

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РЫНКА, ОПИСЫВАЕМОГО МОДИФИЦИРОВАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ ВАЛЬРАСА–МАРШАЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРЕМЕННЫХ «ПРЕДЛОЖЕНИЕ – ЦЕНА – СПРОС»

Рассматривается динамическая модель рынка, описываемого в пространстве переменных «предложение – цена – спрос» системой линейных детерминированных и стохастических дифференциальных уравнений, модифицирующая и обобщающая модель Вальраса–Маршалла. Обсуждаются особенности поведения решений задачи Коши для систем этого типа в окрестности точки рыночного равновесия. Исследуются вопросы устойчивости и управляемости таких систем. Решается задача оптимальной стабилизации рынка в положении равновесия в условиях отсутствия и наличия случайных возмущающих воздействий, выводящих рынок из состояния равновесия. Приведены примеры численного решения задачи.

Проблема изучения и математического описания динамики поведения рынка во времени в окрестности точки рыночного равновесия является сравнительно новой. Если вопросы статического равновесия рынка изучаются уже достаточно давно, начиная с основополагающих трудов Леона Вальраса и Альфреда Маршалла, так что многие важные результаты этих исследований стали классическими и вошли в учебники экономики (см., например, [1]), то вопросы динамики рынка все еще остаются слабо исследованными. Процессы «нащупывания» равновесия по Вальрасу и Маршаллу, описываемые дифференциальными соотношениями первого порядка [1], можно считать простейшими динамическими математическими моделями поведения рынка во времени, объясняющими механизм перехода рынка от неравновесного состояния к равновесному. На основе этих моделей можно строить различные модификации динамических моделей рынка, включающие в себя учет различных факторов, так или иначе влияющих на взаимодействие спроса, предложения и цены товара на рынке.

В [2] мы рассмотрели одну из таких модификаций динамической модели Вальраса–Маршалла – линейную динамическую модель второго порядка без учета запаздывания реакции предложения на изменение рыночной цены.

В данной работе рассматривается модель более высокого (третьего) порядка, описывающая рынок системой линейных дифференциальных уравнений третьего порядка без учета запаздывания в пространстве переменных «предложение – цена – спрос». Эта модель является модификацией и обобщением линейной динамической модели Вальраса–Маршалла [1] в предположении возможности мгновенной реакции объема предложения на изменение цены товара и рыночного спроса. Рассмотрены как детерминированная модель рынка, не учитывающая возможных случайных возмущений состояния рынка, так и стохастическая модель, учитывающая наличие таких возмущений. Поставлена и решена задача оптимального управления рынком, ускоряющего перевод рынка из неравновесного состояния в равновесное и обеспечивающего оптимальную стабилизацию рынка в состоянии равновесия.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЫНКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПО ВАЛЬРАСУ И МАРШАЛЛУ

Динамическая модель поведения рынка по Вальрасу–Маршаллу хорошо известна [1]. Пусть $Q(t)$ – объем продаж в текущий момент времени t , $P(t)$ – рыночная цена товара, $Q^D(t)$ – спрос на товар, $Q^S(t)$ – предложение товара, $P^D(t)$ – цена спроса, $P^S(t)$ – цена предложения. Объемы спроса и предложения зависят от рыночной цены товара $P(t)$: $Q^D(t) = Q^D(P(t))$, $Q^S(t) = Q^S(P(t - \tau))$. Цены спроса и предложения, в свою очередь, зависят от объема продаж: $P^D(t) = P^D(Q(t))$, $P^S(t) = P^S(Q(t))$. Здесь τ – задержка во времени, связанная с тем, что для производства товара и доставки его на рынок требуется некоторое время τ . Поэтому объем предложения в момент времени t определяется рыночной ценой товара в предшествующий момент времени $t - \tau$.

Процесс «нащупывания» равновесия по Вальрасу описывается дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом вида [1]

$$\frac{dP(t)}{dt} = h(Q^D(P(t)) - Q^S(P(t - \tau))) = h\Delta Q^D(P), h > 0, \quad (1)$$

где $\Delta Q^D(P)$ – избыток спроса при цене P . Очевидно, при $\Delta Q^D(P) > 0$ рыночная цена повышается, при $\Delta Q^D(P) < 0$ – понижается, а при $\Delta Q^D(P) = 0$ выполняется условие равновесия спроса и предложения: $\Delta Q^D(P) = \Delta Q^S(P)$.

По Маршаллу процесс взаимодействия спроса и предложения описывается дифференциальным уравнением [1]

$$\frac{dQ(t)}{dt} = k(P^D(Q(t)) - P^S(Q(t))) = k\Delta P^D(Q), k > 0, \quad (2)$$

где $\Delta P^D(Q)$ – превышение ценой спроса цены предложения при объеме продаж Q . Очевидно, при $\Delta P^D(Q) > 0$ объем предложения возрастает, при $\Delta P^D(Q) < 0$ – снижается, а при $\Delta P^D(Q) = 0$ выполняется условие равновесия цены спроса и цены предложения: $P^D(Q) = P^S(Q)$.

В простейшем случае (в отсутствие резких колебаний рыночной цены) спрос и предложение зависят от рыночной цены линейно [1]:

$$Q^D(t) = Q^D(P(t)) = a - bP(t), \\ Q^S(t) = Q^S(P(t - \tau)) = c + gP(t - \tau), \quad (3)$$

где коэффициенты a, b, c, g – константы рынка на текущем интервале времени (не обязательно положительные, хотя обычно $b > 0, g > 0$, причем $a > c$). Тогда уравнение Вальраса (1), описывающее динамику рыночной цены товара, принимает вид

$$\frac{dP(t)}{dt} = h((a - bP(t)) - (c + gP(t - \tau))), h > 0. \quad (4)$$

В отсутствие запаздывания ($\tau = 0$) это уравнение упрощается:

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\alpha_0 (P(t) - P^*), \quad (5)$$

где $\alpha_0 = h(b + g) > 0$, $P^* = (a - c)/(b + g)$ – равновесное значение цены товара (точка покоя уравнения (5)). Уравнение (5) – уравнение аperiodического движения. Общее решение этого уравнения имеет вид экспоненциальной кривой:

$$P(t) = P^* + C_0 \exp(-\alpha_0 t), \quad (6)$$

где C_0 – произвольная постоянная. При решении задачи Коши с заданным начальным условием $P(t_0) = P_0$ константа C_0 принимает конкретное значение $C_0 = (P_0 - P^*) \exp(\alpha_0 t_0)$, так что

$$P(t) = P^* + (P_0 - P^*) \exp(-\alpha_0 (t - t_0)). \quad (7)$$

Поскольку $\alpha_0 > 0$, решение (6) уравнения (5) асим-

птотически устойчиво, то есть при $t \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к точке равновесия P^* .

