УДК 62-50

К.И. Лившиц, Л.Ю. Сухотина

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНОЙ ПРОДАЖИ ОДНОРОДНОЙ ПРОДУКЦИИ

Рассматривается задача оптимизации величины отчислений на приобретение новой партии товара и розничной цены однородной продукции.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В работе предполагается, что функционирование торговой компании может быть описано следующей моделью. Обозначим через $S(t)$ капитал компании, а через $K(t)$ количество однородного товара, принадлежащего компании, в момент времени t. Будем считать, что моменты продажи товара образуют пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$, причем средний объем одной покупки пропорционален имеющемуся количеству товара, т.е. равен $aK(t)$. Предположим далее, что на интервале времени $(t, t+\Delta t)$ фирма тратит часть своего капитала, равную $\mu(t)S(t)\Delta t$, где $0<\mu(t)<\mu_0$, на закупку нового товара и расходы на обслуживание торговли (хранение на складе, транспортировка и т.д.) равны $cK(t)$. Пусть $1/b$ – оптовая цена единицы товара, а $u(t)$ – розничная. Тогда изменение среднего капитала $\overline{S}(t)$ и среднего количества товара $\overline{K}(t)$, принадлежащего компании, будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{S}(t)}{dt} &= -\mu(t)\overline{S}(t) + \big(\lambda(t)u(t)a - c\big)\overline{K}(t), \\ \frac{d\overline{K}(t)}{dt} &= \mu(t)b\overline{S}(t) - \lambda(t)a\overline{K}(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

с начальными условиями $\overline{K}(0) = K_0$, $\overline{S}(0) = S_0$.

Относительно функции $\lambda(t)$ сделаем следующие простые предположения. Будем считать, что

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_0}{1+u(t)^2}. \qquad (2)$$

Выбор функции $\lambda(t)$ в виде (2) обусловлен следующими соображениями. Очевидно, что интенсивность $\lambda(t)$ потока покупок зависит от цены на товар и должна быть тем ниже, чем выше цена товара, при $u(t) \to 0$ интенсивность $\lambda(t)$ должна оставаться конечной. Наконец, функция $\lambda(t)u(t)$ должна иметь максимум по $u(t)$, так как она характеризует выручку от продажи единицы товара. Простейшей функцией, удовлетворяющей этим условиям и является функция (2).

Очевидно, параметры модели (1) должны удовлетворять некоторым условиям, обеспечивающим прибыль фирме. Для получения этих условий рассмотрим вначале случай, когда параметры не зависят от времени: $u(t) = u$, $\lambda(t) = \lambda$, $\mu(t) = \mu$. Тогда система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{S}(t)}{dt} &= -\mu\overline{S}(t) + (\lambda ua - c)\,\overline{K}(t), \\ \frac{d\overline{K}(t)}{dt} &= \mu b\overline{S}(t) - \lambda a\overline{K}(t). \end{aligned} \qquad (3)$$

Характеристическое уравнение системы уравнений (3) имеет вид

$$z^2 + z\mu(1-b) + \lambda a(\lambda ua - c) - \mu^2 b = 0. \qquad (4)$$

Очевидно, что функции $\overline{S}(t)$ и $\overline{K}(t)$ будут возрастать с ростом t, если, по крайней мере, один из корней уравнения (4) положителен. Несложно показать, что для этого должно выполняться условие

$$\lambda\, a\left(u - \tfrac{1}{b}\right) - c > 0. \qquad (5)$$

Смысл условия (5) очевиден. Левая часть соотношения есть чистая прибыль от продажи единицы товара в единицу времени. По аналогии с соотношением (5) потребуем, чтобы в общем случае параметры $\lambda(t)$ и $u(t)$ удовлетворяли условию

