

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК И ВЕЛИЧИН ОТКЛОНЕНИЯ В НЕУСТОЙЧИВЫХ СЕТЯХ МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Предлагаются математические модели сетей связи множественного доступа с оповещением о конфликте, функционирование которых рассматривается с учетом влияния случайной среды. Исследуются распределение вероятностей состояний канала, асимптотическое среднее нормированного числа заявок в источнике повторных вызовов, величины отклонения числа заявок в источнике повторных вызовов от этого среднего.

Известно [1–6], что время доставки сообщений в сетях связи, управляемых протоколами случайного множественного доступа, обладает свойством нерегулярности его значений. Причиной этого явления служат два фактора.

Первый фактор определяется стохастическими свойствами протоколов случайного множественного доступа.

Второй фактор определяется тем, что функционирование сети связи происходит в изменяющихся неконтролируемых внешних условиях, к которым, например, можно отнести состояние ионосферы для радиосетей, атаки вирусов на компьютерные сети связи, несанкционированный доступ в сети связи и т.д.

Изучению стохастических свойств протоколов случайного множественного доступа посвящено достаточно много работ [7–13]. Влияние второго фактора на функционирование сетей случайного доступа мало изучено. Анализ именно этой ситуации и посвящена данная работа.

Изменяющиеся неконтролируемые внешние условия, влияющие на функционирование компьютерных сетей связи, будем называть случайной средой и рассматривать математические модели сетей связи в случайной среде.

Рассмотрим математическую модель сети случайного множественного доступа с оповещением о конфликте в марковской среде.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим математическую модель сети случайного доступа с оповещением о конфликте в виде однолинейной системы массового обслуживания (СМО) [14–16], на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Прибор этой СМО может находиться в одном из трех состояний: $k = 0$, если он свободен; $k = 1$, когда он занят обслуживанием заявки; $k = 2$, когда на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Если за это время другие требования не поступили, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то они вступают в конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов (ИПВ). Повторное обращение заявок к прибору из ИПВ происходит после случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром γ . Число заявок в ИПВ обозначим i . Длины интервалов оповещения о конфликте также имеют экспоненциальное распределение с параметром $1/a$, где a – средняя продолжительность этих интервалов.

В качестве математической модели случайной среды рассмотрим однородную цепь Маркова [17] $s(t)$ с конечным множеством состояний $s = 1, 2, \dots, S$ и непрерывным временем, инфинитезимальные характеристики которой обозначим $q_{s_1 s_2}$.

Здесь при $s_1 \neq s_2$

$$q_{s_1 s_2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(s(t + \Delta t) = s_2 | s(t) = s_1)}{\Delta t},$$

а при $s_1 = s_2 = s$

$$q_{ss} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(s(t + \Delta t) = s | s(t) = s) - 1}{\Delta t}.$$

Очевидно, что $\sum_{s_2=1}^S q_{s_1 s_2} = 0$.

Будем полагать, что влияние случайной среды на функционирование сети связи определяется зависимостью интенсивности μ обслуживания заявок от состояний $s(t) = s$ случайной среды, т.е. $\mu = \mu(s)$, где s текущее состояние случайной среды, тогда вероятность окончания обслуживания заявки на приборе за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\mu(s) \Delta t + o(\Delta t)$.

В силу свойств приведенной математической модели, трехмерный случайный процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$ изменения во времени состояний (k, i) математической модели сети связи и состояний s математической модели случайной среды является цепью Маркова с непрерывным временем.

Обозначим $P(k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s) = P_k(i, s, t)$.

Очевидно, что для любого момента времени должно выполняться условие нормировки $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^S P_k(i, s, t) = 1$.

Нетрудно показать, что распределение $P_k(i, s, t)$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda + i\gamma)P_0(i, s, t) &= \mu(s)P_1(i, s, t) + \\ &+ \frac{1}{a}P_2(i, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_0(i, s_1, t)q_{s_1 s}, \\ \frac{\partial P_1(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda + i\gamma + \mu(s))P_1(i, s, t) &= \lambda P_0(i, s, t) + \\ &+ (i+1)\gamma P_0(i+1, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_1(i, s_1, t)q_{s_1 s}, \\ \frac{\partial P_2(i, s, t)}{\partial t} + \left(\lambda + \frac{1}{a}\right)P_2(i, s, t) &= \\ &= \lambda P_2(i-1, s, t) + \lambda P_1(i-2, s, t) + \\ &+ (i-1)\gamma P_1(i-1, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_2(i, s_1, t)q_{s_1 s}. \end{aligned} \quad (1)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Решение $P_k(i, s, t)$ системы (1) достаточно полно определяет функционирование математической модели сети связи и ее вероятностно-временные характеристики, но для (1) не существует точных аналитических

методов решения [18]. Поэтому данную систему будем исследовать модифицированным для нестационарных распределений методом асимптотического анализа [19] в условиях большой задержки $\gamma \rightarrow 0$. Обозначим

$$\gamma = \varepsilon^2, \varepsilon^2 t = \tau \quad (2)$$

и покажем, что следующий предел

$$x(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) \quad (3)$$

как асимптотическое среднее нормированного числа заявок в ИПВ является детерминированной функцией.

