

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФОНДА СОЦИАЛЬНОГО СТРАХОВАНИЯ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТАХ И СО СЛУЧАЙНЫМИ РАСХОДАМИ НА СОЦИАЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ

В работе предлагается математическая модель Фонда социального страхования при релейном и релейно-гистерезисном управлении капиталом такого фонда. Рассмотрен случай, когда выплаты по страховым случаям и выплаты на финансирование социальных программ образуют пуассоновский поток событий и являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения. В рамках сделанных предположений найдена стационарная плотность распределения капитала Фонда.

Математическая теория процессов разорения, играющих важную роль в страховом деле, ведет начало с 1903 г. Начиная с этого времени исследование процессов разорения проводились различными авторами, например, обзор работ посвященных этой тематике в только в [1] содержит тридцать шесть наименований. Дальнейшим развитием теории процессов разорения послужила так называемая классическая модель работы страховой компании [2]. В последние годы достаточно много работ, например [3–6], посвящено обобщению и усложнению этой модели.

Но в настоящий момент в Российской Федерации кроме классических страховых компаний на рынке страховых услуг присутствуют государственные организации. Используя механизмы, во многом похожие на страховую деятельность, государство с помощью таких организаций выполняет некоторые социальные функции и реализует социальные гарантии. Как уже было отмечено выше, деятельность таких структур, с одной стороны, во многом похожа на работу страховой компании, с другой стороны, она имеет ряд существенных отличий. Например, для таких организаций характерен полный или частичный отказ от получения коммерческой выгоды по результатам своей работы. Стандартным примером организации такого типа являются государственные фонды социального страхования.

Фонды социального страхования РФ созданы на основании постановления Совета министров РФ и Фонда независимых профсоюзов. В отличие от обычных страховых компаний в задачу Фонда входит не только оплата страховых случаев (временной нетрудоспособности, пособий по беременности и родам и т.д.), но и систематические выплаты по реализации региональных и отраслевых программ по охране здоровья работников, санаторно-курортному лечению, обслуживанию детей и т.д.

Построению и исследованию математических моделей фондов социального страхования в последние годы посвящен ряд работ, в которых идеи классической модели страхования применяются с учетом особенности работы таких фондов [7–9]. В настоящей работе предлагается математическая модель работы фонда, в которой выделение капитала для финансирования социальных программ считается случайным процессом, интенсивность которого зависит от размера капитала. В рамках модели находится плотность распределения вероятностей капитала фонда при релейно-гистерезисном управлении, обобщающая результаты, полученные в [9], при дополнительном предположении о том, что выплаты по страховым случаям и на социальные программы имеют экспоненциальное распределение.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФОНДА

Основной характеристикой состояния Фонда является его капитал $S(t)$ в момент времени t . С этим капиталом происходят следующие изменения:

1. В Фонд поступают средства от предприятий и организаций. Мы будем считать, что они поступают непрерывно во времени со скоростью c_0 .

2. Происходят страховые выплаты. Будем считать, что поток страховых выплат является пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ , и сами страховые выплаты ξ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с экспоненциальным распределением

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x}{a}\right), x \geq 0. \quad (1).$$

3. Фонд выделяет часть своих средств на социальные программы. В рамках настоящей модели считается, что процесс выделения денег на социальные нужды образует пуассоновский поток переменной интенсивности $\mu(S)$, а сами выплаты η являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с экспоненциальным распределением

$$p_{\eta}(x) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x}{b}\right), x \geq 0. \quad (2).$$

Именно в наличии зависимости $\mu(S)$ от величины капитала S и заключается отличие предлагаемой модели от классических [1–2]. Кроме того, будем считать, что достижение порога $S(t) = 0$ не приводит к разорению фонда, и даже при $S(t) < 0$ он продолжает функционировать, только происходят задержки по страховым выплатам.

РЕЛЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КАПИТАЛОМ ФОНДА

Рассмотрим релейный вариант управления капиталом Фонда, суть которого заключается в следующем. Устанавливается некоторое пороговое значение капитала S_0 , при $S < S_0$ выплаты на социальные нужды не производятся, т.е. всегда $\mu(S) = 0$. При $S > S_0$ всегда производятся выплаты с некоторой постоянной интенсивностью μ , т.е. $\mu(S) = \mu$.

