

УПРАВЛЕНИЕ РОЗНИЧНОЙ ЦЕНОЙ ПРОДАЖИ СКОРОПОРТЯЩЕГОСЯ ТОВАРА

Рассматривается управление розничной ценой продажи скоропортящегося товара, обеспечивающее его распродажу в течение торговой сессии.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим следующую ситуацию. Продавец приобретает у оптового продавца партию товара объемом Q_0 , которую он потом продает на рынке покупателям. Считается, что величина покупки ξ отдельным покупателем есть случайная величина с математическим ожиданием $M\{\xi\} = a_1$ и вторым начальным моментом $M\{\xi^2\} = a_2$. Сам поток покупок считается пуассоновским с интенсивностью $\lambda(c)$, зависящей от розничной цены c . Товар должен быть реализован в течение одной торговой сессии продолжительностью T , иначе он теряет потребительские свойства и не подлежит продаже.

Достаточно неприятно, если к концу торговой сессии остается непроданный товар. Выбрасывать его жалко, пускать на переработку в продукцию низкого качества – тоже. Поэтому продавцы применяют разнообразные приемы, чтобы реализовать товар до конца торговой сессии, например, в ее конце устраивают распродажу остатков товара по низкой цене. Однако это не единственная и, по-видимому, не самая лучшая стратегия, и здесь имеется обширное поле для теоретического исследования. В данном разделе мы изучим только одну из таких стратегий управления ценой продажи товара, которая обеспечивает его реализацию до окончания торговой сессии.

Будем считать, что торговая сессия начинается в момент времени 0 и кончается в момент времени T , то есть она занимает интервал времени $[0, T]$. Обозначим через $Q(t)$ количество товара в момент времени t . Будем также считать, что $Q(0) = Q_0$ фиксировано.

Рассмотрим следующую процедуру управления ценой $c(t)$ товара $a_1\lambda(c(t)) = Q(t) / (T - t)$.

Она получается из следующих естественных соображений: дробь $Q(t) / (T - t)$ есть та средняя скорость, с которой должен продаваться товар, чтобы он был весь продан к концу сессии. С другой стороны, $a_1\lambda(c(t))$ есть та мгновенная скорость, с которой он продается в момент времени t . Мы требуем, чтобы эти две скорости были равны друг другу.

Найдем характеристики величины количества товара в диффузионном приближении. Ранее было показано, что процесс $Q(t)$ может быть приближенно описан следующим стохастическим дифференциальным уравнением [1]: $dQ(t) = -a_1\lambda(c)dt + \sqrt{a_2\lambda(c)}dw(t)$.

В рассматриваемом случае это уравнение принимает вид

$$dQ(t) = -\frac{Q(t)}{T-t}dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T-t}}dw(t). \quad (1)$$

Найдем основные вероятностные характеристики процесса $Q(t)$.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ПРОЦЕССА $Q(T)$

Обозначим $M\{Q(t)\} = \bar{Q}(t)$. Усредняя уравнение (1) с учетом того, что приращения винеровского случайно-

го процесса независимы и имеют нулевое математическое ожидание, получим следующее уравнение для $\bar{Q}(t)$: $d\bar{Q}(t) = -\frac{\bar{Q}(t)}{T-t}dt$, которое надо решить при начальном условии $\bar{Q}(0) = Q_0$. Решая его стандартным методом разделения переменных, получим

$$\bar{Q}(t) = Q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right). \quad (2)$$

В частности, $\bar{Q}(T) = 0$.

ДИСПЕРСИЯ ПРОЦЕССА $Q(T)$

Пусть процесс $Q(t)$ описывается уравнением

$$dQ(t) = a(Q, t)dt + b(Q, t)dw(t)$$

и нас интересует процесс $y(t) = f(Q, t)$. Тогда, как известно, этот новый процесс также является диффузионным и удовлетворяет уравнению

$$df(Q, t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + a(Q, t) \frac{\partial f}{\partial Q} + \frac{b^2(Q, t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} \right] dt + b(Q, t) \frac{\partial f}{\partial Q} dw(t).$$

Эта формула носит название формулы Ито [2].

