

УРАВНЕНИЕ ЛЕВНЕРА С СОСТАВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-2409.2003.01

В работе рассматривается композиция решений уравнения Левнера с линейным и постоянным управлением. Для полученного отображения находится предельная, принадлежащая классу S , функция.

Примеров интегрирования уравнения Левнера в квадратах известно очень немного [1]. Поэтому представляется важным нахождение новых управляющих функций, позволяющих найти решение этого уравнения. В связи с этим интересно аппроксимировать управление постоянными и линейными функциями. В работе рассматривается простейший случай, когда управляющая функция составлена из одной линейной и одной постоянной частей.

1. Рассмотрим уравнение Левнера

$$\frac{d\zeta^{(1)}}{d\tau} = -\zeta^{(1)} \frac{\mu(\tau) + \zeta^{(1)}}{\mu(\tau) - \zeta^{(1)}}, \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

с управляющей функцией

$$\mu(\tau) = \begin{cases} e^{i\alpha\tau} \mu_0, & 0 \leq \tau \leq \tau_1, \\ e^{i\alpha_1}, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 < \infty, \end{cases}$$

где $\mu_0 = \text{const}$, $|\mu_0| = 1$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$, $\alpha_1 = \alpha\tau_1 + \arg \mu_0$.

На промежутке $\tau \in [0, \tau_1]$ будем интегрировать

уравнение $\frac{d\zeta^{(1)}}{d\tau} = -\zeta^{(1)} \frac{\mu_0 e^{i\alpha\tau} + \zeta^{(1)}}{\mu_0 e^{i\alpha\tau} - \zeta^{(1)}}$ при начальном условии $\zeta^{(1)}(0, z) = z$, где z — точка единичного круга

$E = \{z : |z| < 1\}$. Произведя замену $\zeta_1 = e^{-i\alpha\tau} \zeta^{(1)}$, придем к уравнению

$$\frac{d \ln(e^{i\alpha\tau} \zeta_1)}{d\tau} = -\frac{\mu_0 + \zeta_1}{\mu_0 - \zeta_1}, \quad \zeta_1(0, z) = z.$$

Выполнив интегрирование, с учетом начального условия, получим

$$\frac{2}{1 + \alpha^2} \ln \frac{\mu_0(1 + i\alpha) + (1 - i\alpha)z}{\mu_0(1 + i\alpha) + (1 - i\alpha)\zeta_1 \mu_0} - \frac{1}{1 + i\alpha} \ln \frac{z}{\mu_0 \zeta_1} = -\tau. \quad (1)$$

Функция $\zeta^{(1)} = \zeta_1 e^{i\alpha\tau}$, где ζ_1 неявно задана равенством (1), отображает единичный круг на единичный круг K_1 с разрезом по некоторой жордановой кривой L_1 .

На промежутке $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ уравнение

$$\frac{d\zeta^{(2)}}{d\tau} = -\zeta^{(2)} \frac{e^{i\alpha_1} + \zeta^{(2)}}{e^{i\alpha_1} - \zeta^{(2)}}$$

будем интегрировать при начальном условии

$$\zeta^{(2)}(0, \zeta^{(1)}) = \zeta^{(1)},$$

где $\zeta^{(1)} \in K_1 \setminus L_1$. Сделав замены

$$\zeta_2 = e^{-i(\alpha_1 - \pi)} \zeta^{(2)}, \quad \zeta_1^{(1)} = e^{-i(\alpha_1 - \pi)} \zeta^{(1)},$$

получаем уравнение $\frac{d\zeta_2}{d\tau} = -\zeta_2 \frac{-1 + \zeta_2}{-1 - \zeta_2}$ с начальным

условием $\zeta_2(0, \zeta_1^{(1)}) = \zeta_1^{(1)}$, где $\zeta_1^{(1)}$ — точка единичного круга с жордановым разрезом, полученного поворотом области $K_1 \setminus L_1$ на угол $\pi - \alpha_1$.

Выполнив интегрирование, с учетом начального условия будем иметь

$$\ln \zeta_2 - 2 \ln(1 - \zeta_2) = -\tau + \ln \zeta_1^{(1)} - 2 \ln(1 - \zeta_1^{(1)}). \quad (2)$$

Введем обозначение

$$\omega = \frac{\zeta_1^{(1)}}{(1 - \zeta_1^{(1)})^2}, \quad (3)$$

с учетом которого равенство (2) запишется в виде квадратного уравнения для ζ_2 :

$$(\zeta_2)^2 - 2 \left[1 + \frac{e^\tau}{2\omega} \right] \zeta_2 + 1 = 0.$$

Из данного уравнения следует, что

$$\zeta_2 = \frac{(1 - \sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}})^2}{4\omega e^{-\tau}}.$$

Здесь корень в числителе выбран в соответствии с условием $\sqrt{1} = 1$.

Таким образом, решение уравнения Левнера на промежутке $[\tau_1, \tau_2]$ имеет вид

$$\zeta^{(2)} = \frac{(1 - \sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}})^2}{4\omega e^{-\tau}} e^{i(\alpha_1 - \pi)}$$

и переводит $K_1 \setminus L_1$ в единичный круг K_2 с непрерывным разрезом L_2 , который состоит из прямолинейной части, начинающейся на границе единичного круга и идущей по радиусу, и части, являющейся жордановой кривой. Точкой стыка описанных частей разреза L_2 является точка

$$\zeta^{(2)} = -e^\tau (1 - \sqrt{1 - e^{-\tau}})^2 e^{i(\alpha_1 - \pi)}.$$

Композиция $\zeta(\tau, z) = \zeta^{(2)}(\tau, (\zeta^{(1)}(\tau, z)))$ решений $\zeta^{(1)}$ и $\zeta^{(2)}$ уравнения Левнера есть функция, голоморфная в E при каждом $\tau \in [0, \tau_2]$ и однолистно отображающая E на $K_2 \setminus L_2$.

2. Найдем функцию, предельную для функции ζ . Имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \zeta(\tau, z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \frac{(1 - \sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}})^2}{4\omega e^{-\tau}} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}} + 2\omega e^{-\tau}}{2\omega e^{-2\tau}} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\omega e^{-\tau} - \omega e^{-\tau}}{\sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}} - 2\omega e^{-2\tau}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}} - 2e^{-\tau}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}}}{-2e^{-\tau} \sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}}} = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}} + \frac{2\omega e^{-\tau}}{\sqrt{1 + 4\omega e^{-\tau}}}} = \omega.
\end{aligned}$$

Учитывая равенство (3), получаем

$$f(z) = \frac{\zeta_1^{(1)}}{(1 - \zeta_1^{(1)})^2}, \quad (4)$$

где $\zeta_1^{(1)} = e^{-i(\alpha_1 - \pi - \alpha\tau)} \zeta_1$ и ζ_1 неявно определяется равенством (1), в котором $\tau = \tau_1$. Функция $f(z) = z + \dots$, даваемая формулой (4), однолистка в единичном круге и отображает его на плоскость с непрерывным разрезом, состоящим из прямолинейного участка, идущего из ∞ , и конечной жордановой кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 4 октября 2004 г.