

ЛОКАЛЬНО РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛАЯ НОРМА НА $C(K)$, ГДЕ K – ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЙ КВАДРАТ

Доказано существование эквивалентной локально равномерно выпуклой нормы на пространстве $C(K)$, где K – лексикографический квадрат.

В данной статье рассматривается теорема существования эквивалентной локально равномерно выпуклой нормы на пространстве $C(K)$, где K – лексикографический квадрат.

Будем использовать стандартные обозначения, где $\mathcal{Q}$ – множество рациональных чисел. Определим пространство $c_0(\Gamma)$: пусть $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, точка $x \in c_0(\Gamma)$, если для любого $\varepsilon > 0$ $\|x_\alpha\| \geq \varepsilon$ лишь для конечного числа элементов.

Обозначим окрестности точек на лексикографическом квадрате в топологии, индуцированной порядком:

– окрестности точек $(x, 0)$, $x > 0$

$$O_{(x,0)}(\delta) = \{(\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / 0 < x - \xi < \delta, \eta \in [0, 1]\} \cup \{(\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / \xi = x, \eta < \delta\},$$

$$O_{(0,0)}(\delta) = \{(\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / \xi = 0, \eta < \delta\};$$

– окрестности точек (x, y) , $x \in [0, 1]$, $y \in (0, 1)$:

$$O_{(x,y)}(\delta) = \{(\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / \xi = x, |\eta - y| < \delta\};$$

– окрестности точек $(x, 1)$, $x < 1$:

$$O_{(x,1)}(\delta) = \{(\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / 0 < \xi - x < \delta, \eta \in [0, 1]\} \cup \{(\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / \xi = x, \eta > 1 - \delta\},$$

$$O_{(1,1)}(\delta) = \{(\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / \xi = 1, 1 - \eta < \delta\}.$$

ПЕРЕНОРМИРОВКА ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОМ КВАДРАТЕ

Используя результаты статьи Зизлера [1] и следуя примеру построения локально равномерно выпуклой нормы на $C(D)$, где D – пространство «две стрелки» [2], докажем, что на пространстве $C(K)$, где K – лексикографический квадрат, существует эквивалентная норма.

Теорема. Пусть задано пространство $C(K)$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$, где K – лексикографический квадрат. Тогда на $C(K)$ существует эквивалентная первоначальной локально равномерно выпуклая норма.

Доказательство. Из [1] следует, что для существования локально равномерно выпуклой нормы нам достаточно построить на пространстве $C(K)$ семейство линейных ограниченных операторов $P_\alpha : C(K) \rightarrow C(K)$, $\alpha \in \Gamma$, обладающее свойствами:

1. Образ отображения T , определенного формулой $Tx(\gamma) = |P_\gamma(x)|$, $x \in C(K)$, лежит в $c_0(\Gamma)$;
2. Если $x \in C(K)$, то $x \in \overline{\text{sp}}\{P_\alpha x\}_{\alpha \in \Gamma}$;
3. $P_\alpha(C(X))$ – сепарабельны (и, следовательно, имеют эквивалентную локально равномерно выпуклую норму) для любого $\alpha \in \Gamma$.

Пусть $A = \{r_k, k \in N\}$ – нумерация чисел $\mathcal{Q} \cap (0, 1)$.

Определим $\Delta = \{(x, y) \in (0, 1)^2 \cap \mathcal{Q} : y > x\}$.

Положим Γ , равное объединению пяти множеств Γ_i , $1 \leq i \leq 5$, где $\Gamma_1 = \{(0, 0)\}$, $\Gamma_2 = [0, 1] \times \Delta$, $\Gamma_3 = [0, 1] \times A \times \{1\}$, $\Gamma_4 = \{1\} \times \Delta$ и $\Gamma_5 = \{0\} \times A^2 \times [0, 1]$.

