УДК 62-50

С.С. Ломакина, В.И. Смагин

СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается алгоритм синтеза следящих регуляторов по интегральному квадратичному критерию для непрерывных линейных систем со случайными скачкообразными параметрами, описываемыми цепью Маркова с конечным числом состояний. Управление формируется в виде регулятора с обратной связью по выходу. Получены условия устойчивости для замкнутой стационарной системы.

Методы и алгоритмы синтеза систем управления объектами со случайными скачкообразно изменяющимися параметрами рассмотрены в [1–8]. В них изучался синтез регуляторов для решения задачи стабилизации, либо задачи слежения при использовании обратной связи по состоянию или выходу. В настоящей работе развит подход, предложенный в [5, 7, 8] к задачам синтеза следящих регуляторов по интегральным квадратичным критериям для объектов со случайными скачкообразными параметрами в системах с неполной информацией о векторе состояния и при наличии мультипликативных шумов, зависящих от состояния системы и управления. Оптимизация критерия осуществлена по матрице коэффициентов передачи и по входному вектору.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поведение непрерывного объекта со случайными скачкообразными параметрами описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x}(t) = A(\gamma)x(t) + B(\gamma)u(t) + \sum_{s=1}^{m_1} A_s(\gamma)x(t)\theta_s(t) + $$
$$+\sum_{s=1}^{m_2} B_s(\gamma)u(t)\varphi_s(t) + q(t), \quad x(0) = x_0\,, \tag{1}$$

где $x(t)\in R^n$ – вектор состояния; $u(t)\in R^l$ – управление; x_0 – начальные условия ($\text{M}\{x_0\}=m_0$, $\text{M}\{x_0x_0^{\text{T}}\}=N_{x0}$); $q(t)\in R^n$; $\theta(t)\in R^{m_1}$; $\varphi(t)\in R^{m_2}$ – белые гауссовские шумы с характеристиками:

$$\text{M}\{q(t)\}=0,\ \text{M}\{q(t)q^{\text{T}}(\tau)\}=Q\delta(t-\tau),\ \text{M}\{\theta(t)\}=0,$$
$$\text{M}\{\theta(t)\theta^{\text{T}}(\tau)\}=I\delta(t-\tau),\ \text{M}\{q(t)\theta^{\text{T}}(t)\}=0,\ \text{M}\{\varphi(t)\}=0,$$
$$\text{M}\{\varphi(t)\varphi^{\text{T}}(\tau)\}=I\delta(t-\tau),\ \text{M}\{q(t)\varphi^{\text{T}}(t)\}=0,$$
$$\text{M}\{\theta(t)\varphi^{\text{T}}(\tau)\}=0;$$

$\gamma(t)\in R^l$ – марковская цепь с дискретным множеством состояний $\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_r$ (вероятность перехода из i-го состояния в j-е ($i\neq j$) за время Δt равна $p_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$); $A(\gamma)$; $B(\gamma)$; $A_p(\gamma)$; $B_q(\gamma)$ (p=1, 2,…, m_1, q=1, 2,…, m_2) – заданные матрицы (M – оператор математического ожидания, индекс T обозначает транспонирование, $\delta(t-\tau)$ – дельта-функция Дирака, $Q=Q^{\text{T}}\geq 0$ – неотрицательно определенная матрица, I – единичная матрица). Процесс $\gamma(t)$ предполагается наблюдаемым и задается уравнением

$$d\gamma(t) = \int v\Omega(dt, dv)\,,\ \gamma(0) = \gamma_0, \tag{2}$$

где γ_0 – начальное состояние, пуассоновская случайная мера $\Omega(dt, A)$ характеризуется функцией

$$\Pi_{t,\gamma}(dv) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{ij}\delta(v+\gamma_i-\gamma_j)dv \ \text{ при } \gamma=\gamma_i. \tag{3}$$

Будем считать, что наблюдению доступен вектор

$$y(t) = S(\gamma)x(t) + v(t)\,, \tag{4}$$

где $y(t)\in R^{n_2}$ ($n_2<n$), S(γ) – матрица полного ранга; $v(t)\in R^{n_2}$ – белый гауссовский шум

$$(\text{M}\{v(t)\}=0;\ \text{M}\{v(t)q^{\text{T}}(\tau)\}=0,\ \text{M}\{v(t)\theta^{\text{T}}(\tau)\}=0,$$
$$\text{M}\{v(t)\varphi^{\text{T}}(\tau)\}=0,\ \text{M}\{v(t)v^{\text{T}}(\tau)\}=V\delta(t-\tau)).$$

