

СРЕДНЯЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ В ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИМ СИНХРОННЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

В работе находятся условные средние длительности периода занятости однолинейной системы массового обслуживания (СМО), финальные вероятности того, что период занятости начнется при заданном значении интенсивности, условные стационарные плотности вероятностей незавершенной работы, а также безусловная плотность вероятностей незавершенной работы при дважды стохастическом синхронном входящем потоке.

Дважды стохастические потоки событий вызывают в последнее время все больший интерес, так как они являются хорошей математической моделью для многих реальных потоков событий. Однако сложность объекта делает его исследование очень трудным в аналитическом плане. В работе рассматривается и решается одна частная задача теории массового обслуживания для дважды стохастического потока с двумя состояниями интенсивности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дважды стохастический пуассоновский поток событий с двумя состояниями интенсивности λ_1 и λ_2 . В дальнейшем для определенности будем считать, что $\lambda_1 > \lambda_2$. Переходы между этими состояниями возможны только в момент наступления нового события. Если поток находится в состоянии λ_1 , то вероятность перехода $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ равна α_1 , а вероятности остаться в том же состоянии $1 - \alpha_1$. Если поток находится в состоянии λ_2 , то вероятность перехода $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ равна α_2 , а вероятности остаться в том же состоянии $1 - \alpha_2$. Будем считать, что этот поток поступает на однолинейную СМО с бесконечным бункером. Под работой x , которую несет заявка, будем понимать то время, которое требуется для обслуживания заявки на обслуживающем приборе. Будем считать, что эта работа является случайной величиной с плотностью вероятностей

$$p(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (1)$$

так что θ имеет смысл среднего времени обслуживания одной заявки.

Под незавершенной работой w будем понимать суммарное время обслуживания заявок, находящихся в бункере, плюс остаточное время обслуживания заявки, находящейся на приборе.

ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обозначим через w незавершенную работу в момент времени t . Через $m_i(w)$, $i = 1, 2$ обозначим среднее время до опустошения системы, если в момент времени t интенсивность входящего потока была равна λ_i .

Выведем уравнение для $m_1(w)$. Рассмотрим интервал времени $[t, t + \Delta t]$. За это время может произойти:

1) с вероятностью $1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ новая заявка не придет; тогда незавершенная работа уменьшится на Δt , а среднее время до опустошения системы станет $m_1(w - \Delta t)$;

2) с вероятностью $\lambda_1 \Delta t (1 - \alpha_1) + o(\Delta t)$ придет новая заявка, требующая для своего обслуживания время x , а состояние потока останется прежним. Тогда незавершенная работа станет $w + x - \Delta t$, а среднее время до опустошения системы станет $m_1(w + x - \Delta t)$;

3) с вероятностью $\lambda_1 \Delta t \alpha_1 + o(\Delta t)$ придет новая заявка, требующая для своего обслуживания время x и изменится состояние потока. Тогда незавершенная работа

станет $w + x - \Delta t$, а среднее время до опустошения системы станет $m_2(w + x - \Delta t)$.

Так как прошло время Δt , то имеем выражение

$$\begin{aligned} m_1(w) &= \Delta t + (1 - \lambda_1 \Delta t) m_1(w - \Delta t) + \\ &+ \lambda_1 \Delta t \alpha_1 \int_0^\infty m_2(w + x - \Delta t) p(x) dx + \\ &+ \lambda_1 \Delta t (1 - \alpha_1) \int_0^\infty m_1(w + x - \Delta t) p(x) dx. \end{aligned}$$

Разложим $m_1(w - \Delta t)$, сократим $m_1(w)$, разделим на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \rightarrow 0$. Получим

$$\begin{aligned} m_1'(w) &= 1 - \lambda_1 m_1(w) + \lambda_1 \alpha_1 \int_0^\infty m_2(w + x) p(x) dx + \\ &+ \lambda_1 (1 - \alpha_1) \int_0^\infty m_1(w + x) p(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} m_2'(w) &= 1 - \lambda_2 m_2(w) + \lambda_2 \alpha_2 \int_0^\infty m_1(w + x) p(x) dx + \\ &+ \lambda_2 (1 - \alpha_2) \int_0^\infty m_2(w + x) p(x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Систему уравнений (2), (3) надо решить при граничном условии $m_1(0) = m_2(0) = 0$.

