ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 284 Декабрь 2004

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.2

Б.А. Гладких, А.А. Назаров

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассматриваются статистические характеристики оценки стационарной вероятности состояния дискретной марковской цепи с непрерывным временем в виде отношения времени пребывания цепи в этом состоянии к общему времени наблюдения. Показывается, что эта оценка асимптотически несмещенная, находится ее асимптотическая дисперсия и строится оценка этой дисперсии. Доказывается также асимптотическая нормальность этой оценки.

Одним из больших разделов теории вероятностей является так называемая эргодическая теория [1, 2], согласно которой временные средние вероятностных характеристик случайных процессов при определенных условиях совпадают со средними по ансамблю его реализаций. Это открывает возможность построения оценок параметров случайных процессов по временным средним на конечном интервале наблюдения. Однако в реальности такими оценками пользуются очень редко, потому что неизвестны их статистические свойства, в частности, как правило, непонятно, как находить доверительные интервалы для значений неизвестных параметров. В данной работе делается попытка найти такие характеристики для оценок стационарных вероятностей состояний дискретной марковской цепи с непрерывным временем.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Пусть имеется однородная неразложимая цепь Маркова $k(t)$ с непрерывным временем t и конечным множеством состояний $k(t) = \overline{1, N}$.

Обозначим через T_i сумму длин всех интервалов времени из $[0, T]$, в течение которых цепь $k(t)$ находилась в состоянии i. Оценку $\hat{\pi}(i)$ стационарной вероятности $\pi(i) = P\{k(t) = i\}$ можно брать в виде

$$\hat{\pi}(i) = T_i/T . \qquad (1)$$

Целью данной работы является нахождение статистических характеристик этой оценки.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НЕСМЕЩЕННОСТЬ ОЦЕНКИ

Найдем математическое ожидание этой оценки при условии, что для цепи задано ее начальное состояние $k(0) = j$, т.е. траектория движения по состояниям начинается из состояния j. Обозначим

$$\delta(k(t), i) = \begin{cases} 1, & \text{если } k(t) = i, \\ 0, & \text{если } k(t) \neq i. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда

$$T_i = \int_0^T \delta(k(t), i)dt . \qquad (3)$$

Отсюда

$$M\{T_i\} = \int_0^T M\{\delta(k(t), t)\}dt = \int_0^T P_{ji}(t)dt =$$

$$= T\pi(i) + \int_0^T \left[P_{ji}(t) - \pi(i)\right]dt , \qquad (4)$$

где $P_{ji}(t) = P\{k(t) = i \mid k(0) = j\}$ есть вероятность перехода из состояния j в состояние i за время t.

Обозначим $f_{ji}(t) = P_{ji}(t) - \pi(i)$. Тогда

$$M\{T_i/T\} = \pi(i) + \frac{1}{T}\int_0^T f_{ji}(t)dt . \qquad (5)$$

Но, как известно [1], $\forall j\, f_{ji}(t)$ при $t \to \infty$ экспоненциально сходится к нулю. Поэтому интеграл, стоящий в (5), ограничен, и второе слагаемое стремится к нулю при $t \to \infty$, что и говорит об асимптотической несмещенности оценки вероятности $\pi(i)$.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДИСПЕРСИЯ ОЦЕНКИ

Покажем теперь, что дисперсия оценки (1) убывает как $1/T$. Имеем

$$M\{T_i^2\} = \int_0^T\int_0^T M\{\delta(k(t), i)\delta(k(s), i)\}dtds =$$

$$= \int_0^T\int_0^T P\{k(t) = i, k(s) = i \mid k(0) = j\}dtds.$$

Обозначим $P\{k(t) = i, k(s) = i \mid k(0) = j\}$ как $P_j(i, t, i, s)$. Тогда можно записать

$$M\{T_i^2\} = \int_0^T \left\{\int_0^t P_j(i,t,i,s)ds + \int_t^T P_j(i,t,i,s)ds\right\}dt .$$

