УДК 519.865.5

В.В. Домбровский, Д.В. Домбровский, Е.А. Ляшенко

ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

Рассматривается задача управления дискретными системами со случайными параметрами, возмущенными аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений. Синтезированы стратегии прогнозирующего управления, позволяющие учесть ограничения на управляющие воздействия.

Одним из эффективных подходов к синтезу систем управления, получившим широкое признание и применение в практике управления сложными технологическими процессами является метод управления с прогнозирующей моделью (прогнозирующее управление) [1]. Идея этого метода, по-видимому, впервые была предложена А.И. Пропоем в работе [2] и состоит в следующем.

Пусть эволюция динамической системы описывается моделью в дискретном времени и зависит от выбора управлений $u(k)$. На каждом шаге k при некотором заданном горизонте прогнозирования p вычисляется последовательность прогнозирующих управлений $u(k/k)$, $u(k+1/k)$, …, $u(k+p-1/k)$, зависящих от состояния системы в текущий момент времени k, которая оптимизирует выбранный критерий на горизонте прогноза. В качестве управления $u(k)$ в момент k полагают $u(k) = u(k/k)$, тем самым получая управление как функцию текущего состояния, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление на следующем шаге, процедура повторяется для текущего момента $k+1$, при этом горизонт управления сдвигается на один шаг. Сходная идея, принадлежащая Н.Н. Моисееву, описана в [3].

Привлекательной чертой этого подхода является возможность достаточно просто учитывать явные ограничения на переменные состояния и управления. При этом получается стратегия управления с обратной связью, но удается избежать так называемого проклятия размерности, которое препятствует синтезу управлений с обратной связью при ограничениях, если применять традиционные подходы с использованием метода динамического программирования. При учете ограничений синтез прогнозирующих стратегий управления обычно сводится (в зависимости от выбора критерия) к решению задач линейного [2, 4] или квадратичного [5] программирования, для решения которых существуют эффективные методы [6].

В данной работе рассматривается задача синтеза стратегий управления с прогнозирующей моделью для дискретных систем со случайными параметрами, возмущенных аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений. Проблема синтеза регуляторов для таких систем при различных предположениях о характере изменения случайных параметров без учета явных ограничений на управления рассматривалась в ряде работ [7–10]. В частности, в [7] получены уравнения синтеза линейно-квадратичных регуляторов для систем с мультипликативными шумами и случайными параметрами, представляющими собой последовательность независимых случайных величин, для которых известны только первый и второй моменты распределения.

В данной работе для таких систем получены уравнения синтеза оптимальных стратегий управления с прогнозирующей моделью, которые позволяют учитывать явные ограничения на управляющие переменные.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть объект управления описывается уравнениями

$$x(k+1)=\left(A_0[\theta(k),k]+\sum_{i=1}^{m}A_i[\theta(k),k]v_i(k)\right)x(k)+$$

$$+\left(B_0[\theta(k),k]+\sum_{i=1}^{m}B_i[\theta(k),k]v_i(k)\right)u(k)+$$

$$+D[\theta(k),k]w(k), \qquad (1)$$

где $x(k)$ – n_x-мерный вектор состояния, $u(k)$ – n_u-мерный вектор управления, $v(k)$ и $w(k)$ – векторы белых шумов размерностей m и n_w с нулевыми средними и единичными матрицами ковариаций, причем $\mathrm{M}\{w(k)v^{\mathrm{T}}(s)\}=0$ для любых k и s; $\theta(k)$ – последовательность независимых q-мерных случайных векторов с известными первым и вторым моментами: $\mathrm{M}\{\theta(k)\}=\overline{\theta}(k)$, $\mathrm{M}\{\theta(k)^{\mathrm{T}}\theta(k)\}=\Theta(k)$ и $\mathrm{M}\{\theta(k)w^{\mathrm{T}}(s)\}=0$, $\mathrm{M}\{\theta(k)v^{\mathrm{T}}(s)\}=0$ для любых k и s; $A_j[\theta(k), k]$, $B_j[\theta(k), k]$ и $D[\theta(k), k]$ ($j=\overline{0,m}$) – матрицы соответствующих размерностей, зависящие от $\theta(k)$ линейно; $v_j(k)$ – j-я компонента вектора $v(k)$; M – оператор математического ожидания, символ T означает транспонирование.

На управляющие воздействия наложены следующие ограничения

$$u_{\min}(k) \le s(k)\, u(k) \le u_{\max}(k). \qquad (2)$$

Необходимо определить закон управления системой (1) при ограничениях (2) из условия минимума критерия со скользящим горизонтом управления

$$J(k+p/k)=\mathrm{M}\left\{\sum_{i=1}^{p}x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{p-1}u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R_2(k+i)u(k+i/k)\Big/x(k)\right\}, \qquad (3)$$

где M{…/…} – оператор условного математического ожидания; p – горизонт прогноза, k = 0, 1, 2,… – текущий момент времени; $R_1(k+i) \ge 0$ и $R_2(k+i) > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей.