Обозначим вектор управляемого выхода объекта: $\xi(t)=Rx(t)$ ($\xi(t)\in R^{n_1}$). Необходимо найти управление $u(t)$ ($t\in[0, T_f]$), при котором выход объекта $\xi(t)$ был бы близок к отслеживаемому сигналу $z(t)\in R^{n_1}$. Зададим меру близости в виде квадратичного интегрального критерия

$$J[0,T_f] = \frac{1}{2}\text{M}\Bigg\{\int_0^{T_f}\Big[(\xi(\tau)-z(\tau))^{\text{T}}C(\gamma)(\xi(\tau)-z(\tau)) + $$
$$+u^{\text{T}}(\tau)D(\gamma)u(\tau)\Big]d\tau + \big(\xi(T_f)-z(T_f)\big)^{\text{T}}E(\gamma)\times$$
$$\times\frac{\big(\xi(T_f)-z(T_f)\big)}{x(0)=x_0}, \gamma(0)=\gamma_0\Bigg\}, \tag{5}$$

где $C(\gamma)=C(\gamma)^{\text{T}}\geq 0$, $D(\gamma)=D(\gamma)^{\text{T}}>0$, $E(\gamma)=E(\gamma)^{\text{T}}\geq 0$ – весовые матрицы. Задача состоит в выборе такого управления $u(t)$, при котором достигается минимум критерия (5).

СИНТЕЗ СЛЕДЯЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Зададим структуру следящей системы управления в виде

$$u(t) = K(\gamma, t)y(t) + \omega(\gamma, t)\,, \tag{6}$$

где $K(\gamma,t)$ и $\omega(\gamma,t)$ подлежат определению из условия минимума критерия (5). Так как $\gamma(t)$ принимает конечное число значений, введем следующие обозначения:

$A(\gamma_i)=A_i$, $B(\gamma_i)=B_i$, $A_s(\gamma_i)=A_s^{(i)}$, $B_s(\gamma_i)= B_s^{(i)}$, $C(\gamma_i)=C_i$, $D(\gamma_i)=D_i$, $E(\gamma_i)=E_i$, $S(\gamma_i)=S_i$ (i=1, 2,…, r).

Теорема 1. Матрица оптимальных коэффициентов передачи $K(\gamma_i,t)=K_i(t)$ и вектор $\omega(\gamma_i,t)=\omega_i(t)$ имеют вид

$$ctK_i(t) = -\Big[\big(\overline{D}_i\otimes\Gamma_i - D_i\otimes\overline{\Gamma}_i\big)\Big]^{-1}\times$$
$$\times ct\Big[B_i^{\text{T}}L_i\big(N_i - \overline{x}^{(i)}\overline{x}^{(i)\text{T}}\big)S_i^{\text{T}}\Big]; \tag{7}$$

$$\omega_i(t) = -\Big(K_iS_i\overline{x}^{(i)} + D^{-1}B_i^{\text{T}}\big(g^{(i)}+L_i\overline{x}^{(i)}\big)\Big); \tag{8}$$

$$(\ \overline{D}_i = \sum_{s=1}^{m_2} B_s^{(i)\text{T}}L_iB_s^{(i)} + D_i\,,\ \Gamma_i = S_iN_iS_i^{\text{T}} + V\,,$$
$$\overline{\Gamma}_i = S_i\overline{x}^{(i)}\overline{x}^{(i)\text{T}}S_i^{\text{T}}\ ),$$

если существуют матрицы $N_i(t)>0$, $L_i(t)>0$ и векторы $\overline{x}^{(i)}$, $g^{(i)}$, удовлетворяющие следующей двухточечной краевой задаче:

$$\dot{N}_i = \widetilde{A}_iN_i + N_i\widetilde{A}_i^{\text{T}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} p_{ij}\big(N_j - N_i\big) + \widetilde{Q}_i + $$
$$+\sum_{s=1}^{m_1} A_s^{(i)}N_iA_s^{(i)\text{T}} + \sum_{s=1}^{m_2} S_i^{\text{T}}K_i^{\text{T}}B_s^{(i)\text{T}}N_iB_s^{(i)}K_iS_i\,,$$
$$N_i(0) = \text{M}\,\big\{x_0x_0^{\text{T}}/\gamma(0)=\gamma_i\big\}, \tag{9}$$
$$\dot{\overline{x}}^{(i)} = \widetilde{A}_i\overline{x}^{(i)} + B_i\omega_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} p_{ij}\big(\overline{x}^{(j)} - \overline{x}^{(i)}\big),$$

$$\overline{x}^{(i)}(0) = \mathrm{M}\{x_0 / \gamma(0) = \gamma_i\}, \tag{10}$$

$$-\dot{L}_i = L_i\widetilde{A} + \widetilde{C}_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} p_{ij}(L_j - L_i) + \sum_{s=1}^{m_1} A_s^{(i)} L_i A_s^{(i)\mathrm{T}} +$$

