

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ КАПИТАЛА ПРИ ПУАССОНОВСКОМ ПОТОКЕ МОМЕНТОВ ПОСТУПЛЕНИЯ ДОХОДОВ

Предложены две модели процесса изменения капитала компании. Проведено их исследование методами аналитического, численного анализа и имитационного моделирования. Найдены основные вероятностные характеристики стабильного функционирования компании.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Денежные средства любой компании можно разделить на две категории. К первой относятся средства, активно используемые компанией при проведении текущих операций. Ко второй – средства, выполняющие роль резервного фонда. Поскольку моменты изменения объема денежных средств на активном счете и величина этих изменений носит случайный характер, то для правильного планирования деятельности компании важно знать вероятность того, что в течение некоторого определенного периода времени она не обратится к резервному фонду. В связи с этим, актуальной является проблема разработки математических моделей стабильного функционирования компании в течение фиксированного интервала времени [1–3].

В данной работе рассмотрены две модели изменения объемов денежных средств на активном счете компании. Первая модель характеризуется тем, что моменты поступлений денежных средств образуют пуассоновский поток, а размеры поступлений средств являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с заданными первыми двумя начальными моментами. Расход средств со счета происходит непрерывно с заданной интенсивностью. Отличие второй модели состоит в том, что расход со счета происходит в случайные моменты времени. Моменты выплат образуют пуассоновский поток. Размер выплат денежных средств – так же независимые одинаково распределенные случайные величины с заданной функцией распределения.

Для предложенных моделей найдена вероятность того, что в течение определенного интервала времени на активном счете (в дальнейшем, счете) компании останется положительная сумма денежных средств. В работе использованы три метода исследования предложенных моделей: асимптотический анализ, имитационное моделирование и численный метод сеток.

### ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ

Обозначим через  $s(t)$  – случайный процесс изменения объема денежных средств на счете компании с течением времени. Пусть горизонтом планирования является интервал времени продолжительностью  $T$ . В начальный момент времени на счете находится капитал в размере  $s_0 > 0$ . В течение горизонта планирования  $T$  на счет в случайные моменты времени приходят поступления. Размер поступлений – случайная величина  $\xi$ , функцию распределения которой обозначим  $A(x)$ . Моменты увеличения капитала образуют простейший поток с интенсивностью  $\lambda$ .

В первой модели предполагается, что средства расходуются непрерывно с интенсивностью  $k$ . Во второй модели капитал уменьшается в случайные моменты времени на случайную величину  $\eta$ , имеющую функ-

цию распределения  $B(y)$ . Эти моменты образуют простейший поток с интенсивностью  $\mu$ .

Очевидно, случайный процесс  $s(t)$  является марковским.

Схематично динамика изменения денежных средств на счете для первой модели представлена на рис. 1, для второй – на рис. 2.

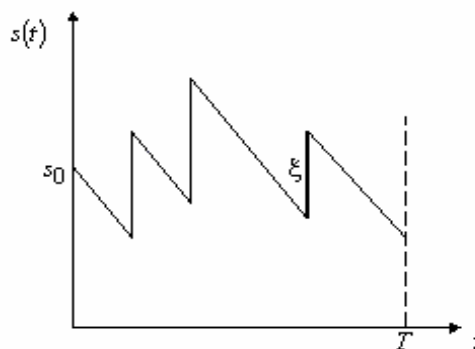


Рис.1

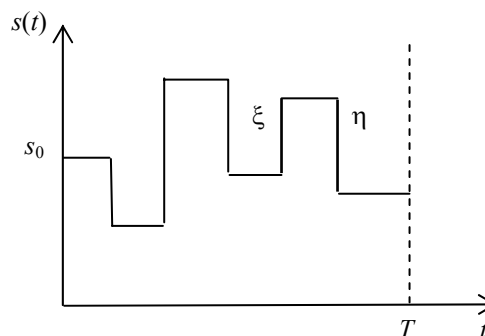


Рис.2

Ставится задача определения вероятности того, что случайный процесс  $s(t)$  в течение интервала времени продолжительностью  $T$  не достигает нижней границы  $s = 0$ .

