УДК 336.763:336.67 (075.4)

В. В. Домбровский, Д. В. Домбровский, Е.А. Ляшенко

ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ НА ОСНОВЕ РЫНОЧНОЙ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ ТРАНСАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК И ОГРАНИЧЕНИЙ

Рассматривается задача управления инвестиционным портфелем с учетом транзакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций. Для определения оптимальной стратегии управления с обратной связью применяется методология прогнозирующего управления. Для описания доходностей рисковых финансовых вложений используется однофакторная рыночная модель. Вычисление оптимальных стратегий управления включает решение последовательности задач квадратичного программирования.

Проблема управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из основных в управлении финансами и представляет как теоретический, так и практический интерес. Можно выделить два основных подхода к ее решению. Классический подход, предложенный в [1, 2], и последующие его модификации исходят из предположения о том, что при формировании своего портфеля инвестор, с одной стороны, хотел бы минимизировать риск портфеля (обычно дисперсию портфеля или связанные с ней меры риска), с другой – получать желаемую доходность (либо в двойственной постановке – максимизировать доходность при ограниченном риске). Второй подход основан на построении динамических моделей ИП с большим разнообразием методов. Классическая оптимизационная проблема в динамической постановке заключается в определении стратегии управления ИП, максимизирующей некоторую интегральную функцию полезности. Она была исследована Мертоном [3] и др. [4]. Bielecki и Pliska [5] используют критерий, чувствительный к риску.

В [6–8] предложена динамическая модель управления ИП в пространстве состояний, в которой структура портфеля описывается в виде динамической стохастической сети, а задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения за капиталом некоторого гипотетического эталонного портфеля, имеющего задаваемую инвестором желаемую доходность.

Известно, что реальные модели ИП должны учитывать транзакционные издержки и ограничения на объемы торговых операций. Учет этих ограничений в динамической модели приводит к «проклятию размерности». Обзор проблем и методов оптимизации ИП в динамической постановке с учетом транзакционных издержек дан в [9]. В этих работах используются методы оптимальной остановки, стохастического сингулярного и стохастического импульсного управления. Большинство представленных результатов ограничены случаем одной облигации и только одной акции.

В данной работе рассматривается проблема управления ИП с учетом транзакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций в рамках подхода, предложенного в [6–8]. Для решения этой проблемы используется методология управления с прогнозирующей моделью (УПМ) [10]. Синтезированы прогнозирующие стратегии управления с обратной связью при учете транзакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций.

МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Рассмотрим инвестиционный портфель, состоящий из n видов рисковых вложений (под рисковыми будем понимать инвестиции, доходность которых – случайная величина) и безрискового финансового актива (банковский счет или надежные облигации). Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета.

Для описания эволюции доходностей рисковых финансовых активов используем однофакторную рыночную модель

$$\eta_i(k) = \alpha_i + \beta_i R_m(k) + \sigma_i \omega_i(k), \quad (1)$$

где $\omega_i(k)$ – последовательность некоррелированных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией; α_i – коэффициент смещения; β_i – коэффициент наклона (в рыночной модели он носит название «коэффициент “бета” ценной бумаги вида j»); $\sigma_i > 0$ – волатильность (изменчивость) ценной бумаги; R_m – эффективность рынка (доходность рыночного индекса). Для описания динамики изменения доходности рыночного индекса используем модель вида [10]

$$R_m(k) = \mu_m + \sigma_m \omega_m(k), \quad (2)$$

где μ_m – ожидаемая доходность; $\sigma_m > 0$ – волатильность рыночного индекса, $\omega_m(k)$ – последовательность некоррелированных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Последовательности $\omega_i(k)$, $i = 1, 2,..., n-1$ и $\omega_m(k)$ некоррелированы между собой.

С учетом (2) уравнение (1) можно записать в виде

$$\eta_i(k) = \bar{\mu}_i + \sum_{j=1}^{2} \bar{\sigma}_i^{(j)} \bar{\omega}_i^{(j)}(k), \quad (3)$$

где $\bar{\mu}_i = \alpha_i + \beta_i \mu_m$, $\bar{\sigma}_i^{(1)} = \bar{\sigma}_{im} = \beta_i \sigma_m$, $\bar{\sigma}_i^{(2)} = \sigma_i$, $\omega_i^{(1)} = \omega_m$, $\omega_i^{(2)} = \omega_i$.