Для каждого Γ_i определим следующие операторы:

$$P_{0,0}(f)(x, y) = f(0, 0).$$

$$P_{\xi, r_i, r_j}(f)(x, y) = \frac{1}{i+j} \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } x < \xi \text{ или } x = \xi \text{ и } y < r_i, \\ \frac{f(\xi, r_j) - f(\xi, r_i)}{r_j - r_i} (y - r_i), \text{ если } x = \xi \text{ и } r_i \leq y < r_j, \\ f(\xi, r_j) - f(\xi, r_i), \text{ если } x = \xi \text{ и } y \geq r_j \text{ или } x > \xi; \end{cases}$$

$$P_{\xi, r_i, 1}(f)(x, y) = \frac{1}{i} \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } x < \xi \text{ или } x = \xi \text{ и } y < r_i, \\ \frac{f(\xi, 1) - f(\xi, r_i)}{1 - r_i} (y - r_i), \text{ если } x = \xi \text{ и } r_i \leq y < 1, \\ f(\xi, 1) - f(\xi, r_i), \text{ если } x > \xi; \end{cases}$$

$$P_{1, r_i, r_j}^{r_i, r_j}(f)(x, y) = \frac{1}{i+j} \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq r_i, \\ \frac{f(r_j, 1) - f(r_i, 1)}{r_j - r_i} (x - r_i), \text{ если } r_i < x < r_j, \\ f(r_j, 1) - f(r_i, 1), \text{ если } x \geq r_j; \end{cases}$$

$$P_{0, r_i}^{r_j, \xi_i}(f)(x, y) = \frac{1}{i+j} \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } x < \xi_i, \\ \frac{f(\xi_i, r_i) - f(\xi_i, 0)}{r_i} y, \text{ если } x = \xi_i \text{ и } y < r_i, \\ f(\xi_i, r_i) - f(\xi_i, 0), \text{ если } x = \xi_i \text{ и } y \geq r_i \text{ или } x > \xi_i. \end{cases}$$

Данное семейство операторов удовлетворяет условиям (1) – (3). Покажем это. Т.к. функция f непрерывна, то она

непрерывна в каждой точке, следовательно, для $\varepsilon > 0$ существует $0 < \xi_0 < \eta_1 < 1$, такие, что колебание функции

$f(x, y)$ в окрестностях $O_{(0,1)}(\xi_0)$ и $O_{(1,0)}(1 - \eta_1)$ меньше ε .

Далее, для каждой точки $\xi \in (0,1)$ аналогично можем выбрать η_ξ, ζ_ξ , так, что $0 < \eta_\xi < \zeta_\xi < 1$, чтобы в окрестностях $O_{(\xi,0)}(\xi - \eta_\xi)$ и $O_{(\xi,1)}(\zeta_\xi - \xi)$ колебание функции $f(x, y)$ было меньше ε .

Мы получили относительно открытое покрытие компакта $[0, 1]$ множествами $[0, \xi_0), (\eta_1, 1]$ и (η_ξ, ζ_ξ) для $0 < \xi < 1$, из него можно извлечь конечное подпокрытие: $[0, \xi_0), (\eta_1, 1]$ и $(\eta_{\xi_i}, \zeta_{\xi_i}), i = \overline{0, l}$ так, чтобы в окрестностях $O_{(0,1)}(\xi_0)$, $O_{(1,0)}(1 - \eta_1)$, $i = \overline{0, l}$: $O_{(\xi_i,0)}(\xi_i - \eta_{\xi_i})$, $O_{(\xi_i,1)}(\zeta_{\xi_i} - \xi_i)$ колебание функции было меньше ε .

Далее выберем для $0 < i < l+1$ $p_i \in (\xi_{i-1}, \xi_i)$, $p_0 \in (0, \xi_0)$, $p_{l+1} \in (\eta_1, 1)$, где $p_i = r_{k_i} \in Q \cap [0, 1]$, так, что колебание $f(x, y)$ на множествах $\text{cl}(O_{(0,1)}(p_0))$, $\text{cl}(O_{(1,0)}(1 - p_{l+1}))$ для $0 < i < l+1$ $\text{cl}(O_{(\xi_i,0)}(\xi_i - p_i))$ и $\text{cl}(O_{(\xi_i,1)}(p_{i+1} - \xi_i))$ меньше ε .