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ СРЕДСТВ НА СЧЕТЕ

Обозначим через  $P(s, t)$  плотность распределения вероятностей процесса  $s(t)$  в момент времени  $t$ . Составим прямое уравнение Колмогорова для плотности  $P(s, t)$ . Рассмотрим интервал времени  $[t, t+\Delta t]$ . За этот промежуток времени длительности  $\Delta t$  могут произойти следующие события:

– с вероятностью  $\lambda \Delta t A'(x)dx + o(\Delta t)$  на счет поступают денежные средства в размере  $x \in [x, x+dx)$ , и капитал станет равным  $s+x$ ;

– с вероятностью  $1-\lambda \Delta t + o(\Delta t)$  не будет поступления средств. В то же время происходит постоянный расход средств, поэтому капитал станет равным  $s - k \Delta t$ .

Используя формулу полной вероятности, получим

$$P(s, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) P(s + k \Delta t, t) + \lambda \Delta t \int_0^s P(s - u, t) dA(u) + o(\Delta t). \quad (1)$$

Разложим функции  $P(s, t + \Delta t)$ ,  $P(s + k \Delta t, t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(s, t)$ , учитывая слагаемые первого порядка малости относительно  $\Delta t$ :

$$P(s, t + \Delta t) = P(s, t) + \Delta t \frac{\partial P(s, t)}{\partial t} + o(\Delta t), \quad (2)$$

$$P(s + k \Delta t, t) = P(s, t) + k \Delta t \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} + o(\Delta t).$$

Подставим (2) в (1). Затем поделим обе части уравнения на  $\Delta t$  и, переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\lambda P(s, t) = -\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} + k \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} + \lambda \int_0^s P(s - u, t) dA(u). \quad (3)$$

Уравнение (3) можно решить с использованием преобразования Лапласа. Трудность заключается в нахождении обратного преобразования. Поэтому решим последнее уравнение, используя асимптотический метод [4] в условии  $T \rightarrow \infty$ . В уравнении (3) обозначим  $1/T = \varepsilon^2$  и сделаем замену переменных

$$t\varepsilon^2 = \tau, \quad \varepsilon^2 s = x(\tau) + \varepsilon y, \quad P(s, t) = \pi(y, \tau, \varepsilon), \quad (4)$$

где  $x(\tau)$  определим ниже. Тогда

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial s} = \varepsilon \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y}.$$

В новых переменных уравнение (3) примет вид

$$\lambda \pi(y, \tau, \varepsilon) = -\varepsilon^2 \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \varepsilon (x'(\tau) + k) \times \times \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \lambda \int_0^\infty \pi(y - \varepsilon u, \tau, \varepsilon) dA(u). \quad (5)$$

Решение  $\pi(y, \tau, \varepsilon)$  в (5) ищем в виде разложения

$$\pi(y, \tau, \varepsilon) = \pi(y, \tau) + \varepsilon h(y, \tau) + o(\varepsilon). \quad (6)$$

Подынтегральную функцию в уравнении (5) разложим в ряд Тейлора до членов порядка  $o(\varepsilon^2)$ :

$$\pi(y - \varepsilon u, \tau, \varepsilon) = \pi(y, \tau, \varepsilon) - \varepsilon u \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2 u^2}{2} \frac{\partial^2 \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2). \quad (7)$$

Подставим в уравнение (5) разложения (6) и (7). Тогда, с учетом обозначения  $a_1 = \int_0^\infty u dA(u)$ ,  $a_2 = \int_0^\infty u^2 dA(u)$ , от уравнения (5) перейдем к уравнению

$$\varepsilon^2 ((x'(\tau) + k) \frac{\partial h(y, \tau)}{\partial y} - \lambda a_1 \frac{\partial h(y, \tau)}{\partial y} + \frac{\lambda a_2}{2} \frac{\partial^2 \pi(y, \tau)}{\partial y^2} - \frac{\partial \pi(y, \tau)}{\partial \tau}) + \varepsilon (x'(\tau) + k - \lambda a_1) \frac{\partial \pi(y, \tau)}{\partial y} = 0.$$

