

ДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ СПРОСА И УСТАРЕВАНИЕМ ЗАПАСОВ В УЗЛАХ СЕТИ

Рассматривается динамическая сетевая модель системы управления запасами с интервально заданным спросом и устареванием запасов. Для анализа и расчета оптимальной стратегии управления применяется аппарат интервальной математики. С привлечением полной интервальной арифметики Каухера получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления. Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разработан вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления. Рассмотрен численный пример.

Динамические сетевые модели описывают широкий класс систем управления запасами [1, 2]. В качестве примера можно привести системы снабжения, производства-распределения, транспортные, информационные, финансовые и другие системы. Узлы сети задают виды и размеры управляемых запасов, а дуги – управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки перераспределяют ресурсы между узлами сети, возможно, перерабатывая их, и планируют поставки извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы в узлах сети, который формируется как со стороны других узлов, так и внешнего окружения.

Проблеме оптимизации динамических потоков в сети посвящено большое количество работ (см., к примеру, [1, 2] и обширную библиографию к ним). Современная теория предлагает алгоритмы оптимального управления как детерминированными, так и стохастическими динамическими сетями. Однако детерминированные модели не учитывают априорную неопределенность, свойственную реальным системам управления запасами. Вероятностные – требуют точного задания вероятностных характеристик неопределенных параметров системы (факторов неопределенности) и довольно сложны в смысле получения численных результатов. При этом во многих случаях нет основания или недостаточно информации, чтобы рассматривать факторы неопределенности как случайные (то есть адекватно описываемые теоретико-вероятностными моделями). Это приводит к необходимости учета неопределенности нестохастической (или, в общем случае, неизвестной) природы.

Интересный подход, основанный на концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий (unknown-but-bounded inputs), предлагается в работах Ф. Бланчини, Ф. Ринальди и В. Уковича [3–5]. В них рассматриваются динамические сетевые модели систем управления запасами в предположении, что неизвестный спрос принадлежит заданному множеству. Такой подход приводит к минимаксным игровым постановкам и гарантированным решениям в смысле заданного критерия. Авторы [3–5] используют аппарат теории множеств. Однако теоретико-множественное представление результатов приводит к трудностям при проверке условий существования оптимальных стратегий управления и вычисления их параметров. Кроме того, предложенные в этих работах модели не учитывают возможное устаревание запаса в узлах сети (порчу, естественную убыль, моральный износ и т.д.).

В работах [6–10] неопределенность спроса в системе управления запасами предлагается моделировать в виде интервала, в границах которого спрос произвольным образом принимает свои значения. Нижнюю и верхнюю границы изменения возможных значений спроса всегда можно оценить с достаточной степенью достоверности по статистическим данным или руководствуясь накопленным опытом и интуитивными предположениями. При этом для анализа и расчета оптимальной стратегии управления запасами используется аппарат интервальной математики.

В настоящей работе рассматривается динамическая сетевая модель системы управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и устареванием запаса в узлах сети. С привлечением полной интервальной арифметики Каухера определяются необходимые и достаточные условия существования допустимого управления и достаточные условия существования опти-

мальной допустимой стратегии управления. Оценивается скорость сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разрабатывается вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Предлагается численный пример.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему управления запасами в дискретном времени (с периодическим контролем уровня запасов), представленную в виде динамической сети. Динамика сети описывается следующим рекуррентным соотношением:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояний системы, i -я компонента которого задает уровень запаса на i -м узле сети; $u(t) \in R^q$ – вектор управляющих воздействий (управление), компоненты которого представляют управляемые потоки в сети в момент времени t ; $d(t) \in R^m$ – вектор неуправляемых воздействий (спрос), компоненты которого описывают неуправляемые потоки в сети в момент времени t ; структура сети определяется структурой матриц $B \in R^{n \times q}$, $E \in R^{n \times m}$; диагональная матрица $A = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = \overline{1, n}$, учитывает устаревание запаса в узлах сети.

Относительно спроса $d(t)$ известно лишь то, что он произвольным образом принимает значения в заданном интервале

$$d(t) \in D, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $D \in IR^m$, $D = [\underline{D}, \overline{D}]$, $D \geq 0$.

