УДК 658.512

Ю.И. Параев

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКЛАМОЙ В ЗАДАЧЕ ПРОИЗВОДСТВА И СБЫТА ТОВАРА

Обсуждается влияние рекламы в задаче производства и сбыта товара. Рассмотрен вариант динамической рекламы. С помощью принципа максимума Понтрягина получено решение задачи. Показано, что управления производством и рекламой являются релейными.

В настоящее время разрабатывается новое научное направление – динамическая экономика, когда в качестве математических моделей экономических процессов выбирается система дифференциальных или разностных уравнений. Для задач производства, хранения и сбыта товаров достаточно удачной является модель, изложенная в [1–3]. В [4] проводится дальнейшее обобщение этой модели, связанное с включением в задачу проблемы влияния рекламы на темп продажи. Можно рассматривать задачи со статической и динамической рекламой. В [4] рассмотрен вариант статической рекламы. В настоящей работе обсуждается задача с динамической рекламой. Для простоты решения рассматривается упрощенная модель с товаром неограниченного спроса и отсутствием затрат на его хранение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $z(t)$ – количество товара на складе производителя. Изменение этой величины можно описать уравнением

$$\dot{z} = u - P,\ z(0) = 0, \tag{1.1}$$

где $u(t)$ – темп производства; $P(t)$ – темп продажи, т.е. $u(t)\Delta t$ – количество товара, произведенного за время Δt; $P(t)\Delta t$ – количество товара, проданного за это же время. Здесь и далее все величины имеют стоимостное выражение и не могут быть отрицательными. Для простоты изложения будем рассматривать задачу с товаром неограниченного спроса. В этом случае функция $P(t)$ не зависит от количества товара у покупателя и ее, согласно [1, 3], можно выбрать в виде $P(t) = z(t)N(c(t),w(t))$, где $N(c,w)$ – покупательная способность потребителя, зависящая от цены товара $c(t)$ и количества затрат на рекламу $w(t)$. Более конкретно эту функцию, согласно [1, 3], можно выбрать в виде $N(c,w) = f(w)exp\{-c\}$, где $f(w)$ – некоторая монотонно возрастающая функция, характеризующая зависимость покупательной способности от количества рекламы. Можно рассмотреть разные варианты задания функции $f(w)$. Но чтобы подробно обсудить особенности задачи, рассмотрим простейший случай, когда эта функция линейная, т.е. будем рассматривать случай, когда

$$P(t) = bw(t))z(t)\exp\{-c(t)\}, \tag{1.2}$$

где b – какой-то коэффициент, который можно трактовать как потенциальная привлекательность товара. В такой постановке задачи нужно еще уточнить зависимость количества рекламы $w(t)$ от затрат на нее $v(t)$. В данной работе рассмотрим случай динамической рекламы, когда зависимость между $w(t)$ и $v(t)$ задается уравнением

$$\dot{w} = -kw + v,\ w(0) = 0, \tag{1.3}$$

где k – какой-то коэффициент, характеризующий потери рекламы ($k \geq 0$). Примером статической рекламы могут служить установленные рекламные щиты, примером динамической рекламы – реклама в СМИ, когда потребители, увидев рекламу, о ней через какое-то время забывают. Модель (1.2) предполагает, что в отсутствие рекламы товар не продается. Вариант, когда в отсутствие рекламы товар все-таки продается, можно учесть, заменив в (1.2) $w(t)$ на $1+w(t)$. Однако, как видно из (1.3), такую замену делать необязательно. Достаточно в (1.3) взять начальное условие $w(0) = 1$. Однако такое дополнение не играет существенной роли в полученном ниже решении задачи.

Пусть весь процесс продолжается в течение некоторого конечного интервала времени $[0, T]$. Общий доход производителя товара равен

$$J = \int_0^T [c(t)P(t) - u(t) - v(t))]\, dt. \tag{1.4}$$

Для уточнения отметим, что $v(t)$– темп затраты на рекламу, т.е. $v(t)\Delta t$ – количество средств, затраченных на рекламу за время Δt. Очевидно, что все рассматриваемые параметры и переменные не могут быть отрицательными. Будем также предполагать, что должны выполняться условия

$$0 \le u(t) \le u_0,\ 0 \le v(t) \le v_0, \tag{1.5}$$

где u_0 – максимально возможный темп производства, v_0 – максимально возможный темп затрат на рекламу.