СИНТЕЗ СТРАТЕГИЙ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Прогнозирующие управления определяются по следующему правилу: на каждом шаге k минимизируем функционал (3) по последовательности программных управлений $u(k/k)$, ..., $u(k+p-1/k)$, зависящих только от состояния системы в момент k. В качестве управления в момент k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояния $x(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для текущего момента $k+1$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: для любой матрицы $\Psi[\theta(k), k]$, зависящей от $\theta(k)$, $\overline{\Psi}(k)=\mathrm{M}\{\Psi[\theta(k),k]\}$ и $\widetilde{\Psi}(k)=\Psi[\theta(k),k]-\overline{\Psi}(k)$, не указывая явную зависимость матриц от $\theta(k)$.

Теорема. Оптимальная стратегия прогнозирующего управления системой (1) при ограничениях (2), минимизирующая критерий (3) при фиксированном горизонте управления p, определяется уравнением

$$u(k)=\begin{bmatrix} I_u & 0_u & \cdots & 0_u \end{bmatrix} U(k),$$

где

$$U(k)=\begin{bmatrix} u(k/k) \\ \dots \\ u(k+p-1/k) \end{bmatrix} \quad (4)$$

определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида

$$Y(k+p/k) = U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k) + 2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)U(k), \quad (5)$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k) \le S(k)U(k) \le U_{\max}(k), \quad (6)$$

где I_u – единичная матрица размерности n_u, 0_u – квадратная нулевая матрица размерности n_u; $H(k)$, $G(k)$ и $U_{\min}(k)$, $U_{\max}(k)$, $S(k)$ – блочные матрицы вида

$$H(k)=\begin{bmatrix} H_{11}(k) & \dots & H_{1p}(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{p1}(k) & \dots & H_{pp}(k) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$G(k)=\begin{bmatrix} G_1(k) & \dots & G_p(k) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$U_{\min}(k)=\begin{bmatrix} u_{\min}(k) \\ \dots \\ u_{\min}(k+p-1) \end{bmatrix},\ U_{\max}(k)=\begin{bmatrix} u_{\max}(k) \\ \dots \\ u_{\max}(k+p-1) \end{bmatrix},$$

$$S(k)=\operatorname{diag}(s(k),\dots,s(k+p-1)),$$

блоки которых определяются следующими соотношениями:

$$H_{is}(k)=\begin{cases} \overline{B}_0^{\mathrm{T}}(k+i-1)\left\{\prod\limits_{j=i}^{s-2}\overline{A}_0^{\mathrm{T}}(k+j)\right\}L_{12}(p-s), & i<s, \\ L_{22}(p-i)+R_2(k+i-1), & i=s, \\ H_{si}^{\mathrm{T}}, & i>s, \end{cases}$$

$$G_s(k)=\left\{\prod\nolimits_{j=0}^{s-2}\overline{A}_0^{\mathrm{T}}(k+j)\right\}L_{12}(p-s),$$

$$\prod\nolimits_{j=i}^{i-1}\overline{A}_0^{\mathrm{T}}(k+j)=1,$$

$$Q(s+1)=L_{11}(s)+R_1(k+p-1-s),\ Q(0)=R_1(k+p), \quad (9)$$

$$L_{11}(s)=\sum\nolimits_{j=0}^{m}\overline{A}_j^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)\overline{A}_j(k+p-1-s)+$$
$$+\mathrm{M}\left\{\sum\nolimits_{j=0}^{m}\widetilde{A}_j^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)\widetilde{A}_j(k+p-1-s)\right\}, \quad (10)$$

$$L_{12}(s)=\sum\nolimits_{j=0}^{m}\overline{A}_j^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)\overline{B}_j(k+p-1-s)+$$
$$+\mathrm{M}\left\{\sum\nolimits_{j=0}^{m}\widetilde{A}_j^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)\widetilde{B}_j(k+p-1-s)\right\}, \quad (11)$$

$$L_{22}(s)=\sum\nolimits_{j=0}^{m}\overline{B}_j^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)\overline{B}_j(k+p-1-s)+$$
$$+\mathrm{M}\left\{\sum\nolimits_{j=0}^{m}\widetilde{B}_j^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)\widetilde{B}_j(k+p-1-s)\right\}. \quad (12)$$

Доказательство: Выражая последовательно все $x(k+i)$ ($i=\overline{1,p}$) через $x(k)$ с использованием уравнения системы (1) и подставляя результат в критерий (3), получим

$$J(k+p/k)=x^{\mathrm{T}}(k)L_{11}(p-1)x(k)+$$
$$+2x^{\mathrm{T}}(k)\left[\sum_{r=0}^{p-1}\left\{\prod_{s=0}^{r-1}\overline{A}_0^{\mathrm{T}}(k+s)\right\}L_{12}(p-r-1)u(k+r/k)\right]+$$
$$+2\sum_{r=0}^{p-2}\sum_{j=r+1}^{p-1}u^{\mathrm{T}}(k+r/k)\overline{B}_0^{\mathrm{T}}(k+r)\left\{\prod_{s=r+1}^{j-1}\overline{A}_0^{\mathrm{T}}(k+s)\right\}\times$$
$$\times L_{12}(p-1-j)u(k+j/k)+$$
$$+\sum_{r=0}^{p-1}u^{\mathrm{T}}(k+r/k)\left[L_{22}(p-1-r)+R_2(k+r)\right]u(k+r/k)+$$
$$+\operatorname{tr}\left\{\sum_{i=0}^{p-1}Q(i)W(k+p-1-i)\right\}, \quad (13)$$

где tr означает след матрицы, $Q(i)$, $L_{11}(i)$, $L_{12}(i)$, $L_{22}(i)$ определяются по формулам (9)-(12) и $\prod\limits_{s=i}^{i-1}\overline{A}_0^{\mathrm{T}}(k+s)=1$.