Обозначим

$$V_{(x,0)}(\delta, r) = \left\{ (\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / 0 < x - \xi \leq \delta, \eta \in [0, 1] \right\} \cup \left\{ (\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / \xi = x, \eta \leq r \right\},$$

$$V_{(x,1)}(\delta, r) = \left\{ (\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / 0 < \xi - x \leq \delta, \eta \in [0, 1] \right\} \cup \left\{ (\xi, \eta) \in [0, 1]^2 / \xi = x, \eta \geq r \right\}.$$

Тогда для $0 < i < l+1$ существуют такие r_i^0 , $r_i^1 \in Q \cap [0, 1]$, что на множествах $V_{(\xi_i,0)}(\xi_i - p_i, r_i^0)$ и $V_{(\xi_i,1)}(p_{i+1} - \xi_i, r_i^1)$ функция $f(x, y)$ изменяется меньше ε .

Для того чтобы покрыть весь лексикографический квадрат, остается покрыть конечное число отрезков:

$$\{0\} \times [0, 1 - p_0], 0 \leq j \leq l : \{\xi_j\} \times [r_j^0, r_j^1] \text{ и } \{1\} \times [1 - p_{l+1}, 1].$$

Далее, для каждой точки $(0, y) \in \{0\} \times [0, 1 - p_0]$ существует $\alpha_y^0 < y < \beta_y^0$, такие, что функция $f(x, y)$ изменяется на $0 \times (\alpha_y^0, \beta_y^0)$ меньше ε .

$$\left\{ \{0\} \times (\alpha_y^0, \beta_y^0) / y \in [0, 1 - p_0] \right\} \cup \{0\} \times [0, \beta_0^0] \cup \{0\} \times (\alpha_{1-p_0}^0, 1 - p_0]$$

– открытое покрытие компакта, следовательно, существует его конечное подпокрытие

$$\left\{ \{0\} \times (\alpha_{y_i}^0, \beta_{y_i}^0), 1 \leq i \leq n_0 \right\} \cup \{0\} \times [0, \beta_0^0] \cup \{0\} \times (\alpha_{n_0+1}^0, 1 - p_0].$$

Можно выбрать $q_i^0 \in (\alpha_{y_{i+1}}^0, \beta_{y_i}^0), 1 \leq i \leq n_0$, $q_i^0 \in Q \cap [0, 1]$, так, чтобы колебание функции $f(x, y)$ на $\{0\} \times [q_i^0, q_{i+1}^0]$ ($0 \leq i < n_0$), а также на $\{0\} \times [0, q_0^0]$ и на $\{0\} \times [q_{n_0}^0, 1 - p_0]$, было меньше ε .

Аналогично для $0 \leq i \leq l$ $\{\xi_i\} \times [r_i^0, r_i^1]$ выберем $q_j^{\xi_i} \in Q \cap [0, 1], 0 \leq j < n_i$ так, чтобы колебание функции

$f(x, y)$ на $\{\xi_i\} \times [q_j^{\xi_i}, q_{j+1}^{\xi_i}]$ ($0 \leq j < n_i$), а также на $\{\xi_i\} \times [r_i^0, q_0^{\xi_i}]$ и на $\{\xi_i\} \times [q_{n_i}^{\xi_i}, r_i^1]$ было меньше ε .

Также на множестве $\{1\} \times [1 - p_{l+1}, 1]$ можно выбрать $q_i^1 \in (\alpha_{y_{j+1}}^1, \beta_{y_j}^1), 0 \leq i < n_{l+1}$, $q_i^1 \in Q \cap [0, 1]$ так, что на $\{1\} \times [q_i^1, q_{i+1}^1]$ ($0 \leq i < n_{l+1}$), а также на $\{1\} \times [1 - p_{l+1}, q_0^1]$ и на $1 \times [q_{n_{l+1}}^1, 1]$ функция $f(x, y)$ изменялась меньше ε .