На состояния системы $x(t)$ и управления $u(t)$ накладываются ограничения, которые обусловлены возможностями системы:

$$x(t) \in X, \quad t \geq 0; \quad (3)$$

$$u(t) \in U, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где $X \in IR^n$, $X = [0, \overline{X}]$; $U \in IR^q$, $U = [0, \overline{U}]$.

Здесь и далее используется стандартная система обозначений [16]. Интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы) выделяются жирным шрифтом. Арифметические операции с интервальными величинами рассматриваются как операции соответствующих интервальных арифметик: классической интервальной арифметики IR [11–13], где IR есть множество всех правильных интервалов $IR = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x} \leq \overline{x}, \underline{x}, \overline{x} \in R\}$, либо полной интервальной арифметики Каухера KR [14, 15], где $KR = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in R\}$ – расширенное множество интервалов. Под векторами (точечными или интервальными) всюду понимаются вектор-столбцы.

Определение 1. Будем называть функцию $u(t)=U(x(t), t)$, $u(t) \in U$, допустимым на интервале X управлением для состояния $x(t)$ в момент времени $t, t \geq 0$, если для любого значения спроса $d(t) \in D$ выполнено включение $x(t+1) \in X$, где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Определение 2. Будем называть стратегию $\Phi=\{u(t), t \geq 0\}$, $u(t) \in U$, допустимой на интервале X стратегией управления для начального состояния $x(0) \in X$, если $u(t)$ является допустимым на интервале X управлением для состояния $x(t)$ в момент времени $t, t \geq 0$, где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Определение 3. Будем называть $\hat{x}, \hat{x} \in X$, допустимым уровнем запаса в сети, если для любого начального состояния $x(0) \in X$ существует допустимая на интервале X стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что $x(t) \in X(0, \hat{x})$, $t \geq \tau \geq 0$, где интервальнозначная [11–13] функция $X(a, b) = [a, b]$ определена для любых $a \leq b, a, b \in R^n$; $\Phi(x(0))$ – множество стратегий, допустимых на интервале X при начальном состоянии $x(0) \in X$, а $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Очевидно, что если для любого начального состояния $x(0) \in X$ существует допустимая стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$, то $\bar{X}$ является допустимым уровнем запаса. Однако, как известно, при неоправданно высоком уровне запаса система несет потери от омертвления капитала в запасах и замедления его оборачиваемости. Поэтому необходимо найти оптимальный допустимый уровень запаса в сети $\hat{x}^*$, минимизирующий расходы системы на хранение запаса (максимальные возможные расходы за один период):

$$C(\hat{x}) = h' \hat{x}, \quad (5)$$

и стратегию управления запасами $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующую включение

$$x(t) \in X(0, \hat{x}^*), \quad t \geq \tau^* \geq 0, \quad (6)$$

где $h \in R^n$ – вектор затрат, $h \geq 0, h \neq 0$, i -я компонента которого представляет затраты на хранение единицы запаса в i -м узле сети; символ « $\bar{\cdot}$ » (штрих сверху) означает транспонирование.

Стратегию $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, удовлетворяющую (6), будем называть оптимальной допустимой стратегией управления для начального состояния $x(0) \in X$, а время τ^* – скоростью сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$. При оптимальной стратегии управления Φ^* затраты системы за один период, начиная с момента времени τ^* , будут удовлетворять ограничению $C(x(t)) \leq C(\hat{x}^*)$ для любого значения спроса $d(t) \in D, t \geq \tau^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ДОПУСТИМОГО УРОВНЯ ЗАПАСА В СЕТИ

Терма 1 (о существовании допустимого управления). Для любого состояния системы $x(t) \in X$ в момент времени $t, t \geq 0$, допустимое на интервале X управление $u(t)=U(x(t), t)$, $u(t) \in U$, существует и определяется из включения

$$Ax(t) + Bu(t) \in X + \text{opp}ED, \quad (7)$$

если и только если выполнены условия

$$\text{wid}ED \leq \text{wid}X; \quad (8)$$

$$ED \in \{-BU\}, \quad (9)$$

где $\text{wid } x = \bar{x} - x$ – ширина интервала x ; ED – интервал, полученный умножением вещественной матрицы E на интервальный вектор D [11–13]; $\text{opp } x = [-x, -\bar{x}]$ есть интервал, противоположный к интервалу x [14, 15]; множество $\{-BU\} = \{x \in R^n \mid x = -Bu, u \in U\}$.