$$\lambda(t)\, a\left(u(t) - \tfrac{1}{b}\right) - c > 0. \qquad (6)$$

Если функция $\lambda(t)$ задается соотношением (2), то условию (6) можно придать более простой вид. Будем считать, что $b = 1$ (т.е. за единицу масштаба принята оптовая цена товара) и обозначим

$$\alpha = \frac{2c}{\lambda_0\, a} > 0. \qquad (7)$$

С учетом (2) условие (6) принимает вид

$$\alpha\, u(t)^2 - 2u(t) + \alpha + 2 \le 0. \qquad (8)$$

Неравенство (8) может быть выполнено, если параметр α заключен в пределах $0 < \alpha < \sqrt{2} - 1$, что накладывает ограничение на величину расходов c по обслуживанию торговли. Тогда условие (8) выполнено, если

$$u_1 \le u(t) \le u_2, \qquad (9)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1-\sqrt{1-\alpha^2-2\alpha}}{\alpha}, \\ u_2 &= \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2-2\alpha}}{\alpha} \end{aligned} \qquad (10)$$

и величины u_1 и u_2 удовлетворяют условиям:

$$1 \le u_2 \le \sqrt{2}+1, \quad u_2 \ge \sqrt{2}+1. \qquad (11)$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНОЙ ПРОДАЖИ И ОТЧИСЛЕНИЯМИ НА ЗАКУПКУ ТОВАРА

Будем считать, что цель фирмы состоит в том, чтобы, выбирая розничную цену товара $u(t)$ и долю отчислений на закупку товара $\mu(t)$, максимизировать средний капитал фирмы в момент времени T. Получающаяся оптимизационная задача

$$\overline{S}(t) = \max \qquad (12)$$

при условии, что переменные $\overline{S}(t)$ и $\overline{K}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (1) и выполняются условия (2) и (9), может быть решена с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина [1]. Применение принципа максимума к решению поставленной задачи состоит из выполнения следующих этапов. Вначале составляется функция Гамильтона

$$\begin{aligned} H(u,\mu) = {} & \psi_1(t)\Big(\mu(t)b\overline{S}(t) - \lambda(t)\,a\overline{K}(t)\Big) + \\ & + \psi_2(t)\Big(-\mu(t)\overline{S}(t) + \big(\lambda(t)\,au(t) - c\big)\overline{K}(t)\Big), \end{aligned} \qquad (13)$$

где сопряженные переменные $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \overline{K}} =$$
$$= \lambda(t) a\psi_1(t) - (\lambda(t) au(t) - c)\psi_2(t), \tag{14}$$
$$\frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \overline{S}} =$$
$$= -\mu(t) b\psi_1(t) + \mu(t)\psi_2(t),$$

с вытекающими из (12) граничными условиями

$$\psi_1(T) = 0, \psi_2(T) = 1. \tag{15}$$

Затем оптимальные управления $u(t)$ и $\mu(t)$ ищутся из условия

$$H(u,\mu) = \max_{u(t),\mu(t)} \tag{16}$$

с учетом ограничения $0 < \mu(t) < \mu_0$ и условия (9).

Так как функция Гамильтона $H(u,\mu)$ (13) линейна относительно $\mu(t)$, то оптимальное управление $\mu(t)$ определяется условием

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0, \text{если } \psi_1(t)b - \psi_2(t) > 0, \\ 0, \text{если } \psi_1(t)b - \psi_2(t) > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, управление $\mu(t)$ является релейным. Точки переключения управления определяются из условия

$$\varphi(t) = \psi_1(t)b - \psi_2(t) = 0. \tag{18}$$

Оптимальное управление $u(t)$ должно максимизировать функцию Гамильтона (13) при выполнении условия (9).Функция Гамильтона (13) достигает максимума при $u = u_0$, которое является корнем уравнения

$$\psi_2(t)\,u_0(t)^2 - 2\psi_1(t)\,u_0(t) - \psi_2(t) = 0. \tag{19}$$

Отсюда

$$u(t) = \begin{cases} u_2, \text{ если } u_0(t) > u_2, \\ u_0(t), \text{если } u_1 \le u_0(t) \le u_2, \\ u_1, \text{ если } u_0(t) > u_1. \end{cases} \tag{20}$$