Рассмотрим также процесс

$$y(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) - x(\tau)}{\varepsilon}, \quad (4)$$

который характеризует изменение величин отклонения числа заявок в ИПВ от их асимптотического среднего и покажем, что он является диффузионным процессом авторегрессии.

Учитывая обозначения (2), выполним следующие замены в системе (1):

$$\varepsilon^2 i = x(\tau) + \varepsilon y, \quad \frac{1}{\varepsilon} P_k(i, s, t) = H_k(y, s, \tau, \varepsilon)$$

и получим систему вида

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\ + (\lambda + x(\tau) + \varepsilon y) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) = \mu(s) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \\ + \frac{1}{a} H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + \sum_{s_1=1}^S H_0(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda + x(\tau) + \\ + \varepsilon y + \mu(s)) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) = \lambda H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + (x(\tau) + \\ + \varepsilon(y + \varepsilon)) H_0(y + \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + \sum_{s_1=1}^S H_1(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \left(\lambda + \frac{1}{a} \right) \times \\ \times H_2(y, s, \tau, \varepsilon) = \lambda H_2(y - \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + \lambda H_1(y - 2\varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + \\ + (x(\tau) + \varepsilon(y - \varepsilon)) H_1(y - \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + \\ + \sum_{s_1=1}^S H_2(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 1. Асимптотически при $\gamma \rightarrow 0$ распределение вероятностей R_k состояний канала имеет вид

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\lambda + x + v(x)}{a(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + x) + v(x)}, \\ R_1 &= \frac{\lambda + x}{a(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + x) + v(x)}, \\ R_2 &= \frac{a(\lambda + x)^2}{a(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + x) + v(x)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где a и λ заданы, $x = x(\tau)$ – детерминированная функция, которая определяется дифференциальным уравнением вида

$$x'(\tau) = \lambda - \frac{(\lambda + x)v(x)}{a(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + x) + v(x)}, \quad (7)$$

в котором $v(x)$ определяется равенством

$$v(x) = \frac{1}{R_1} \sum_{s=1}^S \mu(s) R_1(s), \quad (8)$$

где $R_1(s) = P(k(t)=1, s(t)=s)$ и $R_1 = P(k(t)=1) = \sum_{s=1}^S R_1(s)$.

Доказательство. На первом этапе в системе (5) перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и, полагая, что существуют

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_k(y, s, \tau, \varepsilon) = H_k(y, s, \tau),$$

получим систему

$$\begin{aligned} (\lambda + x(\tau)) H_0(y, s, \tau) &= \mu(s) H_1(y, s, \tau) + \\ &+ \frac{1}{a} H_2(y, s, \tau) + \sum_{s_1=1}^S H_0(y, s_1, \tau) q_{s_1 s}, \\ (\lambda + x(\tau) + \mu(s)) H_1(y, s, \tau) &= \\ &= (\lambda + x(\tau)) H_0(y, s, \tau) + \sum_{s_1=1}^S H_1(y, s_1, \tau) q_{s_1 s}, \\ \frac{1}{a} H_2(y, s, \tau) &= (\lambda + x(\tau)) H_1(y, s, \tau) + \\ &+ \sum_{s_1=1}^S H_2(y, s_1, \tau) q_{s_1 s}, \end{aligned} \quad (9)$$

решение которой будем искать в виде

$$H_k(y, s, \tau) = R_k(s) H(y, \tau). \quad (10)$$

Тогда $R_k(s)$, имеющая смысл совместного распределения вероятностей состояний канала и среды, как следует из (9), определяется системой вида

$$\begin{aligned} (\lambda + x(\tau)) R_0(s) &= \mu(s) R_1(s) + \frac{1}{a} R_2(s) + \sum_{s_1=1}^S R_0(s_1) q_{s_1 s}, \\ (\lambda + x(\tau) + \mu(s)) R_1(s) &= (\lambda + x(\tau)) R_0(s) + \sum_{s_1=1}^S R_1(s_1) q_{s_1 s}, \\ \frac{1}{a} R_2(s) &= (\lambda + x(\tau)) R_1(s) + \sum_{s_1=1}^S R_2(s_1) q_{s_1 s} \end{aligned} \quad (11)$$

и условием нормировки

$$\sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^S R_k(s) = 1. \quad (12)$$

Отметим, что в системе (11) имеем $3S$ уравнений относительно $3S$ неизвестных $R_k(s)$, так как $k=0, 1, 2; s=1, 2, \dots, S$.

Обозначим

$$\sum_{s=1}^S R_k(s) = R_k, \quad \sum_{k=0}^2 R_k(s) = R(s), \quad (13)$$

где R_k и $R(s)$ – маргинальные распределения вероятностей состояний k канала (R_k) и состояний s среды ($R(s)$). Очевидно для этих распределений также выполняются

условия нормировки $\sum_{k=0}^2 R_k = 1, \quad \sum_{s=1}^S R(s) = 1$.