При очень малой задержке ($\tau \ll 1/(gh)$) хорошим приближением зависимости $P(t - \tau)$ от t может быть линейная: $P(t - \tau) \cong P(t) - \tau dP(t)/dt$ (линейное приближение разложения $P(t - \tau)$ в ряд Маклорена по τ). В этом случае уравнение (4) также принимает вид уравнения (5), но вместо коэффициента α_0 в нем, как и в решениях (6)–(7), стоит коэффициент $\alpha = h(b + g)/(1 - hg\tau) > \alpha_0$. Характер поведения решения такой же, как в предыдущем случае.

При не слишком малой задержке ($\tau < 1/(gh)$, но $\tau^2 \ll 1/(gh)^2$) в разложении $P(t - \tau)$ по τ следует сохранить по крайней мере еще один член (квадратичный), так что $P(t - \tau) \cong P(t) - \tau dP(t)/dt + (\tau^2/2) d^2P(t)/dt^2$. В этом случае дифференциальное уравнение Вальраса (4) становится уравнением второго порядка с малым параметром при старшей производной:

$$\frac{hg\tau^2}{2} \frac{d^2P(t)}{dt^2} + (1 - hg\tau) \frac{dP(t)}{dt} + h(b + g)(P(t) - P^*) = 0, \quad (8)$$

где по-прежнему $P^* = (a - c)/(b + g)$. Разделив уравнение (8) на коэффициент $hg\tau^2/2$ при старшей производной и обозначив $\beta = 1/\alpha$, $\alpha = h(b + g)/(1 - hg\tau)$, $\gamma^2 = 2(b + g)/(g\tau^2)$, приведем уравнение (8) к стандартному виду уравнения затухающих колебаний:

$$\frac{d^2P(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dP(t)}{dt} + \gamma^2(P(t) - P^*) = 0. \quad (9)$$

Общее решение этого уравнения хорошо известно [2] и имеет вид

$$P(t) = P^* + C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (10)$$

где $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}$ и $\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}$ – корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma^2 = 0$, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Поскольку $\beta > 0$, решение (10) уравнения (9) асимптотически устойчиво. В случае $\beta^2 \geq \gamma^2$ имеем аperiodический процесс неограниченного (при $t \rightarrow \infty$) приближения решения (10) к состоянию равновесия P^* . В случае $\beta^2 < \gamma^2$ имеем затухающий колебательный процесс с круговой частотой колебаний $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$, также неограниченно приближающийся к состоянию равновесия P^* при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, в отсутствие запаздывания линейное дифференциальное уравнение (4), описывающее динамику рыночной цены по Вальрасу, приводит к решению, дающему аperiodический переход рыночной цены $P(t)$ от неравновесного значения к равновесному. Точка равновесия является устойчивым узлом. При наличии запаздывания возможен как аperiodический переход рыночной цены к равновесному значению, когда точка равновесия также является устойчивым узлом, так и колебательный (с постепенным затуханием колебаний). В этом случае точка равновесия оказывается устойчивым фокусом. В обоих случаях равновесная цена остается асимптотически устойчивой.

Рассмотрим теперь уравнение Маршалла (2). В простейшем случае зависимости цены спроса $P^D(Q(t))$ и цены предложения $P^S(Q(t))$ от объема продаж $Q(t)$ так же можно считать линейными:

$$P^D(t) = P^D(Q(t)) = A - BQ(t), \\ P^S(t) = P^S(Q(t)) = C + GQ(t). \quad (11)$$

Здесь A, B, C, G – некоторые константы, причем $B > 0, G > 0, A > C$.

Поскольку уравнение (2) не содержит запаздывания и по форме ничем не отличается от уравнения (4) при $\tau = 0$, его можно записать в форме уравнения (5):

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\beta_0(Q(t) - Q^*), \quad (12)$$

где $\beta_0 > 0, Q^*$ – равновесное значение объема продаж (товаров на рынке). Уравнение (12) – уравнение аperiodического движения. Общее решение этого уравнения имеет вид экспоненциальной кривой:

$$Q(t) = Q^* + C_0 \exp(-\beta_0 t), \quad (13)$$

где C_0 – произвольная постоянная. При решении задачи Коши с заданным начальным условием $Q(t_0) = Q_0$ константа C_0 принимает конкретное значение $C_0 = (Q_0 - Q^*) \exp(\beta_0 t_0)$, так что

$$Q(t) = Q^* + (Q_0 - Q^*) \exp(-\beta_0(t - t_0)). \quad (14)$$

Поскольку $\beta_0 > 0$, решение (14) уравнения (12) асимптотически устойчиво, то есть при $t \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к точке равновесия Q^* (точка Q^* – устойчивый узел).

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОБОБЩАЮЩАЯ РЫНОЧНУЮ МОДЕЛЬ ВАЛЬРАСА–МАРШАЛЛА

Линейная модель Вальраса–Маршалла (5), (12) без учета запаздывания ($\tau = 0$), т.е. при мгновенной реакции предложения товара на изменение рыночной цены приводит, как видим, к аperiodическому движению рынка к состоянию равновесия. В этой модели скорость изменения каждой переменной состояния рынка определяется отклонением только этой переменной от равновесного значения. Таким образом, эта модель является системой не связанных между собой дифференциальных уравнений первого порядка, каждое из которых описывает поведение только одной из переменных, определяющих состояние рынка, независимо друг от друга. Однако естественно предположить, что скорость изменения каждой переменной определяется не только отклонением от положения равновесия этой переменной, но в определенной степени и от соответствующего отклонения от положения равновесия другой переменной. Модифицировав с учетом этого предположения систему дифференциальных уравнений (12), (5), приведем ее к виду

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -b(Q(t) - Q^*) + r(P(t) - P^*); \quad (15)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -a(P(t) - P^*) - q(Q(t) - Q^*), \quad (16)$$

где $a > 0, b > 0, q > 0, r > 0$ – коэффициенты системы. Как видно, рыночная цена падает, если она больше равновесного значения и (или) если рынок затоварен (объем предложения больше равновесного). И наоборот, рыночная цена растет, если она меньше равновесного значения и (или) если имеется дефицит товара на рынке (объем предложения меньше равновесного). Точ-

но так же объем предложения растет, если имеется дефицит товара и (или) если рыночная цена выше равновесного значения. И наоборот, объем предложения падает, если рынок затоварен и (или) если рыночная цена меньше равновесного значения.

Система уравнений (15)–(16) описывает модифицированную модель рыночной динамики Вальраса–Маршалла. Уравнения этой модели оказываются связанными между собой. Это модель второго порядка. В ней возможны как аperiодические, так и колебательные движения. Она достаточно подробно исследована нами в [3], где показано, что положение равновесия рынка, описываемого такой моделью, асимптотически устойчиво при любых значениях параметров модели. Там же показано, как синтезировать оптимальное управление, ускоряющее перевод рынка из неравновесного состояния в состояние равновесия и стабилизирующее его в этом состоянии.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ОБОБЩАЮЩАЯ РЫНОЧНУЮ МОДЕЛЬ ВАЛЬРАСА–МАРШАЛЛА

Рассмотренные выше модели рынка Вальраса–Маршалла как первого (5), (12), так и второго порядка (15), (16), содержат производные по времени только от двух переменных – объема продаж $Q(t)$ и рыночной цены товара $P(t)$. Очевидно, более реалистичной была бы модель, содержащая производные по времени не от объема продаж, а от объемов спроса $Q^D(t)$ и предложения $Q^S(t)$. При этом объем продаж в каждый данный момент времени определялся бы как минимальная из величин $Q^D(t)$ и $Q^S(t)$: $Q(t) = \min(Q^D(t), Q^S(t))$.