ВИД РЕШЕНИЙ И ИХ НАХОЖДЕНИЕ

В (2) вместо $p(x)$ подставим (1) и в интеграле сделаем замену $w + x = z$, умножим обе части уравнения на $e^{-w/\theta}$ и продифференцируем по w :

$$\begin{aligned} m_1''(w) - \frac{1}{\theta} m_1'(w) e^{-w/\theta} &= -\frac{1}{\theta} e^{-w/\theta} - \lambda_1 m_1'(w) e^{-w/\theta} + \\ &+ \frac{1}{\theta} \lambda_1 m_1(w) e^{-w/\theta} - \frac{\lambda_1 \alpha_1}{\theta} m_2(w) e^{-w/\theta} + \\ &+ \frac{\lambda_1 (1 - \alpha_1)}{\theta} m_1(w) e^{-w/\theta}. \end{aligned}$$

Сократив множитель $e^{-w/\theta}$, получим уравнение

$$\begin{aligned} m_1''(w) + m_1'(w) (\lambda_1 - 1/\theta) + \frac{\lambda_1 \alpha_1}{\theta} m_2(w) - \\ - \frac{\lambda_1 \alpha_1}{\theta} m_1(w) = -1/\theta. \end{aligned}$$

Аналогичное уравнение получится и из (3).

Заметим, что в правой части уравнений стоит константа, а один из корней характеристического уравнения равен 0. Поэтому решение системы (2), (3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} m_1(w) &= A_1 w + B_1 (e^{-zw} - 1), \\ m_2(w) &= A_2 w + B_2 (e^{-zw} - 1). \end{aligned}$$

Слагаемые $A_1 w$ и $A_2 w$ соответствуют частному решению неоднородного уравнения, а 1 получается потому, что корень характеристического уравнения равен нулю. Коэффициенты подобраны для выполнения условия $m_1(0) = m_2(0) = 0$.

Коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 и z найдем, подставляя эти решения в (2) и (3). Подстановка в (2) дает

$$A_1 - B_1 e^{-zw} z = -\lambda_1 A_1 w - \lambda_1 B_1 (e^{-zw} - 1) - \lambda_1 \alpha_1 B_2 + \\ + \lambda_1 \alpha_1 A_2 (w + \theta) + B_2 \frac{\lambda_1 \alpha_1}{z\theta + 1} e^{-zw} - \lambda_1 (1 - \alpha_1) B_1 + \\ + B_1 \frac{\lambda_1 (1 - \alpha_1)}{z\theta + 1} e^{-zw} + \lambda_1 (1 - \alpha_1) A_1 (w + \theta) + 1,$$

$$\text{где } \int_0^\infty xp(x)dx = \theta, \quad \int_0^\infty e^{-zx} p(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{-zx - \frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{z\theta + 1}.$$

Приравняв коэффициенты при слагаемых, содержащих w , получим $\lambda_1 \alpha_1 A_1 - \lambda_1 \alpha_1 A_2 = 0$, откуда следует, что $A_1 = A_2$. Далее их будем обозначать как A .

Приравняв свободные члены, получаем

$$A = 1 + A\lambda_1\theta + \lambda_1\alpha_1(B_1 - B_2). \quad (4)$$

Из уравнения (3) получим

$$A = 1 + A\lambda_2\theta + \lambda_2\alpha_2(B_2 - B_1). \quad (5)$$

Умножая (4) на $\lambda_1\alpha_1$, (5) на $\lambda_2\alpha_2$ и суммируя, получим явное выражение для A :

$$A = \frac{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2}{\lambda_1\alpha_1(1 - \lambda_2\theta) + \lambda_2\alpha_2(1 - \lambda_1\theta)}.$$

Определим знак A . Интенсивности переходов $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ и $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ равны $\lambda_1\alpha_1$ и $\lambda_2\alpha_2$. Значит, в состоянии λ_1 поток находится в среднем $1/\lambda_1\alpha_1$, за этот интервал в среднем придет $1/\alpha_1$ заявок и может быть обслужено в среднем $1/\lambda_1\alpha_1\theta$ заявок. Аналогично для состояния λ_2 . Это приводит к условию $\frac{1}{\lambda_1\alpha_1\theta} + \frac{1}{\lambda_2\alpha_2\theta} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$.