Найдем плотность вероятностей $p(S)$ капитала Фонда S в стационарном режиме. Эта плотность распределения будет иметь разный вид в каждой из выше перечисленных областей. Сначала рассмотрим область $S > S_0$, обозначим $p_2(S)$ соответствующую плотность распределения вероятностей. Используя идеологию вывода обратных уравнений Колмогорова для марковских процессов [10], можем записать

$$\begin{aligned} p_2(S) = & p_2(S - c_0\Delta t)(1 - (\lambda + \mu)\Delta t + \\ & + \lambda\Delta t \int_0^{\infty} p_2(S + x)p_{\xi}(x)dx + \\ & + \mu\Delta t \int_0^{\infty} p_2(S + y)p_{\eta}(y)dy + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Разлагая $p_2(S - c_0\Delta t)$ в ряд Тейлора, получим

$$p_2(S) = (1 - (\lambda + \mu)\Delta t)[p_2(S) - p_2'(S)c_0\Delta t] + \\ + \lambda\Delta t \int_0^\infty p_2(S+x)p_\xi(x)dx + \\ + \mu\Delta t \int_0^\infty p_2(S+y)p_\eta(y)dy + o(\Delta t).$$

Сокращая $p_2(S)$, деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получим интегро-дифференциальное уравнение для $p_2(S)$:

$$c_0 p_2'(S) + (\lambda + \mu)p_2(S) = \lambda \int_0^\infty p_2(S+x)p_\xi(x)dx + \\ + \mu \int_0^\infty p_2(S+y)p_\eta(y)dy. \quad (3)$$

Воспользуемся теперь тем, что $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ имеют экспоненциальный вид. Тогда

$$\int_0^\infty p_2(S+x)p_\xi(x)dx = \frac{1}{a} \int_0^\infty p_2(S+x)\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx = \\ = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{S}{a}\right) \int_S^\infty p_2(t)\exp\left(-\frac{t}{a}\right)dt.$$

Аналогично

$$\int_0^\infty p_2(S+y)p_\eta(y)dy = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{S}{b}\right) \int_S^\infty p_2(t)\exp\left(-\frac{t}{b}\right)dt.$$

Тогда интегро-дифференциальное уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$c_0 p_2'(S) + (\lambda + \mu)p_2(S) = \frac{\lambda}{a} \exp\left(-\frac{S}{a}\right) \int_S^\infty p_2(t)\exp\left(-\frac{t}{a}\right)dt + \\ + \frac{\mu}{b} \exp\left(-\frac{S}{b}\right) \int_S^\infty p_2(t)\exp\left(-\frac{t}{b}\right)dt. \quad (4)$$

Решение (4) будем искать в виде $p_2(S) = C \exp(-\gamma S)$. После преобразования слагаемых, входящих в (4), с учетом явного вида решения получаем

$$-c_0 \gamma C e^{-\gamma S} + (\lambda + \mu) C e^{-\gamma S} = \frac{\lambda C}{a\gamma + 1} e^{-\gamma S} + \frac{\mu C}{b\gamma + 1} e^{-\gamma S}.$$

Приравнявая к нулю коэффициент при $C \exp(-\gamma S)$, получим уравнение, определяющее γ :

$$-c_0 \gamma + (\lambda + \mu) = \frac{\lambda}{a\gamma + 1} + \frac{\mu}{b\gamma + 1}. \quad (5)$$

После приведения последнего уравнения к стандартному виду окончательно имеем

$$\gamma \{c_0 a b \gamma^2 + \gamma(c_0(a+b) - (\lambda + \mu)ab) + (c_0 - (\lambda a + \mu b))\} = 0.$$

Таким образом, имеются три корня: один $\gamma = 0$, а два других находятся из квадратного уравнения

$$c_0 a b \gamma^2 + \gamma(c_0(a+b) - (\lambda + \mu)ab) + (c_0 - (\lambda a + \mu b)) = 0. \quad (6)$$

В области $S > S_0$, исходя из экономического смысла задачи, должно выполняться условие $c_0 - (\lambda a + \mu b) < 0$. Это означает, что $\gamma_1 \gamma_2 < 0$, следовательно, оба корня вещественные и имеют разные знаки.

