УДК 517.977

Н.С. Демин, Е.В. Кулешова

УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ В МОДЕЛИ СОЛОУ

Приводится полное решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени в модели Солоу в случае экспоненциального изменения трудовых ресурсов. Результаты конкретизуются для случая производственной функции Кобба–Дугласа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривая модель односекторной экономики, придерживаемся следующих обозначений [1–3]: Y – валовой национальный продукт; K – основные фонды; $L(t) = L_0e^{\lambda t}$ – трудовые ресурсы, $L_0 > 0$, $\lambda > 0$; $y = Y/L$ – удельный валовой продукт; $k = K/L$ – фондовооруженность; $F(K, L)$ – линейно-однородная производственная функция, удовлетворяющая неоклассическим условиям [1, 2]; I – накопление; C – потребление; $\mu > 0$ – коэффициент амортизации основных фондов; $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования; $f(k) = F(k, 1)$. Предполагается, что $c = C/L$ – удельное потребление на одного рабочего. Тогда задача максимизации потребления на конечном интервале времени является задачей оптимального управления следующего вида: найти управление $c(t)$, удовлетворяющее ограничениям

$$0 \le c(k), \tag{1.1}$$

при которых на траекториях дифференциального уравнения

$$\dot{k}(t) = f(k(t) - (\mu+\lambda)k(t) - c(t), t \in [0, T] \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$k(0) = k_0, k(T) = k_T \ge 0 \tag{1.3}$$

функционал

$$J = \int_0^T c(t)e^{-(\delta-\lambda)t}dt \tag{1.4}$$

достигает максимального значения, где $\delta > \lambda$.

2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина [4]. Согласно (1.2), (1.4) функция Гамильтона имеет вид

$$H(\psi, k, c) = \psi[f(k) - (\mu + \lambda)k - c] + \psi_0ce^{-(\delta - \lambda)t}, \tag{2.1}$$

где $\psi_0 = \{0; 1\}$, а $\psi(t)$ – сопряженная переменная.

Обозначив $q(t) = \psi(t)e^{(\delta-\lambda)t}$, получим из (2.1) согласно [4], что

$$c(t) = \arg \max_{0 \le c \le f(k)} \{H(q(t), k(t), c\},\quad \dot{q}(t) = -\partial H(q, k, c)/\partial k. \tag{2.2}$$

Проводя вычисления, получаем с учётом того, что $\psi_0 = 1$ [4]:

$$c(t) = \begin{cases} f(k(t), q(t) < 1, \\ 0, q(t) > 1, \\ 0 < c(t) < f(k(t)), q(t) = 1; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\dot{q}(t) = (\delta+\mu)\cdot q - qf'(k); \tag{2.4}$$

$$q(T) \ge 0\ ,\ q(T)[k(T) - k_T] = 0\,. \tag{2.5}$$

Граничные условия следуют из общих условий трансверсальности для сопряженной переменной [4]. Таким образом, из принципа максимума Понтрягина следует для рассматриваемой задачи, что если $c(t)$ – оптимальное управление, то оно удовлетворяет (2.3), а $q(t)$ и $k(t)$ для $t\in[0, T]$ соответственно подчиняются дифференциальным уравнениям (2.4) и (1.2) с граничными условиями (2.5) и (1.3). Дальнейшее решение задачи связано с анализом свойств траекторий $q(t)$ и $k(t)$ автономной системы уравнений (1.2), (2.4). Из (2.3) следует, что возможны три ситуации: $c(t) = 0$, $c(t) = f(k(t))$, $0 < c(t) < f(k(t))$. Проведем анализ этих ситуаций.

Если $c(t) = 0$, то весь доход уходит на накопление. В этом случае $q(t) > 1$, а уравнение (1.2) имеет вид

$$\dot{k}(t) = f(k) - (\mu+\lambda)k. \tag{2.6}$$

Выделим на оси $k\in[0, \infty)$ области знакопостоянства $\dot{q}(t)$.