Сложив по k уравнения системы (11), получим систему S уравнений вида

$$\sum_{s_1=1}^S R(s_1) q_{s_1 s} = 0, \quad s=1, 2, \dots, S, \quad (14)$$

которая совместно с условием нормировки $\sum_{s=1}^S R(s) = 1$

определяет стационарное распределение вероятностей $R(s)$ состояний s цепи Маркова $s(t)$.

Сложив по s каждое из уравнений системы (11) и обозначив

$$v(x) = \frac{1}{R_1} \sum_{s=1}^S \mu(s) R_1(s), \quad (15)$$

перепишем результат в виде системы трех уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda + x) R_0 &= v(x) R_1 + \frac{1}{a} R_2, \\ (\lambda + x + v(x)) R_1 &= (\lambda + x) R_0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a}R_2 = (\lambda + x)R_1 \quad (16)$$

относительно трех неизвестных R_0, R_1, R_2 .

Система (15) совместно с условием нормировки $R_0 + R_1 + R_2$ дает следующее решение:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\lambda + x + v(x)}{a(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + x) + v(x)}, \\ R_1 &= \frac{\lambda + x}{a(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + x) + v(x)}, \\ R_2 &= \frac{a(\lambda + x)^2}{a(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + x) + v(x)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь параметры a и λ заданы, $v(x)$ определяется равенством (15), где $R_1 = \sum_{s=1}^S R_1(s)$, а $R_1(s)$ определяется решением $R_k(s)$ системы (11).

На втором этапе доказательства покажем, что $x = x(\tau)$ является детерминированной функцией.

В системе (5) функции $H_k(y \pm \varepsilon, s, \tau, \varepsilon)$ разложим в ряд по приращениям аргумента y и, ограничиваясь слагаемыми порядка $o(\varepsilon)$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} &= -(\lambda + x(\tau) + \varepsilon y) \times \\ &\times \sum_{s_1=1}^S H_0(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s} + \mu(s) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \\ &+ \frac{1}{a} H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + \sum_{s_1=1}^S H_0(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s}, \\ -\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} &= -(\lambda + x(\tau) + \varepsilon y + \mu(s)) \times \\ &\times H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + (\lambda + x(\tau) + \varepsilon y) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ (x(\tau) + \varepsilon y) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\ &+ \sum_{s_1=1}^S H_1(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s} + o(\varepsilon), \\ -\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} &= -\frac{1}{a} H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + \\ &+ (\lambda + x(\tau) + \varepsilon y) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) - \varepsilon \lambda \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} - \\ &- 2\lambda \varepsilon \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ (x(\tau) + \varepsilon y) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\ &+ \sum_{s_1=1}^S H_2(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s} + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (18)$$

В системе (18) все уравнения просуммируем по k и s и, обозначив

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 \pi_k(x, s, \tau, \varepsilon) &= \pi(x, s, \tau, \varepsilon), \quad \sum_{s=1}^S \pi_k(x, s, \tau, \varepsilon) = \pi_k(x, \tau, \varepsilon), \\ \sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^S \pi_k(x, s, \tau, \varepsilon) &= \pi(x, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \quad (19)$$

получим

$$\begin{aligned} -\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ (x(\tau) + \varepsilon y) H_0(y, \tau, \varepsilon) - \\ &- \lambda H_2(y, \tau, \varepsilon) - (2\lambda + x(\tau)) H_1(y, \tau, \varepsilon) \}. \end{aligned}$$

Поделив на ε левую и правую части последнего равенства и устремив $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} x'(\tau) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \{ -x(\tau) H_0(y, \tau) + \lambda H_2(y, \tau) + \\ &+ (2\lambda + x(\tau)) H_1(y, \tau) \}. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу (10), (13) и (19) можно записать

$$H_k(x, \tau) = \sum_{s=1}^S H_k(x, s, \tau) = \sum_{s=1}^S R_k(s) H(x, \tau) = R_k H(x, \tau).$$

Тогда (20) переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} x'(\tau) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \{ [-x(\tau) R_0 + \lambda R_2 + \\ &+ (2\lambda + x(\tau)) R_1] H(y, \tau) \}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь R_k определяется равенствами (6), потому (21) нетрудно представить в виде

$$x'(\tau) = \lambda - v(x) R_1 = \lambda - \frac{(\lambda + x)v(x)}{a(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + x) + v(x)}, \quad (22)$$

где $v(x)$ определяется равенством (15), в котором $R_1(s)$ определяется решением $R_k(s)$ системы (11) и зависит от x . Уравнение (22) совпадает с уравнением (7). Теорема доказана.

Наибольший интерес относительно дифференциального уравнения (22) представляют его точки покоя, которые определяются уравнением

$$\lambda = \frac{(\lambda + x)\mu_1(x)}{a(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + x) + \mu_1(x)},$$

так как устойчивые точки покоя этой математической модели называются точками стабилизации сети случайного доступа, в окрестности которых может достаточно долго оставаться процесс изменения состояний сети, что весьма важно для неустойчивых сетей связи.