Динамика портфеля в пространстве состояний описывается уравнениями:

для рисковых активов

$$x_i(k+1) = [1+\eta_i(k)][x_i(k) + p_i(k) - q_i(k)]; \quad (4)$$

для безрискового вклада

$$x_{n+1}(k+1) = [1+r_1(k)]\,[x_{n+1}(k) + v(k) - (1+\lambda)\times$$
$$\times \sum_{i=1}^{n} p_i(k) + (1-\rho)\sum_{i=1}^{n} q_i(k)]; \quad (5)$$

для кредитного счета

$$x_{n+2}(k+1) = [1+r_2(k)][x_{n+2}(k) + v(k)], \quad (6)$$

где $x_i(k)$, $i = \overline{1,n}$ – объем инвестиций в i-й финансовый актив; $x_{n+1}(k)$ описывает состояние банковского счета; $x_{n+2}(k)$ – состояние кредитного счета; $\eta_i(k)$ – доходность рисковой ценной бумаги i-го вида; $p_i(k)$ – объем капитала, переведенного с банковского счета в i-й рисковый актив, $q_i(k)$ – объем капитала, переведенного с i-го рискового актива на банковский счет:

$$p_i(k) \geq 0, \; q_i(k) \geq 0. \quad (7)$$

Здесь $r_1(k)$ – ставка доходности безрискового актива; $r_2(k)$ – ставка доходности кредитного счета, $r_2(k)>r_1(k)$; $v(k)$ – объем капитала, перераспределяемого между банковским и кредитным счетами: $v(k)>0$ означает заем в размере $v(k)$, $v(k)<0$ означает возврат кредита в размере $|v(k)|$, λ – доля идущая на уплату транзакционных издержек при покупке акций, а ρ – доля, идущая на уплату издержек при продаже. Состояния банковского и кредитного счетов неотрицательны $x_{n+1}(k+1) \geq 0$ и $x_{n+2}(k+1) \geq 0$, следовательно:

$$x_{n+1}(k) + v(k) - (1+\lambda) \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{n} p_i(k) + (1-\rho) \sum_{i=1}^{n} q_i(k)] \geq 0 , \qquad (8)$$
$$x_{n+2}(k) + v(k) \geq 0 . \qquad (9)$$

Если какая-либо переменная $x_i(k) < 0$, то это означает участие в операции «продажа без покрытия». Общий капитал портфеля $V(k) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(k) - x_{n+2}(k)$. При управлении портфелем учитываются следующие ограничения: на объемы операций «продаж без покрытия»

$$x_i(k) + p_i(k) - q_i(k) \geq -d_i(k) , \qquad (10)$$

на объемы займов

$$x_{n+2}(k) + v(k) \leq d_0(k) , \qquad (11)$$

если операция «продажа без покрытия» запрещена, то $d_i(k) = 0$. $d_i(k)$ может быть константой или функцией, например $d_i(k) = \gamma_i V(k)$, где $\gamma_i > 0$ – постоянный коэффициент.

Необходимо определить стратегию управления инвестиционным портфелем так, чтобы его капитал $V(k)$ с наименьшими отклонениями следовал капиталу $V^0(k)$ некоторого, определяемого инвестором, эталонного портфеля, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu^0(k)]\, V^0(k) , \qquad (12)$$

где $\mu^0(k)$ – заданная инвестором желаемая доходность портфеля.

УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ

Используется стратегия управления разомкнутого типа, которая основана на предположении, что будущие прогнозирующие управления на всем горизонте прогноза зависят только от текущего состояния системы, т.е. не используется будущая обратная связь (по существу, на интервале прогнозирования строятся программные управления без использования обратной связи по состоянию).

Прогнозирующее управление определяется по следующему правилу: на каждом шаге k минимизируем функционал по последовательности программных управлений $u(k+i/k),\, i = \overline{0, m-1}$, зависящих только от состояния системы в момент k; m – горизонт управления. В качестве управления в момент k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояния $x(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управления $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для текущего момента $k+1$.