Найдем функцию  $x(\tau)$  из условия равенства нулю коэффициента при  $\varepsilon$ . Тогда получаем

$$x'(\tau) = \lambda a_1 - k, \quad (8)$$

где  $x(0) = x_0$ ,  $x_0 = s_0 / T = \varepsilon^2 s_0$ .

Определим смысл функции  $x(\tau)$ . Параметры уравнения (8) имеют следующий экономический смысл:  $k$  – количество расходуемых денежных средств в единицу времени;  $\lambda$  – среднее число поступлений денежных средств в единицу времени;  $a_1$  – средняя величина поступающих денежных средств, следовательно,  $\lambda a_1$  – среднее количество денежных средств, поступивших за единичный интервал времени. Таким образом, функция  $x(\tau)$  – это асимптотически среднее значение денежных средств в момент времени  $\tau$ .

С учетом (8) от (5) перейдем к уравнению

$$\frac{\partial \pi(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda a_2}{2} \frac{\partial^2 \pi(y, \tau)}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Уравнение (9) – прямое уравнение Колмогорова [5]

для плотности распределения вероятностей  $\pi(y, \tau)$  значений некоторого диффузионного процесса с нулевым коэффициентом переноса и коэффициентом диффузии  $\lambda a_2$ . Обозначим этот случайный процесс через  $y(\tau)$ .

По виду прямого уравнения Колмогорова (9) становится очевидным, что диффузионный процесс  $y(\tau)$  определяется уравнением

$$dy(\tau) = \sqrt{\lambda a_2} dw(\tau), \quad (10)$$

где  $w(\tau)$  – винеровский процесс. Введем случайный процесс

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \quad (11)$$

дифференциал которого с учетом (8) и (10) имеет вид

$$dz(\tau) = (\lambda a_1 - k) d\tau + \varepsilon \sqrt{\lambda a_2} dw(\tau). \quad (12)$$

Следовательно,  $z(\tau)$  – это диффузионный процесс с коэффициентами переноса  $\lambda a_1 - k$  и диффузии  $\varepsilon^2 \lambda a_2$ .

Обозначим  $T(\tau)$  – длина интервала от момента  $\tau$  до момента достижения процессом  $z(\tau)$  нулевого значения. В предположении, что расходуются денежные средства больше, чем поступает, то есть  $k > \lambda a_1$ , найдем условную характеристическую функцию для  $T(\tau)$ :

$$g(u, z) = M \{ \exp \{ iu T(\tau) \} | z(\tau) = z \}. \quad (13)$$

Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени  $\Delta \tau$ , тогда

$$g(u, z) = M_{\Delta \tau} \{ M \{ \exp \{ iu T(\Delta \tau + T(\tau + \Delta \tau)) \} | z(\tau + \Delta \tau) = z + \Delta z \} \}. \quad (14)$$

Учитывая свойства математического ожидания, соотношение (14) перепишем в виде

$$g(u, z) = \exp \{ iu \Delta \tau \} M_{\Delta \tau} \{ g(u, z + \Delta z) \}.$$

Разложим функции  $g(u, z + \Delta z)$  и  $\exp \{ iu \Delta \tau \}$  в ряды Тейлора, тогда

$$g(u, z) = (1 + iu \Delta \tau + o(\Delta \tau)) (g(u, z) + \frac{\partial g(u, z)}{\partial z} M \{ \Delta z \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(u, z)}{\partial z^2} M \{ (\Delta z)^2 \} + M \{ \rho(\Delta z)^2 \}). \quad (15)$$