Пусть для определенности $\gamma_1 > 0$, а $\gamma_2 < 0$. Тогда общее решение (4) имеет вид

$$p_2(S) = A_2 + B_2 \exp(-\gamma_2 S) + C_2 \exp(-\gamma_1 S),$$

но при этом должно выполняться естественное граничное условие $\lim_{S \rightarrow +\infty} p_2(S) = 0$. Следовательно, $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, так как $\gamma_2 < 0$, то $\exp(-\gamma_2 S) \rightarrow +\infty$, и только $C_2 > 0$.

Окончательно, для удобства запишем $p_2(S)$ в следующем виде:

$$p_2(S) = C_2 \exp(-\gamma_1(S - S_0)), \quad S \geq S_0, \quad (7)$$

где γ_1 – положительный корень квадратного уравнения (6), а разность $S - S_0$ записана для удобства. Заметим, что константа C_2 пока никак не определена.

Теперь перейдем к области, где $S < S_0$, найдем плотность распределения вероятностей в этой области, которую обозначим $p_0(S)$. Рассуждая аналогичным образом, для этого случая получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$c_0 p_0'(S) + \lambda p_0(S) = \\ = \frac{\lambda}{a} \left[\int_0^{S_0-S} p_0(S+x) e^{-\frac{x}{a}} dx + \int_{S_0-S}^\infty p_2(S+x) e^{-\frac{x}{a}} dx \right] + \\ + \frac{\mu}{b} \int_{S_0-S}^\infty p_2(S+x) e^{-\frac{x}{b}} dx. \quad (8)$$

Учитывая экспоненциальный вид функций распределения $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$, выполним в (8) замену переменных $t = S + x$. Получим

$$c_0 p_0'(S) + \lambda p_0(S) = \\ = \frac{\lambda}{a} e^{\frac{S}{a}} \left[\int_S^{S_0} p_0(t) e^{-\frac{t}{a}} dt + \int_{S_0}^\infty p_2(t) e^{-\frac{t}{a}} dt \right] + \\ + \frac{\mu}{b} e^{\frac{S}{b}} \int_{S_0-S}^\infty p_2(t) e^{-\frac{t}{b}} dt.$$

Учитывая (7), вычислим интегралы, которые содержат $p_2(S)$. Имеем

$$\frac{\lambda}{a} \int_{S_0}^\infty p_2(t) e^{-\frac{t}{a}} dt = \frac{C_2 \lambda}{a\gamma_1 + 1} e^{\frac{S_0}{a}},$$

$$\frac{\mu}{b} \int_{S_0}^\infty p_2(t) e^{-\frac{t}{b}} dt = \frac{C_2 \mu}{b\gamma_1 + 1} e^{\frac{S_0}{b}}.$$

Таким образом, окончательно, уравнение (8) имеет следующую структуру

$$c_0 p_0'(S) + \lambda p_0(S) = \\ = \frac{\lambda}{a} e^{\frac{S}{a}} \int_S^{S_0} p_0(t) e^{-\frac{t}{a}} dt + e^{\frac{S}{a}} \text{Const}_1 + e^{\frac{S}{b}} \text{Const}_2 + \\ + \frac{\mu}{b} e^{\frac{S}{b}} \int_{S_0-S}^\infty p_2(t) e^{-\frac{t}{b}} dt.$$

После применения стандартной процедуры сведения к дифференциальному уравнению получим неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$p_0''(S) - \frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a} p_0'(S) = e^{\frac{S}{b}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \text{Const}_2.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет корни $\delta = 0$ и $\delta = (c_0 - \lambda a)/c_0 a$. Заметим, что последний корень положителен, так как в этой области

выполняется условие $c_0 > \lambda a$, которое следует из экономического смысла задачи. Так как правая часть уравнения зависит от S как $\exp\{S/b\}$, то решение (8) имеет следующий вид:

$$p_0(S) = A_0 + F_0 \exp(\delta S) + G_0 \exp(S/b). \quad (9)$$

Но $\lim_{S \rightarrow -\infty} p_0(S) = 0$, а значит $A_0 = 0$. Условия для оп-