Для сетей в детерминированной и неизменной среде, как показано в работе [13], может быть не более одной точки стабилизации, так как при значениях λ меньше некоторого критического значения сеть монотонно стабилизируется и для нее существует единственная точка стабилизации, а при λ больше критического значения сеть не только неустойчива, но также и нестабильна. Характеристики таких сетей с течением времени лишь только ухудшаются.

Для сетей, функционирующих в случайной среде, рассматриваемое уравнение может иметь несколько корней, в том числе и устойчивых, то есть реально существование двух, трех, четырех и более точек стабилизации для неустойчивых сетей в случайной среде.

Теорема 2. Асимптотически при $\gamma \rightarrow 0$ случайный процесс $y(\tau)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dy(\tau) = A(x)y(\tau)d\tau + B(x)dw(\tau), \quad (23)$$

где

$$A(x) = R_1 - R_0 - x(\tau)R_0' + \lambda R_2' + (2\lambda + x(\tau))R_1', \quad (24)$$

$B_x(x)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} B^2(x) &= x(\tau)R_0 + \lambda R_2 + (4\lambda + x(\tau))R_1 + 2[x(\tau)h_0^{(1)} - \\ &- \lambda h_2^{(1)} - (2\lambda + x(\tau))h_1^{(1)} + x'(\tau)(h_0^{(1)} + h_1^{(1)} + h_2^{(1)})], \end{aligned} \quad (25)$$

в котором $h_0^{(1)} = \sum_{s=1}^S h_0^{(1)}(s)$, $h_1^{(1)} = \sum_{s=1}^S h_1^{(1)}(s)$, $h_2^{(1)} = \sum_{s=1}^S h_2^{(1)}(s)$, а $h_k^{(1)}(s)$ являются ре-

шением системы

$$-(\lambda + x(\tau))h_0^{(1)}(s) + \mu(s)h_1^{(1)}(s) + \frac{1}{a}h_2^{(1)}(s) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s_1=1}^S h_0^{(1)}(s) q_{s_1 s} = -x'(\tau) R_0(s), \\
& -(\lambda + x(\tau) + \mu(s)) h_1^{(1)}(s) + (\lambda + x(\tau)) h_0^{(1)}(s) + \\
& + \sum_{s_1=1}^S h_1^{(1)}(s) q_{s_1 s} = -[x'(\tau) R_1(s) + x(\tau) R_0(s)], \\
& -\frac{1}{a} h_2^{(1)}(s) + (\lambda + x(\tau)) h_1^{(1)}(s) + \sum_{s_1=1}^S h_2^{(1)}(s) q_{s_1 s} = \\
& = (\lambda - x'(\tau)) R_2(s) + (2\lambda + x(\tau)) R_1(s). \quad (26)
\end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы найдем решение системы (18) в виде следующего разложения:

$$H_k(y, s, \tau, \varepsilon) = R_k(s) H(y, \tau) + \varepsilon h_k(y, s, \tau) + o(\varepsilon). \quad (27)$$

Отыщем вид функций $h_k(y, s, \tau)$. Перепишем систему (18) в виде

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + x(\tau)) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) - \varepsilon y H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \mu(s) \times \\
& \times H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a} H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + \\
& + \sum_{s_1=1}^S H_0(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s} = -\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y}, \\
& -(\lambda + x(\tau) + \mu(s)) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) - \varepsilon y H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \\
& + (\lambda + x(\tau)) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \varepsilon y H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \\
& + \sum_{s_1=1}^S H_1(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s} = -\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} - \\
& - \varepsilon x(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + o(\varepsilon), \\
& -\frac{1}{a} H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + (\lambda + x(\tau)) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \\
& + \varepsilon y H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \sum_{s_1=1}^S H_2(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s} = \\
& = \varepsilon (\lambda - x'(\tau)) \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\
& + \varepsilon (2\lambda + x(\tau)) \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + o(\varepsilon). \quad (28)
\end{aligned}$$

Подставив в систему (28) разложение (27), получим

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + x(\tau)) (R_0(s) H(y, \tau) + \varepsilon h_0(y, s, \tau)) - \varepsilon y (R_0(s) \times \\
& \times H(y, \tau) + \varepsilon h_0(y, s, \tau)) + \mu(s) (R_1(s) H(y, \tau) + \\
& + \varepsilon h_1(y, s, \tau)) + \frac{1}{a} (R_2(s) H(y, \tau) + \varepsilon h_2(y, s, \tau)) + \\
& + \sum_{s_1=1}^S (R_0(s_1) H(y, \tau) + \varepsilon h_0(y, s_1, \tau)) q_{s_1 s} = \\
& = -\varepsilon x'(\tau) R_0(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}, \\
& -(\lambda + x(\tau) + \mu(s)) (R_1(s) H(y, \tau) + \varepsilon h_1(y, s, \tau)) - \\
& - \varepsilon y (R_1(s) H(y, \tau) + \varepsilon h_1(y, s, \tau)) + (\lambda + x(\tau)) \times \\
& \times (R_0(s) H(y, \tau) + \varepsilon h_0(y, s, \tau)) + \varepsilon y (R_0(s) H(y, \tau) + \\
& + \varepsilon h_0(y, s, \tau)) + \sum_{s_1=1}^S (R_1(s_1) H(y, \tau) + \\
& + \varepsilon h_1(y, s_1, \tau)) q_{s_1 s} = -\varepsilon [x'(\tau) R_1(s) + x(\tau) R_0(s)] \times \\
& \times \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + o(\varepsilon), \\
& -\frac{1}{a} (R_2(s) H(y, \tau) + \varepsilon h_2(y, s, \tau)) + (\lambda + x(\tau)) \times \\
& \times (R_1(s) H(y, \tau) + \varepsilon h_1(y, s, \tau)) + \varepsilon y (R_1(s) H(y, \tau) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon h_1(y, s, \tau)) + \sum_{s_1=1}^S (R_2(s_1) H(y, \tau) + \\
& + \varepsilon h_2(y, s_1, \tau)) q_{s_1 s} = \varepsilon [(\lambda - x'(\tau)) R_2(s) + \\
& + (2\lambda + x(\tau)) R_1(s)] \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + o(\varepsilon). \quad (29)
\end{aligned}$$