Возьмем $f(Q, t) = Q^2$. Тогда $\partial f / \partial t = 0$, $\partial f / \partial Q = 2Q$, $\partial^2 f / \partial Q^2 = 2$, и формула Ито дает

$$d(Q^2(t)) = \left(-\frac{2Q^2(t)}{T-t} + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T-t} \right) dt + 2Q(t) \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T-t}} dw(t). \quad (3)$$

Обозначим $M\{Q^2(t)\} = Q_2(t)$. Тогда, усредняя (3), получим $dQ_2(t) = \left(-\frac{2Q_2(t)}{T-t} + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\bar{Q}(t)}{T-t} \right) dt$, или с учетом (2)

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -2 \frac{Q_2(t)}{T-t} + \frac{a_2 Q_0}{a_1 T}, \quad (4)$$

которое надо решить при начальном условии $Q_2(0) = Q_0^2$.

Это уравнение решается стандартным методом вариации произвольных постоянных. Однородное уравнение

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -2 \frac{Q_2(t)}{T-t} = 2 \frac{Q_2(t)}{t-T}$$

имеет общее решение $Q_2(t) = C(t - T)^2$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $Q_2(t) = C(t)(t - T)^2$. Подстановка этого выражения в (4)

приводит к уравнению $C'(t) = \frac{a_2 Q_0}{a_1 T} \cdot \frac{1}{(t - T)^2}$, решение

которого имеет вид $C(t) = \frac{a_2 Q_0}{a_1 T} \cdot \frac{1}{T - t} + C$. Таким образом, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$Q_2(t) = \frac{a_2 Q_0}{a_1 T} (T - t) + C_1 (T - t)^2,$$

и учет начального условия $Q_2(0) = Q_0^2$ дает

$$Q_2(t) = Q_0^2 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 + \frac{a_2 Q_0}{a_1} \cdot \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right). \quad (5)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D\{Q(t)\} &= D_Q(t) = Q_2(t) - \bar{Q}^2(t) = \\ &= \frac{a_2 Q_0}{a_1} \cdot \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

В частности, $D_Q(0) = D_Q(T) = 0$. Вместе с результатом $\bar{Q}(T) = 0$ это говорит о том, что с вероятностью 1 $Q(T) = 0$, т.е. с вероятностью 1 к концу торговой сессии весь товар будет продан.

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОЦЕССА $Q(T)$

Таким образом, процесс $Q(t)$ начинается в Q_0 и заканчивается в 0. Рассмотрим $f(Q, t) = e^{-pQ}$. Тогда $\partial f / \partial t = 0$, $\partial f / \partial Q = -pe^{-pQ}$, $\partial^2 f / \partial Q^2 = p^2 e^{-pQ}$, и поэтому

$$\begin{aligned} d(e^{-pQ}) &= \left(\frac{Q}{T-t} pe^{-pQ} + \frac{a_2}{2a_1} \frac{Q}{T-t} p^2 e^{-pQ} \right) dt - \\ &- pe^{-pQ} \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \frac{Q}{T-t}} dw(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим $\Phi(p, t) = M\{e^{-pQ}\}$, которая является преобразованием Лапласа от плотности вероятностей $p(Q, t)$ значений процесса $Q(t)$ в момент времени t . Тогда $\frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial p} = -M\{Qe^{-pQ}\}$ и, усредняя (7), получим

$$d_t \Phi(p, t) = -\frac{1}{T-t} \left(p \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{a_2}{2a_1} p^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) dt,$$

или, в явном виде,

$$(T-t) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p \left(1 + \frac{a_2}{2a_1} p \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\beta = 2a_1/a_2$.

Уравнение (8) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Оно решается методом характеристик [3]. Уравнение для характеристик имеет вид

$$\frac{dt}{T-t} = \frac{dp}{p(1+p/\beta)} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\beta} \right) dp. \quad (9)$$

Интегрируя его, получим $-\ln(T-t) = \ln p - \ln(p+\beta) - \ln C$, что и дает явный вид характеристик

$$C = \frac{p(T-t)}{p+\beta}. \quad (10)$$

Поэтому общее решение уравнения (8) имеет вид

$$\Phi(p, t) = \varphi \left(\frac{p(T-t)}{p+\beta} \right), \quad (11)$$

где $\varphi(\cdot)$ – произвольная функция.