В результате предельного перехода при  $\Delta \tau \rightarrow 0$  уравнение (15) перейдет в однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda a_2 \frac{\partial^2 g(u, z)}{\partial z^2} - (k - \lambda a_1) \frac{\partial g(u, z)}{\partial z} + iug(u, z) = 0, \quad (16)$$

для решения которого составляем характеристическое уравнение

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda a_2 p^2 - (k - \lambda a_1)p + iu = 0,$$

и корни которого

$$p_1 = \frac{i u}{k - \lambda a_1} - \frac{\varepsilon^2 \lambda a_2 u^2}{(k - \lambda a_1)^3},$$

$$p_2 = -\frac{i u}{k - \lambda a_1} + \frac{\varepsilon^2 \lambda a_2 u^2}{(k - \lambda a_1)^3} + \frac{2(k - \lambda a_1)}{\varepsilon^2 \lambda a_2}$$

найлены при использовании разложения  $\sqrt{1 - \frac{2\varepsilon^2 \lambda a_2 i u}{(k - \lambda a_1)^2}}$

по малому параметру. Тогда общее решение уравнения (16) имеет вид  $g(u, z) = c_1 \exp\{p_1 z\} + c_2 \exp\{p_2 z\}$ .

Определим константы  $c_1$  и  $c_2$ . Поскольку характеристическая функция ограничена,  $|g(u, z)| \leq 1$ , и выполняется условие  $k > \lambda a_1$ , то второй корень характеристического уравнения теряет смысл. Поэтому полагаем  $c_2 = 0$ . Из условия  $g(u, 0) = 1$  следует, что  $c_1 = 1$ .

Окончательно характеристическая функция принимает вид

$$g(u, z) = \exp\left\{\frac{i u z}{k - \lambda a_1} - \frac{\varepsilon^2 \lambda a_2 u^2 z}{(k - \lambda a_1)^3}\right\}. \quad (17)$$

Функция (17) соответствует [5] характеристической функции нормально распределенной случайной величины  $\zeta$  с математическим ожиданием  $M\{\zeta\} = \frac{z}{k - \lambda a_1}$  и

$$\text{дисперсией } D\{\zeta\} = \frac{2\lambda a_2 z}{T(k - \lambda a_1)^3}.$$

Заметим, что величина  $z$  имеет смысл фиксированного значения процесса  $z(\tau)$  в момент времени  $\tau$ , т.е.  $z(\tau) = z$ .

Стабильным функционированием компании назовем ситуацию, когда денежные средства на счете остаются положительными. Найдем вероятность того, что предприятие стабильно функционирует в течение времени  $T$ . В силу выполненных замен

$$P(\zeta > 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_1^\infty \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx, \quad (18)$$

где

$$a = \frac{s_0}{T(k - \lambda a_1)}, \quad \sigma^2 = \frac{2s_0\lambda a_2}{T^2(k - \lambda a_1)^3}. \quad (19)$$

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ СРЕДСТВ НА СЧЕТЕ

Выпишем уравнение для нахождения плотности распределения вероятностей процесса  $s(t)$  в условиях второй модели

$$P(s, t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t)P(s, t) +$$

$$+ \lambda\Delta t \int_0^s P(s-u, t) dA(u) +$$

$$+ \mu\Delta t \int_0^s P(s+u, t) dB(u) + o(\Delta t). \quad (20)$$

Продлав преобразования, получим уравнение

$$(\lambda + \mu)P(s, t) = -\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} + \lambda \int_0^s P(s-u, t) dA(u) +$$

$$+ \mu \int_0^s P(s+u, t) dB(u). \quad (21)$$

Сделав замену переменных (4) в уравнении (21), получим уравнение

$$(\lambda + \mu)\pi(y, \tau, \varepsilon) = -\varepsilon^2 \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} +$$

$$+ \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \lambda \int_0^\infty \pi(y - \varepsilon u, \tau, \varepsilon) dA(u) +$$

$$+ \mu \int_0^\infty \pi(y + \varepsilon u, \tau, \varepsilon) dB(u), \quad (22)$$

которое будем решать аналогично случаю первой модели.