$$+ S_i^{\mathrm{T}} K_i^{\mathrm{T}} D_i K_i S_i + \widetilde{A}_i^{\mathrm{T}} L_i + \sum_{s=1}^{m_2} S_i^{\mathrm{T}} K_i^{\mathrm{T}} B_s^{(i)\mathrm{T}} L_i B_s^{(i)} K_i S_i,$$

$$L_i(T_f) = R^{\mathrm{T}} E R; \tag{11}$$

$$-\dot{g}^{(i)} = \widetilde{A}_i^{\mathrm{T}} g^{(i)} - R^{\mathrm{T}} C_i z + L_i B_i \omega_i + S_i^{\mathrm{T}} K_i^{\mathrm{T}} D_i^{\mathrm{T}} \omega_i +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} p_{ij}\left(g_j - g_i\right), \quad g_i\left(T_f\right) = -R^{\mathrm{T}} E z\left(T_f\right). \tag{12}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\widetilde{A}_i = A_i + B_i K_i S_i, \ \widetilde{Q}_i = Q_i + B_i \omega_i \overline{x}^{(i)\mathrm{T}} + \overline{x}^{(i)} \omega_i^{\mathrm{T}} B_i +$$

$$+ B_i K_i V_i K_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}}, \ \widetilde{C}_i = R^{\mathrm{T}} C R, \ (i = 1, 2, ..., r), \tag{13}$$

в (7) $\otimes$ – кронекеровское произведение; $ct(\cdot)$ – вектор-столбец, составленный из элементов строк матрицы.

Доказательство. Вычислим значение критерия при управлении (6):

$$J_i[t, T_f] = \frac{1}{2}\mathrm{M}\left\{\int_t^{T_f} \left[(\xi(\tau) - z(\tau))^{\mathrm{T}} C_i (\xi(\tau) - z(\tau)) + \right.\right.$$

$$\left. + u^{\mathrm{T}}(\tau) D_i u(\tau)\right] d\tau + \left(\xi\left(T_f\right) - z\left(T_f\right)\right)^{\mathrm{T}} E_i \left(\xi\left(T_f\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{z\left(T_f\right)\big)}{\gamma(t) = \gamma_i}\right\}. \tag{14}$$

В результате получим

$$J_i\left[t, T_f\right] = \frac{1}{2}\int_t^{T_f} \left[\ \mathrm{tr} N_i \left(\widetilde{C}_i + S_i^{\mathrm{T}} K_i^{\mathrm{T}} D_i K_i S_i\right) - \right.$$

$$- 2 z^{\mathrm{T}} C_i R \overline{x}^{(i)} + z^{\mathrm{T}} C_i z + 2\omega_i^{\mathrm{T}} D_i K_i S_i \overline{x}^{(i)} +$$

$$\left. + \omega_i^{\mathrm{T}} D_i \omega_i\right] d\tau + tr\frac{1}{2} N_i\left(T_f\right) R^{\mathrm{T}} E_i R - z^{\mathrm{T}}\left(T_f\right) \times$$

$$\times E_i R \overline{x}^{(i)}\left(T_f\right) + \frac{1}{2} z^{\mathrm{T}}\left(T_f\right) E_i z\left(T_f\right), \tag{15}$$

где $N_i = \mathrm{M}\{x(t)x(t)^{\mathrm{T}}/\gamma(t) = \gamma_i\}$, $\overline{x}^{(i)} = \mathrm{M}\{x(t)/\gamma(t) = \gamma_i\}$, tr – обозначает след матрицы. Выберем в качестве функции Ляпунова выражение

$$V\left(t, \overline{x}^{(i)}, N_i, i\right) = \psi_i + g^{(i)\mathrm{T}} \overline{x}^{(i)} + \frac{1}{2}\mathrm{tr} L_i N_i +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\int_t^{T_f} L_i \overline{Q}_i d\tau, \tag{16}$$

где $\overline{Q}_i \geq 0$ – некоторые матрицы, такие, что

$$\overline{Q}_i \geq \widetilde{Q}_i + Q. \tag{17}$$

Входящие в (16) ψ_i, $g^{(i)}$ и L_i удовлетворяют уравнениям

$$-\dot{\psi}_i = \frac{1}{2} z^{\mathrm{T}} C_i z + \frac{1}{2}\omega_i^{\mathrm{T}} D_i \omega_i + g^{(i)\mathrm{T}} B_i \omega_i +$$

$$+ \frac{1}{2} tr Q_i L_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} p_{ij}\left(\psi_j - \psi_i\right),$$

$$\psi\left(T_f\right) = \frac{1}{2} z^{\mathrm{T}}\left(T_f\right) E_i z\left(T_f\right), \tag{18}$$

$$-\dot{g}^{(i)} = \left(A_i + B_i K_i S_i\right)^{\mathrm{T}} g^{(i)} - R^{\mathrm{T}} C_i z +$$

$$+ S_i^{\mathrm{T}} K_i^{\mathrm{T}} D_i^{\mathrm{T}} \omega_i + L_i B_i \omega_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} p_{ij}\left(g^{(j)} - g^{(i)}\right),$$

$$g^{(i)}\left(T_f\right) = -R^{\mathrm{T}} E_i z\left(T_f\right), \tag{19}$$

$$-\dot{L}_i = L_i\left(A_i + B_i K_i S_i\right) + \left(A_i + B_i K_i S_i\right)^{\mathrm{T}} L_i + \overline{C}_i +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} p_{ij}\left(L_j - L_i\right), \quad L_i\left(T_f\right) = R^{\mathrm{T}} E_i R. \tag{20}$$

