

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИММЕТРИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА

Рассматривается однородный симметрический многочлен вида $\sigma_k(z_0, \dots, z_n) = \sum z_0^{j_0} \dots z_n^{j_n}$ комплексных переменных $z_0, \dots, z_n$, где $j_0 + \dots + j_n = k, j_0 \geq 0, \dots, j_n \geq 0$ и k – целое неотрицательное число. Рассматриваются свойства такого многочлена, часть из которых, по нашему мнению, могут представлять интерес и иметь приложения в различных вопросах анализа.

Пусть $F(z)$ – однозначная аналитическая в области D функция. Определим разделенную разность n -го порядка функции $F(z)$ в попарно различных точках $z_0, \dots, z_n \in D$ следующей рекуррентной формулой:

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{[F(z); z_0, \dots, z_{n-1}] - [F(z); z_1, \dots, z_n]}{z_0 - z_n},$$

$$[F(z); z_0] = F(z_0).$$

Разделенная разность функции $F(z)$ является аналитической по любому из своих аргументов. Это позволяет доопределить n -ю разделенную разность нашей функции $F(z)$ в том случае, когда среди точек $z_0, \dots, z_n \in D$ есть совпадающие между собой точки. Например, если $z_0 = z_1 = \xi_0$, то полагаем $[F(z); \xi_0, \xi_0] = F'(\xi_0)$.

Вообще, если точки $\xi_0, \dots, \xi_s \in D$ и попарно различны, то полагаем [1]

$$\left[F(z); \underbrace{\xi_0, \dots, \xi_0}_{p_0}, \dots, \underbrace{\xi_s, \dots, \xi_s}_{p_s} \right] = \frac{1}{(p_0 - 1)! \dots (p_s - 1)!} \frac{\partial^{n-s} [F(z); \xi_0, \dots, \xi_s]}{\partial \xi_0^{p_0-1} \dots \partial \xi_s^{p_s-1}},$$

где $p_0 + \dots + p_s = n + 1$. В частности, если $z_0 = \dots = z_n = \xi$, то

$$\left[F(z); \underbrace{\xi, \dots, \xi}_{n+1} \right] = \frac{1}{n!} F^{(n)}(\xi).$$

Таким образом, разделенная разность является в некотором смысле обобщением производной и обладает многими замечательными свойствами, часть из которых можно найти в [1, 2].

Сформулируем несколько простейших свойств симметрического однородного многочлена.

Свойство 1. Пусть l и n – целые неотрицательные числа. Для функции $F(z) = z^l$, где $l \geq n \geq 0$, справедливо равенство $\sigma_{l-n}(z_0, \dots, z_n) = [z^l; z_0, \dots, z_n]$.

Свойство 2. При любых комплексных $z_0, \dots, z_n$ справедливо равенство $\sigma_k(z_0, \dots, z_n) = \sum_{m=0}^k \sigma_m(z_1, \dots, z_n) z_0^{k-m}$.

Свойство 3. Справедливо равенство $\sigma_{k-1}(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = \frac{\sigma_k(z_0, z_1, \dots, z_n) - \sigma_k(z_1, \dots, z_{n+1})}{z_0 - z_{n+1}}$, если $z_0 \neq z_{n+1}$, и равенство $\sigma_{k-1}(z_0, \dots, z_n, z_0) = \frac{\partial \sigma_k(z, z_1, \dots, z_n)}{\partial z} \Big|_{z=z_0}$, если $z_0 = z_{n+1}$.

Заметим, что в вышеуказанных формулах аргументы перестановочны. Этим замечанием мы пользуемся и в дальнейшем.

Свойство 4. Пусть $\zeta_0, \dots, \zeta_s$ и $\xi_0, \dots, \xi_p$ – два множества комплексных чисел. Тогда справедливо равенство

$$\sigma_k(\zeta_0, \dots, \zeta_s, \xi_0, \dots, \xi_p) = \sum_{m=0}^k \Delta_{k,m}(\zeta_0, \dots, \zeta_s, \xi_0, \dots, \xi_p), \quad (1)$$

где $\Delta_{k,m}(\zeta_0, \dots, \zeta_s, \xi_0, \dots, \xi_p) = \sigma_{k-m}(\zeta_0, \dots, \zeta_s) \cdot \sigma_m(\xi_0, \dots, \xi_p)$.