Пусть равновесная рыночная цена товара равна P^* , а равновесные объемы спроса, предложения и продаж (естественно, одинаковые) равны Q^* . Тогда по аналогии с системой (15)–(16) можно записать

$$\frac{dQ^S(t)}{dt} = -b^{SS}(Q^S(t) - Q^*) + r^S(P(t) - P^*) + b^{SD}(Q^D(t) - Q^*); \quad (17)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -q^S(Q^S(t) - Q^*) - a(P(t) - P^*) + q^D(Q^D(t) - Q^*); \quad (18)$$

$$\frac{dQ^D(t)}{dt} = -b^{DS}(Q^S(t) - Q^*) - r^D(P(t) - P^*) - b^{DD}(Q^D(t) - Q^*), \quad (19)$$

где все коэффициенты b^{SS} , r^S , b^{SD} , q^S , a , q^D , b^{DS} , r^D , b^{DD} – не отрицательны. Действительно, затоваривание рынка ($Q^S(t) > Q^*$) должно приводить к уменьшению объема предложения $Q^S(t)$, т.е. уменьшать скорость поставки товаров на рынок – левую часть уравнения (17), что и отражает вид первого слагаемого в правой части уравнения (17). В то же время превышение рыночной ценой ее равновесного значения ($P(t) > P^*$) стимулирует поставщиков товаров увеличивать объемы предложения $Q^S(t)$ для получения более высокой прибыли, что и отражено в структуре второго слагаемого в правой части уравнения (17). Наконец, превышение спросом равновесного значения ($Q^D > Q^*$ – «ажитажный» спрос) также стимулирует поставщиков увеличивать предложение товара, пользующегося в данный момент повы-

шенным спросом, что и отражено в структуре третьего слагаемого в правой части уравнения (17). Доминирующую роль играет здесь второе слагаемое (высокие рыночные цены являются главным фактором увеличения объемов предложения, роста поставок товаров на рынок). Заметим, что изменение знака коэффициента при первом слагаемом на противоположный приведет к потере устойчивости рыночного равновесия. Затоваривание рынка станет прогрессивно нарастать, а это приведет к резкому падению цен, ажитажному спросу и товарному дефициту. Таким образом, при измененном знаке первого коэффициента дефицит станет прогрессивно нарастать, цены будут неограниченно расти, платежеспособный спрос упадет до нуля и рынок развалится.

Далее, затоваривание рынка ($Q^S(t) > Q^*$) в нормальных условиях должно приводить к снижению рыночной цены, а слишком высокие цены ($P(t) > P^*$) будут, по-видимому, тормозить дальнейший рост цен (хотя это и не обязательно, возможен и противоположный процесс). В то же время повышенный спрос ($Q^D(t) > Q^*$) должен приводить к росту цены. Все эти особенности поведения рынка обеспечивает структура правой части уравнения (18). Доминирующую роль играет здесь первое слагаемое (избыток предложения товара на рынке является главным фактором снижения его цены). Изменение знака коэффициента при втором слагаемом не влияет на устойчивость рыночного равновесия. Вообще этот коэффициент не играет существенной роли и может быть принят равным нулю.

Наконец, затоваривание рынка ($Q^S(t) > Q^*$) и слишком высокие цены ($P(t) > P^*$) должны отрицательно влиять на спрос, уменьшать его, а «ажитажное» повышение спроса ($Q^D(t) > Q^*$) должно тормозить его дальнейший рост. Все это отражено в структуре правой части уравнения (19). Доминирующую роль здесь играет второе слагаемое (высокие цены являются главным фактором снижения платежеспособного спроса). Если изменить знак коэффициента при третьем слагаемом на противоположный, рыночное равновесие станет неустойчивым: ажитажный спрос будет прогрессивно и неограниченно нарастать, сметая товары с рынка, что приведет к неограниченному росту цен, падению до нуля платежеспособного спроса и развалу рынка.

Динамическая модель рынка (17)–(19) содержит три линейных дифференциальных уравнения для трех переменных состояния рынка – объема предложения, рыночной цены и объема спроса, т.е. является моделью третьего порядка.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ

Введем вектор состояния рынка $y(t)$ (фазовый вектор) как вектор-столбец с компонентами $y_1(t) = Q^S(t)$, $y_2(t) = P(t)$, $y_3(t) = Q^D(t)$, а y_0 – вектор-столбец начального состояния рынка в момент времени t_0 с компонентами $y_{01} = Q^S = Q^S(t_0)$, $y_{02} = P_0 = P(t_0)$, $y_{03} = Q^D_0 = Q^D(t_0)$, y^* – вектор-столбец состояния равновесия рынка такой, что $y_1^* = Q^*$, $y_2^* = P^*$, $y_3^* = Q^*$. Введем матрицу A коэффициентов системы уравнений (17)–(19):

$$A = \begin{bmatrix} -b^{SS} & r^S & b^{SD} \\ -q^S & -a & q^D \\ -b^{DS} & -r^D & -b^{DD} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Тогда систему дифференциальных уравнений (17)–(19) можно записать в компактной векторно-матричной форме

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(y(t) - y^*), y(t_0) = y_0. \quad (21)$$

При выбранных знаках коэффициентов системы (17)–(19) вещественные части собственных чисел матрицы A отрицательны: $\text{Re}\lambda_1 < 0$, $\text{Re}\lambda_2 < 0$, $\text{Re}\lambda_3 < 0$. Следовательно, состояние равновесия y^* устойчиво и решение $y(t)$ векторного дифференциального уравнения (21) при любом начальном условии y_0 стремится к этому состоянию. Однако переход рынка к состоянию равновесия происходит достаточно медленно. Для ускорения этого перехода целесообразно использовать оптимальное управление переменными состояниями рынка. Кроме того, при изменении знаков у некоторых коэффициентов (например, у b^{SS} или b^{DD}) на противоположные положение равновесия системы теряет устойчивость, цены беспредельно повышаются, платежеспособный спрос падает до нуля, рынок разваливается. Для стабилизации рынка в состоянии равновесия в этом случае также требуется оптимальное управление.