В (20) $\overline{C}_i$ – некоторые неотрицательно определенные матрицы. Первые три слагаемые в представлении функции Ляпунова (16) являются значением критерия (15) при управлении (6), в котором ψ_i, $g^{(i)}$ и L_i определяются из (18)–(20), последнее слагаемое в (16) также неотрицательно при $L_i > 0$, $\overline{Q}_i \geq 0$, поэтому функция Ляпунова (16) неотрицательна. Найдем полную производную функции Ляпунова:

$$\frac{d}{dt} V\left(t, \overline{x}^{(i)}, N_i, i\right) = \dot{\psi}_i + \dot{g}^{(i)T} \overline{x}^{(i)} + g^{(i)\mathrm{T}} \dot{\overline{x}}^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\dot{L}_i N_i + L_i \dot{N}_i - L_i \overline{Q}_i\right). \tag{21}$$

Проинтегрируем по времени полную производную функции (21), учитывая уравнения для N_i (9) и $\overline{x}^{(i)}$ (10):

$$\int_t^{T_f} \frac{d}{d\tau} V(\tau, \overline{x}^{(i)}, N_i, i) d\tau = \int_t^{T_f} \left[\dot{\psi}_i + \dot{g}^{(i)T} \overline{x}^{(i)} + \right.$$

$$\left. + g^{(i)T} \dot{\overline{x}}^{(i)} + \frac{1}{2} tr\left(\dot{L}_i N_i + L_i \dot{N}_i - L_i \overline{Q}_i\right)\right] d\tau =$$

$$= \int_t^{T_f} \{ g^{(i)T}\left(A_i + B_i K_i S_i\right) \overline{x}^{(i)} + g^{(i)T} B_i \omega_i + \dot{\psi}_i +$$

$$+ g^{(i)T} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} p_{ij}\left(\overline{x}^{(j)} - \overline{x}^{(i)}\right) + \dot{g}^{(i)T} \overline{x}^{(i)} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\dot{L}_i N_i - L_i \overline{Q}_i\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{tr} L_i \left[\left(A_i + B_i K_i S_i\right) N_i + N_i \left(A_i + B_i K_i S_i\right)^{\mathrm{T}} + \right.$$

$$+ \widetilde{Q}_i + \sum_{s=1}^{m_1} A_s^{(i)} N_i A_s^{(i)\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m_2} S_i^{\mathrm{T}} K_i^{\mathrm{T}} \times$$

$$\left.\left. \times B_s^{(i)\mathrm{T}} N_i B_s^{(i)} K_i S_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} p_{ij}\left(N_j - N_i\right)\right]\right\} d\tau. \tag{22}$$

Также интеграл полной производной функции Ляпунова (21) имеет следующий вид:

$$\int_t^{T_f} \frac{d}{d\tau} V\left(\tau, \overline{x}^{(i)}, N_i, i\right) d\tau = \psi_i\left(T_f\right) + g^{(i)T}\left(T_f\right) \times$$

$$\times \overline{x}^{(i)}\left(T_f\right) + \frac{1}{2} tr L_i\left(T_f\right) N_i\left(T_f\right) - \psi_i(t) - g^{(i)T}(t) \times$$

$$\times \overline{x}^{(i)}(t) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(L_i(t) N_i(t) - \int_t^{T_f} L_i \overline{Q}_i d\tau\right). \tag{23}$$

Учитывая (22) и (23), критерий (15) представим в форме:

$$J_i\left[t, T_f\right] = \int_t^{T_f} \left\{ \mathrm{tr}\frac{1}{2} N_i \left(\widetilde{C}_i + S_i^{\mathrm{T}} K_i^{\mathrm{T}} D_i K_i S_i\right) + g^{(i)T} \overline{x}^{(i)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\dot{L}_i N_i + \dot{\psi}_i - z^{\mathrm{T}} C_i \times R \overline{x}^{(i)} + g^{(i)T} \overline{x}^{(i)} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\dot{L}_i N_i +$$

$$+ \dot{\psi}_i - z^{\mathrm{T}} C_i \times R \overline{x}^{(i)} + \frac{1}{2}\left(z^{\mathrm{T}} C_i z + \omega_i^{\mathrm{T}} D_i \omega_i\right) +$$