Доказательство. Согласно свойству 2 при любых фиксированных $\xi_0, \dots, \xi_p$ справедливо тождество по ζ :

$$\sigma_{k+s}(\zeta, \xi_0, \dots, \xi_p) = \sum_{m=0}^{k+s} \zeta^{k+s-m} \sigma_m(\xi_0, \dots, \xi_p). \quad (2)$$

Пользуясь элементарными свойствами разделенных разностей, возьмем от обеих частей тождества (2) разделенную разность s -го порядка по точкам $\zeta_0, \dots, \zeta_s$:

$$[\sigma_{k+s}(\zeta, \xi_0, \dots, \xi_p); \zeta_0, \dots, \zeta_s] = [\sigma_{k+s-m}(\zeta_0, \dots, \zeta_s) \cdot \sigma_m(\xi_0, \dots, \xi_p)] =$$

С другой стороны,

$$[\sigma_{k+s}(\zeta, \xi_0, \dots, \xi_p); \zeta_0, \dots, \zeta_s] = [[\zeta^{k+s+p+1}; \zeta, \xi_0, \dots, \xi_p]; \zeta_0, \dots, \zeta_s] =$$

$$= [\zeta^{k+s+p+1}; \zeta_0, \dots, \zeta_s, \xi_0, \dots, \xi_p] = \sigma_k(\zeta_0, \dots, \zeta_s, \xi_0, \dots, \xi_p).$$

Отсюда следует наше утверждение.

Последовательность положительных чисел $a_0, a_1, \dots, a_k$ назовем χ -последовательностью, если для ее членов выполняются неравенства

$$a_m^2 \geq a_{m+1} a_{m-1}, \quad m = 1, \dots, k-1. \quad (3)$$

Если последовательность $a_0, a_1, \dots, a_k$ такова, что $a_0 = a_1 = \dots = a_k$, то она называется тривиальной χ -последовательностью. Простейшим примером χ -последовательности является геометрическая прогрессия. Тривиальную χ -последовательность не будем причислять к геометрической прогрессии. Заметим, что из (3) следует

$$\ln a_m \geq \frac{\ln a_{m+1} + \ln a_{m-1}}{2}.$$

Это означает, что χ -последовательность является логарифмически выпуклой вверх числовой последовательностью. Из (3) также следует, что

$$\frac{a_0}{a_1} \leq \frac{a_1}{a_2} \leq \dots \leq \frac{a_{m-1}}{a_m}.$$

С χ -последовательностями можно познакомиться также в [3]. Из сказанного сразу следует справедливость следующих лемм.

Лемма 1. Если последовательность $a_0, a_1, \dots, a_k$ есть χ -последовательность, то она может быть только следующих двух типов:

1. Монотонной (возрастающей, убывающей, тривиальной).
2. Возрастающе-убывающей, т.е. найдется такое число l , что сначала $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_l$, а затем $a_l \geq a_{l+1} \geq \dots \geq a_k$, где среди чисел $a_0, a_1, \dots, a_k$ есть хотя бы два числа, не равных между собой.

Лемма 2. Пусть

$$a_0, a_1, \dots, a_k; \quad (4)$$

$$b_0, b_1, \dots, b_k \quad (5)$$

есть две χ -последовательности. Тогда последовательность

$$a_0 b_0, \dots, a_k b_k \quad (6)$$

также есть χ -последовательность.

Для того чтобы χ -последовательность (6) была геометрической прогрессией, необходимо и достаточно, что-

бы χ -последовательности (4) и (5) были геометрическими прогрессиями с произведением знаменателей, не равным единице, либо одна из них была бы геометрической прогрессией, а другая была бы тривиальной. Для того чтобы χ -последовательность (6) была тривиальной необходимо и достаточно, чтобы обе χ -последовательности (4) и (5) были тривиальными или обе χ -последовательности (4) и (5) были бы геометрическими прогрессиями с произведением знаменателей, равным единице.

Лемма 3. Если последовательность $c_0, \dots, c_k$ есть χ -последовательность, то и последовательность $c_k, \dots, c_0$ есть также χ -последовательность.

Следующие две теоремы связывают χ -последовательности и однородные симметрические многочлены.