Доказательство. Построим управление $u(t)$ в момент времени t в виде (7). Заметим, что включение (7) имеет смысл, если и только если выполнено условие (8). Действительно,

$$\begin{aligned} X + \text{opp}ED \leq \overline{X + \text{opp}ED} &\Leftrightarrow X - ED \leq \bar{X} - \overline{ED} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{ED} - ED \leq \bar{X} - X \Leftrightarrow \text{wid}ED \leq \text{wid}X. \end{aligned}$$

Покажем, что такое управление существует для любого $x(t) \in X$. Из (7) имеем

$$\begin{aligned} \forall x(t) \in X \exists u(t) \in U \mid Ax(t) + Bu(t) &\in X + \text{opp}ED \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x(t) \in X \exists u(t) \in U \mid Ax(t) &\in X + \text{opp}ED - Bu(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x(t) \in X \mid Ax(t) &\in X + \text{opp}ED + \{-BU\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x(t) \in X \mid Ax(t) &\in \{X + \text{opp}ED - BU\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow AX &\subseteq \{X + \text{opp}ED - BU\}, \end{aligned}$$

где AX есть интервал, полученный умножением диагональной матрицы A на интервальный вектор X , множество

$$\begin{aligned} \{X + \text{opp}ED - BU\} &= \{x \in R^n \mid x = x_d - Bu, \\ x_d &\in X + \text{opp}ED, u \in U\}. \end{aligned}$$

Учитывая то, что $AX \subseteq X$ для матрицы $A = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_i \leq 1, i = \overline{1, n}$, и интервального вектора $X = [0, \bar{X}]$, $X \in IR^n$, имеем

$$\begin{aligned} AX &= AX + \text{opp}ED + ED \subseteq AX + \text{opp}ED + \{-BU\} = \\ &= \{AX + \text{opp}ED - BU\} \subseteq \{X + \text{opp}ED - BU\}, \end{aligned}$$

если и только если выполнено условие (9). Следовательно, управление $u(t)=U(x(t), t)$, $u(t) \in U$, гарантирующее (7), существует для любого $x(t) \in X$.

Покажем далее, что такое управление является допустимым на интервале X . Действительно,

$$\begin{aligned} \forall x(t) \in X \exists u(t) \in U \mid Ax(t) + Bu(t) &\in X + \text{opp}ED \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x(t) \in X \exists u(t) \in U \mid Ax(t) + Bu(t) + ED &\subseteq X \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x(t) \in X \exists u(t) \in U \forall d(t) \in D \mid Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) &\in X. \end{aligned}$$

По определению 1 управление $u(t)$ является допустимым на интервале X для состояния $x(t) \in X$ в момент времени $t, t \geq 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Интервал $X + \text{opp}ED$ определяет уровень запаса, необходимого и достаточного для полного и своевременного удовлетворения спроса при выполнении ограничения (3). Логично предположить, что $X + \text{opp}ED \geq 0$.

Это условие выполняется, если и только если $ED \leq 0$.

Следствие 1. Для любого начального состояния $x(0) \in X$ допустимая на интервале X стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$ существует, если и только если выполнены условия (8), (9). Доказательство легко получить с учетом определения (2).

Терма 2 (о виде оптимального допустимого уровня запаса). Оптимальный допустимый уровень запаса в сети $\hat{x}^*$, минимизирующий функцию затрат (5), имеет вид

$$\hat{x}^* = \overline{ED} - ED. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия существования допустимой на интервале X стратегии управления (8), (9) и $\hat{x} \in X$ – допустимый уровень запаса. Тогда по определению (3) для любого начального состояния $x(0) \in X$ существует допустимая стратегия

стояния $x(0) \in X$ существует допустимая стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \in X(0, \hat{x})$, $t \geq \tau-1 \geq 0$, для любого $d(t) \in D$. Следовательно,

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + ED \in X(0, \hat{x}), \quad t \geq \tau-1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \in X(0, \hat{x}) + \text{opp}ED, \quad t \geq \tau-1 \geq 0.$$

(Заметим, что здесь, в отличие от определения 3, $\tau \geq 1$. Однако, если $x(0) \in X(0, \hat{x})$, то получаем $\tau \geq 0$.) Последнее соотношение имеет смысл, если и только если

$$\begin{aligned} X(0, \hat{x}) + \text{opp}ED &\leq \overline{X(0, \hat{x}) + \text{opp}ED} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\underline{ED} \leq \hat{x} - \underline{ED} \Leftrightarrow \hat{x} \leq \overline{ED} - \underline{ED}. \end{aligned}$$

Учитывая то, что $\hat{x} \in X$, получаем $\hat{x} \in [\underline{ED} - \underline{ED}, \overline{X}]$ (в силу (8) этот интервал – правильный).