Рассмотрим вначале правый конец траектории $t = T$. Из граничных условий задачи (15) следует, что при $t = T$ $\varphi(t) < 0$. Так как функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ – кусочно-дифференцируемы, то в некоторой ε-окрестности точки T $\varphi(t)$ также меньше 0. Следовательно, в некоторой окрестности точки T $\psi_2(t) = 1$ и

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = \lambda(t)\,a\psi_1(t) - (\lambda(t)\,au(t) - c), \tag{21}$$

$$u_0(t)^2 - 2\psi_1(t)\,u_0(t) - 1 = 0. \tag{22}$$

Далее, так как $\psi_1(T) = 0$, то $u_0(T)$=1. Поэтому $u(T)$= u_1. Из системы (21), (22) получаем, что в некоторой ε-окрестности точки T $u(t) = u_1$, что с учетом (8) и (10) дает

$$\psi_1(t) = 1 - \exp\left\{\frac{-\lambda_0 a}{1 + u_1^{\,2}}(T - t)\right\}. \tag{23}$$

Так как при этом $\varphi(t) < 0$, то управление $\mu(t) = 0$. Точка t_1 переключения управления $u(t)$ определится условием

$$\psi_1(t_1) + \sqrt{\psi_1(t_1)^2 + 1} = u_1, \tag{24}$$

где $\psi_1(t_1)$ определяется соотношением (23).

При $t < t_1$ управление $u(t) = u_0(t)$. Из соотношения (22) имеем теперь

$$\psi_1(t) = \frac{u_0(t)^2 - 1}{2u_0(t)}. \tag{25}$$

Дифференцируя (25) по t и учитывая уравнение (21), получим уравнение, определяющее функцию $u_0(t)$ –

$$\frac{du_0(t)}{dt} = \frac{2c}{\alpha}\frac{(\alpha u_0(t) - 1)u_0(t)}{1 + u_0(t)^2} \tag{26}$$

с граничным условием $u_0(t_1) = u_1$. Так как $du(t_1)/dt < 0$, то на некотором отрезке (t_1-ε, t_1) уравнение(26) определяет монотонно убывающую функцию. Решение уравнения (26) имеет вид

$$u_0(t) - u_1 - \alpha \ln\frac{u_0(t)}{u_1} +$$
$$+ \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\ln\left|\frac{\alpha\,u_0(t) - 1}{\alpha\,u_1 - 1}\right| = 2c\,(t - t_1). \tag{27}$$

Как следует из соотношения (26), наибольшее значение функции $u_0(t)$ равно $1/\alpha$. При $u_0(t)<1/\alpha$ функция $u_0(t)$ монотонно убывает, так как $du_0(t)/dt < 0$. Таким образом решение (27) удовлетворяет условию

$$u_1 \le u_0(t) \le 1/\alpha \le u_2. \tag{28}$$

Пусть теперь момент времени t^* определяется из условия $u(t^*) = u^* = \sqrt{2} + 1$, т.е.

$$t^* = t_1 + \frac{1}{2c}\left[u^* - u_1 - \alpha\ln\frac{u^*}{u_1} +\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\ln\left(\frac{1 - \alpha\,u^*}{1 - \alpha}\right)\right]. \tag{29}$$

Для его существования необходимо, очевидно, выполнение условия

$$t_1 + \frac{1}{2c}\left[u^* - u_1 - \alpha\ln\frac{u^*}{u_1} +\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\ln\left(\frac{1 - \alpha u^*}{1 - \alpha}\right)\right] > 0. \tag{30}$$

Тогда при $t = t^*$ $\psi_1(t^*) = 1$ в силу соотношения (25) и функция $\varphi(t)$ (18) меняет знак. Таким образом, при $t < t^*$ управление $\mu(t) = \mu_0$.