Учитывая марковость рассматриваемого процесса, преобразуем этот интеграл к виду

$$M\{T_i^2\} = \int_0^T dt \int_0^t P_{ji}(s)P_{ii}(t-s)ds + \int_0^T dt \int_t^T P_{ji}(t)P_{ii}(s-t)ds =$$

$$= 2\int_0^T P_{ji}(t)dt \int_0^{T-t} P_{ii}(s)ds . \qquad (6)$$

Переходя к функции $f_{ji}(t)$, получим

$$M\{T_i^2\} = 2\int_0^T \left(\pi(i) + f_{ji}(t)\right)dt \int_0^{T-t} \left(\pi(i) + f_{ii}(s)\right)ds .$$

С другой стороны, как это следует из (5),

$$M\{T_i\} = T\pi(i) + \int_0^T f_{ji}(t)dt .$$

Опуская преобразования, приведем результат:

$$D\{T_i\} = M\{T_i^2\} - M^2\{T_i\} =$$

$$= 2T\pi(i)\int_0^T f_{ii}(s)ds - 2\pi(i)\int_0^T s\left(f_{ii}(s) + f_{ji}(s)\right)ds +$$

$$+ 2\int_0^T f_{ji}(t)dt \int_0^{T-t} f_{ii}(s)ds - \left(\int_0^T f_{ji}(t)dt\right)^2 . \qquad (7)$$

Таким образом,

$$D\{T_i/T\} = \frac{2\pi(i)}{T}\int_0^T f_{ii}(s)ds + o\left(\frac{1}{T}\right), \qquad (8)$$

и первое слагаемое, определяющее основной член асимптотики, убывает как $1/T$ и не зависит от стартового состояния j. Отсюда также следует, что оценка $\hat{\pi}(i)$ сходится к истинному значению стационарной вероятности $\pi(i)$ в среднеквадратичном смысле.

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ

Для построения доверительного интервала для вероятности $\pi(i)$ необходимо иметь оценку величины $D\{T_i/T\}$. Для ее построения необходима более подробная информация.

Пусть интервал наблюдения есть $[0, T]$. Далее, пусть в течение этого времени система побывала в состоянии i n раз и времена пребывания в этом состоянии были $\{T_1, T_2, T_3,..., T_n\}$. Интервалы времени между пребываниями системы в состоянии i обозначим как $\{V_1, V_2, V_3,..., V_n\}$. Тогда очевидно, что

$$T(i) = \sum_{k=1}^{n} T_k\ , \quad T - T(i) = \sum_{k=1}^{n} V_k\ . \qquad (9)$$

Из марковости рассматриваемого процесса следует, что $\forall k, l$ величины T_k и V_l независимы. Кроме того, для $\forall k$ величины T_k одинаково распределены; аналогично, для $\forall l$ величины V_l также одинаково распределены.

Оценку (1) можно записать в виде

$$\hat{\pi}(i) = \frac{T(i)}{T} =$$

$$= \frac{nM\{T_k\} + \sum_{k=1}^{n}\left(T_k - M\{T_k\}\right)}{n(M\{T_k\} + M\{V_k\}) + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(T_k - M\{T_k\}\right) + \left(V_k - M\{V_k\}\right)\right]} =$$

$$= \frac{T_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta T_k}{T_0 + V_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\Delta T_k + \Delta V_k)}, \qquad (10)$$

где $T_0 = M\{T_k\}$, $V_0 = M\{V_k\}$, $\Delta T_k = T_k - T_0$, $\Delta V_k = V_k - V_0$.