ределения оставшихся двух констант находятся после подстановки (9) в исходное уравнение (8). После ряда преобразований, приравнявая числовые коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты, получим следующую систему линейных уравнений для определения F_0 и G_0 :

$$\begin{cases} F_0 \frac{\lambda}{a\delta - 1} e^{\delta S_0} + G_0 \frac{\lambda b}{a - b} e^{\frac{S_0}{b}} = -C_2 \frac{\lambda}{a\gamma_1 + 1}, \\ G_0 e^{\frac{S_0}{b}} \left(\frac{c_0}{b} + \frac{\lambda a}{a - b} \right) = C_2 \frac{\mu}{b\gamma_1 + 1}. \end{cases}$$

Откуда окончательно

$$G_0 = C_2 e^{-\frac{S_0}{b}} \frac{\mu b(a - b)}{(b\gamma_1 + 1)(c_0[a - b] + \lambda ab)},$$

$$F_0 = -C_2 e^{-\delta S_0} \left[\frac{\lambda}{a\gamma_1 + 1} + \frac{\mu b(a - b)}{(b\gamma_1 + 1)(c_0[a - b] + \lambda ab)} \right]. \quad (10)$$

Заметим, что осталось неиспользованным условие сшивания на границе S_0 , которое выглядит следующим образом $p_2(S_0) = p_0(S_0 - c_0\Delta t) + O(\Delta t)$. Или, после предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем условие $p_2(S_0) = p_0(S_0)$. Покажем, что это условие не противоречит полученным выше соотношениям, т.е. является следствием (7) и (10).

Имеем $p_0(S_0) = F_0 \exp(\delta S_0) + G_0 \exp(S_0/b)$, $p_2(S_0) = C_2$. Таким образом, необходимо проверить истинность соотношения $C_2 = F_0 \exp(\delta S_0) + G_0 \exp(S_0/b)$. Подставляя в последнее соотношение явный вид констант F_0 и G_0 , после достаточно громоздких преобразований получим $\frac{a}{c_0} \frac{\lambda}{a\gamma_1 + 1} + \frac{b}{c_0} \frac{\mu}{b\gamma_1 + 1} = 1$. А это просто другая форма записи уравнения (6). Таким образом, условие сшивания $p_2(S_0) = p_0(S_0)$ не является самостоятельным, а следует из полученного ранее решения.

Неизвестная C_2 находится из очевидного условия

$$\text{нормировки} \quad \int_{-\infty}^{S_0} p_0(S) dS + \int_{S_0}^{+\infty} p_2(S) dS = 1.$$

СЛУЧАЙ РЕЛЕЙНО-ГИСТЕРЕЗИСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теперь рассмотрим более сложный вариант управления капиталом Фонда, который можно назвать релейно-гистерезисным управлением. Он состоит в следующем.

Устанавливаются два пороговых значения величины капитала – S_1 и S_2 . При $S < S_1$ выплаты на социальные нужды не производятся, то есть всегда $\mu(S) = 0$. При $S > S_2$ всегда производятся выплаты с интенсивностью μ , т.е. $\mu(S) = \mu$. А вот в области $S_1 < S < S_2$ выплаты производятся или нет в зависимости от того, как траектория $S(t)$ вошла в эту область: если $S(t)$ вошла через границу S_1 , то берется $\mu(S) = 0$, если же она вошла че-

рез границу S_2 , то берется $\mu(S) = \mu$. Другими словами, выплаты на социальные нужды начинаются, когда впервые выполняется неравенство $S(t) \geq S_2$, и заканчиваются, когда станет $S(t) < S_1$. Область $S_1 < S < S_2$ и представляет собой гистерезис в управлении выплатами на социальные нужды. При этом само управление капиталом носит релейный характер.

Найдем плотность вероятностей $p(S)$ капитала фонда S в стационарном режиме. Она будет иметь различный вид в областях, $S < S_1$, $S_1 < S < S_2$ и $S > S_2$. Причем в области $S_1 < S < S_2$ плотность вероятности будет зависеть еще и от вида траектории процесса $S(t)$.