После преобразований получаем следующее условие работоспособности системы: $\lambda_1\alpha_1(1 - \lambda_2\theta) + \lambda_2\alpha_2(1 - \lambda_1\theta) > 0$, откуда следует, что $A > 0$.

Приравняв коэффициенты при e^{-zw} , получим, что

$$B_1 \left(\frac{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_1 z\theta}{z\theta + 1} - z \right) - B_2 \frac{\lambda_1\alpha_1}{z\theta + 1} = 0. \quad (6)$$

Такая же операция над (3) даст, что

$$-B_1 \frac{\lambda_2\alpha_2}{z\theta + 1} + B_2 \left(\frac{\lambda_2\alpha_2 + \lambda_2 z\theta}{z\theta + 1} - z \right) = 0. \quad (7)$$

Относительно B_1 и B_2 получили систему однородных алгебраических уравнений. Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы ее детерминант был равен нулю:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_1 z\theta}{z\theta + 1} - z & -\frac{\lambda_1\alpha_1}{z\theta + 1} \\ -\frac{\lambda_2\alpha_2}{z\theta + 1} & \frac{\lambda_2\alpha_2 + \lambda_2 z\theta}{z\theta + 1} - z \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие определит нам z . Сначала отметим, что при

$z = 0$ $D = \begin{vmatrix} \lambda_1\alpha_1 & -\lambda_1\alpha_1 \\ -\lambda_2\alpha_2 & \lambda_2\alpha_2 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $z = 0$ является корнем характеристического уравнения. Раскрывая детерминант и сокращая z , получим характеристическое уравнение для z :

$$z^3\theta^2 - z^2\theta(\lambda_1\theta + \lambda_2\theta - 2) + z(1 - \lambda_1\theta(\alpha_1 + 1) - \\ - \lambda_2\theta(\alpha_2 + 1) + \lambda_1\lambda_2\theta^2) - \\ - \lambda_1\alpha_1(1 - \lambda_2\theta) - \lambda_2\alpha_2(1 - \lambda_1\theta) = 0.$$

Найдем B_1 и B_2 . Из (6) имеем

$$\frac{\lambda_1\alpha_1}{z\theta + 1}(B_1 - B_2) = B_1 z \left(1 - \frac{\lambda_1\theta}{z\theta + 1} \right);$$

с другой стороны имеем выражение (4), откуда получается $A(1 - \lambda_1\theta) - 1 = B_1 z(\theta + 1 - \lambda_1\theta)$.

Подставляя выражение для A , получим

$$B_1 = \frac{\lambda_1\alpha_1\theta(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1\alpha_1(\lambda_2\theta - 1) + \lambda_2\alpha_2(\lambda_1\theta - 1))z(\theta - \lambda_1\theta + 1)}.$$

Аналогично находится выражение для B_2 :

$$B_2 = \frac{\lambda_2\alpha_2\theta(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1\alpha_1(\lambda_2\theta - 1) + \lambda_2\alpha_2(\lambda_1\theta - 1))z(\theta - \lambda_1\theta + 1)}.$$

Период занятости начинается с прихода заявки, которая несет с собой работу, распределенную по (1). Поэтому средняя длительность периода занятости при условии, что в момент его начала интенсивность была λ_1 , равна

$$\bar{m}_1 = \int_0^\infty m_1(w) \frac{1}{\theta} e^{-w/\theta} dw.$$

Подставляя сюда выражение для $m_1(w)$, получим

$$\bar{m}_1 = A\theta + B_1 \left(\frac{1}{z\theta + 1} - 1 \right) = A\theta + B_1 \frac{z\theta}{z\theta + 1}.$$