Вид общего решения найдем из того условия, что в момент времени $t = 0$ $Q(0) = Q_0$ с вероятностью 1. Поэтому $p(Q, 0) = \delta(Q - Q_0)$, откуда следует, что $\Phi(p, 0) = e^{-pQ_0}$. Это приводит к уравнению

$$\varphi \left(\frac{pT}{p+\beta} \right) = e^{-pQ_0}. \quad (12)$$

Обозначим $pT/(p+\beta) = z$. Тогда $p = \beta z/(T-z)$ и уравнение (12) дает

$$\varphi(z) = \exp \left(-\frac{\beta z}{T-z} Q_0 \right). \quad (13)$$

Отсюда и получаем явный вид функции $\Phi(p, t)$:

$$\Phi(p, t) = \varphi \left(\frac{p(T-t)}{p+\beta} \right) = \exp \left(-\frac{\beta p(T-t)}{pt+\beta T} Q_0 \right). \quad (14)$$

Таблицы обратного преобразования Лапласа [4, формула 23.65, стр. 245] дают

$$\exp \left(\frac{1}{a(p+b)} \right) - 1 \Leftrightarrow \frac{e^{-bQ}}{\sqrt{aQ}} I_1 \left(2\sqrt{\frac{Q}{a}} \right). \quad (15)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{p(T-t)}{pt+\beta T} &= \frac{T-t}{t} \frac{pt+\beta T-\beta T}{pt+\beta T} = \frac{T-t}{t} \left(1 - \frac{\beta T}{pt+\beta T} \right), \\ -\frac{p\beta(T-t)}{pt+\beta T} Q_0 &= -\frac{T-t}{t} \beta Q_0 + \frac{\beta^2 T(T-t)}{t^2(p+\beta T/t)} Q_0, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{p\beta(T-t)}{pt+\beta T} Q_0 \right) &= \\ &= e^{-\frac{T-t}{t} \beta Q_0} \exp \left(\frac{\beta^2 T(T-t)}{t^2(p+\beta T/t)} Q_0 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая с (15) и беря $b = \beta T/t$, $1/a = \beta^2 T(T-t)Q_0/t^2$, получим окончательно

$$\begin{aligned} p(Q, t) &= e^{-(T-t)\beta Q_0/t} \left[\delta(Q) + \beta e^{-\beta T Q_0/t} \sqrt{\frac{T(T-t)Q_0}{t^2 Q}} I_1 \times \right. \\ &\times \left. \left(2\sqrt{\frac{T(T-t)}{t^2} \beta^2 Q_0 Q} \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим особую роль слагаемого $e^{-(T-t)\beta Q_0/t} \delta(Q)$, содержащего δ -функцию. Оно возникает потому, что величина покупки является случайной и, в принципе, может прийти покупатель и купить весь оставшийся товар, и тогда для продавца все закончится. Математически это происходит потому, что в точке, где $Q(t_0) = 0$ у процесса $Q(t)$ равны нулю и коэффициент сноса и коэффициент диффузии, и поэтому при $t > t_0$ $Q(t) = 0$.

Этот результат позволяет вычислить и некоторые другие характеристики процесса продаж. Обозначим через τ величину промежутка времени от начала торговой сессии до того момента, когда будет продан весь товар, т.е. длительность продаж. Тогда из вида рассматриваемого слагаемого следует, что

$$P(\tau \leq t) = F_\tau(t) = \exp \left(-\frac{T-t}{t} \beta Q_0 \right), \quad (18)$$

где $F_\tau(t)$ есть функция распределения величины τ .

Это позволяет вычислить, например, среднюю длительность продаж. Имеем

$$M\{\tau\} = \int_0^T (1 - F_\tau(t)) dt = T \left(1 - e^{\beta Q_0} \int_0^1 e^{-\beta Q_0/x} dx \right). \quad (19)$$

Входящий сюда интеграл через элементарные функции не выражается.

Найдем асимптотику $M\{\tau\}$ при $\beta Q_0 \gg 1$, т.е. при большой величине партии товара Q_0 . Тогда величина

$B = 1/\beta Q_0 \ll 1$. Делая в интеграле замену переменных $x/\beta Q_0 = Bx = z$, получим

$$e^{\beta Q_0} \int_0^1 e^{-\beta Q_0/x} dx = \frac{1}{B} e^{1/B} \int_0^B e^{-1/z} dz.$$

Найдем по правилу Лопиталя следующий предел

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{B^2} e^{1/B} \int_0^B e^{-1/z} dz = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\int_0^B e^{-1/z} dz}{B^2 e^{-1/B}} =$$

$$= \lim_{B \rightarrow 0} \frac{e^{-1/B}}{2Be^{-1/B} + e^{-1/B}} = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2B} = 1.$$

Отсюда следует, что при $B = 1/\beta Q_0 \ll 1$

$$e^{\beta Q_0} \int_0^1 e^{-\beta Q_0/x} dx = \frac{1}{B} e^{1/B} \int_0^B e^{-1/z} dz = B + o(B),$$

и поэтому

$$M\{\tau\} = T \left(1 - \frac{1}{\beta Q_0} + o\left(\frac{1}{\beta Q_0}\right) \right). \quad (20)$$

Аналогично можно найти и асимптотику дисперсии величины τ .