а) $\dot{q}(t) = 0$. Тогда уравнение (2.4) имеет единственный корень k^*, такой, что

$$f'(k^*) = \delta + \mu. \tag{2.7}$$

б) $q(t) < 0$. В этом случае из (2.4), (2.7) следует, что $f'(k) > (\delta + \mu)$ при $k > k^*$.

в) $\dot{q}(t) > 0$. В этом случае из (2.4), (2.7) следует, что $f'(k) < (\delta + \mu)$ при $k < k^*$.

Выделим на оси $k\in[0, \infty)$ области знакопостоянства $\dot{k}(t)$.

1) $\dot{k}(t)$ =0. В этом случае из (2.6) следует, что

$$f(k) = (\mu+\lambda)k. \tag{2.8}$$

Так как согласно неоклассическим условиям $f(t)$ является монотонно возрастающей функцией и при этом $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$, то уравнение (2.8) имеет единственный корень $\tilde{k}$, такой, что

$$f(\tilde{k}) = (\mu+\lambda)\tilde{k}. \tag{2.9}$$

2) $\dot{k}(t)$ >0. В этом случае из (2.6), (2.9) следует, что $f(k) > (\mu + \lambda)k$ при $k < \tilde{k}$.

3) $\dot{k}(t) < 0$. В этом случае из (2.6), (2.9) следует, что $f(k) < (\mu + \lambda)k$ при $k < \tilde{k}$.

II. Если $c(t) = f(k(t))$, то весь доход идет на потребление. В этом случае $q(t) < 1$, а уравнения (2.4) и (1.2) имеют вид

$$\dot{q}(t) = (\delta+\mu)q - f'(k)q; \tag{2.10}$$

$$\dot{k}(t) = -(\mu+\lambda)k. \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что

$$\dot{k}(t) = -(\mu+\lambda)k < 0\,, k > 0\,. \tag{2.12}$$

Выделим на оси $k\in[0, \infty)$ области знакопостоянства $\dot{q}(t)$.

а) $\dot{q}(t)$ =0. В этом случае уравнение (2.4) имеет единственный корень k^*, такой, что

$$f'(k^*) = \delta + \mu\,. \tag{2.13}$$

б) $\dot{q}(t) < 0$. В этом случае из (2.4) следует, что $f(k) > (\mu + \lambda)k$ при $k > k^*$.

в) $\dot{q}(t)$ >0. В этом случае из (2.4) следует, что $f(k) < (\mu + \lambda)k$ при $k < k^*$.

III. Если $0 < c(t) < f(k(t)$, то доход делится на накопление $f(k(t) - c(t)$ и на потребление $c(t)$.

Теперь мы можем выделить области знакопостоянства $\dot q(t)$ и $\dot k(t)$ на плоскости (k, q). Точка $x^* = (1;\, k^*)$ является особой, так как она является стационарным решением для системы

$$\dot q(t)=0,\ \dot k(t)=0. \qquad (2.14)$$

Пусть $k = k^*$, $q = q^*$, тогда система (2.14) с учетом (2.4), (1.2) принимает вид

$$f(k^*) - (\mu + \lambda)k^* - c^*, f'(k^*) = \delta + \mu\,. \qquad (2.15)$$

Таким образом, из (2.15) следует

$$c^* = f(k) - (\mu + \lambda)k^*,\ 0 < c^* < f(k^*)\,. \qquad (2.16)$$

Если фазовая траектория $\{k(t0;\, q(t)\}$ попадает в особую точку и при этом используются управления (2.16), то данная траектория не выходит из x^*.

3. АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ

На рис. 1 в соответствии с проведенным исследованием изображены типовые фазовые траектории $\{k(t0;\, q(t)\}$ с номерами *1–6*. Обозначим: Γ_0 – фазовые траектории, входящие в $x^* = (1;\, k^*)$; Γ_T – фазовые траектории, исходящие из $x^* = (1;\, k^*)$. Поскольку условие $\{\dot q(t) < 0; \dot k(t) < 0\}$ означает убывание $\{k(t);\, q(t)\}$ с ростом t, а условие $\{\dot q(t) > 0; \dot k(t) > 0\}$ – их возрастание, то согласно рис. 1 попасть в x^* мы можем только из областей I и III соответственно с управлениями $c(t) = 0$, $c(t) = f(k(t))$ по траекториям Γ_0^1 и Γ_0^3, а выйти из x^* мы можем только в области II и IV соответственно с управлениями $c(t) = 0$, $c(t) = f(k(t))$ по траекториям Γ_T^2 и Γ_T^4. По тем же правилам строятся типовые фазовые траектории, которые не проходят через точку x^*.

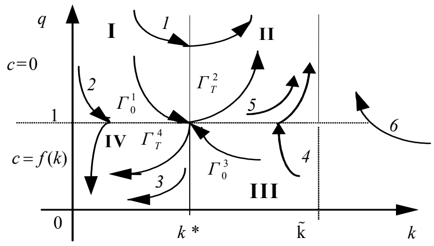

Рис. 1

Теперь среди всего множества траекторий нужно выбрать оптимальные, т.е. те, которые, выходя из произвольной точки $k(0) = k_0 > 0$, за фиксированное время T приходят в точку $k(T) = k_T > 0$. При этом, согласно (2.5)Ю должно выполняться условие $q(T)\ge 0$, если $k(T)=k_T$ и $q(T)=0$, если $k(T)>k_T$. Из рис. 1 следует, что если $k_0 < \tilde k$, а $k_T > \tilde k$, то вообще не существует траекторий, для которых $k(T) = k_T$ (кривые *1–5*), так как все они не могут перейти правее прямой $k = \tilde k$. Поиск оптимальных управлений будем осуществлять при условии $k_0 < \tilde k$, $k_T < \tilde k$. Алгоритм управления в предположении достаточно большого времени управления T заключается в следующем. Если $k_0 < k^*$, то подбирается такое значение q_0, чтобы $(k_0; q_0) \in \Gamma_0^1$. Тогда с управлением $c(t) = 0$ точка $\{k(t);\, q(t)\}$ переводится по траектории Γ_0^1 в точку $x^* = (1;\, k^*)$, и в момент T^* попадания $\{k(t);\, q(t)\}$ в точку x^* полагается $c(T^*) = c^*$ (см. (2.16)). Если $k_0 > k^*$, то подбирается такое значение q_0, чтобы $(k_0;\, q_0) \in \Gamma_0^3$. Тогда с управлением $c(t)=f(k(t))$ точка $\{k(t);\, q(t)\}$ переводится по траектории Γ_0^3 в точку $x^* = (1;\, k^*)$, и в момент T^* попадания $x^* = (1;\, k^*)$ в точку x^* полагается $c(T^*) = c^*$. В момент T^{**} полагается $c(T^*) = 0$, если $k_T > k^*$ и $c(T^{**}) = f(k(T^{**}))$, если $k_T < k^*$, и соответственно с управлениями $c(t) = 0$ либо $c(t) = f(k(t))$ точка $\{k(t);\, q(t)\}$ переводится по траекториям Γ_T^2 либо Γ_T^4 в точку $x(T) = \{k(T); q(T)\}$ такую, что $k(T) = k_T$.

4. МАГИСТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Сформулируем полученный результат в форме магистральной теоремы [2,3]. Введем для $k_1 < k_2$, $\tau_1 < \tau_2$ обозначения

$$T_1(k_1, k_2) = \int_{k_1}^{k_2} \frac{dk}{f(k) - (\mu + \lambda)k}; \qquad (4.1)$$

$$T_2(k_1, k_2) = \frac{1}{\mu + \lambda}\int_{k_1}^{k_2} \frac{dk}{k} = \frac{1}{\mu + \lambda}\ln\frac{k_2}{k_1}; \qquad (4.2)$$

$$J^0(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} c(t)e^{-(\delta-\lambda)t}dt; \qquad (4.3)$$

$$J^*(\tau_1, \tau_2) = \frac{c^*}{\delta - \lambda}\left[e^{-(\delta-\lambda)\tau_1} - e^{-(\delta-\lambda)\tau_2}\right]. \qquad (4.4)$$

Теорема 1. При достаточно большом времени управления T решение задачи имеет следующий вид:

1) Интервал $[0, T]$ разбивается на три интервала, т.е. $[0, T] = [0, T^*) \cup [T^*, T^{**}] \cup (T^{**}, T]$.