Подставим значение A и B_1 :

$$\bar{m}_1 = \left[1 + \frac{(z\theta + 2 - \lambda_1\theta)(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)z\theta}{\lambda_1\alpha_1(1 - \lambda_2\theta) + \lambda_2\alpha_2(1 - \lambda_1\theta)} \right] \times \\ \times \frac{\theta}{(z\theta + 1)(z\theta + 1 - \lambda_2\theta)}.$$

Аналогично

$$\bar{m}_1 = \left[1 + \frac{(z\theta + 2 - \lambda_2\theta)(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)z\theta}{\lambda_1\alpha_1(1 - \lambda_2\theta) + \lambda_2\alpha_2(1 - \lambda_1\theta)} \right] \times \\ \times \frac{\theta}{(z\theta + 1)(z\theta + 1 - \lambda_1\theta)}.$$

Найдем среднее время простоя системы m_i , если в начальный момент поток находился в состоянии λ_1 . Пусть в момент времени t в системе нет заявок, тогда может произойти только приход новой заявки, который завершит период простоя. В среднем заявка придет через время $1/\lambda_1$. Таким образом, $m_i = 1/\lambda_1$.

РАСЧЕТ БЕЗУСЛОВНОЙ СРЕДНЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ

Для вычисления безусловного среднего значения периода занятости надо найти вероятности π_i того, что в начале периода занятости $\lambda = \lambda_i$, тогда $\bar{m} = \pi_1 \bar{m}_1 + \pi_2 \bar{m}_2$.

РАСЧЕТ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обозначим через i количество заявок в системе. Пусть $i = 0$, т.е. система пуста. Найдем вероятности $P_{j1}(0)$ того, что система перейдет в состояние $\lambda = \lambda_i$, $i = 1$, не заходя в состояние $\lambda = \lambda_2$, $i = 1$, если в начальный момент времени она находится в состоянии $\lambda = \lambda_j$, $i = 0$. Тогда, рассматривая состояние системы спустя время Δt , можно записать

$$P_{11}(0) = (1 - \lambda_1\Delta t)P_{11}(0) + \lambda_1\Delta t(1 - \alpha_1) \cdot 1 + o(\Delta t),$$

$$P_{21}(0) = (1 - \lambda_2\Delta t)P_{21}(0) + \lambda_2\Delta t\alpha_2 \cdot 1 + o(\Delta t).$$

Отсюда получаем $P_{11}(0) = 1 - \alpha_1$, $P_{21}(0) = \alpha_1$. Аналогично $P_{12}(0) = \alpha_1$, $P_{22}(0) = \alpha_2$.

РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Найдем теперь основные для дальнейшего вероятности $P_{j1}(i)$ и $P_{j2}(i)$. Здесь $P_{j1}(i)$ есть вероятность перехода из состояния $\lambda = \lambda_i$, $i = i$ в состояние $\lambda = \lambda_1$, $i = 1$ с

заходом в состояние $i = 0$, т.е. при условии, что будет опустошение системы. Тогда, рассматривая состояние системы спустя время Δt при $i > 1$, можно записать

$$P_{11}(i) = (1 - \lambda_1 \Delta t - \frac{1}{\theta} \Delta t) P_{11}(i) + \lambda_1 \Delta t \alpha_1 P_{21}(i+1) + \lambda_1 \Delta t (1 - \alpha_1) P_{11}(i+1) + \frac{1}{\theta} \Delta t P_{11}(i-1) + o(\Delta t),$$

$$P_{21}(i) = (1 - \lambda_2 \Delta t - \frac{1}{\theta} \Delta t) P_{21}(i) + \lambda_2 \Delta t \alpha_2 P_{11}(i+1) + \lambda_2 \Delta t (1 - \alpha_2) P_{21}(i+1) + \frac{1}{\theta} \Delta t P_{21}(i-1) + o(\Delta t).$$

