

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2020

№ 51

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Lyudmila Nezheleskaya – Executive Editor, Doctor. of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University
Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof. of the Programming Department Tomsk State University
Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University
Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)
Eugene Semenkina – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)
Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University
Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gurami Tsitsiasvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)
Editorial address:
Institute of Applied Mathematics and Computer Science,
unit of Applied Mathematics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France
Vladimir Dombrovskii
Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia
Alexander Dudin
Doctor of Sc., Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France
Raimund Ubar
Doctor of Sc., Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia
Reindert Nobel
Doctor of Sc., Associate Prof.
Vrije University of Amsterdam
Netherlands

Enco Orsingher
PhD, Prof.
University of Rome
Italy
Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Nina Yevtushenko
Doctor of Sc., Prof.
Ivannikov V.P. ISP RAS
Moscow, Russia
Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Нежелская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Коскин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ
Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры программирования ТГУ
Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ
Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РUDN (г. Москва)
Семенин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)
Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ
Фархадов Маис Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Цицисвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Институт прикладной математики и компьютерных наук,
отделение прикладной математики
Телефон / факс: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Кавалли
д-р философии, проф.
Университет VII,
Париж, Франция
Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет,
Италия
Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт,
Турин, Италия

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии,
Кюри, Париж, Франция
Раймонд Убар
д-р, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония
Рейндерт Нобель
д-р, доцент
Свободный университет,
Амстердам, Нидерланды

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ИСП РАН им. Иваницова В.П.,
Москва, Россия
Ервант Зорян
д-р философии, гл. науч. сотр.
фирмы «Синописис», США

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Перепелкин Е.А. Робастное управление дискретной системой массового обслуживания	4
Расулзаде Ш.М. Интегральные и многоточечные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в одной задаче оптимального управления	10

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Алиева С.Г. Численное исследование моделей систем массового обслуживания с отсроченными обратными связями	22
Дмитренко А.Г., Балашова О.М. Моделирование электромагнитного рассеяния на тонких параллельных идеально проводящем и диэлектрическом цилиндрах	35
Истратов Л.А., Смычкова А.Г., Жуков Д.О. Моделирование социальных процессов группового поведения на основе стохастических клеточных автоматов с памятью и систем дифференциальных кинетических уравнений с запаздыванием	45
Толстых В.К., Пшеничный К.А. Математическое моделирование нестационарных тепловых процессов в противоточных теплообменных аппаратах	55
Худаяров Б.А., Кучаров О.Р. Моделирование вибрации трубопровода на основе теории балки Тимошенко	63

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Druki A.A., Spitsyn V.G., Arkalykov E.U. Semantic segmentation algorithms of the Earth's surface pictures based on neural network methods	72
Ким К.С., Смагин В.И. Фильтрация и диагностика в дискретных стохастических системах со скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями	79
Нежелская Л.А., Першина А.А. Оценивание параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий в особом случае	87

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Бабанов А.М., Петров А.В. Декларативное определение условий непротиворечивости в ERM-метасхеме	94
Гончаренко Е.А., Пазников А.А. Анализ эффективности выполнения атомарных операций в многоядерных вычислительных системах с общей памятью	102
Семёнов Е.В., Старченко А.В., Данилкин Е.А., Проханов С.А. Выбор технологии распараллеливания численного решения конвективно-диффузионного уравнения на гибридной многопроцессорной вычислительной системе	111
Сидоров А.А., Сенченко П.В., Тарасенко В.Ф. Подход к оценке территориальной дифференциации развития цифровой экономики	121
Сведения об авторах	130

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Perepelkin E.A. Robust control of discrete-time queuing system	4
Rasulzade Sh.M. Integral and multipoint necessary optimality conditions of quasi-singular controls in one optimal control problem	10

MATHEMATICAL MODELING

Aliyeva S.H. Numerical investigation of queuing models with delayed feedbacks	22
Dmitrenko A.G., Balashova O.M. Simulating of electromagnetic scattering on thin parallel ideally conducting and dielectric cylinders	35
Istratov L.A., Smichkova A.G., Zhukov D.O. Modeling group behavior based on stochastic cellular automata with memory and systems of differential kinetic equations with delay	45
Tolstykh V.K., Pshenychnyi K.A. Mathematical modeling of unsteady heat processes in countercurrent heat exchangers	55
Khudayarov B.A., Kucharov O.R. Modeling of vibration of a pipeline on the theory of Timoshenko	63