В результате получается стандартная задача из теории оптимального управления: найти такие функции $c(t)$, $u(t)$ и $v(t)$ на интервале времени $[0, T]$, удовлетворяющие условиям (1.4), при которых функционал (1.3) максимален.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА Л.С. ПОНТРЯГИНА

Введем вспомогательные переменные $p(t)$ и $p_1(t)$ и на основании уравнений (1.1), (1.3) и функционала (1.4) составим функцию Гамильтона:

$$H(z, w, p, p_1,,u, c, v) = p(u - P) + p_1(- kw+v) - cP+u+v = \\ = u(p + 1) + v(p_1 + 1) - kw - (c + p)P. \tag{2.1}$$

Минимум функции H по u с учетом (1.5) достигается при

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, \text{если } p(t) > -1, \\ u_0, \text{если } p(t) < -1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Минимум функции H по v с учетом (1.5) достигается при

$$v^*(t) = \begin{cases} 0, \text{если } p_1 > -1, \\ v_0, \text{если } p_1 < -1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Минимум функции H по $c(t)$ с учетом (1.2) достигается при

$$c^*(t) = 1 - p(t). \tag{2.4}$$

После подстановки (2.2) – (2.4) в (2.1) получаем гамильтониан

$$H^*(z, p) = u^*(p + 1) + v^*(p_1 + 1) - kw - P^*, \tag{2.5}$$

где

$$P^*(t) = b_0 z(t)w(t)\exp\{p(t)\},\ b_0 = b/e. \tag{2.6}$$

Переменная $p(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\dot{p} = -\partial H^*/\partial z = b_0 w e^p, \; p(T) = 0, \qquad (2.7)$$

а переменная $p_1(t)$ – уравнению

$$\dot{p}_1 = -\partial H^*/\partial w = kw + b_0 z e^p, \; p_1(T) = 0. \qquad (2.8)$$

Как следует из общей теории, необходимым условием существования решения задачи оптимального управления является существование ненулевых функций $p(t)$ и $p_1(t)$, удовлетворяющих уравнениям (2.7) и (2.8). Поэтому основная проблема – нахождение начальных значений $p(0)$ и $p_1(0)$, для которых существует решение краевой задачи.

3. СТРУКТУРА УПРАВЛЕНИЯ

Как следует из (2.2), оптимальное управление производством является релейным, т.е. производство либо работает на полную мощность, либо останавливается. Моменты включения или выключения производства происходят в моменты времени, когда выполняется равенство

$$p(t) = -1. \qquad (3.1)$$

Из (2.7) видно, что производная функции $p(t)$ всегда неотрицательна и, следовательно, она не может убывать. Естественно предположить, что $p(0) < -1$, т.е. в начальный момент времени производство включается. Но поскольку должно выполняться условие $p(T) = 0$, то условие (3.1) может выполняться только один раз в некоторый момент времени t_1.

Оптимальное управление рекламой также является релейным, т.е. это управление либо включается на полную мощность, либо отсутствует. Моменты включения или выключения управления рекламой происходят в моменты времени, когда выполняется равенство

$$p_1(t) = -1. \qquad (3.2)$$

Из (2.8) видно, что производная функции $p_1(t)$ всегда неотрицательна и, следовательно, эта функция не может убывать. Но поскольку она должна удовлетворять условиям $p_1(0) < -1$ и $p_1(T) = 0$, то условие (3.2) может выполняться только один раз в некоторый момент времени t_2.

Таким образом, получили следующее решение задачи: оптимальное управление производством равно

$$u^*(t) = \begin{cases} u_0 & \text{при} \quad 0 < t < t_1, \\ 0 & \text{при} \quad t_1 < t < T. \end{cases} \qquad (3.3)$$