Далее, так как функция затрат (5) монотонно возрастает по $\hat{x}$, то для любого вектора $h \geq 0$, $h \neq 0$, минимум функции (5) доставляет $\hat{x}^* = \overline{ED} - \underline{ED}$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Для оптимального допустимого уровня запаса $\hat{x}^*$ вида (10) справедливо включение

$$\text{wid}ED \leq \text{wid}X(0, \hat{x}^*). \quad (11)$$

Допустим, что в некоторый момент времени τ^* состояние системы попало в интервал $X(0, \hat{x}^*)$. Учитывая (11), можно применить теорему 1 для $X = X(0, \hat{x}^*)$. По теореме 1 для любого состояния $x(t) \in X(0, \hat{x}^*)$ в момент времени t , $t \geq 0$, допустимое на интервале $X(0, \hat{x}^*)$ управление $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in U$, существует и определяется из включения

$$Ax(t) + Bu(t) \in X(0, \hat{x}^*) + \text{opp}ED. \quad (12)$$

С учетом того, что $X(0, \hat{x}^*) + \text{opp}ED = [-\underline{ED}, -\underline{ED}]$, из (12) получаем матричное уравнение

$$Ax(t) + Bu(t) = -\underline{ED}. \quad (13)$$

Управления $u(t)$, $u(t) \in U$, удовлетворяющие (13), гарантируют включения $x(t) \in X(0, \hat{x}^*)$ для $t \geq \tau^*$ и составляют оптимальную стратегию управления (будем называть их оптимальными управлениями).

Замечание 3. Величина $-\underline{ED}$ определяет оптимальный уровень предельного запаса в системе для $t \geq \tau^*$. Причем любое управление $u(t)$, $u(t) \in U$, удовлетворяющее (13), является оптимальным в смысле (6). В этом случае для $t \geq \tau^*$ управления $u(t)$ логично выбирать, минимизируя затраты на управления (транспортные расходы, затраты на производство и т.д.) при условиях $u(t) \in U$ и (13).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОПУСТИМОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Пусть для любого начального состояния $x(0) \in X$ существует допустимая на интервале X стратегия управления. Для существования оптимальной в смысле (6) допустимой стратегии управления этого достаточно в двух случаях:

– когда оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^* = \bar{X}$, тогда любая допустимая на интервале X стратегия управления будет оптимальной;

– когда оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^* \leq \bar{X}$, $\hat{x}^* \neq \bar{X}$, и начальный уровень запаса $x(0) \in$

$\in X(0, \hat{x}^*)$, тогда любая допустимая на интервале $X(0, \hat{x}^*)$ стратегия управления будет оптимальной.

В этих случаях проблема существования оптимальной допустимой стратегии управления не возникает и скорость сходимости $\tau^* = 0$. Оптимальные управления $u^*(t)$, $u^*(t) \in U$, составляющие оптимальную стратегию $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, являются решениями уравнения (13) в каждый момент времени $t \geq 0$.

Рассмотрим далее случай, когда начальный запас превосходит оптимальный допустимый уровень запаса $x(0) \in X(\hat{x}^*, \bar{X})$, $\hat{x}^* \leq \bar{X}$, $\hat{x}^* \neq \bar{X}$. Определим для этого случая условия существования оптимальной допустимой стратегии $\Phi^* \in \Phi(x(0))$ и скорость сходимости τ^* к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$.

Теорема 3. (о существовании оптимальной допустимой стратегии). Для любого начального состояния $x(0) \in X$ существует оптимальная допустимая на интервале X стратегия управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, если выполнены условия (8), (9) и существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$X(\underline{ED}, \overline{AED}) + \varepsilon X(0, \theta) \subseteq \{-BU\}, \quad (14)$$

где $\theta \in R^n$, $\theta = \bar{X} - \hat{x}^*$. Причем сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$ достигается не более чем за конечное число шагов

$$T = \max_{i=1, n} \left\lceil \frac{\ln \frac{\varepsilon}{1 - \alpha_i + \varepsilon}}{\ln \alpha_i} \right\rceil + 1, \quad (15)$$

где $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое, большее числа x .