Начнем с области $S < S_2$. Отметим, что в этой области выплаты на социальные программы производятся, таким образом $\mu(S) = \mu$. Плотность вероятностей $p(S)$ в этой области будем обозначать как $p_2(S)$. Результат для $p_2(S)$ с точностью до обозначений совпадает с аналогичной плотностью в случае простого релейного управления. Таким образом, в новых обозначениях имеем

$$p_2(S) = C_2 \exp(-\gamma_1(S - S_2)), \quad S \geq S_2, \quad (11)$$

где γ_1 – положительный корень квадратного уравнения (6), а разность $S - S_2$ записана для удобства. Заметим, что константа C_2 пока никак не определена.

Перейдем к области, в которой $S_1 < S < S_2$. Сначала рассмотрим случай, когда в этой области выплаты на социальные нужды производятся. Соответствующую плотность вероятностей будем обозначать как $p_{12}(S)$. Тогда, используя аналогичные рассуждения, получим следующее уравнение для определения $p_{12}(S)$:

$$\begin{aligned} c_0 p'_{12}(S) + (\lambda + \mu) p_{12}(S) = \\ = \frac{\lambda}{a} \left[\int_0^{S_2 - S} p_{12}(S + x) e^{-\frac{x}{a}} dx + \int_{S_2 - S}^{\infty} p_2(S + x) e^{-\frac{x}{a}} dx \right] + \\ + \frac{\mu}{b} \left[\int_0^{S_2 - S} p_{12}(S + x) e^{-\frac{x}{b}} dx + \int_{S_2 - S}^{\infty} p_2(S + x) e^{-\frac{x}{b}} dx \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Учитывая (11), преобразуем интегралы, которые содержат $p_2(S)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_{S_2 - S}^{\infty} p_2(S + x) e^{-\frac{x}{a}} dx &= \frac{C_2}{a\gamma_1 + 1} e^{-\frac{S - S_2}{a}}, \\ \frac{1}{b} \int_{S_2 - S}^{\infty} p_2(S + x) e^{-\frac{x}{b}} dx &= \frac{C_2}{b\gamma_1 + 1} e^{-\frac{S - S_2}{b}}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно после замены $t = S + x$ уравнение (12) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} c_0 p'_{12}(S) + (\lambda + \mu) p_{12}(S) = \\ = \frac{\lambda}{a} e^{\frac{S - S_2}{a}} \int_S^{\frac{S - S_2}{a}} p_{12}(t) e^{-\frac{t}{a}} dt + \frac{C_2}{a\gamma_1 + 1} e^{\frac{S - S_2}{a}} + \\ + \frac{\mu}{b} e^{\frac{S - S_2}{b}} \int_S^{\frac{S - S_2}{b}} p_{12}(t) e^{-\frac{t}{b}} dt + \frac{C_2}{b\gamma_1 + 1} e^{\frac{S - S_2}{b}}. \quad (13) \end{aligned}$$

Используя стандартную методику сведения к дифференциальным уравнениям, несложно показать, что уравнения для $p_2(S)$ и $p_{12}(S)$ абсолютно аналогичны. Поэтому решение (7) будем искать в следующем виде:

$$p_{12}(S) = A_{12} + B_{12} \exp(-\gamma_2 S) + C_{12} \exp(-\gamma_1 S). \quad (14)$$

Вычисляем соответствующие интегралы:

$$\begin{aligned} \frac{A_{12}}{a} \int_S^{S_2} e^{-\frac{t}{a}} dt &= A_{12} \left(e^{-\frac{S}{a}} - e^{-\frac{S_2}{a}} \right), \\ \frac{B_{12}}{a} \int_S^{S_2} e^{-\left(\gamma_2 - \frac{t}{a}\right)} dt &= \frac{B_{12}}{\gamma_2 a + 1} \left(e^{-\left(\gamma_2 + \frac{1}{a}\right)S} - e^{-\left(\gamma_2 + \frac{1}{a}\right)S_2} \right), \\ \frac{C_{12}}{a} \int_S^{S_2} e^{-\left(\gamma_1 - \frac{t}{a}\right)} dt &= \frac{C_{12}}{\gamma_1 a + 1} \left(e^{-\left(\gamma_1 + \frac{1}{a}\right)S} - e^{-\left(\gamma_1 + \frac{1}{a}\right)S_2} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что интегралы, в которые в качестве сомножителя входит $\exp(-t/b)$, будут выглядеть аналогично с точностью до параметра распределения.