При наличии случайных возмущений рынка (случайных колебаний предложения, цены и спроса) детерминированная динамическая модель рынка (21) принимает форму диффузионной модели, описываемой векторным стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$dy(t) = A(y(t) - y^*)dt + S^\xi d\xi(t), y(t_0) = y_0, \quad (22)$$

где $\xi(t)$ – стандартный векторный винеровский случайный процесс (гауссовский векторный случайный процесс с независимыми компонентами $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, имеющими независимые приращения $d\xi_i(t) = \xi_i(t + dt) - \xi_i(t)$, для которых $M\{d\xi_i(t)\} = 0$, $M\{(d\xi_i(t))^2\} = |dt|$, где M – знак математического ожидания). Пусть для простоты возмущения по каждой переменной векторы состояния независимы. Тогда матрица S^ξ коэффициентов при приращениях винеровского процесса будет диагональной. Если рассматривать каждую компоненту производной винеровского процесса $d\xi_i(t)/dt$ как «белый» шум с единичной спектральной плотностью мощности, то $(S^\xi_{ii})^2 = G_i^\xi$ будет спектральной плотностью мощности «белого» шума $S^\xi_{ii}d\xi_i(t)/dt$, возмущающего i -ю компоненту вектора состояния системы (22). Величины G_i^ξ называют также коэффициентами диффузии процесса (22). Следовательно, $S^\xi_{ii} = \sqrt{G_i^\xi}$, $i = \overline{1, n}$.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЫНКОМ И СТАБИЛИЗАЦИИ РЫНКА В ПОЛОЖЕНИИ РАВНОВЕСИЯ

Введя в правую часть уравнений (21) или (22) управляющий фактор $u(t)$, получим уравнения управляемого движения:

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(y(t) - y^*) + Bu(t), y(t_0) = y_0, \quad (23)$$

(в детерминированном случае) и

$$dy(t) = A(y(t) - y^*)dt + Sd\xi(t) + Bu(t)dt \quad (24)$$

(в стохастическом случае), где B – матрица передачи управления; $u(t)$ – вектор управления, y_0 – вектор начальных условий (состояние рынка в начальный момент времени t_0). Известно [4], что система управляема по всем переменным состояниям, если ранг матрицы управляемости полный ($\text{rank}[B, AB] = n$, где n – порядок системы; в данном случае $n = 3$). Примем в качестве критерия оптимальности управления детерминированной системой взвешенный квадратичный критерий минимума отклонения состояния рынка от равновесия и минимума «энергетических» затрат на управление:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left((y(t) - y^*)^T R (y(t) - y^*) + u^T(t) Qu(t) \right) dt + (y(t_1) - y^*)^T P_1 (y(t_1) - y^*) \Rightarrow \min_{u, y}, \quad (25)$$

где t_0, t_1 – границы интервала времени управления; R, P_1 – заданные неотрицательно определенные симметричные матрицы коэффициентов квадратичных форм критерия (25); Q – заданная положительно определенная симметричная матрица. Обычно эти матрицы – диагональные. Матрица Q – «штрафная» для управления. Она характеризует уровень «ресурса управления» (чем меньше ее диагональные элементы, тем выше «ресурс управления», и наоборот).

В стохастическом случае вместо критерия (25), который в этом случае становится случайным, используется его математическое ожидание:

$$M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left((y(t) - y^*)^T R (y(t) - y^*) + u^T(t) Qu(t) \right) dt + (y(t_1) - y^*)^T P_1 (y(t_1) - y^*) \right\} \Rightarrow \min_{u, y}. \quad (26)$$

Задача минимизации квадратичного функционала (25) при детерминированных линейных дифференциальных связях (21) хорошо известна [4, 5] как задача А.М. Летова – Р. Калмана аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР). Ее решение приводит к оптимальному управлению в форме обратной связи

$$u(t) = -Q^{-1}B^T P(t)(y(t) - y^*), \quad (27)$$

где $P(t)$ – матрица, являющаяся решением матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BQ^{-1}B^T P(t) - R \quad (28)$$

с граничным условием $P(t_1) = P_1$ на правом конце интервала управления.

В стохастическом случае возможны два варианта ситуации: либо состояние рынка $y(t)$ в каждый данный момент времени точно известно системе выработки оптимального управления (управляющему органу), либо точное знание состояния рынка не доступно, а доступны только наблюдения этого состояния, производимые с некоторой погрешностью (ошибкой). В первом варианте алгоритм управления не меняется по сравнению с детерминированным случаем, так что оптимальное управление определяется формулами (27)–(28). Однако теперь уже управление действует на случайно возмущаемую систему (24), стабилизируя ее состояние в окрестности положения равновесия.

Во втором варианте вектор состояния $y(t)$ неизвестен управляющему органу, а доступен лишь вектор измерений $z(t)$, производимых с ошибками:

$$dz(t) = Hy(t) + S^n \eta(t). \quad (29)$$

Это наблюдаемый диффузионный процесс, в общем случае k -мерный ($k \leq n$), где $\eta(t)$ – стандартный векторный винеровский случайный процесс, $S_{ii}^\eta = \sqrt{G_i^\eta}$, $i = \overline{1, k}$, G_i^η – коэффициент диффузии (спектральная плотность мощности) i -й компоненты ошибок наблюдений (29). В этом варианте вектор управления строится не по вектору состояния $y(t)$, а по вектору $\hat{y}(t)$ фильтрационных оценок состояния $y(t)$, байесовских оценок, обладающих минимальной дисперсией:

$$u(t) = -Q^{-1}B^T P(t)(\hat{y}(t) - y^*). \quad (30)$$

Оценки $\hat{y}(t)$ являются апостериорным математическим ожиданием вектора состояния $y(t)$ при фиксированных наблюдениях $z(t)$ на интервале времени наблюдения от начального момента t_0 до текущего момента t . Они подчиняются известным уравнениям фильтрации Калмана–Бьюси [6, 7]:

$$d\hat{y}(t) = A(\hat{y}(t) - y^*)dt + K(t)(dz(t) - H\hat{y}(t)dt) + Bu(t)dt, \\ K(t) = D(t)H^T(G^\eta)^{-1}, \hat{y}(t_0) = \hat{y}_0; \quad (31)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = AD(t) + D(t)A^T - D(t)H^T(G^\eta)^{-1}HD(t) + G^\xi, \\ D(t_0) = D_0, \quad (32)$$