Доказательство. Введем вектор

$$\tilde{x}(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0,$$

который определяет уровень запаса в сети после поставки в момент времени t , но до очередного предъявления спроса. Тогда $x(t+1) = \tilde{x}(t+1) + Ed(t)$, $t \geq 0$. Покажем, что $x(t+1) \in X$ для любого значения спроса $d(t) \in D$, если и только если $\tilde{x}(t+1) \in X + \text{opp}ED$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \forall d(t) \in D \mid \tilde{x}(t+1) + Ed(t) \in X &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tilde{x}(t+1) + ED &\subseteq X \Leftrightarrow \tilde{x}(t+1) \in X + \text{opp}ED. \end{aligned}$$

Покажем по индукции, что для любого начального состояния $x(0) \in X$ существует допустимая на интервале X стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) \in \left[-\underline{ED}, \max \left\{ -\underline{ED}, A^{t-1}(\bar{X} - \underline{ED}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \varepsilon(I + A + \dots + A^{t-2})\theta \right\} \right], \quad t \geq 1, \end{aligned} \quad (16)$$

где $I \in R^{n \times n}$ – единичная матрица. Так как выполнены условия (8), (9), то по теореме 1 для любого начального состояния $x(0) \in X$ существует допустимое управление такое, что

$$\tilde{x}(1) \in X + \text{opp}ED = [-\underline{ED}, \bar{X} - \underline{ED}].$$

С учетом соотношения $-\underline{ED} = \hat{x}^* - \underline{ED} \leq \bar{X} - \underline{ED}$ ясно, что для $t = 1$ включение (16) справедливо. Далее, пусть (16) справедливо для произвольного t , $t \geq 2$. Покажем, что оно справедливо для $t + 1$. Заметим, что условие (14) можно представить в виде

$$X(\underline{AED}, \overline{AED}) + \varepsilon X(0, \theta) + X((I - A)\underline{ED}, 0) \subseteq \{-BU\}. \quad (17)$$

Рассмотрим $\tilde{x}(t+1) = Ax(t) + Bu(t) = A(\tilde{x}(t) + Ed(t-1) +$

$+Bu(t) \pm \varepsilon\theta(t) \pm \tilde{\theta}(t)$. Согласно условию (17), существует управление $u(t) \in U$ такое, что $AEd(t-1) + \varepsilon\theta(t) + \tilde{\theta}(t) + Bu(t) = 0$ для любого $d(t-1) \in D$ и любых $\theta(t) \in X(0, \theta)$, $\tilde{\theta}(t) \in X((I-A)ED, 0)$. Тогда

$$\tilde{x}(t+1) = Ax(t) - \varepsilon\theta(t) - \tilde{\theta}(t), \quad (18)$$

где

$$\theta(t) \in X(0, \theta), \quad \tilde{\theta}(t) \in X((I-A)ED, 0). \quad (19)$$

Определим вектора $\theta(t), \tilde{\theta}(t)$ с компонентами

$$\theta_i(t) = \begin{cases} \theta_i, & \text{if } \alpha_i \tilde{x}_i(t) - \varepsilon\theta_i \geq -ED_i, \\ \max\left(0, \frac{\alpha_i \tilde{x}_i(t) + ED_i}{\varepsilon}\right), & \text{else,} \end{cases} \quad (20)$$

$$\tilde{\theta}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha_i \tilde{x}_i(t) - \varepsilon\theta_i \geq -ED_i, \\ \min(0, \alpha_i \tilde{x}_i(t) + ED_i), & \text{else.} \end{cases}$$

Покажем, что $\theta(t), \tilde{\theta}(t)$ вида (20) удовлетворяют условию (19). Согласно (20), $\theta_i(t)$ либо принимает значение θ_i (верхней границы i -ой компоненты интервала $X(0, \theta)$), либо равна нулю (нижней границе i -й компоненты интервала $X(0, \theta)$), либо $\theta_i(t) = \frac{\alpha_i \tilde{x}_i(t) + ED_i}{\varepsilon} > 0$, причем из условия

$$\alpha_i \tilde{x}_i(t) - \varepsilon\theta_i < -ED_i \text{ следует } \theta_i(t) = \frac{\alpha_i \tilde{x}_i(t) + ED_i}{\varepsilon} < \theta_i, \text{ от-}$$