Подставляя (14) в (13) и учитывая последние равенства, получим некоторое выражение, левая и правая части которого будут содержать слагаемые, зависящие от различных степеней экспоненты. Для того чтобы полученное выражение обратилось в тождество, потребуем равенства числовых коэффициентов справа и слева у соответствующих степеней экспоненты. Получим при свободных членах $(\lambda + \mu)A_{12} = \lambda A_{12} + \mu A_{12}$. Это очевидное равенство, которое просто сокращается в обеих частях тождества. При $\exp(-\gamma_2 S)$

$$-c_0 \gamma_2 B_{12} + (\lambda + \mu)B_{12} = \frac{\lambda B_{12}}{a\gamma_2 + 1} + \frac{\mu B_{12}}{b\gamma_2 + 1}.$$

Но γ_2 является корнем уравнения (5), следовательно, это выражение тоже обращается в тождество. Аналогично, сокращаются коэффициенты при $\exp(-\gamma_1 S)$. Наконец, при $\exp(-(S_2 - S)/a)$ имеем

$$A_{12} + \frac{B_{12}e^{-\gamma_2 S_2}}{a\gamma_2 + 1} + \frac{C_{12}e^{-\gamma_1 S_2}}{a\gamma_1 + 1} = \frac{C_2}{a\gamma_1 + 1},$$

а при $\exp(-(S_2 - S)/b)$

$$A_{12} + \frac{B_{12}e^{-\gamma_2 S_2}}{b\gamma_2 + 1} + \frac{C_{12}e^{-\gamma_1 S_2}}{b\gamma_1 + 1} = \frac{C_2}{b\gamma_1 + 1}.$$

Еще одно условие получим, рассмотрев поведение $p_{12}(S)$ на границе S_1 . Так как переход из области $S < S_1$ невозможен, получаем $p_{12}(S_1) = 0(1 - (\lambda + \mu)\Delta t + O(\Delta t))$.

После предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$ имеем условие $p_{12}(S) = 0$. Или, учитывая явный вид $p_{12}(S)$ (10)

$$A_{12} + B_{12} \exp(-\gamma_2 S_1) + C_{12} \exp(-\gamma_1 S_1) = 0.$$

Таким образом, для определения констант A_{12} , B_{12} и C_{12} получена следующая система неоднородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_{12} + \frac{B_{12}e^{-\gamma_2 S_2}}{a\gamma_2 + 1} + \frac{C_{12}e^{-\gamma_1 S_2}}{a\gamma_1 + 1} = \frac{C_2}{a\gamma_1 + 1}, \\ A_{12} + \frac{B_{12}e^{-\gamma_2 S_2}}{b\gamma_2 + 1} + \frac{C_{12}e^{-\gamma_1 S_2}}{b\gamma_1 + 1} = \frac{C_2}{b\gamma_1 + 1}, \\ A_{12} + B_{12}e^{-\gamma_2 S_1} + C_{12}e^{-\gamma_1 S_1} = 0. \end{cases}$$

Решение последней системы уравнений однозначно определяет константы A_{12} , B_{12} и C_{12} , которые будут пропорциональны C_2 , т.е. будут иметь вид: $A_{12} = C_2 a_{12}$; $B_{12} = C_2 b_{12}$; $C_{12} = C_2 c_{12}$, где a_{12} , b_{12} и c_{12} определены однозначно.