Из (11) следует, что эту систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon (\lambda + x(\tau)) h_0(y, s, \tau) - \varepsilon y R_0(s) H(y, \tau) + \varepsilon \mu(s) \times \\
& \times h_1(y, s, \tau) + \varepsilon \frac{1}{a} h_2(y, s, \tau) + \sum_{s_1=1}^S \varepsilon h_0(y, s_1, \tau) q_{s_1 s} = \\
& = -\varepsilon x'(\tau) R_0(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}, \\
& -\varepsilon (\lambda + x(\tau) + \mu(s)) h_1(y, s, \tau) - \varepsilon y R_1(s) H(y, \tau) + \\
& + \varepsilon (\lambda + x(\tau)) h_0(y, s, \tau) + \varepsilon y R_0(s) H(y, \tau) + \\
& + \sum_{s_1=1}^S \varepsilon h_1(y, s_1, \tau) q_{s_1 s} = -\varepsilon [x'(\tau) R_1(s) + x(\tau) R_0(s)] \times \\
& \times \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + o(\varepsilon), \\
& -\varepsilon \frac{1}{a} h_2(y, s, \tau) + \varepsilon (\lambda + x(\tau)) h_1(y, s, \tau) + \varepsilon y R_1(s) \times \\
& \times H(y, \tau) + \sum_{s_1=1}^S \varepsilon h_2(y, s_1, \tau) q_{s_1 s} = \varepsilon [(\lambda - x'(\tau)) R_2(s) + \\
& + (2\lambda + x(\tau)) R_1(s)] \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + o(\varepsilon). \quad (30)
\end{aligned}$$

Поделив на ε все уравнения системы (30) и выполнив несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + x(\tau)) h_0(y, s, \tau) + \mu(s) h_1(y, s, \tau) + \frac{1}{a} h_2(y, s, \tau) + \\
& + \sum_{s_1=1}^S h_0(y, s_1, \tau) q_{s_1 s} = R_0(s) y H(y, \tau) - \\
& - x'(\tau) R_0(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}, \\
& -(\lambda + x(\tau) + \mu(s)) h_1(y, s, \tau) + (\lambda + x(\tau)) h_0(y, s, \tau) + \\
& + \sum_{s_1=1}^S h_1(y, s_1, \tau) q_{s_1 s} = (R_1(s) - R_0(s)) y H(y, \tau) - \\
& - [x'(\tau) R_1(s) + x(\tau) R_0(s)] \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}, \\
& -\frac{1}{a} h_2(y, s, \tau) + (\lambda + x(\tau)) h_1(y, s, \tau) + \\
& + \sum_{s_1=1}^S h_2(y, s_1, \tau) q_{s_1 s} = -R_1(s) y H(y, \tau) + \\
& + [(\lambda - x'(\tau)) R_2(s) + (2\lambda + x(\tau)) R_1(s)] \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}. \quad (31)
\end{aligned}$$

Данная система является системой линейных неоднородных алгебраических уравнений и имеет решение, если ранг ее собственной матрицы совпадает с рангом ее расширенной матрицы. Покажем, что это действительно так. Просуммируем все уравнения системы (31), в результате получим $0 = -x'(\tau) - x(\tau) R_0 + \lambda R_2 + (2\lambda + x(\tau)) R_1$, но, учитывая (21), имеем, что левая и правая части данного равенства равны 0, следовательно, ранги соответствующих матриц совпадают, а система (31) имеет решение, определяемое с точностью до однопараметрического семейства векторов $(R_0(1), \dots, R_0(S), R_1(1), \dots, R_1(S), R_2(1), \dots, R_2(S))^T C$, где C – произвольная скалярная величина.