DATA PROCESSING

Druki A.A., Spitsyn V.G., Arkalykov E.U. Semantic segmentation algorithms of the Earth's surface pictures based on neural network methods	72
Kim K.S., Smagin V.I. Filtration and diagnostics in discrete stochastic systems with jump parameters and multiplicative perturbations	79
Nezhel'skaya L.A., Pershina A.A. Estimation of the uniform distribution parameter of unextendable dead time duration in a generalized asynchronous flow of events in special case	87

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Babanov A.M., Petrov A.V. Declarative definition of consistency conditions in erm metaschema	94
Goncharenko E.A., Paznikov A.A. Analysis of the efficiency of atomic operations in multi-core shared-memory computer systems	102
Semenov E.V., Starchenko A.V., Danilkin E.A., Prohanov S.A. The choice of technology for parallelization of numerical the solution of the convective-diffusion equation on hybrid multiprocessor computer system	111
Sidorov A.A., Senchenko P.V., Tarasenko V.F. Approach to assessing the territorial differentiation of the digital economy development	121
Brief information about the authors	130

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.93+519.87

DOI: 10.17223/19988605/51/1

Е.А. Перепелкин

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Решена задача синтеза системы управления в виде пропорционально-интегральной обратной связи для дискретной марковской системы массового обслуживания. Проведен анализ асимптотической устойчивости и робастности системы с управлением. Приведены результаты моделирования.

Ключевые слова: дискретная система массового обслуживания; перегрузка; робастное управление.

Управляемые системы массового обслуживания являются объектом исследования в течение нескольких десятилетий [1–4]. В последние годы появились новые задачи управления системами с очередями, связанные с предотвращением перегрузок в компьютерных сетях. При решении этих задач нашли применение методы теории автоматического управления. Например, в системах с активным управлением очередью ТСП-пакетов применяется управление в виде ПИ и ПИД регуляторов [5–8], управление, оптимальное по критерию H_∞ [9]. Управление в этих системах осуществляется отклонением поступающих пакетов. Пакеты отклоняются с некоторой вероятностью, значение которой определяется системой управления.

Данная работа является продолжением работы [10], в которой было предложено решение задачи управления состоянием непрерывной системы массового обслуживания с применением пропорционально-интегральной обратной связи. Описанный в ней подход распространяется на случай дискретных по времени марковских систем обслуживания.

Под состоянием системы понимается число заявок в системе в текущий момент времени. Задача управления заключается в поддержании заданного среднего значения числа заявок в системе. Управление, как и в компьютерных сетях с активным управлением очередью ТСП-пакетов, осуществляется отклонением поступающих заявок. Вероятность отклонения заявок рассчитывается в процессе функционирования системы.

Предполагается, что вероятность поступления заявки, вероятность завершения обработки заявки неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы. Предполагается также, что система функционирует в условиях перегрузки, когда вероятность поступления заявки больше вероятности завершения обработки заявки.

В работе проведен анализ асимптотической устойчивости и робастности системы с управлением в виде обратной связи. Приведены результаты моделирования системы с управлением.

1. Математическая модель объекта управления

Введем обозначения: v – вероятность поступления заявки; w – вероятность завершения обработки заявки; $u(k)$ – вероятность отклонения заявки; n – допустимое число заявок в системе; $p_i(k)$ – вероятность нахождения системы в состоянии $i = 0, 1, \dots, n$ в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$. Будем считать, что значения v и w неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы. Будем также считать, что система функционирует в условиях перегрузки: $v > w$.