Выражение (13) нетрудно записать в матричном виде

$$J(k+p/k)=x^{\mathrm{T}}(k)\left[Q(p)-R_1(k)\right]x(k)+$$
$$+2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)U(k)+U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k)+$$
$$+\operatorname{tr}\left\{\sum_{i=0}^{p-1}Q(i)W(k+p-1-i)\right\}, \quad (14)$$

где матрицы $U(k)$, $H(k)$, $G(k)$ имеют вид (4)-(8),

$$W(i)=\overline{D}(i)\overline{D}^{\mathrm{T}}(i)+\mathrm{M}\left\{\widetilde{D}(i)\widetilde{D}^{\mathrm{T}}(i)\right\}.$$

Ограничения вида (2) должны быть выполнены для всех управлений, присутствующих в критерии. В матричном виде они запишутся как (6).

Итак, имеем задачу минимизации критерия (14) по вектору $U(k)$ при ограничениях (6), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (5) при ограничениях (6).

Теорема доказана.

Замечание: размеры матриц $H(k)$, $G(k)$ и $U(k)$ зависят от выбора значения горизонта прогноза p. Если горизонт прогноза велик, это приводит к значительным вычислительным затратам, и для их сокращения можно использовать следующий прием. Положим $u(k+s/k) = u(k+s+1/k) = \ldots = u(k+p-1/k) = 0$ для некоторого $s \le p-1$. Матрицы $U(k)$, $H(k)$ и $G(k)$ представим в блочном виде

$$U(k)=\begin{bmatrix} U_{(s)}(k) \\ 0_{(p-s)} \end{bmatrix},\ H(k)=\begin{bmatrix} H_{(s,s)}(k) & H_{(s,p-s)}(k) \\ H_{(p-s,s)}(k) & H_{(p-s,p-s)}(k) \end{bmatrix},$$

$$G(k)=\begin{bmatrix} G_{(s)}(k), & G_{(p-s)}(k) \end{bmatrix},$$

после чего критерий (5) преобразуется следующим образом

$$Y_{(s)}(k+p/k)=U_{(s)}^{\mathrm{T}}(k)H_{(s,s)}(k)U_{(s)}(k)+$$
$$+2x^{\mathrm{T}}(k)G_{(s)}(k)U_{(s)}(k). \quad (15)$$

Ограничения (6) примут вид

$$U_{\min,s}(k) \le S_{(s)}(k)U_{(s)}(k) \le U_{\max,s}(k), \quad (16)$$

где

$$U_{\min,s}(k)=\begin{bmatrix} u_{\min}(k) \\ \dots \\ u_{\min}(k+s-1) \end{bmatrix},\ U_{\max,s}(k)=\begin{bmatrix} u_{\max}(k) \\ \dots \\ u_{\max}(k+s-1) \end{bmatrix},$$

$$S_{(s)}(k)=diag(s(k),\dots,s(k+s-1)).$$

Далее решается задача оптимизации критерия (15) при ограничениях (16) по «укороченному» вектору прогнозирующих управлений $U_{(s)}(k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rawlings J.* Tutorial: model predictive control technology // Proc. american control conf. San Diego. California. June 1999. P. 662–676.
2. *Пропой А.И.* Применение методов линейного программирования для синтеза импульсных автоматических систем // Автоматика и телемеханика. 1963. № 7. С. 912–920.
3. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.

4. *Bemporad A., Borrelli F., Morari M.* Model predictive control based on linear programming – The explicit solution // IEEE transactions on automatic control. 2002. Vol. 47. № 12. P. 1974–1985.
5. *Seron M.M., De Dona J.A., Goodwin G.C.* Global analytical model predictive control with input constraints // 39th IEEE conf. on decision and control. 2000. Sydney. Australia. 12–15 December. 154-159.
6. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
7. *Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.* Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2003. № 10. С. 50–65.
8. *Пакшин П.В.* Устойчивость дискретных систем со случайной структурой при постоянно действующих возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1983. № 6. С. 75–85.
9. *Hopkins W.E.* Optimal stabilization of families of linear differential equations with jump coefficients and multiplicative noise // SIAM J. control and optimiz. 1987. Vol. 25. № 6. P. 1587–1600.
10. *Li X., Zhou X., Rami M.* Indefinite Stochastic LQ control with jumps // Proc. 40th IEEE conf on decision and control. 2001. Orlando. P. 1693–1698.

Статья представлена кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике экономического факультета и кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 23 сентября 2004.