оптимальное управление рекламой равно

$$v^*(\mathrm{t}) = \begin{cases} v_0 & \text{при} \quad 0 < t < t_2, \\ 0 & \text{при} \quad t_2 < t < T. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Другими словами, получается следующая структура решения задачи. Товар производится с максимальной интенсивностью на интервале $[0, t_1]$. После момента t_1 он не производится. Затраты на рекламу осуществляются в течение интервала $[0, t_2]$, причем с максимальной интенсивностью. После t_2 затрат на рекламу нет. Остается найти значения t_1 и t_2, а также необходимые условия существования решения. Для простоты далее положим $k=0$.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Решение уравнения (1.3) при $k=0$ с учетом (3.4) можно записать в виде

$$w(t) = \begin{cases} v_0 t & \text{при} \quad 0 < t < t_2, \\ \mathrm{v}_0 t_2 & \text{при} \quad t_2 < t < T. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Решение уравнения (2.7) можно записать в виде

$$p(t) = -\ln F(t), \qquad (4.2)$$

где

$$F(t) = 1 + b_0 \int_t^T w(t)dt, \qquad (4.3)$$

причем

$$\dot{F} = -b_0 w, \; F(T) = 1. \qquad (4.4)$$

Это проверяется непосредственной подстановкой. Всегда $F(t) > 1$, и эта функция невозрастающая. Кроме того, получаем

$$e^{p(t)} = 1/F(t), \; P^*(t) = b_0 z(t) w(t)/F(t). \qquad (4.5)$$

Подставляя (4.1) в (4.3), получаем

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) = \dfrac{q}{2}(\beta^2 - t^2) & \text{при} \quad 0 < t < t_2, \\ F_2(t) = 1 + q t_2 (T - t) & \text{при} \quad t_2 < t < T, \end{cases} \qquad (4.6)$$

где $q = b_0 v_0$; $\beta^2 = \dfrac{2}{q} + 2 t_2 T - t_2^2$. Отсюда, согласно условию $p(0) < -1$, должно выполняться

$$F(0) = 1 + q(t_2 T - t_2^2/2) > e. \qquad (4.7)$$

Можно проверить, что для выполнения этого неравенства необходимо выполнение

$$qT^2 > 2(e - 1). \qquad (4.8)$$

Неравенство является необходимым условием существования оптимального управления. Смысл его в том, что интервал времени $[0, T]$ должен быть достаточно большим.

С учетом (2.6) и (4.4) уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$d\left(\frac{z}{F}\right) = \frac{\mathrm{u}^*}{F(t)} dt, \; z(0) = 0. \qquad (4.9)$$

Учитывая (3.3), решение этого уравнения можно записать в виде

$$\frac{z(t)}{F(t)} = u_0 \begin{cases} g(t) & \text{при} \quad 0 < t < t_1, \\ g(t_1) & \text{при} \quad t_1 < t < T, \end{cases} \qquad (4.10)$$

где

$$g(t) = \int_0^t \frac{ds}{F(s)}. \qquad (4.11)$$

Если ввести обозначения

$$G_1(t) = \int \frac{ds}{F_1(s)} = \frac{1}{q\beta} \ln\left(\frac{\beta + t}{\beta - t}\right); \qquad (4.12)$$

$$G_2(s) = \int \frac{ds}{F_2(s)} = -\frac{1}{q t_2} \ln F_2(s), \qquad (4.13)$$

то

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = G_1(t) \text{ при } 0 < t < t_2, \\ g_2(t) = G_1(t_2) + G_2(t) - G_2(t_2) \text{ при } t_2 < t < T. \end{cases} \qquad (4.14)$$

Из (4.10) также следует, что

$$u_0(t_1) = z(t_1)/F(t_1) = z(t_1)/e = z(T). \qquad (4.15)$$

Решение уравнения (2.8) при $k = 0$ можно записать в виде $p_1(t) = -b_0 \int_t^T \dfrac{z(s)}{F(s)} ds$, что проверяется непосредственной подстановкой, причем всегда $p_1(t) < 0$. Подставляя сюда (4.10), получаем

$$p_1(t) = -r \begin{cases} \displaystyle\int_t^{t_1} g(t)dt + g(t_1)(T - t_1) & \text{при} \quad 0 < t < t_1, \\ g(t_1)(T - t) & \text{при} \quad t_1 < t < T, \end{cases} \qquad (4.16)$$

где $r = b_0 u_0$.