В качестве контроля правильности проделанных выкладок найдем математическое ожидание и дисперсию процесса $Q(t)$ другим путем через функцию $\Phi(p, t)$. Имеем

$$\Psi(p, t) = \ln \Phi(p, t) = -\frac{\beta p(T-t)}{pt + \beta T} Q_0 =$$

$$= -\frac{\beta p(1-\tau)}{p\tau + \beta} Q_0, \quad \tau = t/T.$$

Тогда, по свойствам преобразования Лапласа,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p} = -\frac{\beta^2(1-\tau)}{(p\tau + \beta)^2} Q_0,$$

$$M\{Q(t)\} = -\frac{\partial \Psi}{\partial p} \Big|_{p=0} = Q_0(1-\tau) = Q_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} = \frac{2\beta^2\tau(1-\tau)}{(p\tau + \beta)^3} Q_0,$$

$$D\{Q(t)\} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} \Big|_{p=0} = \frac{2}{\beta} \tau(1-\tau) Q_0 = \frac{a_2}{a_1} \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T} \right) Q_0,$$

т.е. те же результаты, что были получены ранее непосредственным путем. Это является косвенным подтверждением правильности всех проделанных выкладок.

Рассмотрим теперь еще одну основную характеристику процесса продаж – выручку от продаваемой партии товара. Вообще она равна

$$S = a_1 \int_0^T c(t) \lambda(t) dt. \quad (21)$$

Однако теперь она становится случайной величиной и надо искать ее характеристики.

Цена на товар $c(t)$ определяется уравнением

$$a_1 \lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T-t}. \quad (22)$$

Предположим, что нам удалось разрешить это уравнение относительно $c(t)$:

$$c(t) = \Lambda \left(\frac{Q(t)}{T-t} \right). \quad (23)$$

Тогда

$$S = \int_0^T \Lambda \left(\frac{Q(t)}{T-t} \right) \frac{Q(t)}{T-t} dt. \quad (24)$$

Найдем математическое ожидание $\bar{S} = M\{S\}$. Для этого надо усреднить (24) по значениям процесса $Q(t)$. Однако здесь есть одна тонкость, которую надо учитывать. Дело в том, что в выражении для $p(Q, t)$ есть δ -образная компонента, которая соответствует тому, что в момент времени t весь товар уже продан. Ясно, что в такой ситуации выручки от продажи нет. Поэтому в (24) надо усреднять только по оставшейся части. Поэтому

$$\bar{S} = a_1 \beta \int_0^T dt \int_0^{Q_0} \Lambda \left(\frac{Q}{T-t} \right) \frac{Q}{T-t} e^{-(T-t)\beta Q_0/t} e^{-\beta T Q_0/t} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{T(T-t)Q_0}{t^2 Q}} I_1 \left(2 \sqrt{\frac{T(T-t)}{t^2} \beta^2 Q_0 Q} \right) dQ.$$

Вычислить это выражение возможно лишь при конкретизации вида $\lambda(c)$.

Найдем асимптотику величины $\bar{S}$ при $\beta Q_0 \gg 1$, используя для этого метод линеаризации. Определим величину c_0 уравнением

$$a_1(c_0) = Q_0/T. \quad (25)$$

Будем называть ее «стационарной ценой», так как она соответствует тому, что товар продается с постоянной скоростью.

Будем считать, что отклонения $\Delta c(t) = c(t) - c_0$ цены $c(t)$ от стационарной цены c_0 малы. Тогда имеем

$$a_1 \lambda(c(t)) = \frac{Q}{T-t} = a_1 \lambda(c_0) + a_1 \lambda'(c_0) \Delta c(t) + \dots =$$

$$= \frac{Q_0}{T} + a_1 \lambda'(c_0) \Delta c(t) + \dots$$

Отсюда приближенно

$$\Delta c(t) = \frac{1}{a_1 \lambda'(c_0)} \left(\frac{Q}{T-t} - \frac{Q_0}{T} \right). \quad (26)$$

Для получения дальнейших формул найдем сначала некоторые вспомогательные величины. Как говорилось выше, вероятность того, что к моменту времени t весь товар будет продан, равна $\pi_0(t) = \exp \left(-\frac{T-t}{t} \beta Q_0 \right)$.