2) Оптимальное управление $c(t)$ имеет структуру $c(t) = \{f(k(t));\ 0;\ c^*\}$, т.е. управление $c(t)$ является кусочно-непрерывным, где

$$c^* = f(k^*) - (\mu + \lambda)k^*, \qquad (4.5)$$

а k^* – единственный корень уравнения

$$f'(k) = \delta + \mu\,. \qquad (4.6)$$

3) На интервале $t\in[T^*,T^{**}]$ всегда $c(t) = c^*$, и фондовооруженность $k(t)$ сохраняет постоянное значение k^*.

4) На начальном интервале времени $t\in[0, T^*)$ $c(t) = 0$, если $k_0 < k^*$, и $c(t) = f(k(t))$, если $k_0 > k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k_0 до k^*.

5) На конечном интервале времени $t\in(T^{**}, T]$ $c(t) = 0$ если $k_T < k^*$, и $c(t) = f(k(t))$, если $k_T < k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k^* до k_T.

6) значения T^*, T^{**} и функционала J определяются следующими формулами:

– если $k_0 < k^*$, $k_T < k^*$ (магистраль I), то

$$T^* = T_1(k_0, k^*),\ T^{**} = T - T_2(k_T, k^*), \qquad (4.7)$$

$$J = J^*(T^*, T^{**}) + J^0(T^{**}, T); \qquad (4.8)$$

– если $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$, (магистраль II), то

$$T^* = T_1(k_0, k^*), T^{**} = T - T_1(k^*, k_T), \qquad (4.9)$$

$$J = J^*(T^*, T^{**}); \qquad (4.10)$$

– если $k_0 > k^*$, $k_T < k^*$ (магистраль III), то

$$T^* = T_2(k^*, k_0), T^{**} = T - T_2(k_T, k^*), \qquad (4.11)$$

$$J = J^0(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}) + J^0(T^{**}, T); \qquad (4.12)$$

– если $k_0 > k^*$, $k_T > k^*$ (магистраль IV), то

$$T^* = T_2(k^*, k_0), T^{**} = T_1(k^*, k_0), \qquad (4.13)$$

$$J = J^0(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}). \qquad (4.14)$$

Исследуем поведение $c(t) = f(k(t))$, когда $k(t)$ определяется уравнением (2.12). Тогда

$$\dot c(t) = f'(k)\dot k(t) = -(\mu + \lambda)kf'. \qquad (4.15)$$

Так как по неоклассическим условиям $f'(k) > 0$, то из (4.15) следует, что $\dot{c}(t) < 0$, т.е. $c(t)$ – монотонно убывающая функция времени. Чтобы установить тип кривизны $c(t)$, определим знак $\ddot{c}(t)$. Из (2.12),(4.15) следует

$$\dot{c}(t) = (\mu + \lambda)^2 k\left[f'(k) + kf''(k)\right]. \qquad (4.16)$$

Из (4.16) следует, что знак $\ddot{c}(t)$ зависит от знака функции $\varphi(k)=f'(k) + kf''(k)$. Например, если $f(k)$ – функция Кобба-Дугласа, т.е. $f(k)=Ak^{\alpha}$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, то $\varphi(k) = A\alpha k^{(\alpha-1)} > 0$, и таким образом $\ddot{c}(t) > 0$, т.е. функция $c(t)$ есть монотонно убывающая выпуклая вниз функция. Для общего класса неоклассических производственных функций знак $\varphi(k)$, а значит, и знак $\ddot{c}(t)$ может быть любым и соответственно кривизна убывающей функции $c(t)$ может быть любой.

