

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ ТЕХНОГЕННОМ ЗАГРЯЗНЕНИИ МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 03-05-65408.

Рассматриваются методы параметрической идентификации математической модели теплообмена в техногенно загрязненных мерзлых грунтах и приводятся результаты численного эксперимента по восстановлению теплового потока и функции количества незамерзшей воды.

Освоение новых районов криолитозоны проводится с нарушением напочвенных покровов и техногенным загрязнением (промстоками, рассолами, нефтепродуктами, радионуклидами и другими экологически опасными загрязнителями) грунта, что приводит к уничтожению растительности и образованию термокарста, солифлюксии, оползней и других нежелательных мерзлотных явлений. В связи с этим стали актуальными вопросы усовершенствования математической модели теплообмена с учетом реального процесса промерзания и протаивания порового раствора грунта. Задачи с фазовым переходом относятся к классу нелинейных с сильноменяющимися коэффициентами и являются одними из главнейших проблем теплофизики и теоретической теплотехники. Прежде всего это связано с неопределенностью многих параметров в системе (граничных условий, теплоемкости, теплопроводности, функции количества незамерзшей воды, коэффициента диффузии и т.д.), а также несоответствиями допущений при восстановлении характеристик и построении математических моделей. Традиционный подход с использованием значений характеристик, полученных из эксперимента, часто приводит к неверным результатам [1–4].

В данной работе приведены алгоритмы сплайн-идентификации граничных условий теплообмена на поверхности однородного мерзлого грунта и результаты численного эксперимента по восстановлению параметров при его техногенном нарушении.

Для простоты изложения рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с учетом фазового перехода поровой воды [5]:

$$c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^v \frac{\partial T}{\partial r} \right), 0 < r < R, 0 < \tau \leq \tau_{\max}; \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = 0, r = R, 0 < \tau < \tau_{\max}; \quad (2)$$

$$T(r, 0) = T_0(r), 0 \leq r \leq R, \tau = 0; \quad (3)$$

$$c = c(T) =$$

$$= \left(c_{\text{ск}} + c_{\text{л}} W_0 + (c_{\text{в}} - c_{\text{л}}) W_{\text{нв}}(T) + L \frac{\partial W_{\text{нв}}(T)}{\partial T} \right) \rho,$$

$$\lambda = \lambda(T) = \lambda_{\text{м}} + (\lambda_{\text{т}} - \lambda_{\text{м}}) \frac{W_{\text{нв}}(T) - W_{\text{пс}}}{W_0 - W_{\text{пс}}},$$

где c – объемная теплоемкость грунта, Дж/(м³·К); T – температура, К; τ – время, с; $\tau_{\max}$ – наибольшее значение временной переменной, с; r – пространственная координата, м; R – координата массива, м; $\lambda_{\text{м}}$, $\lambda_{\text{т}}$ – теплопроводности мерзлых, талых пород, Вт/(м·К); L – объемная теплота фазового перехода, Дж/м³; $T_0(r)$ – начальное распределение температур, К; $c_{\text{ск}}$, $c_{\text{л}}$, $c_{\text{в}}$ – удельные теплоемкости грунта, льда и воды, Дж/(кг·К); ρ – объемная плотность минерального скелета, кг/м³; W_0 , $W_{\text{пс}}$ – начальная и прочносвязанная влажности, %;

$W_{\text{нв}}(T)$ – функция количества незамерзшей воды, которая в случае техногенного загрязнения грунта зависит и от засоленности $W_{\text{нв}}(T, C)$, %; $v = 0, 1$ – соответствуют декартовой и цилиндрической координатам.

Требуется восстановить одно из следующих граничных условий (при $r = 0$):

$$T(R, \tau) = T_{\text{п}}(\tau), 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (4)$$

$$-\lim_{r \rightarrow 0} r^v \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = r^v q(\tau), 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (5)$$

$$-\lim_{r \rightarrow 0} r^v \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = r^v \alpha(\tau) (T - T_{\text{с}}), 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (6)$$

где искомым параметром $u(\tau)$ может быть одна из функций $\{T_{\text{п}}(\tau), q(\tau), \alpha(\tau)\}$; $T_{\text{п}}(\tau)$ – температура поверхности, К; $q(\tau)$ – плотность теплового потока, Вт/м²; $\alpha(\tau)$ – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м·К); $T_{\text{с}}$ – температура внешней среды, К.