5. НАХОЖДЕНИЕ МОМЕНТОВ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ УПРАВЛЕНИЙ

Рассмотрим геометрическое решение задачи. Из (1.1) и (3.3) можно получить, что при малом t $z(t)= u_0t + o(t)$. Более того, всегда $z(t) < u_0t$. Отсюда следует, что если $v_0 \geq u_0$, то $z(t) < w(t)$, по крайней мере, до момента t_2. Если $u_0 > v_0$, то существует некоторый интервал $[0, t)$, где $z(t) > w(t)$ (см. рисунки).

Значения t_1 и t_2. определяются поведением функций $p(t)$ и $p_1(t)$. Как видно из предыдущего, эти функции монотонно возрастают. Более того, на основании (2.7) и (2.8) можно получить, что $p = b_0 \frac{v}{F} + (b_0 \frac{w}{F})^2 > 0$, $p_1 = b_0 \frac{u}{F} \geq 0$.

Это означает, что функция $p(t)$ всегда выпуклая вниз, а функция $p_1(t)$ является таковой на интервале $[0,t_1]$. На интервале $[t_1, T]$ функция $p_1(t)$ – прямая линия. Вообще говоря, две монотонно возрастающие функции могут внутри интервала $[0, T]$ либо не пересекаться, либо пересекаться только один раз. Напомним, что всегда $p(T) = p_1(T) = 0$, а производные этих функций определяются согласно (2.7), (2.8) и (4.2), выражениями

$$p = \frac{b_0 w}{F},\ p_1 = \frac{b_0 z}{F}. \qquad (5.1)$$

Если эти функции не пересекаться, то сначала пересекает уровень –1 та функция, которая проходит выше, причем ее производная должна быть меньше, чем у другой функции. Если $v_0 \geq u_0$, то $z(t) < w(t)$ и $\dot{p}(t) > \dot{p}_1(t)$. Поэтому в этом случае $t_2 < t_1$. Причем должно выполняться $p_1(0) < p(0)$. Типичные кривые для этого случая приведены на рис. 1.

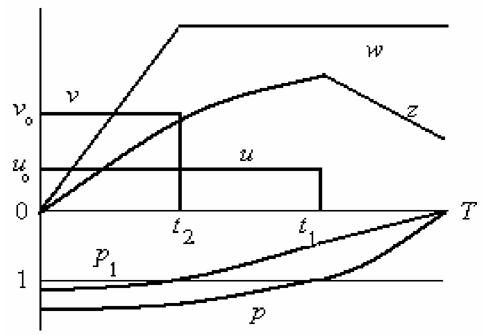

Рис.1. $v_0 \geq u_0$

Если $u_0 > v_0$, то при малом t $z(t) > w(t)$ и $\dot{p}(t) < \dot{p}_1(t)$. Отсюда следует, что в этом случае $t_1 < t_2$. Причем должно выполняться $p_1(0) > p(0)$. Типичные кривые для этого случая приведены на рис. 2.

Если функции $p(t)$ и $p_1(t)$ пересекаются в какой-то точке t', то в силу условия $p(T) = p_1(T) = 0$ должна существовать в интервале (t', T) точка t'', в которой производные этих функций одинаковы. Отсюда, согласно (5.1), следует, что в точке t'' должны пересекаться функции $w(t)$ и $z(t)$. Но так как функция $w(t)$ не убывает, то пересечение возможно только при $u_0 > v_0$. и при этом всегда t_1○$t_2<t'<t''<T$. На рис. 3 приведены кривые для случая $t_1 = t_2$, а на рис. 4 – для случая $t_1 < t_2$. На основании этих рисунков можно сделаьб основной вывод: если $u_0 > v_0$, то t_1○t_2; если u_0○v_0, то $t_1>t_2$.

Смысл этого заключается в том, что сначала выключается более затратное управление (производством или рекламой).