На рис. 2, 4, 6, 8 представлены реализации управления $c(t)$ на всём интервале времени управления $t\in[0, T]$, построенные в соответствие с проведенным исследованием. Для случаев магистралей Ш и IV, когда $k_0 > k^*$, следует, согласно (4.5), что $c(T^*) = f(k^*) > c^*$ и при этом $\Delta c_0^* = c(T^*) - c^* = (\mu + \lambda)k^*$ (рис. 6, 8). Для случаев магистралей I и III, когда $k_T < k^*$, следует, согласно (4.5), что $\Delta c_T^* = c(T) - f(k_T) - f(k^*) + (\mu + \lambda)k^*$. При этом

– $\Delta c_T^* > 0$, т.е. $c(T) > c^*$, если $[f(k^*) - f(k_T)] < (\mu + \lambda)\, k^*$;

– $\Delta c_T^* > 0$, т.е. $c(T) > c^*$, если $[f(k^*) - f(k_T)] < (\mu + \lambda)\, k^*$;

– $\Delta c_T^* = 0$, т.е. $c(T) = c^*$, если $[f(k^*) - f(k_T)] = (\mu + \lambda)\, k^*$.

Данные ситуации отражены на рис. 2, 6.

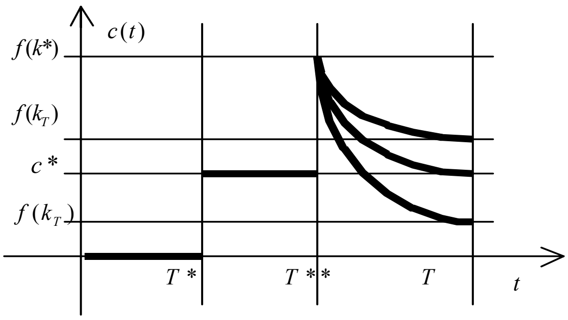

Рис. 2

Исследуем поведение фондовооруженности $k(t)$. Рассмотрим сначала интервал времени $t\in[0, T^*)$.

Пусть $k_0 < k^*$ (магистрали I и II). В этом случае управление $c(t) = 0$ и, согласно, (2.6) $\dot{k}(t) > 0$, т.е. $k(t)$ монотонно возрастающая функция. Тогда

$$\ddot{k}(t) = \dot{k}(t)\left[f''(k(t)) - (\mu + \lambda)\right]. \qquad (4.17)$$

Так как $\delta > \lambda$, то из (2.7) следует, что $f'(k(t)) - (\mu + \lambda) > 0$ для $k < k^*$. Тогда, согласно (4.17), $\ddot{k}(t) > 0$, т.е. при $k_0 < k^*$ на интервале $t\in[0, T^*)$ $k(t)$ является монотонно возрастающей выпуклой вниз функцией (рис. 3, 5).

Пусть $k_0 > k^*$ (магистрали III и IV). В этом случае управление $c(t) = f(k(t))$ и, согласно (2.12), $\dot{k}(t) < 0$, т.е. $k(t)$ монотонно убывающая функция. Тогда

$$\ddot{k}(t) = -(\mu + \lambda)\dot{k}(t), \qquad (4.18)$$

и, следовательно, $\ddot{k}(t) > 0$. Таким образом, при $k_0 > k^*$ на интервале $t\in[0, T^*)$ $k(t)$ является монотонно убывающей выпуклой вниз функцией, что отражено на рис.7, 9.