Результатом является уравнение для определения функции  $x'(\tau)$  – асимптотического среднего значения денежных средств в момент времени  $\tau$  следующего вида:

$$x'(\tau) = \lambda a_1 - \mu b_1, \quad (23)$$

где обозначено  $a_1 = \int_0^\infty u dA(u)$ ,  $b_1 = \int_0^\infty u dB(u)$ , и уравнение

Фоккера–Планка для плотности распределения вероятностей случайного процесса  $y(\tau)$  вида

$$\frac{\partial \pi(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{(\lambda a_2 + \mu b_2)}{2} \frac{\partial^2 \pi(y, \tau)}{\partial y^2} \quad (24)$$

с коэффициентом переноса, равным нулю, и коэффициентом диффузии  $\lambda a_2 + \mu b_2$ , где  $a_2 = \int_0^\infty u^2 dA(u)$ ,  $b_2 = \int_0^\infty u^2 dB(u)$ .

Следовательно, диффузионный процесс  $y(\tau)$  определяется уравнением

$$dy(\tau) = \sqrt{\lambda a_2 + \mu b_2} dw(\tau), \quad (25)$$

где  $w(\tau)$  – винеровский процесс. Введем случайный процесс  $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau)$ . Это диффузионный процесс с коэффициентом переноса  $\lambda a_1 - \mu b_1$  и коэффициентом диффузии  $\varepsilon^2(\lambda a_2 + \mu b_2)$ , поскольку

$$dz(\tau) = (\lambda a_1 - \mu b_1) d\tau + \varepsilon \sqrt{\lambda a_2 + \mu b_2} dw(\tau). \quad (26)$$

Найдем  $g(u, z) = M\{\exp\{iuT(\tau)\} | z(\tau) = z\}$  – условную характеристическую функцию  $T(\tau)$  – длины интервала от момента  $\tau$  до момента достижения процессом  $z(\tau)$  нулевого значения. Аналогично первой модели уравнение для определения  $g(u, z)$  имеет вид

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2(\lambda a_2 + \mu b_2) \frac{\partial^2 g(u, z)}{\partial z^2} -$$

$$- (\mu b_1 - \lambda a_1) \frac{\partial g(u, z)}{\partial z} + i u g(u, z) = 0. \quad (27)$$

Решение уравнения (27)

$$g(u, z) = \exp\left\{\frac{i u z}{\mu b_1 - \lambda a_1} - \frac{\varepsilon^2(\lambda a_2 + \mu b_2) u^2 z}{(\mu b_1 - \lambda a_1)^3}\right\} \quad (28)$$

соответствует характеристической функции нормально распределенной случайной величины  $\zeta$ , имеющей математическое ожидание  $M\{\zeta\} = \frac{z}{\mu b_1 - \lambda a_1}$  и дисперсию

$$D\{\zeta\} = \frac{2(\lambda a_2 + \mu b_2) z}{T(\mu b_1 - \lambda a_1)^3}.$$

Тогда вероятность стабильного функционирования предприятия в течение интервала времени длительности  $T$  в условиях второй модели определяется соотношением (18), где

$$a = \frac{s_0}{T(\mu b_1 - \lambda a_1)}, \quad \sigma^2 = \frac{2s_0(\lambda a_2 + \mu b_2)}{T^2(\mu b_1 - \lambda a_1)^3}. \quad (29)$$

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Выше исследованы две модели изменения объемов денежных средств на активном счете. Для оценки границ применимости асимптотического подхода была построена имитационная модель изменения объемов денежных средств на счете компании для второй модели. Имитационное моделирование проводилось для трех различных комбинаций функций распределений величин доходов и расходов: экспоненциальное – экспоненциальное, равномерное – экспоненциальное, экспоненциальное – детерминированное. Сравнение теоретических результатов и полученных экспериментальных данных проводилось в пакете прикладных программ Statistica 6.0. Полученные результаты подтвердили нормальное распределение времени стабильного функционирования компании при интервалах времени  $T \geq 10000$  и различных начальных суммах  $s_0 \geq 1000$ , средней величине поступлений денежных средств  $a_1 = 95$  и средней величине расхода  $b_1 = 400$  ( $\mu = 1,25$ ;  $\lambda = 4,35$ ). По результатам моделирования сравнили модели по вероятности стабильного функционирования предприятия. При выбранных значениях параметров первая модель предпочтительнее второй.

## ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для двух рассматриваемых моделей численно найдем

$$P(s, t) = P(s(u) > 0, t \leq u \leq T | s(t) = s) \quad (30)$$

– вероятность того, что, начиная с текущего момента времени, до момента  $T$  предприятие будет функционировать стабильно. В условиях первой модели уравнение для нахождения вероятности имеет вид

$$P(s, t - \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)P(s - k \Delta t, t) + \lambda \Delta t \int_0^s P(s - u, t) dA(u). \quad (31)$$

Полученное уравнение является интегрально-разностным, и его можно использовать для нахождения искомой вероятности численным методом сеток. Проведя стандартные преобразования уравнения (31), получаем

$$-\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = -\lambda P(s, t) - k \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} + \lambda \int_0^s P(s - u, t) dA(u). \quad (32)$$

Частную производную, стоящую в левой части уравнения, по определению можно представить

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(s, t) - P(s, t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

Тогда

$$P(s, t - \Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} P(s, t) - \Delta t \frac{\partial P(s, t)}{\partial t}. \quad (33)$$

Используя соотношение (33), преобразуем уравнение (32). Получаем [6] разностное уравнение

$$P(s, t - \Delta t) = P(s, t) - \Delta t (\lambda P(s, t) - \lambda \int_0^s P(s - u, t) dA(u) + k \frac{P(s, t) - P(s - \Delta s, t)}{\Delta s}), \quad (34)$$

позволяющее варьировать параметры модели.

Для второй модели разностное уравнение для численного нахождения вероятностей имеет вид

$$P(s, t - \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t)P(s, t) + \lambda \Delta t (1 - \mu \Delta t) \int_0^\infty P(s + u, t) dA(u) + \mu \Delta t (1 - \lambda \Delta t) \int_0^s P(s - u, t) dB(u). \quad (35)$$

Применение метода сеток [7] требует задание ограничений. Область, в которой вычисляется вероятность, ограничена минимальным и максимальным возможным объемом денежных средств на счете и сроком его функционирования.

Пусть объем денежных средств на счете изменяется от 0 до  $S$ , а длина интервала времени, на котором рассматривается функционирование счета, равна  $T$ . Момент открытия счета равна 0. Шаг, с которым двигаемся по оси  $s$ , равен  $\Delta s$ . По оси времени идем с шагом  $\Delta t$ . Таким образом, рассматривается сетка следующего вида

|                 |   |   |   |   |   |                |   |
|-----------------|---|---|---|---|---|----------------|---|
| $S$             | • | • | • | • | • | •              | • |
| $S - \Delta s$  | • | • | • | • | • | •              | • |
| $S - 2\Delta s$ | • | • | • | • | • | •              | • |
| ...             | • | • | • | • | • | •              | • |
| ...             | • | • | • | • | • | •              | • |
| 0               | • | • | • | • | • | •              | • |
|                 | 0 |   |   |   |   | $T - \Delta T$ |   |

Из вида разностных уравнений видно, что вычисления проводятся справа налево по оси времени и снизу вверх по оси изменения объема денежных средств. Зная значения вероятности в момент времени  $T$  для всех значений  $s$ , можно найти вероятность в предыдущий момент времени  $T - \Delta t$ , затем в момент  $T - 2\Delta t$  и так далее, пока не найдется значение вероятности в нулевой момент времени.

Граничное условие  $P(s, T) = 1$ . Это означает, что в течение всего периода времени длительности  $T$  компания работает стабильно.