Теорема 1. Пусть $v_0, \dots, v_s$ – неотрицательные числа и $v_0 > 0, \dots, v_s$. Тогда при любых $s \geq 0$ и $l \geq 0$ последовательность симметрических многочленов

$$\sigma_l(v_0, \dots, v_s), \sigma_{l+1}(v_0, \dots, v_s), \sigma_{l+2}(v_0, \dots, v_s), \dots, \quad (7)$$

имеющая не менее трех членов есть χ -последовательность. При любом фиксированном m , где $m \geq l$, тройка многочленов

$$\sigma_m(v_0, \dots, v_s), \sigma_{m+1}(v_0, \dots, v_s), \sigma_{m+2}(v_0, \dots, v_s) \quad (8)$$

может быть геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью лишь в том случае, если она имеет вид

$$v_0^m, v_0^{m+1}, v_0^{m+2}. \quad (9)$$

Доказательство. Обозначим для краткости $\sigma_{m,s} = \sigma_m(v_0, \dots, v_s)$. Установим, что

$$\sigma_{m,s}^2 \geq \sigma_{m+1,s} \cdot \sigma_{m-1,s} \quad (10)$$

при любом $m \geq l+1$ и любом $s \geq 0$. Для этого воспользуемся индукцией по s . При $s = 0$ имеем $\sigma_{m,0}(v_0) = v_0^m$. Значит, при $s = 0$ и любом $m \geq 1$ неравенство (10), как следует из (9), будет справедливо. Пусть неравенство (10) справедливо при некотором $s = p$ и любом $m \geq l+1$. Докажем справедливость неравенства (10) при $s = p+1$ и любом $m \geq l+1$. Имеем

$$\sigma_{m,p+1} = v_{p+1}^m + \sigma_{1,p} \cdot v_{p+1}^{m-1} + \dots + \sigma_{m-1,p} \cdot v_{p+1} + \sigma_{m,p}. \quad (11)$$

Отсюда $\sigma_{m,p+1} = v_{p+1} \sigma_{m-1,p+1} + \sigma_{m,p}$. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \sigma_{m,p+1}^2 - \sigma_{m+1,p+1} \cdot \sigma_{m-1,p+1} &= \sigma_{m,p} \cdot v_{p+1}^m + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} (\sigma_{m,p} \cdot \sigma_{m-j,p} - \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p}) \cdot v_{p+1}^j. \end{aligned}$$

Докажем, что при любом $m \geq l+j+1$ будут выполняться неравенства

$$\sigma_{m,p} \cdot \sigma_{m-j,p} - \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p} \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-l-1. \quad (12)$$

Действительно, по предположению при $s = p$ и любом $m \geq l+j+1$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{m,p}^2 &\geq \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-1,p}, \\ \sigma_{m-1,p}^2 &\geq \sigma_{m,p} \cdot \sigma_{m-2,p}, \\ &\dots, \\ \sigma_{m-j,p}^2 &\geq \sigma_{m-j+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p}. \end{aligned}$$

Перемножая эти неравенства, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{m,p}^2 \cdot \sigma_{m-1,p} \cdot \dots \cdot \sigma_{m-j,p} &\geq \\ &\geq \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-1,p} \cdot \dots \cdot \sigma_{m-j+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p}. \end{aligned}$$

Деля обе части последнего неравенства на общие множители, приходим к (12). Из (11) и (12) и того, что $\sigma_{m,p} > 0$ и v_{p+1} , заключаем, что неравенство (10) справедливо при $s = p+1$. Пользуясь индукцией по s , убеждаемся в том, что неравенство (10) имеет место при любом $s \geq 0$ и любом $m \geq l+1$. Это означает, что последовательность (7) есть χ -последовательность. Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана. Докажем вторую часть. Пусть $v_0 > 0$, $v_0 \neq 1$, $s = 0$ или $v_0 > 0$, $v_0 \neq 1$, $s > 0$, $v_1 = v_2 = \dots = v_s = 0$, тогда для любого $m \geq 0$ имеем

$$\sigma_m(v_0) = \sigma_m \left(v_0, \underbrace{0, \dots, 0}_s \right) = v_0^m,$$

что приводит нас к геометрической прогрессии. Может случиться, что $v_0 = 1$ и тогда мы получим тривиальную последовательность, образованную из единиц. В остальных случаях, т.е. если среди чисел $v_0, \dots, v_s$ есть хотя бы два числа, не равные нулю, то тройка чисел (8) не образует геометрической прогрессии, а также тривиальной последовательности. В самом деле, в силу симметрического свойства многочленов $\sigma_m(v_0, \dots, v_s)$ относительно переменных $v_0, \dots, v_s$ можно считать, что $v_0 > 0$ и $v_s > 0$. Опираясь на формулу (11), имеем для любого $m \geq l+1$ равенство

$$\begin{aligned} \sigma_{m,s}^2 - \sigma_{m+1,s} \cdot \sigma_{m-1,s} &= \\ &= \sigma_{m,s-1} \cdot v_s^m + \sum_{j=0}^{m-1} (\sigma_{m,s-1} \cdot \sigma_{m-j,s-1} - \sigma_{m+1,s-1} \cdot \sigma_{m-j-1,s-1}) \cdot v_s^j, \end{aligned}$$