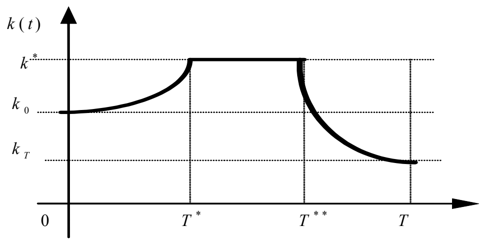

Рис. 3

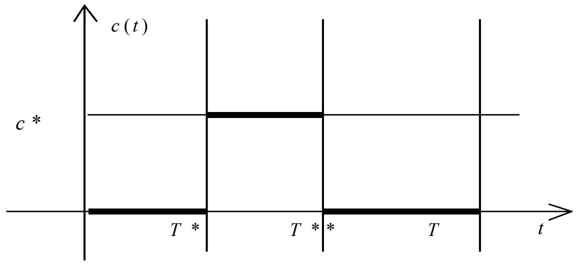

Рис. 4

Рассмотрим интервал времени $t\in(T^{**}, T]$. Пусть $k_T < k^*$ (магистрали I и III). В этом случае управление $c(t) = f(k(t))$ и, согласно (2.12), (4.17), $\dot{k}(t) < 0$, $\ddot{k}(t) > 0$. Таким образом, при $k_T < k^*$ на интервале $t\in(T^{**}, T]$ $k(t)$ является монотонно убывающей выпуклой вниз функцией, что отражено на рис.3, 7. Пусть $k_T > k^*$ (магистрали II и IV). В этом случае управление $c(t) = 0$ и, согласно (2.6), $\dot{k}(t) > 0$, т.е. $k(t)$ монотонно возрастающая функция, а $\ddot{k}(t)$ определяется формулой (4.17). Пусть $\bar{k}$ является корнем уравнения

$$f'(k) = \mu + \lambda\,. \qquad (4.19)$$

Так как $\delta > \lambda$, то из (2.7) и (4.19) следует, что $k^* < \bar{k}$. Тогда, согласно (4.17), $f'(k) - (\mu + \lambda) = 0$, если $k = \bar{k}$; $f'(k) - (\mu + \lambda) > 0$, если $k < \bar{k}$; $f'(k) - (\mu + \lambda) < 0$, если $k > \bar{k}$. Таким образом, из (4.17) следует, что $\ddot{k}(t) > 0$, если $k^* < k(t) < \bar{k}$, и $\ddot{k}(t) < 0$, если $\bar{k} < k(t) \le k_T$. Проведенное исследование приводит к следующему результату: на интервале $t\in(T^{**}, T]$ $k(t)$ является монотонно возрастающей выпуклой вниз функцией для $k^* < k(t) < \bar{k}$ и монотонно возрастающей выпуклой вверх функцией для $\bar{k} < k(t) \le k_T$ с точкой перегиба $k(t) = \bar{k}$. Подобное поведение $k(t)$ отражено на рис. 5, 9. Если $k^* < k_T < \bar{k}$, то, очевидно, что монотонное возрастание $k(t)$ на интервале $t\in(T^{**}, T]$ происходит без точки перегиба выпуклым вниз образом.