куда получаем включение $\theta(t) \in X(0, \theta)$. Далее, $\tilde{\theta}_i(t)$ либо равна нулю (верхней границе i -ой компоненты интервала $X((I-A)ED, 0)$); либо $\tilde{\theta}_i(t) = \alpha_i \tilde{x}_i(t) + ED_i < 0$, причем в силу предположения индукции (16) имеем $\tilde{x}_i(t) \geq -ED_i$, откуда $\tilde{\theta}_i(t) \geq (I - \alpha_i)ED_i$, что и доказывает включение $\tilde{\theta}(t) \in X((I-A)ED, 0)$.

Таким образом, из (18) получаем

$$\tilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \alpha_i \tilde{x}_i(t) - \varepsilon\theta_i, & \text{если } \alpha_i \tilde{x}_i(t) - \varepsilon\theta_i \geq -ED_i, \\ -ED_i, & \text{иначе,} \end{cases}$$

откуда, с учетом предположения индукции (16),

$$\tilde{x}_i(t+1) \in \left[-ED_i, \max\left\{-ED_i, \alpha_i'(\bar{X}_i - \overline{ED}_i) - \varepsilon(1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{t-1})\theta_i\right\}\right]. \quad (21)$$

Кроме того, учитывая соотношения

$$\alpha_i'(\bar{X}_i - \overline{ED}_i) - \varepsilon(1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{t-1})\theta_i \leq \bar{X}_i - \overline{ED}_i, \\ -ED_i = \hat{x}^* - \overline{ED}_i \leq \bar{X}_i - \overline{ED}_i,$$

получаем включение

$$\left[-ED_i, \max\left\{-ED_i, \alpha_i'(\bar{X}_i - \overline{ED}_i) - \varepsilon(1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{t-1})\theta_i\right\}\right] \subseteq \\ \subseteq [-ED_i, \bar{X}_i - \overline{ED}_i].$$

Таким образом, $\tilde{x}(t+1) \in X + \text{opp}ED$ и $x(t+1) \in X$ для любого $d(t) \in D$. По определению 1 управление $u(t)$, удовлетворяющее (21), является допустимым на интервале X в момент времени t . Следовательно, утверждение (16) имеет силу для любого $t \geq 1$.

Покажем, что стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, является оптимальной, т.е. начиная с некоторого момента времени τ^* выполнено включение (6). Рассмотрим случай, когда $\theta_i = 0$ ($\hat{x}_i^* = \bar{X}_i$). При этом включение (16) примет вид

$$\tilde{x}_i(t) \in \left[-ED_i, \max\left\{-ED_i, \alpha_i^{t-1}(\hat{x}_i^* - \overline{ED}_i)\right\}\right], t \geq 1.$$

Заметим, что

$$\alpha_i^{t-1}(\hat{x}_i^* - \overline{ED}_i) = \alpha_i^{t-1}(-\overline{ED}_i) \leq \langle 0 < \alpha_i \leq 1, \overline{ED}_i \leq 0 \rangle \leq -\overline{ED}_i,$$

следовательно,

$$\tilde{x}_i(t) \in [-\overline{ED}_i, -\overline{ED}_i] = X(0, \hat{x}_i^*) + \text{opp}ED_i, \quad t \geq 1,$$

что гарантирует включение $x_i(t) \in X(0, \hat{x}_i^*)$, $t \geq 0$ (с учетом того, что $x_i(0) \in X(0, \hat{x}_i^*)$, $t \geq 0$).

Для случая, когда $\theta_i > 0$, найдем момент времени τ^* , начиная с которого $\tilde{x}_i(t) \in [-\overline{ED}_i, -\overline{ED}_i]$, $t \geq \tau^*$. Рассмотрим функцию

$$f_i(t) = \alpha_i^{t-1}(\bar{X}_i - \overline{ED}_i) - \varepsilon(1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{t-2})\theta_i = \\ = \alpha_i^{t-1}(\bar{X}_i - \overline{ED}_i) - \varepsilon \frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i} \theta_i.$$