Теперь рассмотрим случай, когда в области $S_1 < S < S_2$ выплаты на финансирование социальных программ не производятся. Это означает, что $\mu(S) = 0$, соответствующую этому случаю плотность распределения вероят-

ностей будем обозначать, как $p_{11}(S)$. Интегро-дифференциальное уравнение для $p_{11}(S)$ имеет следующий вид:

$$c_0 p'_{11}(S) + \lambda p_{11}(S) = \frac{\lambda}{a} \int_0^{S_2-S} p_{11}(S+x) e^{-\frac{x}{a}} dx. \quad (15)$$

Применяя стандартную методику, перейдем к следующему однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$c_0 a p''_{11}(S) + (\lambda a - c_0) p'_{11}(S) = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет корни $\delta = 0$ и $\delta = (c_0 - \lambda a)/c_0 a$. Заметим, что последний корень положителен, так как в этой области выполняется условие $c_0 > \lambda a$, которое следует из экономического смысла задачи. Таким образом, решение (15) можно искать в виде

$$p_{11}(S) = E_{11} + F_{11} \exp(\delta S). \quad (16)$$

Подставляя (16) в исходное уравнение (15), получим первое условие, позволяющее определить неизвестные константы E_{11} и F_{11} : $E_{11} = [F_{11}/(\delta a - 1)] \exp(\delta S_2)$.

Второе уравнение получим из условия сшивания на границе $S = S_2$:

$$\begin{aligned} p_2(S_2) &= p_{11}(S_2 - c_0 \Delta t)(1 - \lambda \Delta t) + \\ &+ p_{12}(S_2 - c_0 \Delta t)(1 - (\lambda + \mu) \Delta t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

После предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем условие $p_{11}(S_2) = p_2(S_2) - p_{12}(S_2)$. Отсюда, учитывая явный вид $p_2(S)$ (11) и $p_{12}(S)$ (14):

$$E_{11} + F_{11} e^{\delta S_2} = C_2 - (A_{12} + B_{12} e^{-\gamma_2 S_2} + C_{12} e^{-\gamma_1 S_2}).$$

Таким образом, получили два уравнения для определения двух неизвестных, следовательно, E_{11} и F_{11} определяются однозначно с точностью до сомножителя C_2 . Для удобства запишем эти константы в следующем виде: $E_{11} = C_2 e_{11}$, $F_{11} = C_2 f_{11}$.

И, наконец, рассмотрим последнюю область $S < S_1$. Напомним, что при этих условиях выплаты на социальные программы не производятся. Интегро-дифференциальное уравнение для плотности распределения вероятностей в этой области, которую мы обозначили как $p_0(S)$, имеет вид

$$\begin{aligned} c_0 p'_0(S) + \lambda p_0(S) &= \frac{\lambda}{a} \int_0^{S_1-S} p_0(S+x) e^{-\frac{x}{a}} dx + \\ &+ \frac{\lambda}{a} \int_{S_1-S}^{S_2-S} p_{11}(S+x) e^{-\frac{x}{a}} dx + \frac{\lambda}{a} \int_{S_1-S}^{S_2-S} p_{12}(S+x) e^{-\frac{x}{a}} dx + \\ &+ \frac{\lambda}{a} \int_{S_2-S}^{\infty} p_2(S+x) e^{-\frac{x}{a}} dx + \frac{\mu}{b} \int_{S_2-S}^{\infty} p_2(S+x) e^{-\frac{x}{b}} dx + \\ &+ \frac{\mu}{b} \int_{S_1-S}^{S_2-S} p_{12}(S+x) e^{-\frac{x}{b}} dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что плотности $p_2(S)$, $p_{12}(S)$, и $p_{11}(S)$ нами получены выше с точностью до сомножителя C_2 , поэтому выполним стандартную замену $t = S + x$ и обозначим через

$$\begin{aligned} C_2 I_a &= \frac{\lambda}{a} \int_{S_2}^{\infty} p_2(t) e^{-\frac{t}{a}} dt + \\ &+ \frac{\lambda}{a} \int_{S_1}^{S_2} p_{11}(t) e^{-\frac{t}{a}} dt + \frac{\lambda}{a} \int_{S_1}^{S_2} p_{12}(t) e^{-\frac{t}{a}} dt, \\ C_2 I_b &= \frac{\mu}{b} \int_{S_2}^{\infty} p_2(t) e^{-\frac{t}{b}} dt + \frac{\mu}{b} \int_{S_1}^{S_2} p_{12}(t) e^{-\frac{t}{b}} dt. \end{aligned}$$