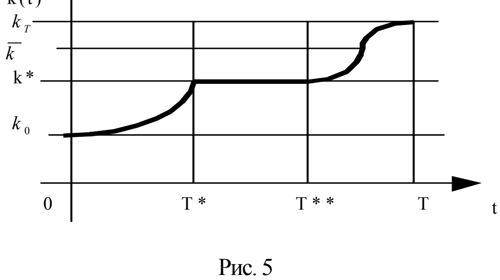

Рис. 5

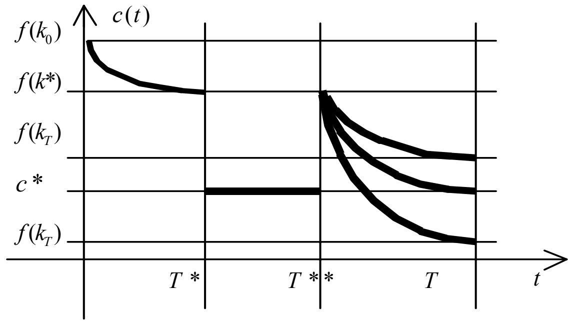

Рис. 6

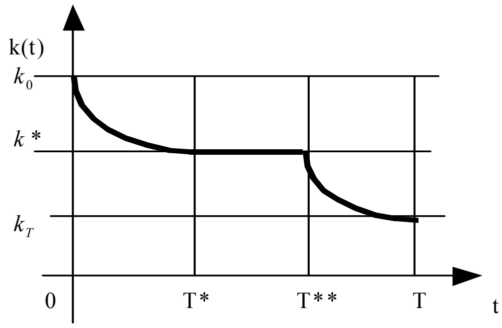

Рис.7

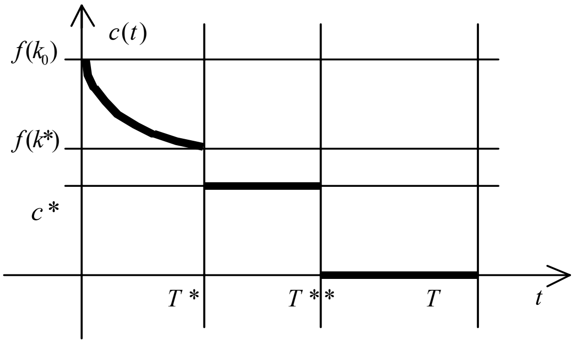

Рис. 8

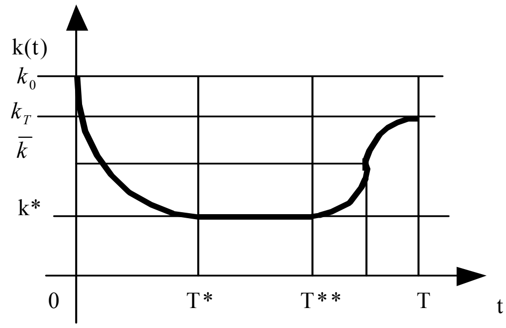

Рис. 9

5. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА–ДУГЛАСА

Теорема 2. Пусть[1–3]

$$f(k) = A \cdot k^{\alpha},\ a > 0,\ 0 < \alpha < 1. \tag{5.1}$$

Тогда

1) для $k^*, \widetilde{k}, c^*$ имеют место формулы

$$k^* = \left(\frac{A\alpha}{\delta+\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ \widetilde{k} = \left(\frac{A}{\mu+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{5.2}$$

$$c^* = \left[A - (\mu+\lambda)(k^*)^{1-\alpha}\right]\left(k^*\right)^{\alpha}; \tag{5.3}$$

2) для T^*, T^{**} и J имеют место формулы (4.7) – (4.14), где

$$T_1\left(k_1, k_2\right) = \frac{1}{(\mu+\lambda)(1-\alpha)} \ln \frac{A-(\mu-\lambda)k_1^{1-\alpha}}{A-(\mu+\lambda)k_2^{1-\alpha}}, \tag{5.4}$$

$$J^0\left(0, T^*\right) = \frac{A\left(k^*\right)^{\alpha}}{(\delta-\lambda)+\alpha(\mu+\lambda)}\left[e^{\alpha(\mu+\lambda)T^*} - e^{-(\delta-\lambda)T^*}\right] =$$

$$= \frac{Ak_0^{\alpha}}{(\delta-\lambda)+\alpha(\mu+\lambda)}\left[1 - e^{-[(\delta-\lambda)+\alpha(\mu+\lambda)]T^*}\right], \tag{5.5}$$

$$J^0(T^{**}, T) = \frac{A\left(k^*\right)^{\alpha}}{(\delta-\lambda)+\alpha(\mu+\lambda)} \cdot$$

$$\cdot\left[e^{-\left[(\delta-\lambda)+\alpha(\mu+\lambda)T+\alpha(\mu+\lambda)T^{**}\right]} - e^{-(\delta-\lambda)T^{**}}\right] =$$

$$= \frac{Ak_T^{\alpha}}{(\delta-\lambda)+\alpha(\mu+\lambda)} \times$$

$$\times\left[e^{-(\delta-\lambda)T} - e^{-\left[(\delta-\lambda)+\alpha(\mu+\lambda)T^{**}+\alpha(\mu+\lambda)T\right]}\right], \tag{5.6}$$

$$J^*(T^*, T^{**}) = \frac{c^*}{\delta-\lambda}\left[e^{-(\delta-\lambda)T^*} - e^{-(\delta-\lambda)T^{**}}\right]; \tag{5.7}$$