$$+ \left(\omega_i^{\mathrm{T}} D_i + g^{(i)T} B_i\right) K_i S_i \overline{x}^{(i)} + g^{(i)T} B_i \omega_i +$$

$$+ g^{(i)T} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} p_{ij} \times \left(\overline{x}^{(j)} - \overline{x}^{(i)}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr} L_i \left[\left(A_i + B_i K_i S_i\right) N_i + \right.$$

$$+N_i\left(A_i+B_iK_iS_i\right)^{\mathrm T}+Q+B_i\omega_i\bar{x}^{(i)\mathrm T}+\bar{x}^{(i)}\times\omega_i^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\left(N_j-N_i\right)+\sum_{s=1}^{m_1}A_s^{(i)}N_iA_s^{(i)\mathrm T}+$$

$$\left.\left.+\sum_{s=1}^{m_2}S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}B_s^{(i)\mathrm T}N_iB_s^{(i)}K_iS_i\right]\right\}d\tau+$$

$$+\psi_i(t)+g^{(i)\mathrm T}(t)\bar{x}^{(i)}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}L_i(t)N_i(t)-\frac{1}{2}\psi_i\left(T_f\right).\qquad(24)$$

Применяя правила дифференцирования скалярной функции по матричному аргументу [9] к формуле (24) из условия $dJ_i\left[t,T_f\right]/dK_i=0$ получим следующее уравнение:

$$\overline{D}_iK_i\Gamma_i+B_i^{\mathrm T}L_iN_iS_i^{\mathrm T}+D_i\omega_i\bar{x}^{(i)\mathrm T}S_i^{\mathrm T}+B_i^{\mathrm T}g^{(i)}\bar{x}^{(i)\mathrm T}S_i^{\mathrm T}=0.\qquad(25)$$

Из $dJ_i\left[t,T_f\right]/d\omega_i=0$ получим уравнение для ω_i:

$$D_i\omega_i+D_iK_iS_i\bar{x}^{(i)}+B_i^{\mathrm T}g^{(i)}+B_i^{\mathrm T}L_i\bar{x}^{(i)}=0.\qquad(26)$$

Из уравнения (26) по формуле (8) определяются оптимальные ω_i, подставляя которые в уравнение (25), получим уравнение для вычисления оптимальной матрицы K_i:

$$\overline{D}_i\,K_i\Gamma_i-D_iK_i\overline{\Gamma}_i+B_i^{\mathrm T}L_i(N_i-\bar{x}^{(i)}\bar{x}^{(i)\mathrm T})S_i^{\mathrm T}=0.\qquad(27)$$

Тогда, применяя метод решения матричных уравнений [10], в силу (27) K_i определится по формуле (7).

Найдем в уравнении для L_i. (20) выражение для матрицы $\overline{C}_i$ такое, чтобы критерий (24) был минимальным. Для этого правую часть (20) подставим вместо $\dot{L}_i$ в (24):

$$J_i[t,T_f]=\int_t^{T_f}\left\{tr\frac{1}{2}N_i\left(\widetilde{C}_i+S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}D_iK_iS_i\right)+g^{(i)T}A_i\bar{x}^{(i)}+\right.$$

$$+\dot{\psi}_i+\dot{g}^{(i)T}\bar{x}^{(i)}-z^{\mathrm T}C_iR\bar{x}^{(i)}+\frac{1}{2}\left(z^{\mathrm T}C_iz+\omega_i^{\mathrm T}D_i\omega_i\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(z^{\mathrm T}C_iz+\omega_i^{\mathrm T}D_i\omega_i\right)+\left(\omega_i^{\mathrm T}D_i+g^{(i)T}B_i\right)\times K_iS_i\bar{x}^{(i)}+$$

$$+g^{(i)T}B_i\omega_i+g^{(i)T}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\left(\bar{x}^{(j)}-\bar{x}^{(i)}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\overline{C}_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\left(L_j-L_i\right)\right)N_i+\frac{1}{2}\mathrm{tr}L_i\times$$

$$\times\left[\widetilde{Q}_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\left(N_j-N_i\right)+\sum_{s=1}^{m_1}A_s^{(i)}N_iA_s^{(i)\mathrm T}+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s=1}^{m_2}S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}B_s^{(i)\mathrm T}N_iB_s^{(i)}K_iS_i\right]\right\}d\tau+\psi_i(t)+$$

$$+g^{(i)\mathrm T}(t)\bar{x}^{(i)}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}L_i(t)N_i(t)-\frac{1}{2}\psi_i(T_f).\qquad(28)$$