Это приводит к системе (обозначим $l_i = \lambda_i \theta$, $a_i = a_i \theta$)

$$l_1 a_1 P_{21}(i+1) + l_1 (\theta - a_1) P_{11}(i+1) + \theta P_{11}(i-1) - (l_1 \theta + \theta) P_{11}(i) = 0,$$

$$l_2 a_2 P_{11}(i+1) + l_2 (\theta - a_2) P_{21}(i+1) + \theta P_{21}(i-1) - (l_2 \theta + \theta) P_{21}(i) = 0.$$

Как это следует из общей теории, будем искать решение в виде $P_{11}(i) = C \cdot \kappa^{i-1}$; $P_{11}(i) = (C \cdot K) \cdot \kappa^{i-1}$. Это приводит к системе

$$l_1 a_1 (CK) k^2 + C(l_1 (\theta - a_1) k^2 + \theta - (l_1 \theta + \theta) k) = 0; \quad (8)$$

$$l_2 a_2 C k^2 + (CK)(l_2 (\theta - a_2) k^2 + \theta - (l_2 \theta + \theta) k) = 0. \quad (9)$$

Чтобы система имела не нулевое решение относительно C и $(C \cdot K)$, надо, чтобы ее детерминант был равен 0, т.е.

$$\begin{vmatrix} l_1 (\theta - a_1) k^2 + \theta (1 - (l_1 + 1)) k & l_1 a_1 \\ l_2 a_2 & l_2 (\theta - a_2) k^2 + \theta (1 - (l_2 + 1)) k \end{vmatrix} = 0.$$

Один корень этого уравнения очевиден – это $\kappa = 1$, так как при этом определитель принимает вид

$$\begin{vmatrix} -l_1 a_1 & l_1 a_1 \\ l_2 a_2 & -l_2 a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Заметим, что величина K , соответствующая этому корню, равна 1.

Для нахождения уравнения, определяющего остальные корни, раскроем детерминант и получившийся многочлен четвертой степени поделим на двучлен $\kappa - 1$. Тогда получим относительно κ уравнение третьей степени:

$$k^3 l_1 l_2 (\theta - a_1 - a_2) + k^2 (l_1 a_1 + l_2 a_2 - \theta (l_1 + l_2 + l_1 l_2)) + k \theta (l_1 + l_2 + 1) - \theta = 0.$$

Это уравнение имеет три разных вещественных корня. Из них только один корень, лежащий на отрезке $(0, 1)$, соответствует стационарному режиму. В дальнейшем через κ обозначен именно этот корень.

Выведем еще выражение для константы K , соответствующее этому корню. Из уравнения (8) получаем

$$1 - K = \frac{\theta(1 - k)(1 - k l_1)}{l_1 a_1 k^2}, \quad (10)$$

а из (9)

$$\frac{K - 1}{K} = \frac{\theta(1 - k)(1 - k l_2)}{l_2 a_2 k^2}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) получаем выражение для K , соответствующее корню κ : $K = -\frac{(1 - k l_1) l_2 a_2}{(1 - k l_2) l_1 a_1}$.

С учетом полученных результатов мы можем написать

$$\begin{aligned} P_{11}(i) &= C + D \cdot \kappa^{i-1}, \\ P_{21}(i) &= C + D \cdot K \kappa^{i-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для нахождения констант C и D надо выписать уравнения для $P_{11}(1)$ и $P_{21}(1)$ с учетом того, что мы обязательно должны пройти через состояние $i = 0$. Тогда имеем

$$P_{11}(1) = (1 - \lambda_1 \Delta t - \frac{1}{\theta} \Delta t) P_{11}(1) + \lambda_1 \Delta t \alpha_1 P_{21}(2) + \lambda_1 \Delta t (1 - \alpha_1) P_{11}(2) + \frac{1}{\theta} \Delta t P_{11}(0) + o(\Delta t),$$

$$P_{21}(1) = (1 - \lambda_2 \Delta t - \frac{1}{\theta} \Delta t) P_{21}(1) + \lambda_2 \Delta t \alpha_2 P_{11}(2) + \lambda_2 \Delta t (1 - \alpha_2) P_{21}(2) + \frac{1}{\theta} \Delta t P_{21}(0) + o(\Delta t),$$