3) на интервале $t \in [0, T^*)$

$$k(t) = k_0 e^{-(\mu+\lambda)t} = k^* e^{(\mu+\lambda)(T^*-t)}, \tag{5.8}$$

$$c(t) = Ak_0^{\alpha} e^{-\alpha(\mu+\lambda)t} = A(k^*)^{\alpha} e^{\alpha(\mu+\lambda)(T^*-t)} \tag{5.9}$$

если $k_0 > k*$, и

$$k(t) = \left[\frac{A - \left[(\mu+\lambda)k_0^{1-\alpha}\right]e^{-(\mu+\lambda)(1-\alpha)t}}{\mu+\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left[\frac{A - \left[A - (\mu+\lambda)\left(k^*\right)^{1-\alpha}\right]e^{(\mu+\lambda)(T^*-t)}}{\mu+\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{5.10}$$

если $k_0 < k*$;

4) на интервале $t \in (T^{**}, T]$

$$k(t) = k^* e^{-(\mu+\lambda)(t-T^{**})} = k_T e^{(\mu+\lambda)(T-t)}, \tag{5.11}$$

$$c(t) = A\left(k^*\right)^{\alpha} e^{-\alpha(\mu+\lambda)(t-T^*)} = A\left(k_T\right)^{\alpha} e^{\alpha(\mu+\lambda)(T-t)} \tag{5.12}$$

если $k_T < k*$, и

$$k(t) = \left[\frac{A - \left[A - (\mu+\lambda)k_T^{1-\alpha}\right]e^{(\mu+\lambda)(1-\alpha)(T-t0}}{\mu+\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left[\frac{A - \left[A - (\mu+\lambda)\left(k^*\right)^{1-\alpha}\right]e^{-(\mu+\lambda)(1-\alpha)(t-T^{**}0}}{\mu+\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{5.13}$$

если $k_T > k^*$.

Данный результат получается при использовании (5.1) в теореме 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоремы 1, 2 справедливы при условии $T^{**} - T^* > 0$. Так как $T^{**} = T - \widetilde{T}$, где $\widetilde{T}$ – время достижения траекторией $k(t)$ значения k_T на интервале $t \in [T^{**}, T]$, то данное условие принимает вид $T > \widetilde{T} + T^*$, где $k_T < k^*$ и $\widetilde{T} = T_2(k^*, k_T)$ если $k^* > k^*$. Интервал $t \in [0, T^*]$ является интервалом выхода траектории $k(t)$ на магистраль для обеспечения стационарного состояния экономики. Интервал $t \in [T^{**}, T]$ является интервалом схода траектории $k(t)$ с магистрали для обеспечение терминального условия в конечный момент времени T (условие экономического горизонта). Таким образом, чем меньше T^* и $\tilde{T}$ при заданном T, тем больше интервал стационарного состояния экономики $\Delta T = T^{**} - T^*$ (интервал пребывания экономики на магистрали) приближается ко всему интервалу T. На магистрали, когда $t \in [T^*, T^{**}]$, $k(t) = k^* =$ const, $y(t) = y^* = f(k^*) =$ = const. При этом $K^*(t) = k^* L_0 e^{\lambda t} = K_0^* e^{\lambda t}$. Тогда $Y^*(t) = F(K_0^* e^{\lambda t}, L_0 e^{\lambda t})$ и $dY^*(t)/dt > 0$. Таким образом, на магистрали обеспечивается сбалансированный рост экономики. Если $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$, то на интервалах $t \in [0, T^*)$ и $t \in (T^*, T]$, $K(t) = L_0 e^{\lambda t} k(t)$, где $\dot{k}(t) > 0$, и тогда $dY(t)/dt = dF(L_0 e^{\lambda t} k(t), L_0 e^{\lambda t})/dt > 0$. Таким образом, при $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$ обеспечивается устойчивый рост экономики на всем интервале времени $t \in [0, T]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. М.: Мир, 1974. С.7–45.
2. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
3. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
4. *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1978.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 25 мая 2004 г.