Среднее значение числа заявок в системе в момент времени k равно

$$y(k) = \sum_{i=1}^n ip_i(k).$$

Задача управления заключается в обеспечении заданного среднего значения числа заявок

$$y(k) = \bar{y}, \quad 0 < \bar{y} < n.$$

Объект управления является конечной цепью Маркова и может быть описан системой уравнений Колмогорова [11]:

$$p(k+1) = Ap(k) + Bp(k)u(k), \quad y(k) = cp(k), \quad ep(k) = 1, \quad (1)$$

где

$$p(k) = \begin{bmatrix} p_0(k) \\ p_1(k) \\ \vdots \\ p_{n-1}(k) \\ p_n(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1-v & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ v & a_0 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 & w \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 & 1-w \end{bmatrix},$$

$$a_0 = (1-v)(1-w) + vw, \quad a_1 = (1-v)w, \quad a_2 = v(1-w),$$

$$B = \begin{bmatrix} v & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -v & b_0 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_0 = v(1-w) - vw, \quad b_1 = vw, \quad b_2 = -v(1-w),$$

$$c = [0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n], \quad e = [1 \ 1 \ \dots \ 1].$$

Задача синтеза управления в виде обратной связи по выходу для системы (1) является сложной математической задачей, поскольку это билинейная система высокого порядка с неизвестными параметрами. Покажем, что можно перейти к более простому описанию объекта управления в виде разностного уравнения первого порядка с неопределенным параметром и возмущением.

Справедливы равенства

$$cA = [v \ 1+v-w \ 2+v-w \ \dots \ n-1+v-w \ n-w],$$

$$cB = [-v \ -v \ \dots \ -v \ 0].$$

Следовательно,

$$y(k+1) = cAp(k) + c(Bp(k))u(k) =$$

$$= y(k) - v(1-p_n(k))u(k) + v(1-p_n(k)) - w(1-p_0(k)).$$

Таким образом, динамика среднего числа заявок в системе описывается уравнением

$$y(k+1) = y(k) + au(k) + b, \quad (2)$$

где

$$a = -v(1-p_n(k)), \quad b = v(1-p_n(k)) - w(1-p_0(k)).$$

Уравнение (2) будем рассматривать как уравнение системы с неопределенным параметром a и неконтролируемым внешним возмущением b .

2. Алгоритм управления

Управление для системы (2) будем строить в виде пропорционально-интегральной обратной связи

$$u(k) = k_p \tilde{y}(k) + k_i s(k), \quad s(k+1) = s(k) + \tilde{y}(k), \quad (3)$$

где $\tilde{y}(k) = \frac{y(k) - \bar{y}}{\bar{y}}$ – относительное отклонение среднего значения числа заявок в системе от заданного значения $\bar{y}$, k_p , k_i – коэффициенты обратной связи.

Замкнутая обратной связью система описывается уравнениями

$$\tilde{y}(k+1) = \left(1 + \frac{a}{\bar{y}} k_p\right) \tilde{y}(k) + \frac{a}{\bar{y}} k_i s(k) + \frac{b}{\bar{y}}, \quad s(k+1) = s(k) + \tilde{y}(k). \quad (4)$$

Характеристический полином замкнутой системы равен

$$\Delta(z) = z^2 + d_1 z + d_2, \quad d_1 = -\frac{a}{\bar{y}} k_p - 2, \quad d_2 = \frac{a}{\bar{y}} (k_p - k_i) + 1. \quad (5)$$

Система (4) является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда корни характеристического полинома (5) лежат внутри круга единичного радиуса $|z| < 1$.

Заметим, что из асимптотической устойчивости системы (4) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{y}(k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \bar{y},$$

что и требуется для решения задачи управления состоянием системы (1).

Запишем условия асимптотической устойчивости в параметрическом виде. Известно [12], что корни полинома второго порядка лежат внутри круга единичного радиуса тогда и только тогда, когда

$$1 + d_1 + d_2 > 0, \quad 1 - d_2 > 0, \quad 1 - d_1 + d_2 > 0. \quad (6)$$

Из неравенств (6) получим условия, накладываемые на коэффициенты обратной связи:

$$-\frac{a}{\bar{y}} k_i > 0, \quad -\frac{a}{\bar{y}} (k_p - k_i) > 0, \quad 4 + 2\frac{a}{\bar{y}} k_p - \frac{a}{\bar{y}} k_i > 0. \quad (7)$$

Для параметра a справедливо неравенство $-1 < a < 0$. Следовательно, неравенства (7) выполняются тогда и только тогда, когда

$$k_p > k_i > 0. \quad (8)$$

Условие (8) есть необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости системы (4). Заметим, что условие (8) не зависит от параметров объекта управления v , w , n . Следовательно, система с обратной связью обладает свойством робастности.