где $P_{11}(0)$ и $P_{21}(0)$ были найдены ранее. Отсюда обычным образом получаем систему

$$P_{11}(1) (\lambda_1 + \frac{1}{\theta}) = \lambda_1 \alpha_1 P_{21}(2) + \lambda_1 (1 - \alpha_1) P_{11}(2) + \frac{1}{\theta} P_{11}(0),$$

$$P_{21}(1) (\lambda_2 + \frac{1}{\theta}) = \lambda_2 \alpha_2 P_{11}(2) + \lambda_2 (1 - \alpha_2) P_{21}(2) + \frac{1}{\theta} P_{21}(0).$$

Подставим сюда (12) и получим

$$\frac{1}{\theta} (C + D) + \lambda_1 D (1 - k) + \lambda_1 \alpha_1 D k (1 - K) = \frac{1}{\theta} P_{11}(0),$$

$$\frac{1}{\theta} (C + DK) + \lambda_2 DK (1 - k) + \lambda_2 \alpha_2 D k (1 - K) = \frac{1}{\theta} P_{21}(0).$$

Отсюда находится C и D . Явное выражение не выписано из-за громоздкости.

Для дальнейшего нам нужна лишь вероятность $P_{21}(1)$, которую мы будем обозначать как π_{21} . Так как всякий период занятости начинается из состояния 1, то, по смыслу, $P_{21}(1)$ есть вероятность того, что следующий период занятости начнется при $\lambda = \lambda_1$, если текущий период занятости начался при $\lambda = \lambda_2$.

Аналогичными рассуждениями находится π_{12} .

Пусть π_i , $i = 1, 2$ есть финальные (стационарные) вероятности того, что период занятости начнется из состояния $\lambda = \lambda_i$. Поэтому для определения π_1 и π_2 мы имеем обычную систему

$$\pi_1 \cdot \pi_{12} + \pi_2 \pi_{22} = \pi_2,$$

$$\pi_1 \cdot \pi_{11} + \pi_2 \pi_{21} = \pi_1,$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1,$$

$$\text{откуда } \pi_1 = \frac{\pi_{21}}{\pi_{12} + \pi_{21}}, \quad \pi_2 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}}.$$

СТАЦИОНАРНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕЗАВЕРШЕННОЙ РАБОТЫ

Обозначим через $\pi_i(w)$, $i = 1, 2$ стационарную плотность вероятностей незавершенной работы при условии, что интенсивность потока $\lambda = \lambda_i$. Выведем уравнение для $\pi_1(w)$.

Пусть в некоторый момент времени t величина незавершенной работы равна w . Рассмотрим момент времени $t - \Delta t$. Тогда попасть в состояние w можно различными путями.

1. С вероятностью $1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ за время Δt не наступило события потока. Тогда незавершенная работа была $w + \Delta t$.

2. С вероятностью $\lambda_1 \Delta t (1 - \alpha_1) + o(\Delta t)$ за время Δt пришла новая заявка, но состояние потока не изменилось. Тогда незавершенная работа была $\pi_{01} e^{-\lambda_1 w} +$

$+\int_0^w \pi_1(x) e^{-\mu(w-x)} dx$, где π_{01} – вероятность того, что в

момент времени $t - \Delta t$ система была пуста, а $\mu = 1/\theta$ – интенсивность обслуживания.

3. С вероятностью $\lambda_2 \alpha_2 \Delta t$ пришла новая заявка и изменилось состояние потока. Тогда незавершенная ра-

бота была $\pi_{02} \mu e^{-\mu w} + \int_0^w \pi_2(x) \mu e^{-\mu(w-x)} dx$.