В силу усиленного закона больших чисел [2, 3], средние арифметические в (10) являются при $n \to \infty$ бесконечно малыми величинами; поэтому с точностью до $o(1/N)$ можно (10) переписать в виде

$$\frac{T(i)}{T} = \frac{T_0}{T_0 + V_0}\cdot\frac{1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta T_k}{T_0}}{1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta T_k + \Delta V_0}{T_0 + V_0}} =$$

$$= \frac{T_0}{T_0 + V_0}\left\{1 + \frac{V_0}{T_0 + V_0}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta T_k}{T_0} - \frac{\Delta V_k}{V_0}\right)\right\} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда имеем

$$M\left\{\frac{T(i)}{T}\right\} = \frac{T_0}{T_0 + V_0} = \pi(i)\ ,$$

$$D\left\{\frac{T(i)}{T}\right\} = \left(\frac{T_0}{T_0 + V_0}\right)^2\left(\frac{V_0}{T_0 + V_0}\right)^2\frac{1}{n}\left\{\frac{D\{T_k\}}{T_0^2} + \frac{D\{V_k\}}{V_0^2}\right\} =$$

$$= \pi^2(i)(1 - \pi(i))^2\frac{1}{n}\left\{\frac{D\{T_k\}}{T_0^2} + \frac{D\{V_k\}}{V_0^2}\right\}. \qquad (11)$$

Так как T_k имеют экспоненциальное распределение [1], то $D\{T_k\} = T_0^2$ и поэтому

$$D\left\{\frac{T(i)}{T}\right\} = \pi^2(i)(1 - \pi(i))^2\frac{1}{n}\left\{1 + \frac{D\{V_k\}}{V_0^2}\right\} =$$

$$= \pi^2(i)(1 - \pi(i))^2\cdot\frac{M\{V_k^2\}}{nV_0^2}. \qquad (12)$$

Это выражение и позволяет построить оценку $D\{\hat{\pi}(i)\} = D\{T(i)/T\}$. Действительно, $\pi(i) = M\{T(i)/T\}$. Оценкой $M\{V_k^2\}$ является величина $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}V_k^2$, а оценкой V_0 – величина $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}V_k = \frac{T - T(i)}{n}$. Заменяя эти величины их оценками, мы и получаем оценку $D\{\hat{\pi}(i)\}$:

$$\hat{D}\{\hat{\pi}(i)\} = \frac{T^2(i)}{T^4}\sum_{k=1}^{n}V_k^2\ . \qquad (13)$$

Для ее практического использования надо измерять еще величину $\sum_{k=1}^{n}V_k^2$.

Приведем еще другой вид формулы (12). Имеем $T = \sum_{k=1}^{n}T_k + \sum_{k=1}^{n}V_k$. Поэтому, в силу усиленного закона больших чисел, при $n \to \infty$ $\frac{T}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}T_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}V_k \xrightarrow{\text{пр}}$ $\xrightarrow{\text{пн}} T_0 + V_0$. Но так как $\frac{V_0}{T_0 + V_0} = \frac{T_0 + V_0 - T_0}{T_0 + V_0} = 1 - \frac{T_0}{T_0 + V_0} = 1 - \pi(i)$, то при $n \to \infty$ $\frac{1 - \pi(i)}{V_0}\cdot\frac{T}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}}$ $\xrightarrow{\text{пр}} \frac{1 - \pi(i)}{V_0}\cdot(T_0 + V_0) = 1$.

Используя это соотношение, можно утверждать, что при $T \to \infty$ имеет место

$$D\{T(i)/T\} = \frac{1}{T}\cdot\pi^2(i)(1 - \pi(i))\frac{M\{V_k^2\}}{M\{V_k\}}, \qquad (14)$$

т.е. при больших T дисперсия оценки стационарной вероятности $\pi(i)$ убывает как $1/T$.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ОЦЕНКИ

Покажем теперь, что построенная оценка является асимптотически нормальной.

Для проведения исследования рассмотрим случайный процесс $I(t)$, значением которого является суммарное время из интервала $[0, t]$, в течение которого цепь находится в состоянии i. Очевидно, что

$$T(i) = I(T)\ ,\ \hat{\pi}(i) = I(T)/T\ .$$

Пусть

$$v(t) = \begin{cases}1, & \text{если } k(t) = i,\\ 0, & \text{если } k(t) \neq i.\end{cases} \qquad (15)$$

Известно, что время пребывания однородной цепи Маркова в каждом состоянии имеет экспоненциальное распределение с заданным параметром. Величину этого параметра для состояния i обозначим как $1/T$. Время возвращения в i-е состояние для цепи Маркова является случайной величиной, функцию распределения которого обозначим как $V(s)$.