где $\hat{y}_0$ – начальная оценка вектора состояния; $K(t)$ – коэффициент усиления фильтра; $dz(t) - H\hat{y}(t)dt$ – «инновационный» (обновляющий) процесс;

$$D(t) = M\{(\hat{y}(t) - y(t))(\hat{y}(t) - y(t))^T\} -$$

ковариационная матрица ошибок фильтрации, являющаяся решением матричного дифференциального уравнения Риккати (32) с начальным условием D_0 , где

$$D_0 = M\{(\hat{y}_0 - y_0)(\hat{y}_0 - y_0)^T\} -$$

начальная ковариационная матрица ошибок фильтрации. Уравнение управляемой стохастической системы (24) решается при начальном условии $y(t_0) = y_0$ совместно с уравнениями фильтрации Калмана–Бьюси (31)–(32) с использованием выражения (30) для оптимального управления.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим примеры оптимальной стабилизации рынка с помощью управлений вида (24) в детерминированном случае и вида (30) в стохастическом. Пусть равновесное значение состояния рынка характеризуется вектором y^* с компонентами $y_1^* = Q^* = 100$, $y_2^* = P^* = 10$, $y_3^* = Q^* = 100$. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ состояние рынка характеризуется вектором y_0 с компонентами $y_{01} = Q_0^S = 0.25y_1^*$, $y_{02} = P_0 = 2y_2^*$, $y_{03} = Q_0^D = y_3^*$, т.е. начальный момент времени на рынке имеется 75 %-й дефицит товара и рыночная цена на 100 % превышает равновесное значение. Пусть параметры рынка (элементы матрицы A) имеют значения

$$A = \begin{bmatrix} -0.01 & 1 & 0.01 \\ -0.1 & -0.01 & 0.01 \\ -0.01 & -0.1 & -0.01 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Собственные числа этой матрицы равны следующим

значениям:

$$\lambda_1 = -0.5544 + 10.0893i, \\ \lambda_2 = -0.5544 - 10.0893i, \\ \lambda_3 = -0.9912,$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Как видим, вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны, так что точка покоя (равновесия) рынка y^* асимптотически устойчива. Кроме того, два первых собственных числа – комплексно-сопряженные. Следовательно, решение дифференциальных уравнений (21) или (22) неуправляемого движения рынка носит характер затухающих колебаний вокруг положения равновесия.

В случае одновременного управления всеми переменными рынка – поставкой товара, ценой и спросом – вектор управления $u(t)$ имеет три отличные от нуля составляющие $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$, а квадратная 3×3 -матрица B – единичная диагональная. Ранг матрицы управляемости $[B, AB]$ в этом случае равен 3, т.е. рынок управляем по всем переменным состояниям. При управлениях по паре переменных Q^S и P , Q^S и Q^D , P и Q^D ранг матрицы управляемости также равен 3, т.е. рынок тоже управляем по всем трем переменным состояниям. При управлении только по Q^S , только по P или только по Q^D ранг матрицы управляемости равен 2, т.е. не является полным – рынок управляем не по всем переменным состояниям.

Активное управление рынком возможно как со стороны поставщиков товара (продавцов) через регулирование режима поставки товара (предложение) и запрашиваемой цены по правилам, предписываемым законом оптимального управления, так и со стороны покупателей с помощью регулирования потребительского спроса (через искусственное повышение спроса или организованный бойкот рынка) также по правилам, предписываемым законом оптимального управления. Хотя такое участие потребителей в управлении рынком представляется достаточно проблематичным, рассмотрим в нашем примере случай управления рынком через все переменные состояния – поставки товара (предложение), цены и потребительский спрос. В этом случае ответственность за перевод рынка в состояние равновесия и стабилизацию его в равновесном состоянии возлагается и на поставщиков товара (продавцов), и на покупателей.

Итак, пусть вектор управления имеет все три составляющие – $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$. Тогда матрица B – диагональная матрица размерности 3×3 . При этом ранг матрицы управляемости является полным (равным 3), и рынок вполне управляем.

Выберем в качестве матриц R и P_1 единичные диагональные матрицы размерности 3×3 , а в качестве матрицы Q – диагональную матрицу размерности 3×3 с одинаковыми диагональными элементами, равными 0.1. Возьмем $t_1 = 20$.

На рис. 1 приведен ход во времени детерминированного управляемого (жирные линии) и неуправляемого (тонкие линии) процессов (вверху – предложение $Q^S(t)$, в середине – цена $P(t)$, внизу – спрос $Q^D(t)$).

На рис. 2 приведен ход во времени составляющих вектора оптимального детерминированного управления (соответственно вверху – предложением, в середине – ценой, внизу – спросом).

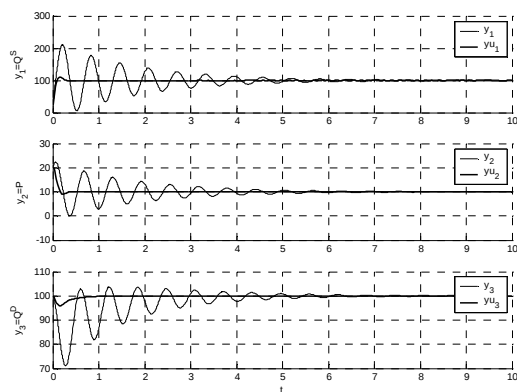


Рис. 1. Поведение во времени неуправляемого (тонкие линии) и управляемого (жирные линии) невозмущаемых рынков

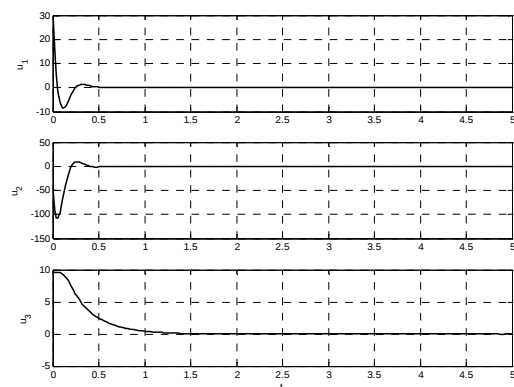


Рис. 2. Зависимость оптимальных управлений от времени в отсутствие возмущений

На рис. 3–5 приведены фазовые траектории детерминированного управляемого (жирные линии) и неуправляемого (тонкие линии) процессов соответственно в координатах: предложение (Q^S) – цена (P), предложение (Q^S) – спрос (Q^D), цена (P) – спрос (Q^D).

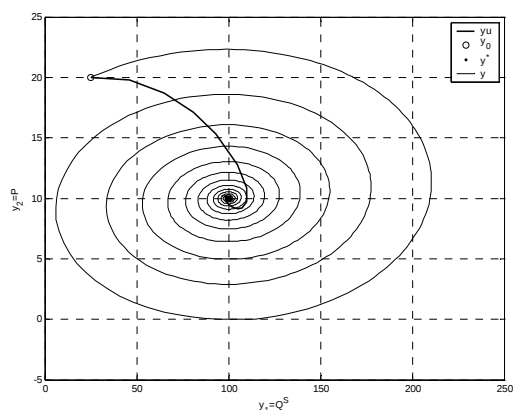


Рис. 3. Фазовые траектории неуправляемого (тонкие линии) и управляемого (жирные линии) невозмущаемых рынков в координатах «предложение – цена»

Видно, что неуправляемый процесс совершает медленно затухающие колебания, стремясь к положению равновесия. Управляемый процесс значительно быстрее приводит рынок из неравновесного состояния в состояние равновесия, чем неуправляемый.