3. Пример

Расчеты и имитационное моделирование проводились для систем с параметрами

$$v = 0,5; w = 0,3; n = 400,$$

$$v = 0,7; w = 0,5; n = 300.$$

Пусть желаемое среднее значение числа заявок в системе $\bar{y} = 200$. Зададим коэффициенты обратной связи равными $k_p = 30$, $k_i = 0,1$.

Сначала решим систему уравнений расширенной замкнутой системы. Эта система уравнений состоит из системы уравнений Колмогорова (1) и уравнений обратной связи (3). На рис. 1, 2 показаны график среднего значения числа заявок в системе и график управления. Расчеты проводились при начальных условиях: $p_i(0) = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $i \neq 221$, $p_{221}(0) = 1$, $s(0) = 0$.

Затем выполним имитационное моделирование. На рис. 3, 4 показаны результаты моделирования, полученные при начальном числе заявок в системе, равном 221.

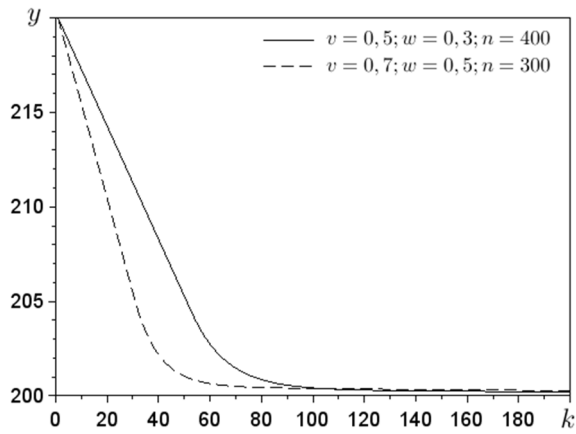


Рис. 1. Среднее значение числа заявок в системе (1), (3)

Fig. 1. Average value of the number of requests in the system (1), (3)

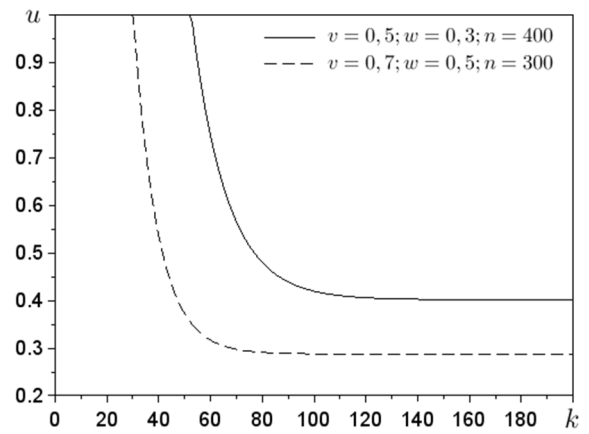
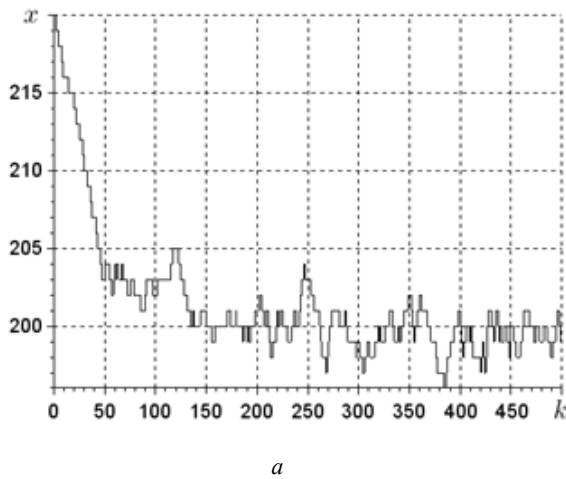
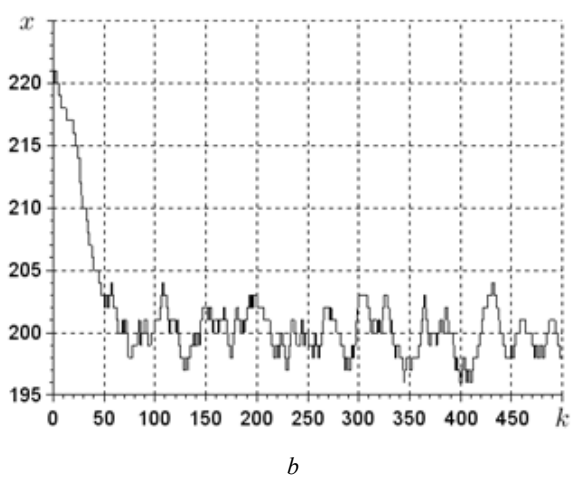