Если $v(t) = 0$, то определим случайную величину $z(t)$, равную длине интервала времени от момента t до момента возвращения цепи Маркова в состояние i.

Случайный процесс $\{v(t), I(t), z(t)\}$ с переменным числом компонент является марковским. Обозначим

$$P\{v(t)=1, u\le I(t)<u+du\} = P_1(u,t)du\,,$$

$$P\{v(t)=0,\ u\le I(t)<u+du,\ z(t)<z\} = P_0(u,z,t)du\,.$$

Тогда имеют место равенства

$$P_1(u+\Delta t, t+\Delta t) = \left(1-\frac{\Delta t}{T_0}\right)P_1(u,t) + P_0(u,\Delta t,t) + o(\Delta t)\,,$$

$$P_0(u, z-\Delta t, t+\Delta t) = P_0(u,z,t) - P_0(u,\Delta t,t) + \\ + \frac{\Delta t}{T_0}P_1(u,t)V(z) + o(\Delta t).$$

Отсюда имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P_1(u,t)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(u,t)}{\partial u} + \frac{1}{T_0}P_1(u,t) = \frac{\partial P_0(u,0,t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial P_0(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_0(u,z,t)}{\partial z} - \\ - \frac{\partial P_0(u,0,t)}{\partial z} + \frac{1}{T_0}P_1(u,t)V(z).\end{gathered} \quad (16)$$

Решение полученной системы определяет распределение вероятностей процесса $I(t)$, что позволяет найти все характеристики оценки $\hat{\pi}(i)$.

Найдем решение этой системы в асимптотическом случае $T\to\infty$. Для этого в (16) выполним замену $1/T = \varepsilon$, $t\varepsilon = \tau$, $u\varepsilon = x$, $\frac{1}{\varepsilon}P_r(u,z,t) = \pi_r(x,z,\tau,\varepsilon)$. Тогда получаем

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial \pi_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + \varepsilon\frac{\partial \pi_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x} + \frac{1}{T_0}\pi_1(x,\tau,\varepsilon) = \\ = \frac{\partial \pi_0(x,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}, \\ \varepsilon\frac{\partial \pi_0(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \pi_0(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial \pi_0(x,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + \\ + \frac{1}{T_0}\pi_1(x,\tau,\varepsilon)V(z).\end{gathered} \quad (17)$$

Эту систему будем решать в два этапа.

Этап 1. Делаем предельный переход $\varepsilon\to 0$ и обозначаем $\pi_r(x,z,\tau,0) = \pi_r(x,z,\tau)$ Тогда система (17) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{T_0}\pi_1(x,\tau) = \frac{\partial \pi_0(x,0,\tau)}{\partial z}, \\ \frac{\partial \pi_0(x,z,\tau)}{\partial z} = \frac{\partial \pi_0(x,0,\tau)}{\partial z} - \frac{1}{T_0}\pi_1(x,\tau)V(z) = \\ = \frac{1}{T_0}\pi_1(x,\tau)\big(1-V(z)\big).\end{gathered} \quad (18)$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\pi_0(x,z,\tau) = \frac{1}{T_0}\pi_1(x,\tau)\int_0^z (1-V(s))ds\,, \\ \pi_0(x,\tau) = \lim_{z\to\infty}\pi_0(x,z,\tau) = \frac{1}{T_0}\pi_1(x,\tau)\int_0^\infty (1-V(s))ds = \\ = \frac{V_0}{T_0}\pi_1(x,\tau),\end{gathered} \quad (19)$$

где $V_0 = \int_0^\infty (1-V(s))ds = \int_0^\infty s\,dV(s)$.