Для восстановления искомого параметра нужны дополнительные замеры температуры внутри исследуемого образца в точках r_i ($0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{n_r} < R$):

$$T(r_i, \tau) = T_i^{\text{з}}(\tau), i = \overline{1, n_r}. \quad (7)$$

Данную задачу сформулируем как задачу оптимального управления: найти функцию $u(\tau)$ из минимума целевого функционала:

$$J(u) = \sum_{i=1}^{n_r} \int_0^{\tau_{\max}} p_i(\tau) (T(r_i, \tau) - T_i^{\text{з}}(\tau))^2 + \int_0^{\tau_{\max}} p(\tau) (T(\xi(\tau)) - T_{\text{ф}}(\xi^{\text{з}}(\tau)))^2, 0 \leq \xi^{\text{з}}(\tau) R, \quad (8)$$

$$\xi^{\text{з}}(\tau) = \sup_{\tau \in [0, \tau_{\max}]} (T(u, \tau)) = T_{\text{ф}}(\xi^{\text{з}}(\tau)),$$

где $p_i(\tau)$, $p(\tau)$ – весовые множители с размерностью К⁻²·с⁻¹; $T(r_i, \tau)$, $T_i^{\text{з}}(r_i, \tau)$ – расчетная и замеренная температуры в i -й точке горного массива; $T(\xi(\tau))$, $T_{\text{ф}}(\xi^{\text{з}}(\tau))$ – соответственно расчетные и заданные температуры на фронте фазового перехода $\xi^{\text{з}}(\tau)$; n_r – число точек измерения.

Доказательству единственности решения граничных обратных задач теплопроводности посвящено достаточно много работ, более подробно этот вопрос рассмотрен в [6].

Минимизация целевого функционала (8) проводится с помощью хорошо известных градиентных методов, характеризующихся эффективным началом итерационного процесса из некоторого «грубого» начального приближения и снижением скорости сходимости при приближении к минимуму [6]. Этим требованиям отвечают градиентные методы спуска, в частности методы скорейшего спуска и сопряженных градиентов. В этом случае приближения вычисляются по формуле

$$u_{s+1}(\tau) = u_s(\tau) - \beta_s p_s(\tau), s = 0, 1, \dots, n.$$

Направление спуска $p_s(\tau)$ и коэффициент β_s определяются в зависимости от методов:

1) скорейшего спуска

$$p_s = J'(u_s), \beta_s : J(u_{s+1}) = \min J(u_s - \beta_s J'(u_s));$$

2) сопряженных градиентов

$$p_s = J'(u_s) + \gamma_s p_{s-1}, \gamma_0 = 0, \gamma_s = \frac{\|J'(u_s)\|_{L_2}^2}{\|J'(u_{s-1})\|_{L_2}^2},$$

$$\beta_s : J(u_{s+1}) = \min J(u_s - \beta_s p_s),$$

где $\|\dots\|_{L_2}$ – норма в гильбертовом пространстве L_2 .

Формулы для градиента функционала соответственно неизвестным параметрам будут иметь вид

$$J'(u) = \left(\frac{\partial J}{\partial u_{-1}}, \frac{\partial J}{\partial u_0}, \dots, \frac{\partial J}{\partial u_{m_0+1}} \right);$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_\alpha} = \int_0^{\tau_{\max}} B_\alpha(\tau) \frac{\partial}{\partial r} (\gamma \psi) \Big|_{r=0} d\tau,$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_\alpha} = \int_0^{\tau_{\max}} \psi B_\alpha(\tau) \Big|_{r=0} d\tau,$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_\alpha} = \int_0^{\tau_{\max}} B_\alpha(\tau) (T_c - T) \psi \Big|_{r=0} d\tau, 0 < \tau \leq \tau_{\max},$$

$$\alpha = -1, 0, 1, \dots, m_0 + 1.$$

Искомым параметром является $(m_0 + 3)$ -мерный вектор $u = b = (b_{-1}, b_0, \dots, b_{m_0+1})$:

$$u(\tau) = \sum_{\alpha=-1}^{m_0+1} b_\alpha B_\alpha(\tau),$$

где $B_\alpha(\tau)$ – заданный кубический сплайн по переменной τ , который имеет вид

$$B_\alpha(\tau) = B_0(\tau - \alpha \Delta \tau),$$

$$B_0(\tau) = \frac{1}{(\Delta \tau)^3} \left[(\tau + 2\Delta \tau)_+^3 - 4(\tau + \Delta \tau)_+^3 + 6(\tau)_+^3 - \right.$$

$$\left. - 4(\tau - \Delta \tau)_+^3 + (\tau - 2\Delta \tau)_+^3 \right],$$

$$(\tau - \xi)_+^3 = [\max(0, \tau - \xi)]^3;$$

$\Delta \tau = \tau_m / m_0$ – заданный интервал времени.