Используем следующий функционал со скользящим горизонтом управления:

$$J = M\Bigg\{ \sum_{i=1}^{m-1} [V(k+i/k) - V^0(k+i)]^2 +$$
$$+ \sum_{i=0}^{m-1} u^T(k+i/k) R(k+i) u(k+i/k) +$$
$$+ [V(k+m/k) - V^0(k+m)]^2 / x(k) \Bigg\}, \qquad (13)$$

где $\quad V(k+i/k) = \sum_{j=1}^{n+1} x_j(k+i/k) - x_{n+2}(k+i/k)$,

$x(k+i/k) = [x_1(k+i/k) \;...\; x_{n+2}(k+i/k)]$ $(i = \overline{1, m})$ – состояние инвестиционного портфеля в момент $k+i$, прогноз ведется на момент времени k; $x(k)$ – состояние в момент времени k;

$$u(k+i/k) = \begin{bmatrix} v(k+i/k) \\ p_1(k+i/k) \\ ... \\ p_n(k+i/k) \\ q_1(k+i/k) \\ ... \\ q_n(k+i/k) \end{bmatrix} \; (i = \overline{0, m-1})$$

– вектор прогнозирующего управления; $R(k)>0$ – весовая матрица, $M\{.../...\}$ – оператор условного математического ожидания.

Теорема. Оптимальная стратегия прогнозирующего управления разомкнутого типа системой (4) – (6), (12) при ограничениях (7)–(11) определяется уравнениями $u(k) = [I_n \quad 0_n \quad 0_n]$, где I_n – единичная матрица размерности n, 0_n– квадратная нулевая марица размерности n;

$$U(k/k) = \left[u^T(k/k),\; u^T(k+1/k), ...\; u^T(k+m-1/k) \right]^T \; –$$

– вектор прогнозирующего управления, который определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида

$$Y(k+m/k) = U^T(k) H(k) U(k) + 2\, x^T(k) G(k) U(k) ,$$

при ограничениях $D(k) \leq \bar{S}(k) U(k)$,

где $\bar{S}(k),\; D(k), H(k) \;\; и \;\; G(k)$ – блочные матрицы:

$$\bar{S}(k) = \left[S(k) \;\; 0_{(3n+3)\times(2n+1)\;(p-1)} \right],$$

$$D(k) = \begin{bmatrix} \bar{0}_n^T \\ \bar{0}_n^T \\ \bar{X}(k) \\ -x_{n+1}(k) \\ -x_{n+2}(k) \\ x_{n+2}(k) - d_0(k) \end{bmatrix},$$

$$H(k) = \begin{bmatrix} H_{11}(k) & ... & H_{1m}(k) \\ ... & ... & ... \\ H_{m1}(k) & ... & H_{mm}(k) \end{bmatrix},$$

$$G(k) = [G_1(k) \;\; ... \;\; G_m(k)]$$

с блоками $S(k) = \begin{bmatrix} \bar{0}_n^T & I_n & 0_n \\ \bar{0}_n^T & 0_n & I_n \\ \bar{0}_n^T & I_n & -I_n \\ 1 & -(1+\alpha) e_n & (1+\beta) e_n \\ 1 & \bar{0}_n & \bar{0}_n \\ -1 & \bar{0}_n & \bar{0}_n \end{bmatrix}$;

$\bar{0}_n = [0 \;...\; 0] \;\; и \;\; e_n = [1 \;...\; 1]$ – вектор-строки размерности n; $0_{(3n+3)\times(2n+1)\,(p-1)}$ – нулевая матрица размерности $(3n+3)$ на $(2n+1)(p-1)$;