Если условие (30) выполняется, то затраты на закупку товара начинаются в некоторый момент времени t_0 и заканчиваются в момент времени t^* ($0 \le t_0 < t^*$). Покажем, что $t_0 = 0$. Для этого нужно показать, что при $t < t^*$ функция $\varphi(t)$ (18) не меняет знак. Введем функцию $\theta(t)>0$ соотношением

$$\lambda(t)\,a\,u(t) - c = (1 + \theta(t))\lambda(t)\,a. \tag{31}$$

В силу условия (7) такая функция $\theta(t)$ заведомо существует. Тогда на отрезке [t_0, t^*] система уравнений (14) перепишется в виде

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -\lambda(t)\,a(\psi_2(t) - \psi_1(t)) -$$
$$- \theta(t)\lambda(t)\,a\psi_2(t),$$
$$\frac{d\psi_2(t)}{dt} = \mu_0(\psi_2(t) - \psi_1(t)).$$

Переходя от функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ к функциям $\varphi(t)$ и $\psi_2(t)$, получаем систему уравнений

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -(\mu_0 + \lambda(t)a)\varphi(t) - \theta(t)\lambda(t)\,a\psi_2(t),$$
$$\frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\mu_0\varphi(t)$$

относительно функций $\varphi(t)$, $\psi_2(t)$ с граничными условиями $\varphi(t^*) = 0$ и $\psi_2(t^*) = 1$. Откуда

$$\varphi(t)=\int_t^{t^*}\theta(z)\lambda(z)a\psi_2(z)\exp\left\{-\int_t^{z}\left(\mu_0+\lambda(y)a\right)dy\right\}dz, \qquad (32)$$

где $\psi_2(z)\ge 1$. Таким образом, если $\varphi(t)\ge 0$ на отрезке (t, t^*), то $\varphi(t) > 0$ в точке t. Последнее означает, что управление $\mu(t)$ имеет вид

$$\mu(t)=\begin{cases}\mu_0, \text{ если } t\le t^*,\\ 0, \text{ если } t>t^*,\end{cases} \qquad (33)$$

где точка t^* определяется условием (29).

Вернемся к управлению $u(t)$. При $t < t^*$ функция $u(t)$ определяется соотношениями (19), (20). Из соотношения (19)

$$\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}=\frac{u_0(t)^2-1}{2u_0(t)}, \qquad (34)$$

причем при $t = t^*$ функция $u_0(t)$ удовлетворяет ограничениям (20). Дифференцируя (34) по t, получим, учитывая систему (14), дифференциальное уравнение, определяющее функцию $u_0(t)$ на $[0, t^*]$:

$$\frac{du_0(t)}{dt}=\lambda_0 a\frac{\alpha u_0(t)^2-u_0(t)}{u_0(t)^2+1}+ +\mu_0\frac{\left(u_0(t)^2-1\right)\left(u_0(t)^2-2u_0(t)-1\right)}{2\left(u_0(t)^2+1\right)}$$

с граничным условием $u(t^*) = u^*$. Так как при $u_0(t) = u^*$ $du_0(t)/dt<0$, то $u_0(t)\ge u^*$ на отрезке $[0, t^*]$. Таким образом, на $[0, t^*]$ управление $u(t)$ имеет вид

$$u(t)=\begin{cases}u_2, \text{ если } u_0(t)>u_2,\\ u_0(t), \text{ если } u_0(t)\le u_2.\end{cases}$$

Получившийся вид оптимальных управлений $\mu(t)$ и $u(t)$ хорошо согласуется с интуитивными представлениями. Если компании необходимо аккумулировать свой капитал, то вначале необходимо прекратить закупку новых партий товара, а затем, постепенно снижая розничную цену товара, довести ее до минимально возможной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 396 с.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 12 апреля 2004 г.