В итоге получим уравнение для $\pi_1(w)$:

$$\begin{aligned} \pi_1'(w) - \lambda_1 \pi_1(w) + \lambda_1(1 - \alpha_1)(\pi_{01} \mu e^{-\mu w} + \\ + \int_0^w \pi_1(x) \mu e^{-\mu(w-x)} dx) + \lambda_2 \alpha_2 (\pi_{02} \mu e^{-\mu w} + \\ + \int_0^w \pi_2(x) \mu e^{-\mu(w-x)} dx) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично получим уравнение для $\pi_2(w)$:

$$\begin{aligned} \pi_2'(w) - \lambda_2 \pi_2(w) + \lambda_2(1 - \alpha_2)(\pi_{02} \mu e^{-\mu w} + \\ + \int_0^w \pi_2(x) \mu e^{-\mu(w-x)} dx) + \lambda_1 \alpha_1 (\pi_{01} \mu e^{-\mu w} + \\ + \int_0^w \pi_1(x) \mu e^{-\mu(w-x)} dx) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения этой системы уравнений перейдем к преобразованиям Лапласа $\tilde{\pi}_i(s) = \int_0^\infty \pi_i(w) e^{-sw} dw$, $i = 1, 2$.

Тогда $\pi_i'(w) \leftrightarrow s \tilde{\pi}_i(s) - \pi_i(0)$, $\mu e^{-\mu w} \leftrightarrow \mu/(\mu + s)$, и поэтому система (13), (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1(s)(s^2 + s(\mu - \lambda_1) - \lambda_1 \alpha_1 \mu) + \tilde{\pi}_2(s) \lambda_2 \alpha_2 \mu = \\ = \pi_1(0) - \mu(\lambda_1(1 - \alpha_1) \pi_{01} + \lambda_2 \alpha_2 \pi_{02}), \\ \tilde{\pi}_2(s)(s^2 + s(\mu - \lambda_2) - \lambda_2 \alpha_2 \mu) + \tilde{\pi}_1(s) \lambda_1 \alpha_1 \mu = \\ = \pi_2(0) - \mu(\lambda_2(1 - \alpha_2) \pi_{02} + \lambda_1 \alpha_1 \pi_{01}). \end{aligned}$$

Рассмотрим детерминант этой системы:

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} s^2 + s(\mu - \lambda_1) - \lambda_1 \alpha_1 \mu & \lambda_2 \alpha_2 \mu \\ \lambda_1 \alpha_1 \mu & s^2 + s(\mu - \lambda_2) - \lambda_2 \alpha_2 \mu \end{vmatrix} = \\ = s[s^3 + s^2(2\mu - \lambda_1 - \lambda_2) + s(\mu^2 - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mu + \lambda_1 \lambda_2) - \\ - \lambda_1 \alpha_1 \mu^2 + \lambda_1 \alpha_1 \lambda_2 \mu - \lambda_2 \alpha_2 \mu^2 + \lambda_1 \alpha_2 \lambda_2 \mu]. \end{aligned}$$

Нам нужны корни уравнения $D = 0$. Один из них очевиден – $s = 0$. Остальные три определяются из уравнения

$$s^3 + s^2(2\mu - \lambda_1 - \lambda_2) + s(\mu^2 - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mu + \lambda_1 \lambda_2) - \lambda_1 \alpha_1 \mu^2 + \lambda_1 \alpha_1 \lambda_2 \mu - \lambda_2 \alpha_2 \mu^2 + \lambda_1 \alpha_2 \lambda_2 \mu = 0,$$

которое имеет один положительный и два отрицательных корня. Положительный корень мы обозначим через z_0 , а отрицательные – как $-z_1$ и $-z_2$, так что $z_1 > 0$, $z_2 > 0$; z_0 , z_1 и z_2 можно найти лишь численно. Тогда можно записать $D = s(s - z_0)(s + z_1)(s + z_2)$, и именно этим выражением мы будем пользоваться в дальнейшем.