Будем искать решение системы (31) в следующем виде:

$$h_k(y, s, \tau) = h_k^{(1)}(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + h_k^{(2)}(s) y H(y, \tau). \quad (32)$$

Подставим (32) в (31) и представим полученную систему в виде двух систем:

$$\begin{aligned} & -(\lambda + x(\tau))h_0^{(1)}(s) + \mu(s)h_1^{(1)}(s) + \frac{1}{a}h_2^{(1)}(s) + \\ & + \sum_{s_1=1}^S h_0^{(1)}(s)q_{s_1s} = -x'(\tau)R_0(s), \\ & -(\lambda + x(\tau) + \mu(s))h_1^{(1)}(s) + (\lambda + x(\tau))h_0^{(1)}(s) + \\ & + \sum_{s_1=1}^S h_1^{(1)}(s)q_{s_1s} = -[x'(\tau)R_1(s) + x(\tau)R_0(s)], \\ & -\frac{1}{a}h_2^{(1)}(s) + (\lambda + x(\tau))h_1^{(1)}(s) + \sum_{s_1=1}^S h_2^{(1)}(s)q_{s_1s} = \\ & = (\lambda - x'(\tau))R_2(s) + (2\lambda + x(\tau))R_1(s), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & -(\lambda + x(\tau))h_0^{(2)}(s) + \mu(s)h_1^{(2)}(s) + \frac{1}{a}h_2^{(2)}(s) + \\ & + \sum_{s_1=1}^S h_0^{(2)}(s)q_{s_1s} = R_0(s), \\ & -(\lambda + x(\tau) + \mu(s))h_1^{(2)}(s) + (\lambda + x(\tau))h_0^{(2)}(s) + \\ & + \sum_{s_1=1}^S h_1^{(2)}(s)q_{s_1s} = R_1(s) - R_0(s), \\ & -\frac{1}{a}h_2^{(2)}(s) + (\lambda + x(\tau))h_1^{(2)}(s) + \sum_{s_1=1}^S h_2^{(2)}(s)q_{s_1s} = -R_1(s). \end{aligned} \quad (34)$$

Продифференцировав систему (11) по x , получим

$$\begin{aligned} & -(\lambda + x(\tau))R_0'(s) + \mu(s)R_1'(s) + \frac{1}{a}R_2'(s) + \\ & + \sum_{s_1=1}^S R_0'(s_1)q_{s_1s} = R_0(s), \\ & -(\lambda + x(\tau) + \mu(s))R_1'(s) + (\lambda + x(\tau))R_0'(s) + \\ & + \sum_{s_1=1}^S R_1'(s_1)q_{s_1s} = R_1(s) - R_0(s), \\ & -\frac{1}{a}R_2'(s) + (\lambda + x(\tau))R_1'(s) + \sum_{s_1=1}^S R_2'(s_1)q_{s_1s} = -R_1(s). \end{aligned} \quad (35)$$

Из (34) и (35) следует, что решение $h_k^{(2)}(s)$ системы (34) имеет вид

$$h_k^{(2)}(s) = R_k'(s). \quad (36)$$

С учетом (36) и (32) разложение (27) примет вид

$$\begin{aligned} H_k(y, s, \tau, \varepsilon) &= R_k(s)H(y, \tau) + \\ &+ \varepsilon h_k^{(1)}(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + R_k'(s)yH(y, \tau). \end{aligned} \quad (37)$$

На следующем этапе найдем вид функции $H(y, \tau)$. Для этого функции в правой части системы (5) разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon^2)$, получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda + x(\tau) + \\ & + \varepsilon y)H_0(y, s, \tau, \varepsilon) = \mu(s)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \\ & + \frac{1}{a}H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + \sum_{s_1=1}^S H_0(y, s_1, \tau, \varepsilon)q_{s_1s}, \\ & \varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\ & + (\lambda + x(\tau) + \varepsilon y + \mu(s))H_1(y, s, \tau, \varepsilon) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \lambda H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + (x(\tau) + \varepsilon y)H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ (x(\tau) + \varepsilon y)H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ (x(\tau) + \varepsilon y)H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\ & + \sum_{s_1=1}^S H_1(y, s_1, \tau, \varepsilon)q_{s_1s} + o(\varepsilon^2), \\ & \varepsilon^2 \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\ & + \left(\lambda + \frac{1}{a} \right) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) = \lambda H_2(y, s, \tau, \varepsilon) - \\ & - \lambda \varepsilon \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \lambda \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y^2} + \\ & + \lambda H_1(y, s, \tau, \varepsilon) - 2\lambda \varepsilon \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\ & + \lambda \frac{4\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y^2} + (x(\tau) + \varepsilon y)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) - \\ & - \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ (x(\tau) + \varepsilon y)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ (x(\tau) + \varepsilon y)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\ & + \sum_{s_1=1}^S H_2(y, s_1, \tau, \varepsilon)q_{s_1s} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (38)$$

