C_0}$ ,

$(c_0 \times c_0 \times \dots)_{C_0} \approx c_0 \approx C_p([1, \omega] | \{\omega\})$ . Учитывая это замеча-

ние, можно считать, что построенное выше отображение  $h$  является  $fu$ -гомеоморфизмом из  $C_p\left(\bigoplus_{n \in N} Y_n\right)_0$  на  $C_p([1, \omega] | \{\omega\})$ . Композиция  $T = h \circ S_\delta$  по следствию 7 является  $fu$ -гомеоморфизмом пространства  $C_p([1, \alpha])$  на  $C_p([1, \omega] | \{\omega\})$ . Из формул (1) и (3) следует, что выполнено неравенство  $(1 + \delta)^{-2} \|f\| \leq \|T(f)\| \leq \|f\|, f \in C_p([1, \alpha])$ . Полагая  $T_\varepsilon = T$ , мы получаем утверждение  $(a_\alpha)$ . Индукция полная. Итак,

$$C_p([1, \alpha]) \overset{fu}{\cong} C_p([1, \omega] | \{\omega\})$$

и

$$C_p([1, \beta]) \overset{fu}{\cong} C_p([1, \omega] | \{\omega\})$$

для любых двух счётных ординалов  $\alpha$  и  $\beta$ , следовательно,  $C_p([1, \alpha]) \overset{fu}{\cong} C_p([1, \beta])$ . Теорема доказана.

Ч. Бессага и А. Пелчинский [6] установили, что для счётных ординалов  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\alpha \leq \beta$  пространства  $C_p([1, \alpha])$  и  $C_p([1, \beta])$  линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда  $\alpha \leq \beta < \alpha^\omega$ . Следовательно, отрезки ординалов  $[1, \omega^\gamma]$  при  $0 \leq \gamma < \omega_1$  будут попарно не  $l$ -эквивалентны между собой.

**Следствие 15.** Существуют счётные  $fu$ -эквивалентные компакты  $X$  и  $Y$ , не являющиеся  $l$ -эквивалентными.

Вопрос о различении  $u$ - и  $fu$ -эквивалентных пространств пока остаётся открытым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Velichko N.V. The Lindelof property is  $l$ -invariant // Topol. and its Appl. 1998. Vol. 89. P. 277–283.
2. Okunev O. Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants // Topol. and its Appl. 1997. Vol. 80. P. 177–188.
3. Гулько С.П. О равномерных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. 1992. Т. 193. С. 82–88.
4. Арбит А.В. О многозначных отображениях, порождаемых равномерными гомеоморфизмами пространств непрерывных функций. // Международная конференция по математике и механике: Избранные доклады / Под общ. ред. Н.Р.Щербакова. Томск: Томский государственный университет, 2003. С. 45–49.
5. Gul'ko S.P. The space  $C_p(X)$  for countable infinite compact  $X$  is uniformly homeomorphic to  $c_0$  // Bull. Acad. Polon. Sci. ser. Math. 1990.
6. Bessaga C., Pelczynski A. Spaces of continuous functions (IV). On isomorphic classification of spaces of continuous functions // Studia math. 1960. V. 19. P. 53–62.

Статья представлена кафедрой теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 11 июня 2004 г.