Обозначим $\pi(x,\tau) = \pi_0(x,\tau) + \pi_1(x,\tau)$. Тогда

$$\begin{cases}\pi_0(x,\tau) = \dfrac{V_0}{T_0+V_0}\pi(x,\tau)\,, \\ \pi_1(x,\tau) = \dfrac{T_0}{T_0+V_0}\pi(x,\tau)\,.\end{cases} \quad (20)$$

Этап 2. В системе (17) положим $z\to\infty$ и сложим оба уравнения. Тогда получим $\varepsilon\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + \varepsilon\frac{\partial\pi_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = 0$, откуда можно записать

$$\frac{\partial\pi(x,\tau)}{\partial\tau} = -\frac{\partial\pi_1(x,\tau)}{\partial x} = -\frac{T_0}{T_0+V_0}\frac{\partial\pi(x,\tau)}{\partial x}\,.$$

Следовательно, для $\pi(x,\tau)$ имеем вырожденное уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial\pi(x,\tau)}{\partial\tau} = -\frac{T_0}{T_0+V_0}\frac{\partial\pi(x,\tau)}{\partial x} \quad (21)$$

с равным нулю коэффициентом диффузии и тогда

$$x'(\tau) = \frac{T_0}{T_0+V_0}\,,\ x(\tau) = \frac{T_0}{T_0+V_0}\tau\,. \quad (22)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим, что при $T\to\infty$ $\frac{I(t)}{T} = x(\tau) = \frac{T_0}{T_0+V_0}\cdot\frac{t}{T}$, так что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{I(i)}{T} = \frac{I(T)}{T} = \frac{T_0}{T_0+V_0} = \pi(i)\,, \quad (23)$$

что еще раз говорит об асимптотической несмещенности оценки $\hat{\pi}(i)$.

Для доказательства асимптотической нормальности оценки в исходной системе (16) выполним замены переменных: $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$, $t\varepsilon^2 = \tau$, $u\varepsilon^2 = x(\tau) + \varepsilon y$, $\frac{1}{\varepsilon}P_r(u,z,t) = H_r(y,z,\tau,\varepsilon)$. Тогда система (16) примет вид

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\frac{\partial H_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial H_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + \\ + \frac{1}{T_0}H_1(y,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial H_0(y,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}, \\ \varepsilon^2\frac{\partial H_0(y,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_0(y,z,\tau,\varepsilon)}{\partial y} = \\ = \frac{\partial H_0(y,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial H_0(y,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{1}{T_0}H_2(y,\tau,\varepsilon).\end{gathered} \quad (24)$$

Полученную систему будем решать в три этапа.

Этап 1. Сделаем предельный переход $\varepsilon\to 0$ и обозначим $H_r(y,z,\tau,0) = H_r(y,z,\tau)$. Тогда система (24) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{T_0}H_1(y,\tau) = \frac{\partial H_0(y,0,\tau)}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_0(y,z,\tau)}{\partial z} = \frac{\partial H_0(y,0,\tau)}{\partial z} - \frac{1}{T_0}H_1(y,\tau)V(z) = \\ = \frac{1}{T_0}H_1(y,\tau)(1-V(z)).\end{gathered}$$

Тогда $H_0(y,z,\tau) = \frac{1}{T_0}H_1(y,\tau)\int_0^z (1-V(s))ds$.

При $z\to\infty$ получим

$$H_0(y,\tau) = \lim_{z\to\infty}H_0(y,z,\tau) = \\ = \frac{1}{T_0}H_1(y,\tau)\int_0^\infty (1-V(s))ds = \frac{V_0}{T_0}H_1(y,\tau).$$

Обозначив $H(y,\tau) = H_0(y,\tau) + H_1(y,\tau)$, получим

$$
\begin{cases}
H_0(y,\tau) = \dfrac{V_0}{T_0+V_0} H(y,\tau), \\
H_1(y,\tau) = \dfrac{T_0}{T_0+V_0} H(y,\tau),
\end{cases}
$$

$$H_0(y,z,\tau) = \frac{1}{T_0+V_0} H(y,\tau) \int_0^z (1-V(s))ds\,. \qquad (25)$$