Найдем условное математическое ожидание $M\{Q | \text{т.е.}\}$ величины $Q(t)$ при условии, что товар есть. Имеем:

$$M\{Q\} = \pi_0(t) 0 + (1 - \pi_0(t)) M\{Q | \text{т.е.}\} = \frac{Q_0}{T} (T - t).$$

Отсюда

$$M\{Q | \text{т.е.}\} = \frac{Q_0(T-t)}{T(1-\pi_0(t))}. \quad (27)$$

Поэтому $M \left\{ \frac{Q}{T-t} - \frac{Q_0}{T} \middle| \text{т.е.} \right\} = \frac{Q_0}{T} \frac{\pi_0(t)}{1-\pi_0(t)}$ и

$$M\{\Delta c(t) | \text{т.е.}\} = \frac{Q_0}{a_1 \lambda'(c_0) T} \cdot \frac{\pi_0(t)}{1-\pi_0(t)}. \quad (28)$$

Вернемся к вычислению математического ожидания величины $S = a_1 \int_0^T c(t) \lambda(t) dt$. Используя разложение в ряд Тейлора, получим $c(t) \lambda(c(t)) = c_0 \lambda(c_0) + (\lambda(c_0) + c_0 \lambda'(c_0)) \Delta c(t) + \dots$, и принимая во внимание, что выручка идет лишь при наличии товара, будем иметь

$$M\{S\} = a_1 c_0 \lambda(c_0) \int_0^T (1 - \pi_0(t)) dt + a_1 (\lambda(c_0) + c_0 \lambda'(c_0)) \times \\ \times \int_0^T (1 - \pi_0(t)) \frac{Q_0}{T a_1 \lambda'(c_0)} \frac{\pi_0(t)}{1 - \pi_0(t)} dt + \dots = \\ = a_1 c_0 \lambda(c_0) \int_0^T (1 - \pi_0(t)) dt + \\ + \frac{Q_0 (\lambda(c_0) + c_0 \lambda'(c_0))}{T \lambda'(c_0)} \int_0^T \pi_0(t) dt + \dots$$

Интеграл $\int_0^T (1 - \pi_0(t)) dt$ уже был вычислен ранее – это $M\{\tau\}$ (20). Далее, $Q_0/T = a_1 \lambda(c_0)$. Подставляя все это в предыдущее выражение и упрощая, получим

$$\bar{S} \approx a_1 c_0 \lambda(c_0) T \left(1 + \frac{\lambda(c_0)}{c_0 \lambda'(c_0)} \cdot \frac{1}{\beta Q_0} \right). \quad (29)$$

Заметим, что $\lambda'(c_0) < 0$ и поэтому $\bar{S} < a_1 c_0 \lambda(c_0) T$, т.е. управление ценой с целью продать весь товар до окончания торговой сессии уменьшает среднее значение выручки по сравнению с продажей по стационарной цене. Однако это уменьшение имеет порядок $1/\beta Q_0$ и поэтому невелико. Оно является своеобразной «платой» за окончание продаж в срок.

Найдем еще некоторые характеристики процесса $Q(t)$.

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ПРОЦЕССА $Q(T)$

Пусть $R(t_1, t_2) = M\{Q(t_1)Q(t_2)\}$ – функция корреляции процесса $Q(t)$ и $R_0(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - M\{Q(t_1)\}M\{Q(t_2)\}$ – функция корреляции его флуктуаций.