Решение сопряженной задачи $\psi = \psi(r, \tau)$:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 A_1 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial A_2}{\partial r^2} + A_3 \psi, 0 < r < R, 0 < \tau \leq \tau_m,$$

$$\lambda r^v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r^v} \right) = 0, r = R, 0 < \tau \leq \tau_m, \psi(r, \tau_m) = 0, 0 \leq r \leq R,$$

$$\left. \begin{aligned} \psi \Big|_{r_i^-} &= \psi \Big|_{r_i^+}, \\ \lambda r^v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r^v} \right) \Big|_{r_i^-} - \lambda^{\beta} r^v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r^v} \right) \Big|_{r_i^+} &= \left\{ \begin{aligned} &= 2p(\tau) (T_i - T_i^*), i = \overline{1, n_\tau}, \\ &0 < \tau \leq \tau_{\max}, \end{aligned} \right. \\ \psi \Big|_{\xi^-} &= \psi \Big|_{\xi^+}, \\ \lambda r^v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r^n} \right) \Big|_{\xi^-} - \lambda r^v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r^n} \right) \Big|_{\xi^+} &= 2p(\tau) (T - T_\phi), \end{aligned} \right\} \\ 0 < \tau \leq \tau_{\max},$$

где

$$A_1 = \lambda, A_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} (\lambda r^v),$$

$$A_3 = \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} r^v \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial c}{\partial T} \rho \frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

Граничные условия при $r = 0$, соответствующие искомым параметрам, имеют вид

$$\psi(\tau) = 0, 0 < \tau \leq \tau_{\max},$$

$$-\lambda r^v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r^v} \right) = 0, 0 < \tau \leq \tau_{\max},$$

$$-\lambda r^v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r^v} \right) = -\alpha \psi, 0 < \tau \leq \tau_{\max}.$$

Величина шага β_s методов скорейшего спуска и сопряженных градиентов находится по формуле

$$\beta_s = \frac{\sum_{i=1}^{n_\tau} \int_0^{\tau_{\max}} p_i(\tau) V_i(T_i - T_i^*) d\tau + \int_0^{\tau_{\max}} p(\tau) V_i(T(\xi^*(\tau)) - T_\phi) d\tau}{\sum_{i=1}^{n_\tau} p_i(\tau) V_i^2 d\tau + \int_0^{\tau_{\max}} p(\tau) V_i^2 (\xi^*(\tau)) d\tau},$$

где $V = V(r, \tau)$ – решение краевой задачи для приращения:

$$c \frac{\partial V}{\partial \tau} = A_1 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + A_2 \frac{\partial V}{\partial r} + A_3 V, 0 < r < R, 0 < \tau \leq \tau_{\max},$$

$$\frac{\partial \lambda V}{\partial r} = 0, r = R, 0 < \tau \leq \tau_{\max},$$

$$V(r, 0) = 0, 0 \leq r \leq R,$$

$$V \Big|_{r_i^+} = V \Big|_{r_i^-}, \frac{\partial \lambda V}{\partial r} \Big|_{r_i^-} = \frac{\partial \lambda V}{\partial r} \Big|_{r_i^+}, i = \overline{1, n_\tau}, 0 < \tau \leq \tau_{\max},$$

$$V \Big|_{\xi^-} = V \Big|_{\xi^+}, \frac{\partial \lambda V}{\partial r} \Big|_{\xi^-} = \frac{\partial \lambda V}{\partial r} \Big|_{\xi^+}, 0 < \tau \leq \tau_{\max}.$$

Граничные условия в зависимости от искомых параметров имеют вид

$$V = \Delta T_\Pi(\tau), 0 < \tau \leq \tau_{\max},$$

$$-\frac{\partial \lambda V}{\partial r} \Delta q(\tau), 0 < \tau \leq \tau_{\max},$$

$$-\frac{\partial \lambda V}{\partial r} = \alpha(\tau) (T^1 - T_c) - \alpha(\tau) V, 0 < \tau \leq \tau_{\max}.$$

Численная реализация вышеуказанных краевых задач осуществляется методом конечных разностей. В каждом временном слое для численного определения температуры $T(r, \tau)$, сопряженной переменной $\psi(r, \tau)$ и приращения $V(r, \tau)$ будем иметь соответствующие трехдиагональные системы алгебраических уравнений: нелинейные для T и линейные – ψ и V . Решение этих систем производится методом прогонки (в сочетании с итерациями по коэффициенту при расчете T). Итерационный процесс минимизации останавливается по критерию невязки [5]. Аналогичным образом строятся алгоритмы идентификации остальных параметров (теплоемкости, теплопроводности, функции количества незамерзшей воды, коэффициента диффузии и т.д.).

Для проверки работоспособности предложенных алгоритмов были проведены тестовые численные эксперименты по решению модельной задачи с точными исходными данными. Проведен численный эксперимент при наличии возмущений различной природы в замеренных значениях. Характер возмущений не оказывает существенного влияния на качество восстановления искомых функций, и достаточно хорошо согласуется с другими известными квазистационарными методами. Лучший ре-

зультат, как по скорости сходимости, так и по точности восстановления, имеет метод сопряженных градиентов.