Выполнив преобразования, получим

$$J_i[t,T_f]=\int_t^{T_f}\left\{\mathrm{tr}\frac{1}{2}N_i\left(\widetilde{C}_i+S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}D_iK_iS_i+\sum_{s=1}^{m_1}A_s^{(i)}\times L_iA_s^{(i)\mathrm T}+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{m_2}S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}B_s^{(i)\mathrm T}L_iB_s^{(i)}K_iS_i-\overline{C}_i\right)+g^{(i)T}A_i\times\bar{x}^{(i)}+$$

$$+\dot{\psi}_i+\dot{g}^{(i)T}\bar{x}^{(i)}-z^{\mathrm T}C_iR\bar{x}^{(i)}+\frac{1}{2}\left(z^{\mathrm T}C_iz+\omega_i^{\mathrm T}D_i\omega_i\right)+$$

$$+\left(\omega_i^{\mathrm T}D_i+g^{(i)T}B_i\right)K_iS_i\bar{x}^{(i)}+g^{(i)T}B_i\times\omega_i+$$

$$+g^{(i)T}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\left(\bar{x}^{(j)}-\bar{x}^{(i)}\right)-\frac{1}{2}tr\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\left(L_j-L_i\right)N_i+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}L_i\left(\widetilde{Q}_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\left(N_j-N_i\right)\right)d\tau+\psi_i(t)+$$

$$+g^{(i)\mathrm T}(t)\bar{x}^{(i)}(t)+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}L_i(t)N_i(t)-\psi_i(T_f)).\qquad(29)$$

Так как значение критерия (29) должно быть всегда неотрицательным, то его минимум достигается при

$$\overline{C}_i=\widetilde{C}_i+S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}D_iK_iS_i+\sum_{s=1}^{m_1}A_s^{(i)}L_iA_s^{(i)\mathrm T}+$$

$$+\sum_{s=1}^{m_2}S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}B_s^{(i)\mathrm T}L_iB_s^{(i)}K_iS_i.\qquad(30)$$

Покажем, что полная производная функции Ляпунова (16) при матрице K_i, равной (7), отрицательна. Это необходимо для обеспечения устойчивости в среднеквадратическом [11]. Учитывая (18)–(20) и (30), получим

$$\frac{d}{dt}V\left(t,\bar{x}^{(i)},N_i,i\right)=-\frac{1}{2}\left(z^{\mathrm T}C_iz+\omega_i^{\mathrm T}D_i\omega_i\right)+$$

$$+z^{\mathrm T}C_iR\bar{x}^{(i)}-\left(S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}D_i^{\mathrm T}\omega_i+L_iB_i\omega_i\right)^{\mathrm T}\bar{x}^{(i)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}D_iK_iS_i+R^{\mathrm T}C_iR\right)N_i-\frac{1}{2}\mathrm{tr}L_i\times\left(\overline{Q}_i-\widetilde{Q}_i+Q\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\left(L_j-L_i\right)N_i+\frac{1}{2}\mathrm{tr}L_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\left(N_j-N_i\right)-$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(g^{(j)}-g^{(i)})^{\mathrm T}p_{ij}\bar{x}^{(i)}-$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}(\psi_j-\psi_i)+g_i^{\mathrm T}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}(\bar{x}^{(j)}-\bar{x}^{(i)}).\qquad(31)$$

Приведя подобные и в силу равенства

$$\mathrm{tr}R^{\mathrm T}C_iRN_i=\mathrm{M}\left\{\left(x^{(i)}-\bar{x}^{(i)}\right)^{\mathrm T}R^{\mathrm T}C_iR\left(x^{(i)}-\bar{x}^{(i)}\right)\right\}+$$

$$+\bar{x}^{(i)\mathrm T}R^{\mathrm T}C_iR\bar{x}^{(i)},\qquad(32)$$

преобразуем формулу (31)

$$\frac{d}{dt}V\left(t,\bar{x}^{(i)},N_i,i\right)=-\frac{1}{2}\left(z-R\bar{x}^{(i)}\right)^{\mathrm T}C_i\left(z-R\bar{x}^{(i)}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\omega_i^{\mathrm T}D_i\omega_i-\left(S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}D_i^{\mathrm T}\omega_i+L_iB_i\omega_i\right)^{\mathrm T}\bar{x}^{(i)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{M}\left\{\left(x^{(i)}-\bar{x}^{(i)}\right)^{\mathrm T}R^{\mathrm T}C_iR\times\left(x^{(i)}-\bar{x}^{(i)}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}S_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}D_iK_iS_iN_i-\rho_i,\qquad(33)$$

где

$$\rho_i=\frac{1}{2}\mathrm{tr}L_i\left(\overline{Q}_i-\widetilde{Q}_i+Q\right)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}p_{ij}\times\left[\mathrm{tr}\left(L_jN_i-L_iN_j\right)+\right.$$

$$\left.+\left(g^{(j)\mathrm T}\bar{x}^{(i)}-g^{(i)\mathrm T}\times\bar{x}^{(j)}\right)+\left(\psi_j-\psi_i\right)\right],\ i=1,2,...,r.\qquad(34)$$

Полная производная (33) будет отрицательной, так как значения ρ_i (34) всегда можно сделать положительными в силу (17), задавая матрицы $\overline{Q}_i\geq 0$. Теорема доказана.