Рис. 2. Управление в системе (1), (3)

Fig. 2. Control in the system (1), (3)



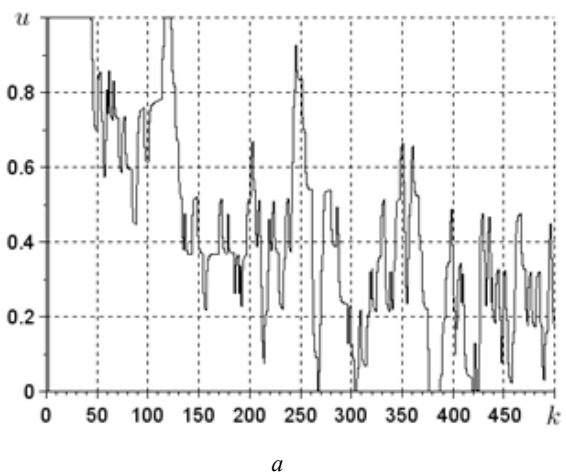
a



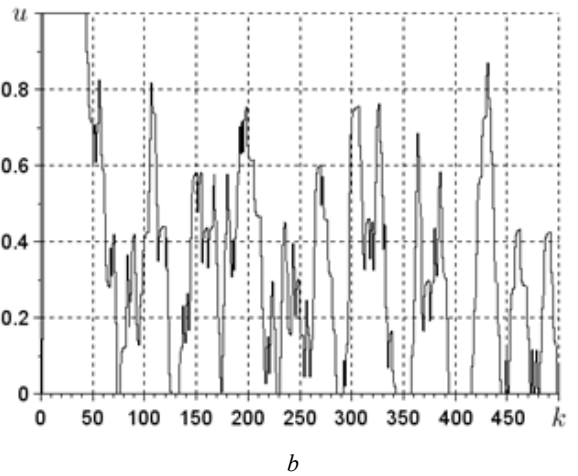
b

Рис. 3. Число заявок в системе: a – $v = 0,5; w = 0,3; n = 400$; b – $v = 0,7; w = 0,5; n = 300$

Fig. 3a. The quantity of requests in the system: a – $v = 0,5; w = 0,3; n = 400$; b – $v = 0,7; w = 0,5; n = 300$



a



b

Рис. 4. Вероятность отклонения заявки в системе: a – $v = 0,5; w = 0,3; n = 400$; b – $v = 0,7; w = 0,5; n = 300$

Fig. 4. Probability of rejection of the request in the system: a – $v = 0,5; w = 0,3; n = 400$; b – $v = 0,7; w = 0,5; n = 300$

При моделировании для оценки среднего числа заявок в системе применялся экспоненциальный фильтр первого порядка

$$\hat{y}(k+1) = \alpha x(k) + (1-\alpha)\hat{y}(k),$$

где $x(k)$ – наблюдаемое число заявок в системе в момент времени k , $\hat{y}(k)$ – оценка среднего значения числа заявок в системе в момент времени k , α – параметр фильтра. Значение параметра фильтра было выбрано равным 0,7.

Результаты расчетов и моделирования подтверждают свойство робастности системы с обратной связью.

Заключение

В работе решена задача синтеза системы управления в виде пропорционально-интегральной обратной связи для дискретной марковской системы массового обслуживания. Проведен анализ асимптотической устойчивости и робастности системы с обратной связью. Представлены результаты расчетов и моделирования, которые подтверждают возможность применения предложенной системы управления в системах массового обслуживания, функционирующих в условиях перегрузки.