Сложим все уравнения системы (38) по k , подставим разложение функций $H_k(y, s, \tau, \varepsilon)$ в виде (37), выполним несложные преобразования и получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 (R_0(s) + R_1(s) + R_2(s)) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) (R_0(s) + \\ & + R_1(s) + R_2(s)) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 x'(\tau) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ h_0^{(1)}(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + \right. \\ & + R_0'(s)yH(y, \tau) + h_1^{(1)}(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + R_1'(s)yH(y, \tau) + \\ & + h_2^{(1)}(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + R_2'(s)yH(y, \tau) \left. \right\} = -\varepsilon (-x(\tau)R_0(s) + \\ & + \lambda R_2(s) + (2\lambda + x(\tau))R_1(s)) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 (R_1(s) - \\ & - R_0(s)) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -x(\tau)h_0^{(1)}(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \right. \\ & - x(\tau)R_0'(s)yH(y, \tau) + \lambda h_2^{(1)}(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + \\ & + \lambda R_2'(s)yH(y, \tau) + 2\lambda h_1^{(1)}(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + \\ & + 2\lambda R_1'(s)yH(y, \tau) + x(\tau)h_1^{(1)}(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + \\ & + x(\tau)R_1'(s)yH(y, \tau) \left. \right\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ x(\tau)R_0(s)H(y, \tau) + \\ & + \lambda R_2(s)H(y, \tau) + 4\lambda R_1(s)H(y, \tau) + \\ & + x(\tau)R_1(s)H(y, \tau) \} + \sum_{s_1=1}^S (R_0(s_1)H(y, \tau) + \\ & + \varepsilon h_0(y, s_1, \tau) + R_1(s_1)H(y, \tau) + \varepsilon h_1(y, s_1, \tau) + \\ & + R_2(s_1)H(y, \tau) + \varepsilon h_2(y, s_1, \tau))q_{s_1s} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Сложим все уравнения (39) по s и, обозначив

$$h_k^{(1)} = \sum_{s=1}^S h_k^{(1)}(s), \quad k = 0, 1, 2 \text{ и } s = 1, 2, \dots, S, \quad (40)$$

перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 (R_0 + R_1 + R_2) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) (R_0 + R_1 + R_2) \times \\ & \times \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 x'(\tau) (R'_0 + R'_1 + R'_2) \frac{\partial y H(y, \tau)}{\partial y} - \\ & - \varepsilon^2 x'(\tau) (h_0^{(1)} + h_1^{(1)} + h_2^{(1)}) \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} = \\ & = -\varepsilon (-x(\tau) R_0 + \lambda R_2 + (2\lambda + x(\tau)) R_1) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \\ & - \varepsilon^2 (R_1 - R_0) \frac{\partial y H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 (-x(\tau) R'_0 + \lambda R'_2 + (2\lambda + \\ & + x(\tau)) R'_1) \frac{\partial y H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 (-x(\tau) h_0^{(1)} + \lambda h_2^{(1)} + \\ & + (2\lambda + x(\tau)) h_1^{(1)}) \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} (x(\tau) R_0 + \lambda R_2 + \\ & + (4\lambda + x(\tau)) R_1) \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (41)$$

Поделим левую и правую части равенства (41) на ε^2 и в силу условия нормировки $R_0 + R_1 + R_2 = 1$ и дифференциального уравнения (21) перепишем (41) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial \tau} = -(R_1 - R_0 - x(\tau) R'_0 + \lambda R'_2 + (2\lambda + x(\tau)) R'_1) \times \\ & \times \frac{\partial y H(y, \tau)}{\partial y} + \frac{1}{2} (x(\tau) R_0 + \lambda R_2 + (4\lambda + x(\tau)) R_1 + \\ & + 2(x(\tau) h_0^{(1)} - \lambda h_2^{(1)} - (2\lambda + x(\tau)) h_1^{(1)} + \\ & + x'(\tau) (h_0^{(1)} + h_1^{(1)} + h_2^{(1)}))) \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Получили уравнение Фоккера–Планка для плотности распределения вероятностей $H(y, \tau)$ значений диффузионного процесса авторегрессии $y(\tau)$.

Обозначим коэффициент переноса уравнения (42)

$$A(x) = [-x(\tau) R_0 + \lambda R_2 + (2\lambda + x(\tau)) R_1]_x. \quad (43)$$

(43) совпадает с (24).

Коэффициент диффузии обозначим как

$$\begin{aligned} B^2(x) = & x(\tau) R_0 + \lambda R_2 + (4\lambda + x(\tau)) R_1 + 2[x(\tau) h_0^{(1)} - \\ & - \lambda h_2^{(1)} - (2\lambda + x(\tau)) h_1^{(1)} + (-x(\tau) R_0 + \lambda R_2 + (2\lambda + \\ & + x(\tau)) R_1) (h_0^{(1)} + h_1^{(1)} + h_2^{(1)})]. \end{aligned} \quad (44)$$

(44) совпадает с (25). $h_0^{(1)}, h_1^{(1)}, h_2^{(1)}$ равенстве (43)

определяются равенствами (40), где $h_k^{(1)}(s)$ есть решение системы (33), которая совпадает с системой (26).

Стохастическое дифференциальное уравнение для диффузионного процесса авторегрессии $y(\tau)$ запишем в виде

$$dy(\tau) = A(x)y(\tau)d\tau + B(x)dw(\tau), \quad (45)$$

где $A(x)$ определяется равенством (43), $B(x)$ определяется равенством (44), следовательно, уравнение (45) совпадает с уравнением (23). Теорема доказана.