СИНТЕЗ СЛЕДЯЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ

В стационарном случае при постоянном отслеживаемом сигнале вместо критерия (5) необходимо минимизировать критерий

$$\lim\sup_{T_f\to\infty}\frac{1}{T_f}J\left[0,T_f\right]. \qquad (35)$$

Предполагается, что пары матриц A_i, B_i (i=1, 2,…, r) стабилизируемы и в критерии (5) E_i=0. Задача синтеза при этом упрощается, так как уравнения (9)–(12) становятся алгебраическими:

$$\widetilde{A}_iN_i+N_i\widetilde{A}_i^{\mathrm{T}}+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r}p_{ij}\left(N_j-N_i\right)+\widetilde{Q}_i+\sum_{i=1}^{m_1}A_s^{(i)}\times N_iA_s^{(i)\mathrm{T}}+$$

$$+\sum_{s=1}^{m_2}S_i^{\mathrm{T}}K_i^{\mathrm{T}}B_s^{(i)\mathrm{T}}N_iB_s^{(i)}K_iS_i=0, \qquad (36)$$

$$\widetilde{A}_i\overline{x}^{(i)}+B_i\omega_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r}p_{ij}\left(\overline{x}^{(j)}-\overline{x}^{(i)}\right)=0\,; \qquad (37)$$

$$L_i\widetilde{A}_i+\widetilde{A}_i^{\mathrm{T}}L_i+\widetilde{C}_i+S_i^{\mathrm{T}}K_i^{\mathrm{T}}D_iK_iS_i+M_i=0\,; \qquad (38)$$

$$\widetilde{A}_i^{\mathrm{T}}g^{(i)}-R^{\mathrm{T}}C_iz+L_iB_i\omega_i+S_i^{\mathrm{T}}K_i^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}}\omega_i+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r}p_{ij}\left(g^{(j)}-g^{(i)}\right)=0, \qquad (39)$$

где

$$M_i=\sum_{s=1}^{m_1}A_s^{(i)}L_iA_s^{(i)\mathrm{T}}+\sum_{\substack{j=1\\ i\ne i}}^{r}p_{ij}\left(L_j-L_i\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{m_2}S_i^{\mathrm{T}}K_i^{\mathrm{T}}B_s^{(i)\mathrm{T}}L_iB_s^{(i)}K_iS_i. \qquad (40)$$

Постоянные оптимальные коэффициенты передачи K_i и векторы ω_i определятся по формулам

$$ctK_i=-\left[\left(\overline{D}_i\otimes\Gamma_i-D_i\otimes\overline{\Gamma}_i\right)\right]^{-1}\times$$

$$\times ct\left[B_i^{\mathrm{T}}L_i\left(N_i-\overline{x}^{(i)}\overline{x}^{(i)\mathrm{T}}\right)S_i^{\mathrm{T}}\right]; \qquad (41)$$

$$\omega_i=-\left(K_iS_i\overline{x}^{(i)}+D^{-1}B_i^{\mathrm{T}}\left(g^{(i)}+L_i\overline{x}^{(i)}\right)\right). \qquad (42)$$

Теорема 2. Если существует решение уравнений (36)–(39) и существуют числа β_i ($0<\beta_i<1$), такие, что матрицы, $L_i>0$, $\overline{M}_i=\widetilde{C}_i\beta_i+M_i\ge 0$ и пара матриц $\sqrt{\widetilde{C}_i}$, A_i детектируемы, то матрица $\widetilde{A}_i=A_i+B_iK_iS_i$ асимптотически устойчива (i=1, 2,…, r).

Доказательство. Учитывая, что $L_i>0$, $\overline{M}_i\ge 0$ и применяя теорему 3.6 [12], получим, что из условия детектируемости пары матриц $\sqrt{\widetilde{C}_i}$, A_i следует детектируемость пары матриц

$$\sqrt{(1-\beta_i)\widetilde{C}_i+S_i^{\mathrm{T}}K_i^{\mathrm{T}}D_iK_iS_i+\overline{M}_i}, \text{ и } A_i+B_iK_iS_i. \qquad (43)$$

В силу того, что (38) эквивалентно уравнению

$$\left(A_i+B_iK_iS_i\right)^{\mathrm{T}}L_i+L_i^{\mathrm{T}}\left(A_i+B_iK_iS_i\right)+$$

$$+\left(1-\beta_i\right)\widetilde{C}_i+S_i^{\mathrm{T}}K_i^{\mathrm{T}}D_iK_iS_i+\overline{M}_i=0, \qquad (44)$$

по лемме 12.2 [12] при $L_i>0$ и условии детектируемости пары матриц (43) следует, что матрицы $A_i+B_iK_iS_i$ (i=1, 2,…, r) устойчивы. Теорема доказана.