Предложенная в работе система управления может быть использована в системах передачи и обработки данных. Например, в компьютерных сетях с активным управлением очередью пакетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А. Управляемые системы массового обслуживания и их оптимизация. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1984. 234 с.
2. Sennott L.I. Stochastic dynamic programming and the control of queueing systems. John Wiley & Sons, 1999. 328 p.
3. Миллер А.Б. Предотвращение перегрузок в сетях передачи данных с помощью методов стохастического управления // Автоматика и телемеханика. 2010. № 9. С. 70–82.
4. Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В. Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 111–130.
5. Alvarez T., Heras H., Reguera J. Controller Design for Congestion Control: Some Comparative Studies // Proc. of the World Congress on Engineering, London, U.K. 2014. V. II. P. 756–772.
6. Bisoy S.K., Pattnaik P.K. Design of feedback controller for TCP/AQM networks // Engineering Science and Technology : an International Journal. 2017. V. 20. P. 116–132.
7. Hamidian H., Beheshti M. A robust fractional-order PID controller design based on active queue management for TCP network // International Journal of Systems Science. 2018. V. 49 (1). P. 211–216.
8. Перепелкин Е.А. Робастный регулятор системы управления длиной очереди пакетов в буфере маршрутизатора // Пользовательский альманах. 2019. № 4. С. 44–46.
9. Fezazi N.E., Haoussi F.E., Tissir E.H., Alvarez T. Design of robust H_∞ controllers for congestion control in data networks // J. of the Franklin Institute. 2017. V. 354, No. 17. P. 7828–7845.
10. Перепелкин Е.А. Робастное управление системой массового обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 49. С. 23–28.
11. Breuer L., Baum D. An Introduction to Queueing Theory and Matrix-Analytic Methods. Springer, 2005. 271 p.
12. Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М. : Мир, 1987. 480 с.

Поступила в редакцию 12 октября 2019 г.

Perepelkin E.A. (2020) ROBUST CONTROL OF DISCRETE-TIME QUEUEING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 4–9

DOI: 10.17223/19988605/51/1

We consider the discrete-time queueing system as a control object. Control problem consists in providing a desired system state. The system state is defined as the number of requests in the system. The number of requests in the system is controlled by rejection of arriving requests with some probability.

It is assumed that, the probability of arrival and the probability of service completion of request are unknown and may change during the operation of the system. It is also assumed that the system operates under congestion conditions when the probability of arrival greater than the probability service completion of request.

The control system should have a type of feedback and should have property of robustness in relation to change of parameters of a control object and the entering flow of requests.

The control object as a finite Markov chain is described by the system of Kolmogorov equations

$$p(k+1) = Ap(k) + (Bp(k))u(k), \quad y(k) = cp(k),$$

where A , B , c are system matrices, y is the average number of requirements in the system, u is control signal. This is a bilinear system with restrictions on the state and control variables. Analysis of this system has shown that it is possible to proceed to a simpler description of the control object in the form of a first-order difference equation with uncertain parameters

$$y(k+1) = y(k) + au(k) + b.$$

It is proposed to apply the classical proportional-integral feedback to solve the problem of controlling the state of this system.

We have investigated the conditions of stability and robustness of the system with control. The results of numerical experiments and simulation confirm the possibility of using the proposed control in queuing systems operating under congestion conditions.

Keywords: discrete-time queuing system; congestion; robust control.

PEREPEL'KIN Evgenii Alexandrovich (Doctor of Technical Science, Professor, Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation).