Учитывая то, что

$$f_i(t) = \alpha_i^{t-1}(\bar{X}_i - \overline{ED}_i) - \varepsilon \frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i} \theta_i = \\ = \alpha_i^{t-1}(\theta_i - \overline{ED}_i) - \varepsilon \frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i} \theta_i \leq \\ \leq -\overline{ED}_i + \alpha_i^{t-1}\theta_i - \varepsilon \frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i} \theta_i,$$

нетрудно показать, что функция $f_i(t)$ убывает по t и

$$f_i(t) \leq -\overline{ED}_i \text{ для } t \geq \left\lceil \frac{\ln \frac{\varepsilon}{1 - \alpha_i + \varepsilon}}{\ln \alpha_i} \right\rceil + 1.$$

Следовательно, из (16) имеем

$$\tilde{x}_i(t) \in [-\overline{ED}_i, -\overline{ED}_i] = X(0, \hat{x}_i^*) + \text{opp}ED_i,$$

$$t \geq \left\lceil \frac{\ln \frac{\varepsilon}{1 - \alpha_i + \varepsilon}}{\ln \alpha_i} \right\rceil + 1,$$

откуда получаем

$$x(t) \in X(0, \hat{x}^*), \quad t \geq \max_{i=1, n} \underbrace{\left\lceil \frac{\ln \frac{\varepsilon}{1 - \alpha_i + \varepsilon}}{\ln \alpha_i} \right\rceil + 1}_{=T}.$$

Таким образом, стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, удовлетворяющая (16), является оптимальной, а скорость сходимости к оптимальному допустимому уровню $\tau^* = T$, где T определяется соотношением (15). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3 следует, что если выбрать управление $u(t) \in U$ в момент времени t так, чтобы

$$Ax(t) + Bu(t) \in \left[-ED, \max\left\{-ED, A'(\bar{X} - \overline{ED}) - \varepsilon(I - A)^{-1}(I - A')\theta\right\}\right] \subseteq \\ \subseteq [-ED, \max\left\{-ED, -\overline{ED} + (A' - \varepsilon(I - A)^{-1}(I - A'))\theta\right\}],$$

то, начиная с момента времени $T-1$, будем иметь

$$Ax(t) + Bu(t) \in [-ED, -ED] = -ED, \quad t \geq T-1,$$

что гарантирует

$$x(t) \in X(0, \hat{x}^*), \quad t \geq T,$$

следовательно, стратегия $\Phi = \{u(t), t \geq 0\}$ является оптимальной в смысле (6).

Для того чтобы увеличить скорость сходимости системы, будем определять управления $u^*(t)$ в момент

времени $t, t \geq 0$, составляющие оптимальную стратегию $\Phi^* = \{u^*(t), t \geq 0\}$ из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t), \lambda_1, \dots, \lambda_n} \quad (22)$$

при ограничениях

$$-\underline{ED} \leq Ax(t) + Bu(t) \leq -\underline{ED} + \Lambda\theta, -\underline{ED} + \Lambda\theta \leq \bar{X} - \underline{ED}, \\ u(t) \in U, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0,$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1) ($x(0)$ – известное начальное состояние запаса); $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – диагональная $n \times n$ -матрица; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R$ – вспомогательные параметры. Момент времени $\tau^*, \tau^* < T$, начиная с которого $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, определяет скорость сходимости системы.

Замечание 4. В случае единичной матрицы $A = \text{Diag}(1, 1, \dots, 1)$ (без учета устаревания запаса) оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$ определяется по формуле $T = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$. (Эта оценка получается в результате предельного перехода $\alpha_i \rightarrow 1, i = \overline{1, n}$, в формуле (15).)

ПРИМЕР

Рассмотрим систему производства-распределения, которая описывается динамической сетью, представленной на рис. 1.

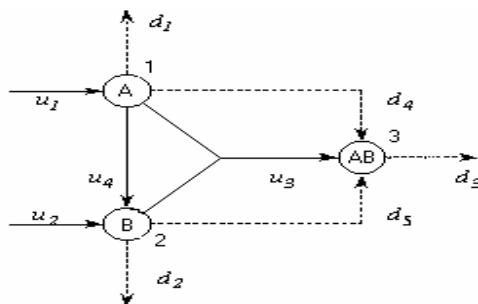


Рис. 1. Структура сети

Сеть состоит из трех узлов: узлы 1, 2 производят продукцию А и В, которая используется для производства продукции АВ в 3-м узле. Управляемые потоки u_1, u_2 определяют интенсивность производства продукции А и В соответственно; u_4 перераспределяет дополнительные производственные возможности системы между производственными линиями А и В (если $u_4=0$, то все дополнительные возможности системы направлены на производство продукции А); u_3 описывает производствен-

ную линию, которая из А и В производит продукцию АВ. Неуправляемые потоки d_1, d_2, d_3 определяют спрос в узлах сети на продукцию А, В и АВ соответственно; d_4, d_5 представляют спрос в 3-ем узле на продукцию А и В.