Этап 2. Решение системы (24) будем искать в виде

$$H_0(y,z,\tau) = \frac{H(y,\tau)}{T_0+V_0} \int_0^z (1-V(s))ds + \varepsilon h_0(y,z,\tau) + o(\varepsilon),$$

$$H_1(y,\tau) = \frac{T_0}{T_0+V_0} H(y,\tau) + \varepsilon h_1(y,\tau) + o(\varepsilon).$$

Подставляя эти разложения в систему (24) и производя упрощающие преобразования, получим

$$\frac{1}{T_0} h_1(y,\tau) - \frac{\partial h_0(y,0,\tau)}{\partial z} = (x'(\tau)-1)\frac{T_0}{T_0+V_0}\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial h_0(y,z,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial h_0(y,0,\tau)}{\partial z} + \frac{1}{T_0} h_1(y,\tau)V(z) =$$

$$= -\frac{x'(\tau)}{T_0+V_0}\cdot\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}\int_0^z (1-V(s))ds. \qquad (26)$$

Решение этой системы относительно функций $h_1(y, \tau)$ и $h_0(y, z, \tau)$ будем искать в виде

$$h_1(y,\tau) = h_1 \frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y},$$

$$h_0(y,z,\tau) = h_0(z)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}.$$

Тогда, подставляя это решение в систему (26), после ряда преобразований получим

$$h_0'(0) = \frac{h_1}{T_0} + \frac{T_0 V_0}{(T_0+V_0)^2},$$

$$h_0(z) = \frac{h_1}{T_0}\int_0^z (1-V(s))ds +$$

$$+ \frac{T_0V_0}{(T_0+V_0)^2}\int_0^z \left\{1 - \frac{1}{V_0}\int_0^y (1-V(s))ds\right\}dy. \qquad (27)$$

Найдем отсюда значение $h_0(\infty)$. Преобразуя повторный интеграл, можно получить

$$h_0(\infty) = \frac{V_0}{T_0}h_1 + \frac{T_0V_0}{(T_0+V_0)^2}\cdot\frac{V_2}{2V_0}, \qquad (28)$$

где $V_2 = \int_0^\infty s^2 dV(s)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$T_0h_0(\infty) - V_0h_1 = \frac{T_0^2V_0}{(T_0+V_0)^2}\cdot\frac{V_2}{2V_0}. \qquad (29)$$

Этап 3. В системе (24) перейдем к пределу $z \to \infty$ и сложим получившиеся уравнения:

$$\varepsilon^2\frac{\partial H(y,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial H_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} = 0\,.$$

Переходя к функциям $h_1(y, \tau)$ и $h_0(y, z, \tau)$, получим после ряда преобразований следующее уравнение:

$$\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial\tau} = \frac{T_0h_0(\infty) - V_0h_1}{T_0+V_0}\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial\tau^2}.$$

Обозначив $\sigma^2 = T_0^2V_2/(T_0+V_0)^3$, с учетом (29) имеем

$$\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial\tau^2}. \qquad (30)$$

Решение (30) имеет вид

$$H(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2\tau}\right). \qquad (31)$$

В силу замены $u\varepsilon^2 = x(\tau) + \varepsilon y$ можно утверждать, что величина $I(t)/T = x(\tau) + \varepsilon y$ имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием и дисперсией

$$M\left\{\frac{I(t)}{T}\right\} = x(\tau) = \frac{T_0}{T_0+V_0}\cdot\frac{t}{T},\ D\left\{\frac{I(t)}{T}\right\} = \frac{\sigma^2}{T}\cdot\frac{t}{T}.$$

Поэтому и оценка стационарной вероятности $\hat{\pi}(i) = I(T)/T$ при $T \to \infty$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами

$$M\{\hat{\pi}(i)\} = \frac{T_0}{T_0+V_0},\ D\{\hat{\pi}(i)\} = \frac{\sigma^2}{T} = \frac{1}{T}\cdot\frac{T_0^2V_2}{(T_0+V_0)^3},$$

что совпадает с тем, что было получено ранее.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.
2. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
3. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.

Статья представлена кафедрой теоретических основ информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Информатика» 30 апреля 2004 г.