Интеграл в уравнениях (35) и (36) вычисляется по формуле Симпсона [8]

$$\begin{aligned} \int_0^b P(s - u, t) dA(u) &= \frac{\Delta s}{3b} (P(s, t) + 4P(s - \Delta s, t) + \\ &+ 2P(s - 2\Delta s, t) + \dots + P(s - b, t)), \\ \int_0^b P(s - u, t) dA(u) &= \frac{\beta \Delta s}{3b} (P(s, t) + 4P(s - \Delta s, t)e^{-\beta \Delta s} + \\ &+ 2P(s - 2\Delta s, t)e^{-2\beta \Delta s} + \dots + P(s - b, t)e^{-\beta \Delta s}) \end{aligned}$$

для равномерного и экспоненциального с параметром  $\beta$  законов распределения соответственно.

Проблема возникает при вычислении интеграла  $\int_0^\infty P(s + u, t) dA(u)$  в уравнении (35), когда требуется

знать значение вероятности при  $s > S$ . Если нужно вычислить значение вероятности в узле с координатами  $(S, T - \Delta t)$ , тогда при экспоненциальном распределении размеров поступлений интеграл находится по формуле

$$\begin{aligned} \int_0^b P(S + u, T) dA(u) &= \frac{\beta \Delta s}{3b} (P(S, T) + 4P(S + \Delta s, T)e^{-\beta \Delta s} + \\ &+ 2P(S + 2\Delta s, T)e^{-2\beta \Delta s} + \dots + P(S + b, T)e^{-\beta \Delta s}) \end{aligned}$$

и выражается через известные вероятности

$$\begin{aligned} P(S, T) &= P(S + \Delta s, T) = \\ &= P(S + 2\Delta s, T) = \dots P(S + b, T) = 1. \end{aligned}$$

$$P(S, T - \Delta t), P(S + \Delta s, T - \Delta t), \\ P(S + 2\Delta s, T), \dots, P(S + b, T - \Delta t).$$
$$P(\Delta s, T - \Delta t), P(2\Delta s, T - \Delta t), \dots, \\ P(S, T - \Delta t), P(S + \Delta s, T - \Delta t), \\ P(S + 2\Delta s, T), \dots, P(S + b, T - \Delta t).$$

В итоге рассматривается схема узлов вида

[illegible]

Непосредственное вычисление вероятности по вышеизложенному методу осуществлялось с помощью программы, задавая граничные условия и параметры распределений. Результатом работы программы является файл, содержащий значения вероятности в узлах заданной сетки. На основе полученных данных были построены графики зависимости вероятности от различ-

Проведено сравнение вероятностей, найденных асимптотическим и численным методами для обеих моделей. Рассмотрим ситуацию, что обязательно наступит момент времени, когда на счете компании сумма денежных средств станет равной нулю. Обозначим этот момент времени через  $T_0$ . Вероятность того, что момент времени  $T_0$  наступит после момента  $T$ , совпадает с вероятностью стабильного функционирования компании от начального момента до момента времени  $T$ . Асимптотическая формула для вычисления  $P(T_0 > T)$  найдена в виде (19) с параметрами (20) для первой модели и (30) для второй. Сравнение было осложнено заданием граничного условия  $P(s, T) = 1$  при численном методе сеток нахождения вероятностей. При выводе формулы (19) такого условия не было. Поэтому, чтобы сравнения стало возможным, был подобран момент  $\tau$ , при котором  $P(s, T) = P(\zeta > 1) = 1$ , и от момента  $\tau$  был отложен интервал функционирования компании. Небольшие различия при сравнении вероятностей объясняются тем, что в обоих случаях использовались приближенные методы.

1. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971. 263 с.
2. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. М.: ЮНИТИ, 1998.
3. Вишняков И.В. Стохастическая модель динамики объемов банковских депозитов «до востребования» // Экономика и математические методы. 2002. Т. 38. № 1. С. 94–104.
4. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 158 с.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001. 320 с.
6. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
7. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т. 1. М.: Наука, 1976. 302 с.
8. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

162