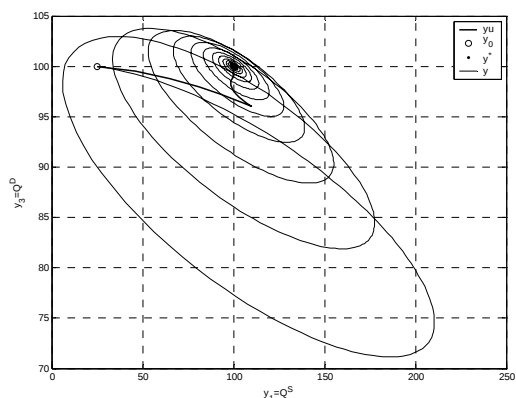


Рис. 4. Фазовые траектории неуправляемого (тонкие линии) и управляемого (жирные линии) невозмущаемых рынков в координатах «предложение – спрос»

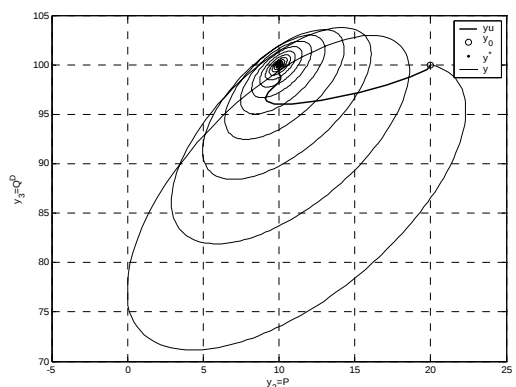


Рис. 5. Фазовые траектории неуправляемого (тонкие линии) и управляемого (жирные линии) невозмущаемых рынков в координатах «цена – спрос»

Аналогичные результаты получаются и при оптимальном управлении рынком в условиях воздействия на него случайных факторов. Это могут быть и случайные колебания поставок товаров на рынок (случайные колебания предложения), и случайные колебания рыночной цены, и случайные колебания спроса. Последние представляются наиболее естественными из возмущающих факторов (покупательский спрос едва ли остается постоянным, он все время флуктуирует в силу естественных причин, связанных со статистичностью самого ансамбля покупателей). Поэтому ниже рассмотрен пример управления рынком (его стабилизации) в условиях случайных колебаний только спроса (хотя принципиально ничего не изменилось бы при случайных возмущениях состояния рынка по всем трем переменным).

Пусть параметры рынка в стохастическом случае – те же, что в детерминированном, т.е. элементы матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов модели имеют значения (33). Пусть прежний вид имеет и матрица $\mathbf{B}$ передачи управления. Пусть спектральные плотности мощностей случайных возмущений по первым двум компонентам (предложению и цене) равны нулю (возмущения отсутствуют), а по третьей компоненте (спросу) спектральная плотность мощности возмущающих воздействий равна 4 ($G_1^\xi = 0$, $G_2^\xi = 0$, $G_3^\xi = 4$, так что $S_{11}^\xi = 0$, $S_{22}^\xi = 0$, $S_{33}^\xi = 2$). Пусть компоненты состояния рынка наблюдаются в каждый данный момент времени с ошибками, спектральные

плотности мощности которых равны соответственно $G_1^n = 4$, $G_2^n = 0,2025$, $G_3^n = 0,09$, так что $S_{11}^n = 2$, $S_{22}^n = 0,45$, $S_{33}^n = 0,3$ (наблюдения за вектором состояния рынка – не очень точные).

На рис. 6 приведен ход во времени реализации случайного колебания спроса, возмущающего рынок. Колебания спроса моделировались нами как случайный кусочно-постоянный («меандровый») нормальный процесс с нулевым средним и дисперсией, равной спектральной плотности мощности, деленной на величину шага дискретизации случайного процесса во времени, т.е. на величину интервала постоянства случайного воздействия. Можно показать, что в пределе при стремлении этого интервала к нулю «меандровый» процесс становится «белым» шумом, спектральная плотность мощности которого становится постоянной, функция автокорреляции – дельтаобразной, дисперсия – бесконечно большой. Аналогичным образом моделируется и шум наблюдения за состоянием рынка (независимо по каждой наблюдаемой компоненте вектора состояния). При компьютерном моделировании шаг дискретизации шума (интервал его постоянства) взят достаточно малым (в 600 раз меньше длины интервала времени управления).

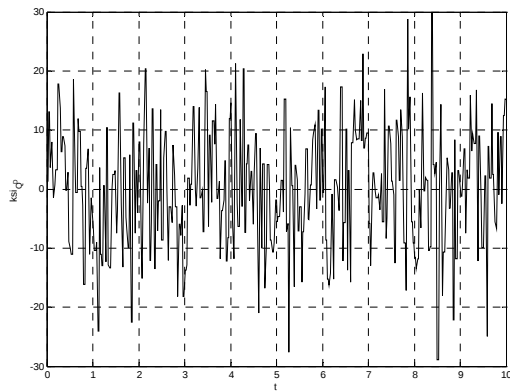


Рис. 6. Случайные колебания спроса

На рис.7 приведен ход во времени управляемого (жирные линии) и неуправляемого (тонкие линии) процессов (вверху – предложение $Q^S(t)$, в середине – цена $P(t)$, внизу – спрос $Q^D(t)$), случайно возмущаемых колебаниями спроса.

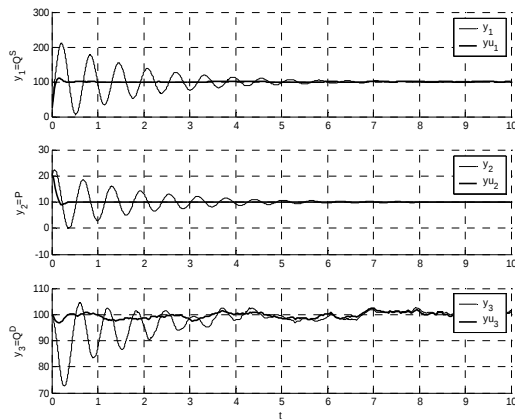


Рис.7. Поведение во времени неуправляемого (тонкие линии) и управляемого (жирные линии) случайно возмущаемых рынков

На рис. 8 приведен ход во времени составляющих вектора оптимального управления для случайно возмущаемого рынка (соответственно сверху – предложением, в середине – ценой, внизу – спросом). Оптимальное управление получено с использованием в алгоритме управления результатов обработки наблюдений за состоянием рынка фильтром Калмана (оптимальных оценок вектора состояния рынка).

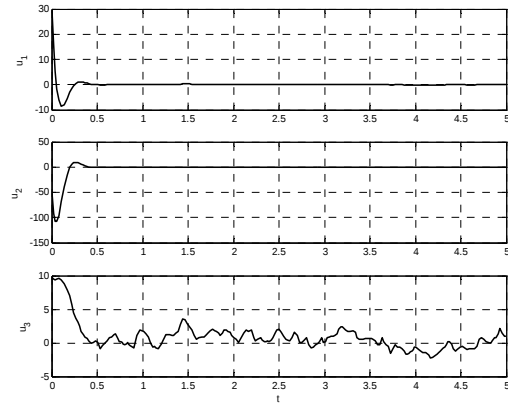


Рис. 8. Зависимость оптимальных управлений от времени при случайных возмущениях

На рис. 9 приведены наблюдения за состоянием рынка (тонкие линии) в сравнении с истинным ходом переменных состояния (жирные линии). Хорошо виден временной ход ошибок наблюдения.