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} -x_1(k) - d_1(k) \\ ... \\ -x_n(k) - d_n(k) \end{bmatrix},$$

$$H_{is}(k) = \begin{cases} B_0^T(k+i-1) \left\{ \prod_{j=1}^{s-2} A_0^T(k+j) \right\} L_{12}(m-s), & i < s, \\ L_{22}(m-i) + R(k+i-1), & i = s, \\ H_{si}^T, & i > s, \end{cases}$$

$$G_s(k) = \left\{ \prod_{j=0}^{s-2} A_0^T(k+j) \right\} L_{12}(m-s),$$

$$\prod_{j=1}^{i-1} A_0^T(k+j) = 1,$$

$$Q(s+1) = L_{11}(s) + C^T C, \quad Q(0) = C^T C,$$

$$L_{11}(s) = \sum_{j=0}^{n} A_j^T(k+m-1-s) Q(s) A_j(k+m-1-s),$$

$$L_{12}(s) = \sum_{j=0}^{n} A_j^T(k+m-1-s) Q(s) B_j(k+m-1-s),$$

$$L_{22}(s) = \sum_{j=0}^{n} B_j^T(k+m-1-s) Q(s) B_j(k+m-1-s),$$

$$A_0(k) = diag\left(b_0(k) \;\; 1+r_1(k) \;\; 1+r_2(k) \;\; 1+\mu^0(k)\right),$$

$$A_i(k) = diag\left(0 \; ... \; 0 \;\; \sum_{j}^{2} \overline{\sigma}_i^{(j)} \;\; 0 \; ... \; 0 \;\; 0 \;\; 0\right),$$

$$B_0(k) = \begin{bmatrix} \overline{0}_n^T & b_0(k) & -b_0(k) \\ 1+r_1(k) & -(1+\alpha) b_1(k) & (1-\beta) b_1(k) \\ 1+r_2(k) & \overline{0}_n & \overline{0}_n \\ 0 & \overline{0}_n & \overline{0}_n \end{bmatrix},$$

$$b_0(k) = diag(1+\overline{\mu}_1(k) \; ... \; 1+\overline{\mu}_n(k)),$$

$$b_1(k) = (1+r_1(k)) e_n \,,$$

$$B_i(k) = \begin{bmatrix} \overline{0}_n^T & \sigma_{*i}(k) & -\sigma_{*i}(k) \\ 0 & \overline{0}_n & \overline{0}_n \\ 0 & \overline{0}_n & \overline{0}_n \\ 0 & \overline{0}_n & \overline{0}_n \end{bmatrix},$$

$$\sigma_{*i}(k) = diag\left(0 \; ... 0 \;\; \sum_{j}^{2} \overline{\sigma}_i^{(j)} \;\; 0 \; ... \; 0\right),$$

$C = [1 \; ... \; 1 \; -1 \; -1]$ – вектор-строка размерности $n + 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Markowitz H.M.* Portfolio selection// Journal of Finance. 1952. Vol. 7. № 1. P. 77–91.
2. *Tobin J.* Liquidity preference as behavior towards risk // Review of Economic Studies. 1958. Vol. 26. № 1. P. 65–86.
3. *Merton R.C.* Continuous-time finance. Cambr. Ma. Blackwell, 1990.
4. *Runggaldier W.J.* On stochastic control in finance. Mathematical systems theory in biology, communication, computation and finance (D. Gilliam and J. Rosental, eds). IMA Book Series (MTNS-2002), Springer Verlag. 2002. P. 1–28.
5. *Bielecki T.R., Pliska S.R.* Risk-sensitive dynamic asset management // Applied mathematics and optimization. 1999. № 39. P. 337–360.
6. *Герасимов Е.С., Домбровский В.В.* Динамическая сетевая модель управления инвестиционным портфелем непрерывном времени при квадратичной функции риска // Вестник Томского государственного университета. 2000, № 269. С. 70–73.
7. *Герасимов Е.С., Домбровский В.В.* Динамическая сетевая модель управления инвестициями при квадратичной функции риска // Автоматика и телемеханика. 2002. № 2. С. 119–127.
8. *Dombrovsky V.V., Fedosov E.N.* State space model of portfolio selection in non-stationary jump-diffusion market // Automatic control and computer sciences. 2002. Vol. 36. № 6. P. 13–24.
9. *Cadenillas A.,* Consumption-investment problem with transaction cost: Survey and open problems // Math. meth. of oper. res. 2000, № 51. P. 43–68.
10. *Rawlings J. B.* Tutorial: Model predictive control technology // Proc. Am. Conf., June, 1999. San Diego, P. 662–676.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики и кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике экономического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 21 мая 2003 г.