3. В целом все предложенные алгоритмы идентификации тепло- и массообменных характеристик обладают хорошим регуляризующим свойством при оптимальном выборе шагов дискретизации во времени и пространстве и применимы для обработки данных тепломассообменных экспериментальных исследований.

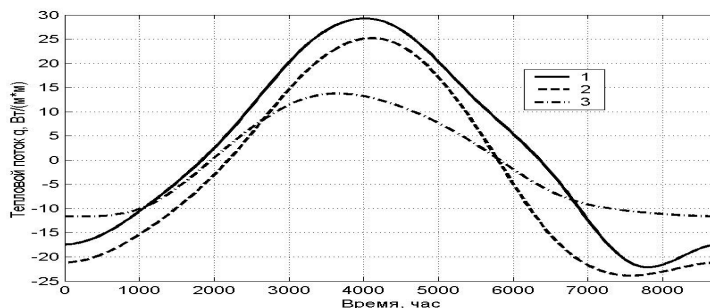


Рис. 1. Зависимость удельного теплового потока от времени:
1 – открытый участок с нарушениями растительного и напочвенного покровов;
2 – сосновый лес; 3 – лиственный лес

Они отличаются друг от друга сложением грунта, растительным покровом, влажностью и температурным режимом. Были проведены многолетние круглогодичные наблюдения в разные времена [7, 8]. Отличительной особенностью лесного массива является его затененность деревьями, что влияет на формирования теплового режима и влагообменного процесса. Чем больше сомкнутость древостоя, тем меньше солнечной радиации проникает под полог леса. В период полного развертывания

Рассмотрим два иллюстративных примера по расчету плотности тепловых потоков и функции количества незамерзшей воды песка при засолении его хлоридом натрия.

Для восстановления теплового потока рассмотрены три ключевых участка: открытый участок с нарушениями растительного и напочвенного покровов, сосновый и лиственный леса (рис 1).

листья затененность деревьями снижает приход солнечной радиации. Особенно в листопадных лесах (лиственный) проникает лишь 40–50 % радиации (июнь–август). В зимнее время плотности теплового потока в основном лесу и открытом грунте отличаются друг от друга из-за высоты и структуры снега.

На рис. 2 представлена пространственная зависимость функции количества незамерзшей воды от температуры и засоленности.

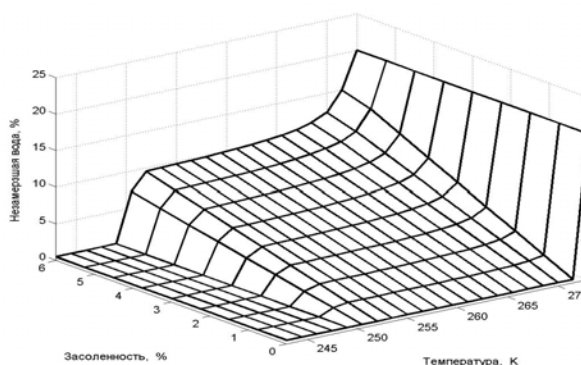


Рис. 2. Зависимость функции незамерзшей воды от температуры и засоленности

У чистого песка фазовый переход порового раствора происходит при температуре 273 К, а с увеличением засоленности большое количество порового раствора замерзает при температуре эвтектики 250,6 К. Из ри-

сунка видно, что с повышением засоленности содержание незамерзшей воды увеличивается и соответственно резко меняются все теплофизические и массообменные характеристики загрязненного мерзлого грунта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдман Г.М. Методы расчета температурного режима мерзлых грунтов. М.: Наука, 1973. 254 с.
2. Чистотин Л.В. Миграция влаги в промерзающих неводонасыщенных грунтах. М.: Наука, 1973. 144 с.
3. Crange B.W., Viskanta R., Stevenson W.H. Diffusion of heat and solute during freezing of salt solution // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1976. Vol. 19. № 14. P. 373–384.
4. Ентов В.М., Максимов А.М., Цыпкин Г.Г. Образование двухфазной зоны при промерзании пористой среды. М.: ИПМ АН СССР. Препринт № 269, 1986. 56 с.
5. Пермяков П.П. Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах. Новосибирск: Наука, 1989. 86 с.
6. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
7. Павлов А.В. Теплообмен почвы с атмосферой в северных и умеренных широтах территории СССР. Якутск: Якутское кн. изд-во, 1975. 302 с.
8. Гаврилова М.К. Тепловой режим земной поверхности и грунтов поля и леса в период протаивания // Материалы VIII Всесоюзного международного совещания по геофизиологии. Якутск, 1966. Вып. 4. С. 194–206.

Статья представлена отделом теплофизики и теплоэнергетики Института физико-технических проблем Севера (г. Якутск), поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 26 марта 2004 г.