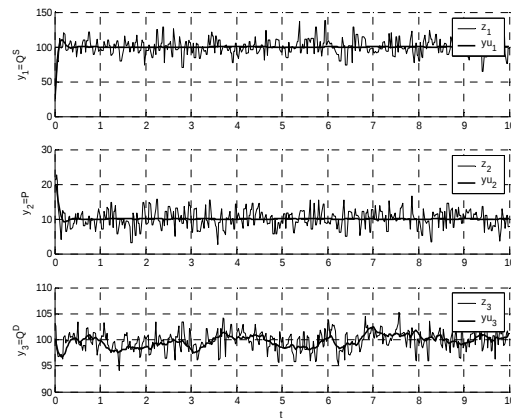


Рис. 9. Наблюдения во времени за состоянием рынка при случайных возмущениях

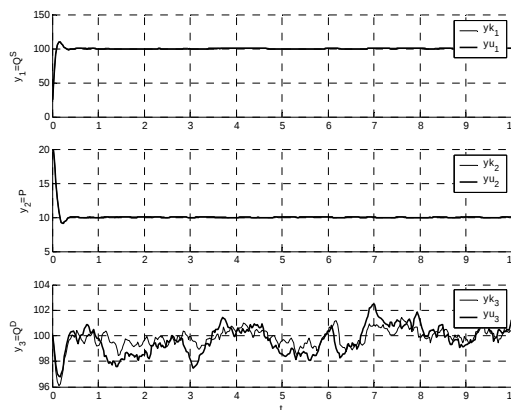


Рис.10. Фильтрационные оценки состояния рынка при случайных возмущениях

На рис.10 приведены калмановские оценки состояния рынка по наблюдениям, показанным на рис. 9. Видно, что фильтр Калмана оценивает предложение товара и его цену значительно эффективнее, чем случайно флуктуирующий спрос.

На рис. 11–13 приведены фазовые траектории управляемого (жирные линии) и неуправляемого (тонкие линии) процессов, описывающих поведение рынка соответственно в координатах: предложение (Q^S) – цена (P), предложение (Q^S) – спрос (Q^D), цена (P) – спрос (Q^D) при наличии случайных колебаний рыночного спроса.

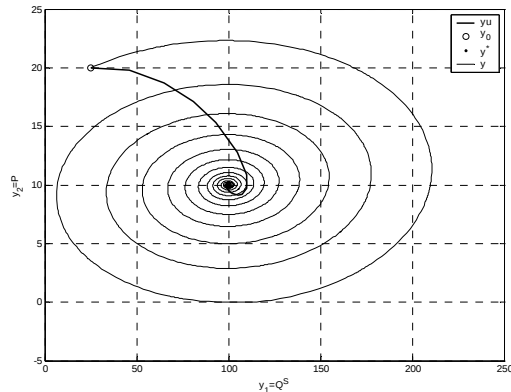


Рис. 11. Фазовые траектории неуправляемого (тонкие линии) и управляемого (жирные линии) возмущаемых рынков в координатах «предложение – цена»

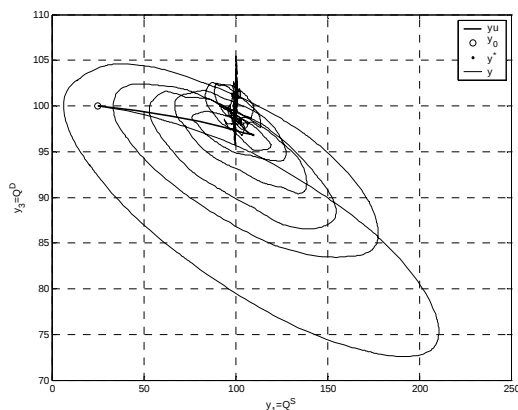


Рис. 12. Фазовые траектории неуправляемого (тонкие линии) и управляемого (жирные линии) возмущаемых рынков в координатах «предложение – спрос»

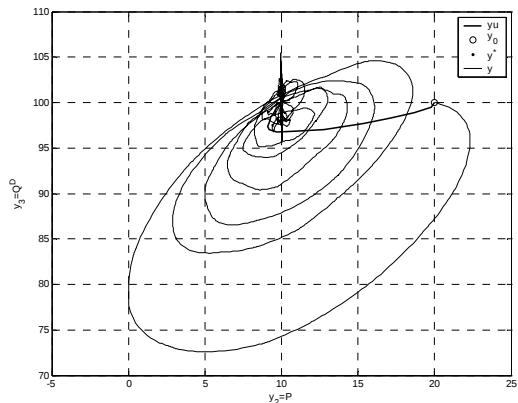


Рис. 13. Фазовые траектории неуправляемого (тонкие линии) и управляемого (жирные линии) возмущаемых рынков в координатах «цена – спрос»

Видно, что и в условиях стохастических возмущений неуправляемый процесс совершает медленно затухающие случайные колебания, стремясь к положению равновесия. Управляемый процесс и в этом случае значительно быстрее приводит рынок из неравновесного состояния в состояние равновесия, чем неуправляемый. Однако из-за наличия возмущающих воздействий, постоянно выводящих рынок из состояния равновесия, система управления должна продолжать непрерывно работать, чтобы эффективно удерживать рынок в положении равновесия. Без оптимального управления, стабилизирующего рынок в состоянии равновесия, рынок значительно медленнее возвращается в состояние равновесия при каждом выведении его из этого состояния. При наличии непрерывных стохастических возмущений рынка дисперсия его колебаний около состояния равновесия в случае использования стабилизирующего управления значительно меньше, чем в случае отсутствия такого управления.

Сравнивая рис. 11 с рис. 3, замечаем, что представленные на них в координатах «предложение – цена» кривые практически не отличаются друг от друга. Различие можно заметить только в непосредственной близости от точки покоя (равновесия). Это значит, что флуктуации спроса слабо влияют на предложение товара и его цену. Подтверждение этому можно найти также в сравнении рис. 7 с рис. 1.

Однако, сравнивая рис. 12 с рис. 4 в координатах «предложение – спрос», а также рис. 13 с рис. 5 в координатах «цена – спрос», обнаруживаем существенные различия между поведением рынка при наличии случайных флуктуаций спроса, возмущающих рынок, и в отсутствие таких возмущений. В отсутствие флуктуаций спроса величина спроса, равная в нашем примере первоначально своему равновесному значению, на траектории (как неуправляемой, так и управляемой) движения рынка к равновесию сначала отклоняется от равновесного значения, но после некоторых сложных движений снова приходит к равновесному значению. Флуктуации же спроса не позволяют полностью стабилизировать рынок в положении равновесия. Это видно также и из сравнения рис. 7 с рис. 1 (координата «спрос» плохо стабилизируется в точке равновесия), и из сравнения рис. 8 с рис. 2 (оптимальное управление по координате «спрос» постоянно «борется» с возмущениями, создаваемыми случайными флуктуациями спроса).