причем, согласно формуле (12), справедливо неравенство $\sigma_{m,s-1} \cdot \sigma_{m-j,s-1} - \sigma_{m+1,s-1} \cdot \sigma_{m-j-1,s-1} \geq 0$; $j = 0, 1, \dots, m-l-1$.

Так как $\sigma_{m,s-1} > 0$ и $v_s > 0$, то $\sigma_{m,s}^2 - \sigma_{m+1,s} \cdot \sigma_{m-1,s} > 0$ при любом $m \geq l+1$. Значит, тройка чисел (8) не образует геометрической прогрессии и не может быть тривиальной последовательностью.

Теорема 2. Пусть $v_0, \dots, v_s$ и $r_0, \dots, r_p$ – два множества неотрицательных чисел и $v_0 > 0$, $r_0 > 0$. Тогда последовательность

$$\Delta_{k,m}(v_0, \dots, v_s, r_0, \dots, r_p), \quad m = 0, 1, \dots, k, \quad \text{где } k \geq 2, \quad (13)$$

является χ -последовательностью. Эта χ -последовательность будет геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью лишь тогда, когда она приводится к виду

$$v_0^k, v_0^{k-1} r_0, \dots, v_0 r_0^{k-1}, r_0^k. \quad (14)$$

Доказательство. По теореме 1 и лемме 3 последовательности

$$\sigma_0(r_0, \dots, r_p), \sigma_1(r_0, \dots, r_p), \dots, \sigma_k(r_0, \dots, r_p); \quad (15)$$

$$\sigma_k(v_0, \dots, v_s), \sigma_{k-1}(v_0, \dots, v_s), \dots, \sigma_0(v_0, \dots, v_s) \quad (16)$$

являются χ -последовательностями. Перемножая их и пользуясь леммой 2, получим последовательность

$$\begin{aligned} \sigma(v_0, \dots, v_s) \sigma_k(r_0, \dots, r_p), \sigma_1(v_0, \dots, v_s) \sigma_{k-1}(r_0, \dots, r_p), \dots, \\ \sigma_1(v_0, \dots, v_s) \sigma_{k-1}(r_0, \dots, r_p), \end{aligned}$$

которая также будет χ -последовательностью. Вспоминая формулу 1 из свойства 4, получим, что (13) есть χ -последовательность. Это доказывает первую часть теоремы 2. Докажем вторую часть 2. Если $s+p=0$ или $s+p>0$ и $v_1 = \dots = v_s = r_1 = \dots = r_p = 0$, то в обоих случаях получим последовательность

$$\Delta_{k,m}(v_0, r_0) = \Delta_{k,m} \left(v_0, \underbrace{0, \dots, 0}_s, \underbrace{0, \dots, 0}_p \right) = v_0^{k-m} r_0^m,$$

$m = 0, 1, \dots, k$, вида (14), которая будет геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью. Остается показать, что в остальных случаях χ -последовательность (13) не будет геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью. Действительно, пусть вопреки нашему утверждению χ -последовательность (13) является геометрической про-

грессией или тривиальной χ -последовательностью. Тогда по лемме 2 последовательности (15) и (16) будут геометрическими прогрессиями или тривиальными последовательностями. Так как среди чисел $v_0, \dots, v_s, r_0, \dots, r_p$ есть хотя бы три числа, отличные от нуля, то в одной из последовательностей (15), (16) есть хотя бы два числа, отличные от нуля. Согласно теореме 1, одна из этих последовательностей не будет геометрической прогрессией и не будет тривиальной последовательностью. Получаем противоречие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Гостехиздат, 1952. 478 с.
2. Ибрагимов И.И. Методы интерполирования функций и их применения. М.: Наука, 1971. 510 с.
3. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Часть первая. М.: Гостехиздат, 1956. 396 с.

Статья представлена кафедрой математического моделирования факультета фундаментальных наук Вильнюсского технического университета им. Гедиминаса, поступила в научную редакцию «Математика» 14 сентября 2004 г.