Следствие. Решение $y(\tau)$ стохастического дифференциального уравнения (45) имеет вид

$$y(\tau) = \varepsilon e^{\int_0^\tau A(x(s))ds} \int_0^\tau B(x(u)) e^{-\int_0^u A(x(s))ds} dw(u), \quad (46)$$

где $A(x)$ определяется равенством (43), $B(x)$ – равенством (44), а $x(\tau)$ – дифференциальным уравнением (21).

Доказательство. Представим процесс $y(\tau)$ в виде

$$y(\tau) = e^{\int_0^\tau A(x(s))ds} f(\tau), \quad (47)$$

где

$$f(\tau) = e^{-\int_0^\tau A(x(s))ds} y(\tau), \quad (48)$$

$A(x)$ определяется равенством (43), а $x(\tau)$ – дифференциальным уравнением (21)

Продифференцируем (48), используя формулы Ито, получим

$$\begin{aligned} df(\tau) = & -A(x(\tau))f(\tau)d\tau + e^{-\int_0^\tau A(x(s))ds} dy = \\ = & -A(x(\tau))e^{-\int_0^\tau A(x(s))ds} y(\tau)d\tau + e^{-\int_0^\tau A(x(s))ds} \times \\ & \times [A(x(\tau))y(\tau)d\tau + \varepsilon B(x(\tau))dw(\tau)] = \\ = & \varepsilon B(x(\tau))e^{-\int_0^\tau A(x(s))ds} dw(\tau), \end{aligned}$$

то есть

$$df(\tau) = \varepsilon B(x(\tau))e^{-\int_0^\tau A(x(s))ds} dw(\tau). \quad (49)$$

Проинтегрируем (49), тогда

$$f(\tau) = \varepsilon \int_0^\tau B(x(u))e^{-\int_0^u A(x(s))ds} dw(u) + C.$$

Положив $f(0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} f(\tau) = & f(0) + \varepsilon \int_0^\tau B(x(u))e^{-\int_0^u A(x(s))ds} dw(u) = \\ = & \varepsilon \int_0^\tau B(x(u))e^{-\int_0^u A(x(s))ds} dw(u). \end{aligned} \quad (50)$$

С учетом (50) уравнение (47) запишется в виде

$$y(\tau) = \varepsilon e^{\int_0^\tau A(x(s))ds} \int_0^\tau B(x(u))e^{-\int_0^u A(x(s))ds} dw(u), \quad (51)$$

где $A(x)$ определяется равенством (43), $B(x)$ – равенством (44), а $x(\tau)$ – дифференциальным уравнением (21). (51) совпадает с (46). Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены неустойчивые сети множественного доступа, функционирующие в случайной среде. Предложены математические модели таких сетей в марковской среде и выполнен асимптотический анализ этих моделей. Получено дифференциальное уравнение (7), определяющее асимптотическое среднее значение $x(\tau)$ числа заявок в источнике повторных вызовов, приведены формулы (6), определяющие распределение вероятностей R_k состояний канала связи. Показана возможность существования более чем одной точки стабилизации для таких неустойчивых сетей связи. Получено дифференциальное уравнение (23), характеризующее изменение отклонений числа заявок в источнике повторных вызовов от их асимптотического среднего. Приведено решение этого уравнения (46).

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган А.Я. Анализ очередей в вычислительных сетях. М.: Наука, 1989.
2. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979.
3. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1996.
4. Шварц М. Сети ЭВМ: анализ и проектирование. М.: Радио и связь, 1981.
5. Шварц М. Сети связи: протоколы, моделирование, анализ. М.: Наука, 1992.
6. Бергман О.С., Назаров А.А. Сравнение стратегий контроля несущей в протоколе МДКН/ОК // Автоматика и вычислительная техника. – 1996. № 2.
7. Бутакова Е.Л., Назаров А.А. Распределение времени доставки сообщения в сетях связи с протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 1997. № 6.
8. Иванова О.В., Назаров А.А. Асимптотический анализ протокола множественного доступа «синхронная Алоха» к локальной сети // Радиотехника. 1991. № 5.
9. Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А. Исследование сетей связи с конечным числом абонентских станций, управляемых протоколами случайного множественного доступа // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999.
10. Назаров А.А. Устойчивое функционирование нестабильных сетей связи с протоколами случайного множественного доступа // Проблемы передачи информации. 1997. № 2.
11. Хомичков И.И. Исследование моделей локальной сети с протоколом случайного множественного доступа // Автоматика и телемеханика. – 1988. № 5.
12. Хомичков И.И. Об оптимальном управлении в сети передачи данных со случайным множественным доступом // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8.
13. Коцюрюба П.И., Назаров А.А. Исследование асимптотически средних характеристик немарковских моделей неустойчивых сетей случайного доступа. Томск: Проблемы передачи информации, 2003. № 3.
14. Гнеденко Б.В., Коваленко И.И. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966.
15. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966.
16. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1974.
17. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.
18. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.
19. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизуемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 25 октября 2004 г.