А НУЖНО ЛИ СТАБИЛИЗИРОВАТЬ РЫНОК В ПОЛОЖЕНИИ РАВНОВЕСИЯ?

До сих пор мы исходили из молчаливого предположения, что стабилизация рынка в состоянии равновесия выгодна его участникам. На интуитивном уровне это представляется вполне естественным. Но так ли это? Рассмотрим этот вопрос более внимательно применительно к исследуемой здесь динамической модели рынка, описываемой в пространстве переменных состояния «предложение – цена – спрос».

Пусть, как принято в нашем примере, начальное неравновесное состояние рынка характеризуется товарным дефицитом ($Q^S(t_0) < Q^D(t_0) = Q^*$) и повышенными ценами ($P(t_0) > P^*$). Казалось бы, такая ситуация выгодна поставщикам товара. За меньшее количество товара, покупаемого у производителя по некоторой определенной цене (скажем,

$C_0 P^* < P^*$, где $C_0 < 1$ – доля цены производителя по отношению к равновесной рыночной цене), можно получить более высокую выручку, продавая товар по сложившейся в начальный момент повышенной рыночной цене. Эта ситуация стимулирует поставщиков товара (продавцов) увеличивать объем предложения, причем продажа всего товара гарантирована тем, что спрос выше предложения. В соответствии с законами естественного (неуправляемого) рынка, описываемого рассматриваемой здесь динамической моделью (см. рис. 3 или рис. 11), увеличение предложения до равновесной величины, равной спросу, не сопровождается снижением цены. Наоборот, цена достигает максимального значения, существенно превосходящего равновесное. В этих условиях поставщик не в состоянии отказаться от дальнейшего увеличения предложения. Однако при этом начинается затоваривание рынка, поставщику не удастся продать весь предлагаемый к продаже товар, его излишек приходится хранить, оплачивая хранение по цене, составляющей, например, долю $C < 1$ от рыночной цены товара. Прибыль поставщика начинает снижаться. Нарастая, затоваривание рынка приводит (опять же в соответствии с законами рынка) к постепенному снижению цены до равновесного значения и ниже. В такой ситуации поставщику становится невыгодно повышать объемы предложения. Начинается снижение поставок товара на рынок. Однако рынок все еще сильно затоварен. Цены, естественно, начинают падать ниже равновесного значения. Это вынуждает поставщика, все еще несущего убытки, еще больше снижать объемы предложения. Наконец, цены достигают минимального значения, спрос начинает расти, а предложение продолжает падать. Возникает и нарастает товарный дефицит, товары распродаются полностью, но их не хватает для удовлетворения растущего спроса. Поставщику, естественно, выгодно увеличивать объемы предложения (поставок товара на рынок), тем более что ему уже не нужно платить за хранение излишков товара, потому что никаких излишков нет. Есть дефицит, приводящий к росту цен, которые в один прекрасный момент оказываются выше равновесных. Предложение достигает первоначального значения. Однако при этом объеме предложения цены оказываются несколько ниже первоначальных. Рынок завершает виток своего медленного движения к равновесию. На следующем витке картина поведения рынка повторяется, но рынок еще немного приближается к равновесию. И так далее, до тех пор, пока равновесие не будет достигнуто.

А как же ведет себя суммарная прибыль поставщика (продавца) на траектории движения рынка к равновесию?

Очевидно, в каждый данный момент времени t объем продаж в единицу времени равен минимальному из значений объемов спроса и предложения:

$$Q(t) = \min \{Q^D(t), Q^S(t)\}. \quad (34)$$

Продавая этот объем товара по рыночной цене $P(t)$, продавец получает в единицу времени выручку $S_0(t) = P(t)Q(t)$. Если объем продаж в данный момент времени ниже объема предложения ($Q(t) < Q^S(t)$), продавец вынужден платить за хранение непроданного товара (излишки товара на рынке) в каждую единицу времени сумму $CP(t)(Q^S(t) - Q(t))$, уменьшающую его выручку

на эту величину:

$$S_0(t) = P(t)Q(t) - CP(t)(Q^S(t) - Q(t)) \cdot 1(Q^S(t) - Q(t)), \quad (35)$$

где $1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда (индикатор положительности аргумента).

Покупая товар у производителя (торгового посредника, на оптовом складе) по цене $C_0 P^*$, поставщик товара на рынок (продавец) несет затраты в единицу времени, равные $C_0 P^* Q^S(t)$. Поэтому его прибыль (разница между выручкой от продажи товара и затратами на его приобретение) составит в единицу времени величину

$$S(t) = S_0(t) - C_0 P^* Q^S(t). \quad (36)$$

Средняя прибыль в единицу времени на всей траектории движения рынка к состоянию равновесия выражается интегралом

$$\bar{S} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} S(t) dt. \quad (37)$$

Если эта величина положительна, продавец имеет прибыль, иначе – несет убытки.

Подсчет средней прибыли $\bar{S}$ по формуле (37) с учетом (34)–(36) для рассмотренного в предыдущем пункте примера при $C_0 = 0,5$ дает значения, приведенные в таблице.

Средняя прибыль $\bar{S}$ на различных типах траекторий движения рынка к равновесию

Траектория	$C = 0,15$	$C = 0$
Детерминированная неуправляемая	403.0303	422.3231
Детерминированная управляемая	500.4995	500.6195
Стохастическая неуправляемая	451.4152	459.4446
Стохастическая управляемая	496.5263	497.1820
Равновесная	500	

Как видно из таблицы, максимальную прибыль поставщик товара (продавец) получает на управляемых траекториях движения рынка к равновесию (как в отсутствие, так и в присутствии случайных возмущений рынка), а также при равновесном состоянии рынка. Наименьшая прибыль получается при неуправляемом неравновесном состоянии рынка. И это в условиях начального дефицита товаров на рынке и высоких ценах, наиболее выгодных для поставщика товаров.

Следовательно, если рассматриваемая нами модификация динамической модели рынка Вальраса–Маршалла в пространстве переменных «предложение – цена – спрос» верна (адекватна действительности), поставщикам товара выгоден стабильный равновесный рынок. И в случае любого отклонения состояния рынка от равновесного поставщик товара (продавец) должен быть заинтересован в скорейшем возвращении рынка в состояние равновесия и в стабилизации рынка в этом состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика: В 2-х томах / Общая ред. В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 2002. Т. 1. 349 с.

2. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1963. 348 с.
3. *Поддубный В.В.* Оптимальная стабилизация рынка, описываемого модифицированной моделью Вальраса–Маршалла // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 6. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 161–171.
4. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 652 с.
5. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998. 576 с.
6. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // J. Basic Eng., 1961, V. 83. P. 95.
7. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973. 440 с.

Статья поступила в научную редакцию «Информатика» 30 апреля 2004 г.