Найдем теперь вид $\tilde{\pi}_1(s)$ и $\tilde{\pi}_2(s)$. Имеем

$$\begin{vmatrix} \pi_1(0) - \mu(\lambda_1(1 - \alpha_1) \pi_{01} + \lambda_2 \alpha_2 \pi_{02}) & \lambda_2 \alpha_2 \mu \\ \pi_2(0) - \mu(\lambda_2(1 - \alpha_2) \pi_{02} + \lambda_1 \alpha_1 \pi_{01}) & s^2 + s(\mu - \lambda_2) - \lambda_2 \alpha_2 \mu \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} = (\pi_1(0) - \mu(\lambda_1(1 - \alpha_1) \pi_{01} + \lambda_2 \alpha_2 \pi_{02}))(s^2 + s(\mu - \lambda_2) - \\ - \lambda_2 \alpha_2 \mu) - \lambda_2 \alpha_2 \mu (\pi_2(0) - \\ - \mu(\lambda_2(1 - \alpha_2) \pi_{02} + \lambda_1 \alpha_1 \pi_{01})) = D_1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\tilde{\pi}_1(s) = \frac{D_1}{s(s - z_0)(s + z_1)(s + z_2)}. \quad (15)$$

Заметим, что $\tilde{\pi}_1(s)$ определена для всех $s \geq 0$, а у формулы (15) имеется две особые точки – $s = 0$ и $s = z_0$, когда происходит деление на нуль. Чтобы не было особенностей, надо чтобы при $s = 0$ и $s = z_0$ обращался в нуль также и числитель. Это приводит к следующей системе уравнений:

$$\text{точка } s = 0: \pi_1(0) + \pi_2(0) = \lambda_1 \mu \pi_{01} + \lambda_2 \mu \pi_{02},$$

$$\text{точка } s = z_0:$$

$$\begin{aligned} (\pi_1(0) - \mu(\lambda_1(1 - \alpha_1) \pi_{01} + \lambda_2 \alpha_2 \pi_{02})) \times \\ \times (z_0^2 + z_0^2(\mu - \lambda_2) - \lambda_2 \alpha_2 \mu) = \\ = \lambda_2 \alpha_2 \mu (\pi_2(0) - \mu(\lambda_2(1 - \alpha_2) \pi_{02} + \lambda_1 \alpha_1 \pi_{01})), \end{aligned}$$

что и дает систему уравнений, определяющую $\pi_1(0)$ и $\pi_2(0)$ через π_{01} и π_{02} .

Аналогично определяем $\tilde{\pi}_2(s)$.

Будем считать, что π_{01} и π_{02} заданы и $\pi_1(0)$ и $\pi_2(0)$ выражены через них. Тогда выражения для $\tilde{\pi}_1(s)$ можно

разложить на простейшие $\tilde{\pi}_1(s) = \frac{C_1}{s + z_1} - \frac{D_1}{s + z_2}$, так что

явный вид $\pi_1(w)$ следующий: $\pi_1(w) = C_1 e^{-z_1 w} + D_1 e^{-z_2 w}$; явный вид C_1 и D_1 не выписан из-за громоздкости.

Аналогично, $\tilde{\pi}_2(s)$ можно представить в виде

$$\tilde{\pi}_2(s) = \frac{C_2}{s + z_1} - \frac{D_2}{s + z_2}.$$

Явный вид $\pi_2(w)$ следующий: $\pi_2(w) = C_2 e^{-z_1 w} + D_2 e^{-z_2 w}$.

Теперь можно найти и недостающие константы π_{01} и π_{02} из условия нормировки

$$\begin{aligned} \pi_{01} = 1 - \int_0^\infty \pi_1(w) dw = 1 - \frac{C_1}{z_1} + \frac{D_1}{z_2}, \\ \pi_{02} = 1 - \int_0^\infty \pi_2(w) dw = 1 - \frac{C_2}{z_1} + \frac{D_2}{z_2}. \end{aligned}$$

Финальные вероятности значений интенсивности потока

$$P\{\lambda(t) = \lambda_1\} = \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2},$$

$$P\{\lambda(t) = \lambda_2\} = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2}$$

для безусловной плотности вероятностей $\pi(w)$ незавершенной работы w можно записать

$$\pi(w) = \frac{\alpha_2 \lambda_2 \pi_1(w) + \alpha_1 \lambda_1 \pi_2(w)}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2}.$$

Выведенные выше формулы могут быть реализованы программно, что позволит численно найти все полученные выше характеристики СМО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Информатика» 25 мая 2004 г.