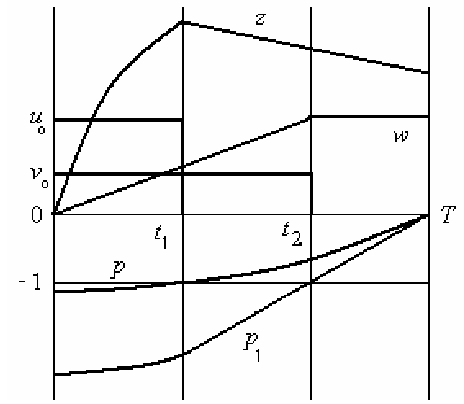

Рис. 2. $u_0 > v_0$

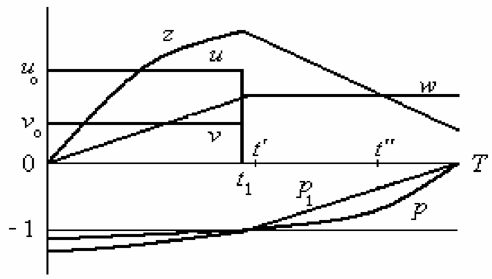

Рис. 3. $u_0>v_0$, $t_1=t_2$

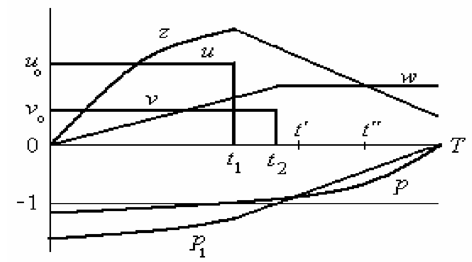

Рис. 4. Если $u_0>v_0$

Значения t_1 и t_2 находятся из условий (3.1) и (3.2) с учетом (4.2) и (4.16). Для случая t_1○t_2 (или $u_0> v_0$) имеем

$$\frac{q}{2}(\beta^2 - t_1^2) = e, \qquad (5.2)$$

$$rg(t_1)(T - t_2) = 1;$$

для случая $t_2 < t_1$ (или u_0○v_0)

$$1 + qt_2(T - t_1) = e, \qquad (5.3)$$

$$r\left[\int_{t_2}^{t_1} g_2(t)dt + g_2(t_1)(T - t_1)\right] = 1.$$

Последние уравнения являются нелинейными, поэтому их решение связано со значительными трудностями. Поэтому вопрос о их приближенном решении опускается.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА

С учетом (2.4), (2.6), (3.3), (3.4) и (4.2) функционал (1.4) принимает вид

$$J = \int_0^T (1 + \ln F(t))P(t)dt - u_0 t_1 - v_0 t_2. \qquad (6.1)$$

Выражая $P(t)$ из (1.1), подставляя это выражение в (6.1) и интегрируя по частям, получаем

$$J = r\int_0^{t_1} t\frac{w(t)}{F(t)}dt - v_0 t_2. \qquad (6.2)$$

Можно показать, что для случая $u_0 > v_0$ всегда $J > 0$. Действительно. Из рис. 2–4 видно, что всегда $z(t_2) > v_0t_2$.

В то же время, вычисляя интеграл в (6.2), можно показать, пользуясь приведенными выше результатами, что он больше, чем $z(t_2)$. В случае $u_0<v_0$ из рис. 1 следует, что всегда $z(t_2) < v_0 t_2$. Поэтому можно показать, что в этом случае всегда $J < 0$. Таким образом, получается, что положительный доход можно получить только при $u_0 > v_0$. При этом всегда должно выполняться, что $t_1 < t_2$, т.е. сначала останавливается производство товара, как более затратное, а уже затем затраты на рекламу. Подобная ситуация часто встречается на практике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача управления производством и рекламой. Получена следующая структура решения задачи. Товар производится с максимальной интенсивностью на интервале $[0, t_1]$. После момента t_1 он не производится. Затраты на рекламу осуществляются в течение интервала $[0, t_2]$, причем с максимальной интенсивностью. После t_2 затрат на рекламу нет. Проведенный анализ показывает, что сначала выключается более затратное управление производством, т.е. должно быть $t_1 \boldsymbol{\circ} t_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горский А.А., Колпакова И.Г., Локшин Б.Я.* Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса // Изв.РАН, Теория и системы управления. 1998. № 1. С. 144–148.
2. *Горский А.А., Локшин Б.Я.* Математическая модель процесса производства и продажи для управления и планирования производства //Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. № 1.С. 39–45.
3. *Параев Ю.И.* Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 103–107.
4. *Параев Ю.И.* Оптимальное управление рекламой в задаче производства и сбыта товара // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 162–164.

Статья поступила в научную редакцию «Кибернетика» 26 апреля 2004 г.