Таким образом, для данного покрытия получили:

1. Колебание $f(x, y)$ на множествах $\text{cl}(O_{(0,1)}(p_0))$ и $\text{cl}(O_{(1,0)}(1 - p_{l+1}))$ меньше ε ;

2. Колебание $f(x, y)$ на множествах $\{(x, y) \in [0, 1]^2 / x \in [p_i, p_{i+1}], y \in [0, 1]\}$ меньше ε ;

3. Для $0 \leq i \leq l$ колебание функции $f(x, y)$ на множествах $V_{(\xi_i,0)}(\xi_i - p_i, r_i^0)$ и $V_{(\xi_i,1)}(p_{i+1} - \xi_i, r_i^1)$ меньше ε .

4. колебание функции $f(x, y)$ на $\{0\} \times [q_i^0, q_{i+1}^0]$ ($0 \leq i < n_0$), а также на $\{0\} \times [0, q_0^0]$ и на $\{0\} \times [q_{n_0}^0, 1 - p_0]$ меньше ε ;

5. Для $0 \leq i < n_{l+1}$ колебание функции $f(x, y)$ на $\{1\} \times [q_i^1, q_{i+1}^1]$, а также на $\{1\} \times [1 - p_{l+1}, q_0^1]$ и на $\{1\} \times [q_{n_{l+1}}^1, 1]$ меньше ε ;

6. Для $0 \leq j < n_i$ колебание функции $f(x, y)$ на $\{\xi_i\} \times [q_j^{\xi_i}, q_{j+1}^{\xi_i}]$, а также на $\{\xi_i\} \times [r_i^0, q_0^{\xi_i}]$ и на $\{\xi_i\} \times [q_{n_i}^{\xi_i}, r_i^1]$ меньше ε .

Рассмотрим случай 4 на $\{0\} \times [0, q_0^0]$: $q_0^0 = r_{k_0}^0$, где $r_{k_0}^0 \in A$. Обозначим

$$g_0^0(x, y) = P_{0,0}(f)(x, y) + k_0^0 \cdot P_{0,0,q_0^0}(f)(x, y),$$

при этом $g_0^0(0, 0) = f(0, 0)$, $g_0^0(0, q_0^0) = f(0, q_0^0)$. Тогда на $\{0\} \times [0, q_0^0]$ $|f(x, y) - g_0^0(x, y)| < \varepsilon$.

Обозначим $q_{n_0+1}^0 = 1 - p_0$. Тогда для $0 \leq i \leq n_0$ на $\{0\} \times [q_i^0, q_{i+1}^0]$: $|f(0, x) - f(0, q_i^0)| < \varepsilon$, в том числе $|f(0, q_i^0) - f(0, q_{i+1}^0)| < \varepsilon$. $q_i^0 = r_{k_i}^0, q_{i+1}^0 = r_{k_{i+1}}^0, r_{k_i}^0, r_{k_{i+1}}^0 \in A$.

Обозначим

$$g_{i+1}^0(x, y) = g_i^0(x, y) + (k_i^0 + k_{i+1}^0) \cdot P_{0,q_i^0,q_{i+1}^0}(f)(x, y),$$

причем $g_{i+1}^0(0, q_{i+1}^0) = f(0, q_{i+1}^0)$ и $g_{i+1}^0(0, q_i^0) = f(0, q_i^0)$. Заметим, что $g_{i+1}^0|_{0 \times [0, q_i^0]} = g_i^0(x, y)$. Тогда на $0 \times [0, q_{i+1}^0]$:

$$|f(x, y) - g_{i+1}^0(x, y)| < \varepsilon.$$

В итоге на $\{0\} \times [0, 1 - p_0]$ $|f(x, y) - g_{n_0+1}^0(x, y)| < \varepsilon$.

Рассмотрим случай 1. На множестве $\text{cl}(O_{(0,1)}(p_0))$ $|f(x, y) - f(0, 1)| < \varepsilon$, в том числе $|f(0, 1 - p_0) - f(0, 1)| < \varepsilon$ и $|f(p_0, 1) - f(0, 1)| < \varepsilon$, $1 - p_0 = r_{k_0}, r_{k_0} \in A$.