ПРИМЕР

Рассмотрим линейную систему второго порядка вида (1) с тремя состояниями $\gamma=\{1, 2, 3\}$. Матрицы, описывающие систему, имеют вид

$$A(1)=\begin{pmatrix}-0{,}04 & 0{,}1\\ -0{,}75 & 0{,}4\end{pmatrix},\ A(2)=\begin{pmatrix}0 & 0{,}3\\ -0{,}2 & 0{,}9\end{pmatrix},$$

$$A(3)=\begin{pmatrix}-0{,}2 & 0{,}4\\ -0{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix};\ B(1)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ B(2)=\begin{pmatrix}0{,}1\\ 1{,}5\end{pmatrix},$$

$$B(3)=\begin{pmatrix}-0{,}1\\ 0{,}5\end{pmatrix};\ p_{1,2}=0{,}05,\ p_{1,3}=0{,}2,$$

$$p_{2,1}=0{,}25,\ p_{2,3}=0{,}2,\ p_{3,1}=0{,}2,\ p_{3,2}=0{,}05,$$

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ Q(1)=\begin{pmatrix}0{,}03 & 0\\ 0 & 0{,}05\end{pmatrix},$$

$$Q(2)=\begin{pmatrix}0{,}02 & 0\\ 0 & 0{,}05\end{pmatrix},\ Q(3)=\begin{pmatrix}0{,}04 & 0\\ 0 & 0{,}05\end{pmatrix};$$

$$S(i)=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix};\ C(i)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ D(i)=0{,}1\,;$$

$$A_1(i)=\begin{pmatrix}0{,}006 & 0{,}07\\ 0{,}003 & 0{,}01\end{pmatrix},\ A_2(i)=\begin{pmatrix}0{,}004 & 0{,}07\\ 0{,}0035 & 0{,}05\end{pmatrix},$$

$$B_1(i)=\begin{pmatrix}0{,}001\\ 0{,}008\end{pmatrix},\ B_2(i)=\begin{pmatrix}0{,}002\\ 0{,}009\end{pmatrix}\ (i=1,2,\ldots,r).$$

В результате решения уравнений (35)–(38) были синтезированы следящие регуляторы со следующими параметрами: $K(1)=-1{,}997$; $K(2)=-1{,}008$; $K(3)=-3{,}210$; $\omega(1)=28{,}436$; $\omega(2)=5{,}929$; $\omega(3)=26{,}978$.

Отметим, что для исходной системы все матрицы $A(i)$ неустойчивы. В то же время для замкнутой системы выполнены условия теоремы 2 и матрицы динамики замкнутой системы $A(i)+B(i)K(i)S(i)$ устойчивые, при этом собственные значения матриц равны

$\lambda_1=-0{,}091$, $\lambda_2=-1{,}516$ при i=1;

$\lambda_1=-0{,}058$, $\lambda_2=-0{,}657$ при i=2;

$\lambda_1=-0{,}270$, $\lambda_2=-1{,}235$ при i=3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен алгоритм синтеза следящих регуляторов для линейных непрерывных объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями. Оптимизация критерия осуществлена по матрице коэффициентов передачи и входному вектору, зависящих от наблюдаемого скачкообразного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Лидский Э.А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами // Автоматика и телемеханика. Ч. I. 1961. № 9. С. 732–745; Там же. Ч. II. 1961. № 11. С. 1273–1278.
2. *Wonham W.M.* Random differential equation in control theory // Probabilistic methods in applied mathematics / Ed. A.T. Bharucha-Reid. N.Y.: Academ. Press, 1971. P.131–213.
3. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
4. *Mariton M.* Jump linear system in automatic control. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1990.
5. *Смагин В.И., Параев Ю.И.* Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996.
6. *De Farias P.D., Geromel J.C., Do Val J.B., Costa O.L.* Output feedback control of markov jump linear systems in continuous-time // IEEE trans. automat. Contr., 2000. V. AC 45, № 5. P. 944–949.
7. *Смагин В.И., Поползухина Е.В.* Синтез следящих систем управления для объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // Вестник Томского гос. ун-та. 2000. № 271. С. 171–175.

8. *Смагин В.И., Поползухина Е.В.* Синтез следящих регуляторов с обратной связью по выходу для систем со случайными скачкообразными параметрами // Автоматика и вычислительная техника. 2001. № 6. С. 62–72.
9. *Athans M.* The matrix minimum principle // Information and control. 1968. V.11. P. 592–606.
10. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
11. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
12. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика»12 апреля 2004 г.