Тогда (17) можно переписать как

$$c_0 p'_0(S) + \lambda p_0(S) = \frac{\lambda}{a} e^{\frac{S}{a}} \left(\int_0^{S_1-S} p_0(S+x) e^{-\frac{x}{a}} dx + C_2 I_a \right) + \frac{\mu}{b} e^{\frac{S}{b}} C_2 I_b.$$

После применения стандартной процедуры сведения к дифференциальному уравнению получим неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

$$p''_0(S) - \frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a} p'_0(S) = e^{\frac{S}{b}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) C_2 I_b. \quad (18)$$

Так как и в этой области выполняется условие $c_0 > \lambda a$, то решение (14) имеет следующий вид:

$$p_0(S) = A_0 + F_0 \exp(\delta S) + G_0 \exp(S/b), \quad (19)$$

где по-прежнему $\delta = (c_0 - \lambda a)/c_0 a$. Но $\lim_{S \rightarrow -\infty} p_0(S) = 0$, а

значит $A_0 = 0$. Условия для определения оставшихся двух констант находятся после подстановки (15) в исходное уравнение (13). После ряда преобразований, приравнявая числовые коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты, получим следующую систему линейных уравнений для определения F_0 и G_0 :

$$\begin{cases} F_0 \frac{\lambda}{a\delta - 1} e^{\left(\delta - \frac{1}{a}\right)S_1} + G_0 \frac{\lambda b}{a - b} e^{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)S_1} = -C_2 I_a, \\ G_0 \left(\frac{c_0}{b} + \frac{\lambda a}{a - b} \right) = C_2 I_b. \end{cases}$$

Отметим, что, как и в случае, когда рассматривалось простое релейное управление капиталом, у нас осталось неиспользованным условие сшивания на границе S_1 , которое в этом случае выглядит как $p_{11}(S_1) = p_0(S_1 - c_0 \Delta t) + O(\Delta t)$. Или, после предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем условие $p_{11}(S_1) = p_0(S_0)$. Но и в этом случае можно показать, что оно является следствием полученного выше решения, хотя процедура доказательства будет еще более громоздкой.

Последняя константа C_2 находится из очевидного условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{S_1} p_0(S) dS + \int_{S_1}^{S_2} [p_{11}(S) + p_{12}(S)] dS + \int_{S_2}^{+\infty} p_2(S) dS = 1.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена деятельность Фонда социального страхования. Построена и исследована математическая модель его деятельности при релейном и релейно-гистерезисном управлении капиталом такого фонда. Рассмотрен случай, когда выплаты по страховым случаям и на финансирование социальных программ образуют пуассоновский поток событий и являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения. В рамках сделанных предположений найдена стационарная плотность распределения капитала такого фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971. 263 с.
2. Panjer H.H., Willmot G.E. Insurance risk models. Society of Actuaries. 1992. 442 p.
3. Маталыцкий М.А., Романюк Т.В. Анализ вероятностной модели обработки однотипных рисков в страховой компании в нестационарном режиме. Вестник ГрГУ. 2002. Сер. 2. № 1.
4. Кац В.М., Лившиц К.И., Назаров А.А. Исследование нестационарных бесконечнолинейных систем массового обслуживания и их применение к анализу экономико-математических моделей // Вестник ТГУ. 2002. № 275. С. 189–192.
5. Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании при интенсивности входящего потока, зависящего от числа клиентов // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. Томск: Изд-во. Том. ун-та, 1999. С. 67–73.
6. Змеев О.А. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом банковского процента // Изв. вузов Физика. 2001. № 1. С. 19–24.
7. Адашкин Л.Ф. Математическая модель фонда социального страхования (диффузионное приближение). Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 15 ноября 2002 г., Томск.: Твердыня, 2002. С. 14–18.
8. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Изв. вузов Физика. 2003. № 3. С. 83–87.
9. Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах. // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 130–136.
10. Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск.: Изд-во Томск. ун-та, 1988. 174 с.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Информатика» 17 мая 2004 г.