Обозначим

$$h_0(x, y) = g_{n_0+1}^0(x, y) + k_0 \cdot P_{0, q_{n_0+1}, 1}(f)(x, y),$$

$h_0(x, y)|_{0 \times [0, q_{n_0+1}]} = g_{n_0+1}^0(x, y)$, $h_0(0, q_{n_0+1}^0) = f(0, q_{n_0+1}^0)$ и $h_0(p_0, 1) = f(p_0, 1)$. Тогда на $[0, p_0] \times [0, 1]$ $|f(x, y) - h_0(x, y)| < \varepsilon$.

Рассмотрим случай 2. На множестве $\{(x, y) \in [0, 1]^2 / x \in [p_i, p_{i+1}], y \in [0, 1]\}$ $|f(x, y) - f(p_i, 1)| < \varepsilon$, в том числе и $|f(p_{i+1}, 1) - f(p_i, 1)| < \varepsilon$. Заметим, что $p_i = r_{k_i}$, $p_{i+1} = r_{k_{i+1}}$.

Обозначим

$$h_i(x, y) = h_{i-1}(x, y) + (k_i + k_{i+1}) \cdot P_1^{p_i, p_{i+1}}(f)(x, y),$$

при этом $h_i(x, y)|_{[0, p_i] \times [0, 1]} = h_{i-1}(x, y)$, $h_i(p_i, 1) = f(p_i, 1)$ и $h_i(p_{i+1}, 1) = f(p_{i+1}, 1)$. Тогда на $[0, p_{i+1}] \times [0, 1]$ $|f(x, y) - h_i(x, y)| < \varepsilon$.

Рассмотрим случай 3. На множестве $V_{(\xi_i, 0)}(\xi_i - p_i, r_i^0)$ $|f(x, y) - f(\xi_i, 0)| < \varepsilon$, в том числе $|f(p_i, 1) - f(\xi_i, 0)| < \varepsilon$ и $|f(\xi_i, r_i^0) - f(\xi_i, 0)| < \varepsilon$, $r_i^0 = r_{k_i^0}$, $r_{k_i^0} \in A$.

Обозначим

$$h_{i-\frac{1}{2}}(x, y) = h_{i-1}(x, y) + \lambda_i \cdot (k_i + k_i^0) \cdot P_{0, r_i^0}^{p_i, \xi_i}(f)(x, y),$$

$$h_{i-\frac{1}{2}}(p_i, 1) = f(p_i, 1).$$

$\lambda_i = \frac{f(\xi_i, r_i^0) - f(p_i, 1)}{f(\xi_i, r_i^0) - f(\xi_i, 0)}$ подбирается из условия:

$$\begin{aligned} h(x, y) = & P_{0,0}(f)(x, y) + k_0^0 \cdot P_{0,0,q_0^0}(f)(x, y) + \sum_{j=0}^{n_0} (k_j^0 + k_{j+1}^0) \cdot P_{0,q_j^0,q_{j+1}^0}(f)(x, y) + \\ & + k_0 \cdot P_{0,q_{n_0+1},1}(f)(x, y) + \sum_{j=0}^s (k_j + k_{j+1}) \cdot P_1^{p_j, p_{j+1}}(f)(x, y) + \\ & + \sum_{i=0}^l \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} (k_j^i + k_{j+1}^i) \cdot P_{\xi_i, q_j^{\xi_i}, q_{j+1}^{\xi_i}}(f)(x, y) + (k_{n_i}^i + k^i) \cdot P_{\xi_i, q_{n_0}^{\xi_i}, r_i^1}(f)(x, y) \right) + \\ & + \sum_{i=0}^l \left(\lambda_i \cdot (k_i + k_i^0) P_{0, r_i^0}^{p_i, \xi_i}(f)(x, y) + k^i \cdot P_{\xi_i, r_i^0, 1}(f)(x, y) \right) + \\ & + \lambda_{l+1} \cdot (k_{l+1} + k_{l+1}^0) \cdot P_{0, l-p_{l+1}}^{p_{l+1}, 1}(f)(x, y) + (k_{l+1}^0 + k_0^1) \cdot P_{1, l-p_{l+1}, q_0^1}(f)(x, y) + \\ & + \sum_{j=0}^{n_{l+1}-1} (k_j^1 + k_{j+1}^1) \cdot P_{1, q_j^1, q_{j+1}^1}(f)(x, y) + k_{n_{l+1}+1}^1 \cdot P_{1, q_{n_{l+1}}^1, 1}(f)(x, y). \end{aligned}$$