Динамика сети описывается рекуррентным соотношением (1) со структурными матрицами

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, учитывающая устаревание запаса, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Неопределенность спроса и ограничения на состояния системы и управления заданы в виде соответствующих интервалов

$$D = \begin{pmatrix} [5, 25] \\ [20, 30] \\ [60, 80] \\ [0, 20] \\ [0, 30] \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} [0, 130] \\ [0, 120] \\ [0, 150] \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} [0, 190] \\ [0, 55] \\ [0, 100] \\ [0, 70] \end{pmatrix}.$$

Для данной системы оптимально допустимый уровень запаса $\hat{x}^* = (40 \ 20 \ 50)'$ (формула (10)), условия теоремы 3 выполнены ($\varepsilon = 0.158$), максимальная скорость сходимости $T = 5$ (формула (15)).

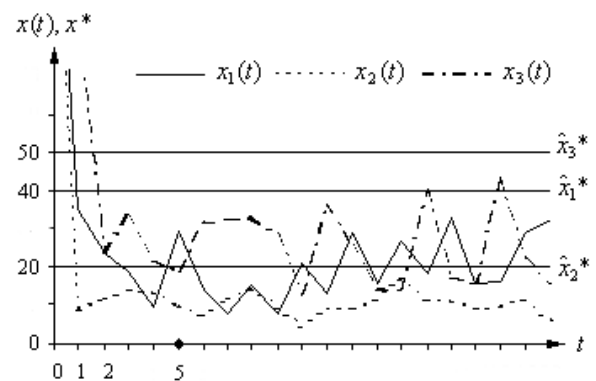


Рис. 2. Динамика изменения запаса в узлах сети

В каждый момент времени $t, t \geq 0$, решая задачу (22), получаем оптимальное управление $u^*(t)$. Рис. 2 показывает динамику изменения запаса в узлах сети при оптимальной стратегии управления $\Phi^* = \{u^*(t), t \geq 0\}$, $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, для начального состояния запаса $x(0) = (130 \ 120 \ 150)'$. Видно, что скорость сходимости $\tau^* = 2$, так как $x(t) \in X(0, \hat{x}^*)$ для $t \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ловецкий С.Е., Меламед И.И. Динамические потоки в сетях // Автоматика и телемеханика. 1987. № 11. С. 7–29.
2. Glover F., Klingman D., Phillips N.V. Network models in optimization and their applications in practice. NY.: Wiley, 1992.
3. Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W. A network design problem for a distribution system with uncertain demands // SIAM Journal on Optimization. 1997. Vol. 7, № 2. P. 560–578.
4. Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W. Least Inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown demand // IEEE Transaction on Robotics and Automation. 1997. Vol. 13, № 5. P. 633–645.
5. Blanchini F., Pesenti R., Rinaldi F., Ukovich W. Feedback control on production-distribution systems with unknown demand and delays // IEEE Transaction on Robotics and Automation. 2000. Vol. 16, № 3. P. 313–317.
6. Домбровский В.В., Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. Ч. 2. С. 271–274 (спец. выпуск, CD).
7. Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и задержками в поставках // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2001. Т. 8. № 2. С. 719–720.

8. Чаусова Е.В. Динамическая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1(1). С. 195–200.
9. Chaurova E.V. Dynamic network inventory control model with interval nonstationary demand uncertainty // GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics: Book of Abstracts. Paris: Universite Pierre et Marie Curie, Laboratory LIP6, 2002. P. 101.
10. Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель с интервально заданным нестационарным спросом // Дискретный анализ и исследование операций: Материалы Российской конференции. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002. С. 248.
11. Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. Philadelphia: SIAM, 1979.
12. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
13. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
14. Шарый С.П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 67–114.
15. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR // Computing Supplement. 1980. V. 2. P. 33–49.
16. Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M., Shary S.P., Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Reliable Computing, to appear.

Статья представлена кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике экономического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 30 мая 2003 г.