Пусть далее $t_2 > t_1$. Тогда имеем

$$dQ(t_2) = -\frac{Q(t_2)}{T-t_2} dt_2 + \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \frac{Q(t_2)}{T-t_2}} dw(t_2).$$

Умножив на $Q(t_1)$ получим

$$d_{t_2} (Q(t_1)Q(t_2)) = -\frac{Q(t_1)Q(t_2)}{T-t_2} dt_2 + \\ + Q(t_1) \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \frac{Q(t_2)}{T-t_2}} dw(t_2).$$

Наконец, усредняя по реализациям, получаем дифференциальное уравнение для $R(t_1, t_2)$:

$$\partial R(t_1, t_2) / \partial t_2 = R(t_1, t_2) / (T - t_2).$$

Его общее решение имеет вид

$$R(t_1, t_2) = C(t_1) (T - t_2).$$

Полагая $t_2 = t_1$, получаем

$$R(t_1, t_1) = C(t_1) (T - t_1), \quad C(t_1) = R(t_1, t_1) / (T - t_1),$$

откуда следует вид $R(t_1, t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = R(t_1, t_1) \frac{T - t_2}{T - t_1}.$$

Так как $R(t_1, t_1) = R_0(t_1, t_1) + \left(\frac{Q_0}{T - t_1} \right)^2$, то

$$R(t_1, t_2) = \left[R_0(t_1, t_1) + \left(\frac{Q_0}{T - t_1} \right)^2 \right] \frac{T - t_2}{T - t_1} = \\ = R_0(t_1, t_1) \frac{T - t_2}{T - t_1} + M\{Q(t_1)\}M\{Q(t_2)\},$$

откуда получается явный вид функции корреляции флуктуаций процесса $Q(t)$:

$$R_0(t_1, t_2) = R_0(t_1, t_1) \frac{T - t_2}{T - t_1} = D_Q(t_1) \frac{T - t_2}{T - t_1}. \quad (30)$$

Для нормированной функции корреляции, учитывая явный вид дисперсии процесса $Q(t)$ (6) получим

$$r(t_1, t_2) = \frac{R_0(t_1, t_2)}{\sqrt{D_Q(t_1)D_Q(t_2)}} = \sqrt{\frac{t_1(T - t_2)}{t_2(T - t_1)}}. \quad (31)$$

ПЕРЕХОДНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОЦЕССА $Q(T)$

Пусть $Q(t) = Q_i$, $i = 1, 2$, и, как и ранее, $t_2 > t_1$. Рассмотрим функцию $\Phi(p, t_2, t_1) = M\{e^{-pQ_2} | Q(t_1) = Q_1\}$.

Аналогично тому, как это сделано выше, ее явный вид следующий: $\Phi(p, t_2, t_1) = \varphi\left(\frac{p(T - t_2)}{p + \beta}\right)$, где $\varphi(\cdot)$ – неизвестная функция. Ее вид находится из граничного условия $\Phi(p, t_1, t_1) = e^{-pQ_1}$. Отсюда $\varphi\left(\frac{p(T - t_1)}{p + \beta}\right) = e^{-pQ_1}$.

Делая замены $\frac{p(T - t_1)}{p + \beta} = z$, $p = \frac{\beta z}{T - t_1 - z}$, получим,

что $\varphi(z) = \exp\left(-\frac{\beta z}{T - t_1 - z} Q_1\right)$,

$$\Phi(p, t_2, t_1) = \exp\left(-\frac{\beta p(T - t_2)}{p(t_2 - t_1) + \beta(T - t_1)} Q_1\right). \quad (32)$$

Обратное преобразование Лапласа дает

$$p(Q_2, t_2 | Q_1, t_1) = e^{-(T - t_2)\beta Q_1 / (t_2 - t_1)} \left[\delta(Q_2) + \right. \\ \left. + \beta e^{-(T - t_1)\beta Q_2 / (t_2 - t_1)} \sqrt{\frac{(T - t_1)(T - t_2)Q_1}{(t_2 - t_1)^2 Q_2}} I_1 \times \right. \\ \left. \times \left(2 \sqrt{\frac{(T - t_1)(T - t_2)}{(t_2 - t_1)^2}} \beta^2 Q_1 Q_2 \right) \right]. \quad (33)$$

Совместная плотность вероятностей $p(Q_2, t_2; Q_1, t_1) = p(Q_2, t_2 | Q_1, t_1) p(Q_1, t_1)$ в явном виде не выписана из-за громоздкости. Ее знание позволяет вычислить дисперсию величины выручки S .

ЛИТЕРАТУРА

1. Змеев О.А., Новицкая Е.В. Вероятностные характеристики длительности торговой сессии и оценка ее параметров // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 6. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 66–75.
2. Терпугов А.Ф. Математика рынка ценных бумаг. Томск: Изд-во ТГПУ, 2000. 179 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1957. 812 с.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 465 с.

Статья представлена кафедрой теоретических основ информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Информатика» 15 сентября 2004 г.