Эта формула показывает справедливость условия 2. Условие 1 выполнено, так как для фиксированной функции $f(x, y)$ и $\varepsilon > 0$: $|P_\gamma(f)| \geq \varepsilon$ только для конечных подмножеств множеств Γ_1, Γ_4 , $\{(\xi_k, r_i, r_j), 0 \leq k \leq l\}$, $\{(1, r_i, r_j)\}$, $\{(0, r_i, r_j, \xi_k), 0 \leq k \leq l\}$. Условие

$h_{i-\frac{1}{2}}(\xi_i, r_i^0) = f(\xi_i, r_i^0)$. Тогда на $[0, \xi_i] \times [0, 1] \cup \{\xi_i\} \times [0, \xi_i - p_i]$ $|f(x, y) - h_{i-\frac{1}{2}}(x, y)| < \varepsilon$.

Случай 5 и 6 аналогичен случаю 4.

В случае 3 на множестве $V_{(\xi_i, 1)}(p_{i+1} - \xi_i, r_i^1)$

$|f(x, y) - f(\xi_i, 1)| < \varepsilon$, в том числе

$$|f(p_{i+1}, 1) - f(\xi_i, 1)| < \varepsilon$$

$$\text{и } |f(\xi_i, r_i^1) - f(\xi_i, 1)| < \varepsilon, \quad r_i^1 = r_{k_i^1}, \quad r_{k_i^1} \in A.$$

Обозначим

$$h_i(x, y) = g_{n_i+1}^{\xi_i}(x, y) + k^i \cdot P_{\xi_i, r_i^0, 1}(f)(x, y).$$

Тогда на $[0, p_{i+1}] \times [0, 1]$ $|f(x, y) - h_i(x, y)| < \varepsilon$.

В завершении рассмотрим

$$\text{cl}(O_{(1,0)}(1 - p_{l+1})) |f(x, y) - f(1, 0)| < \varepsilon,$$

в том числе

$$|f(p_{l+1}, 1) - f(1, 0)| < \varepsilon \text{ и } |f(1, 1 - p_{l+1}) - f(1, 0)| < \varepsilon.$$

Обозначим

$$h_{l+1}(x, y) = h_l(x, y) + \lambda_{l+1} (k_{l+1}^0 + k_{l+1}) \cdot P_{0, 1-p_{l+1}}^{p_{l+1}, 1}(f)(x, y),$$

где λ_{l+1} ищется из условия, что

$$h_{l+1}(1, 1 - p_{l+1}) = f(1, 1 - p_{l+1}).$$

Тогда на

$$[0, 1] \times [0, 1] \cup \{1\} \times [0, 1 - p_{l+1}] |f(x, y) - h_{l+1}(x, y)| < \varepsilon.$$

В итоге получим на $[0, 1]^2$ $|f(x, y) - h(x, y)| < \varepsilon$, где

3 следует из того, что $P_\gamma(C(K))$ изоморфны $C[0, 1]$, которое в свою очередь сепарабельно. Тогда на пространстве $C(K)$ существует эквивалентная первоначальной локально равномерно выпуклая норма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zizler V. Locally uniformly rotund renorming and decomposition of Banach spaces // Bul. Austral. Math. Soc. 1984. Vol. 29. P. 256–265.
2. J. E. Jayne J.E., Namioka I. and Rogers C.A. σ -fragmentable Banach spaces // Mathematika. 1992. Vol. 39. P. 166–188.

Статья представлена кафедрой теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 20 мая 2004 г.