E-mail: eap@list.ru

REFERENCES

1. Nazarov, A.A. (1984) *Upravlyaemye sistemy massovogo obsluzhivaniya i ikh optimizatsiya* [Controlled queuing systems and optimization]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Sennott, L.I. (1999) *Stochastic dynamic programming and the control of queuing systems*. John Wiley & Sons.
3. Miller, A.B. (2010) Using methods of stochastic control to prevent overloads in data transmission networks. *Automation and Remote Control*. 71(9). pp. 1804–1815. DOI: 10.1134/S0005117910090055
4. Miller, B.M., Miller, G.B. & Semenikhin, K.V. (2011) Methods to design optimal control of Markov process with finite state set in the presence of constraints. *Automation and Remote Control*. 72(2). pp. 323–341. DOI: 10.1134/S000511791102010X
5. Alvarez, T., Heras, H. & Reguera, J. (2014) Controller design for congestion control: some comparative studies. *Proc. of the World Congress on Engineering*. 2. pp. 756–772.
6. Bisoy, S.K. & Pattnaik, P.K. (2017) Design of feedback controller for TCP/AQM networks. *Engineering Science and Technology*. 20. pp. 116–132. DOI: 10.1016/j.jestech.2016.10.002
7. Hamidian, H. & Beheshti, M. (2018) A robust fractional-order PID controller design based on active queue management for TCP network. *International Journal of Systems Science*. 49(1). pp. 211–216. DOI: 10.1080/00207721.2017.1397801
8. Perepelkin, E.A. (2019) Robastnyy regul'yator sistemy upravleniya dlinoy ocheredi paketov v bufere marshrutizatora [Robust controller of packet queue length in router buffer]. *Polzunovskiy al'manakh*. 4. pp. 44–46.
9. Fezazi, N.E., Haooussi, F.E., Tissir, E.H. & Alvarez, T. (2017) Design of robust H_∞ controllers for congestion control in data networks. *Journal of the Franklin Institute*. 354(17). pp. 7828–7845. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2017.09.026
10. Perepelkin, E.A. (2019) Robust controller of queuing system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 49. pp. 23–28. DOI: 10.17223/19988605/49/3
11. Breuer, L. & Baum, D. (2005) *An Introduction to Queuing Theory and Matrix-Analytic Methods*. Springer.
12. Astrem, K.J. & Wittenmark, B. (1987) *Sistemy upravleniya s EVM* [Computer Controlled Systems]. Translated from English. Moscow: Mir.

УДК 517.977.52
DOI: 10.17223/19988605/51/2

Ш.М. Расулзаде

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И МНОГОТОЧЕЧНЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача оптимального управления с функционалом качества терминального типа. На основе одного варианта метода приращений в предположении выпуклости областей управления доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума. Отдельно изучен случай вырождения линеаризованного условия максимума и установлены необходимые условия оптимальности квазисобых управлений.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами; метод приращений; линеаризованный принцип максимума; необходимое условие оптимальности; квазисобое управление; многоточечное необходимое условие оптимальности.

В работе [1] А.И. Москаленко рассмотрел одну задачу оптимального управления, которая может быть интерпретирована как задача оптимального управления системами с распределенными параметрами. Он доказал ряд необходимых условий оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. В предлагаемой работе аналогичная задача рассматривается в случае выпуклости областей управления. Доказан аналог линеаризованного условия максимума с помощью одного варианта метода приращений, предложенный в [2] и развитый в работах [3–6] и др. Довольно подробно исследуется также случай вырождения линеаризованного принципа максимума. Заметим, что случай вырождения необходимых условий оптимальности первого порядка встречается во многих задачах оптимального управления (см. напр.: [7–11]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u, v) = \varphi(y(x_1)) + \int_{t_0}^{t_1} G(x, z(t, x)) dx \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ v(x) &\in V \subset R^q, \quad x \in X = [x_0, x_1], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f(t, x, z, u), \quad (t, x) \in D = T \times X, \quad (3)$$

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x \in X, \quad (4)$$

$$\dot{y} = g(x, y, v), \quad x \in X, \quad (5)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (6)$$

Здесь $\varphi(y)$, $(G(x, z))$ – заданная непрерывная и дважды непрерывно дифференцируемая по y , (z) скалярная функция, U и V – заданные непустые ограниченные и выпуклые множества, $f(t, x, z, u)$ $(g(x, y, v))$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, u) $((y, v))$ до второго порядка включительно, $u(t)$ $(v(x))$ – кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий, y_0 – заданный постоянный вектор. Пару $(u(t), v(x))$ с вышеперечисленными свойствами назовем допустимым управлением. Допустимое управление $(u(t), v(x))$, доставляющее минимальное значение функционалу (1), назовем оптимальным управлением.

2. Формула для приращения функционала качества

Пусть $(u^0(t), v^0(x))$ – фиксированное допустимое управление, а $(\bar{u}(t) = u^0(t) + \Delta u(t)$, $\bar{v}(x) = v^0(x) + \Delta v(x))$ – произвольное допустимое управление. Через $(z^0(t, x), y^0(x))$ $(\bar{z}(t, x) = z^0(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(x) = y^0(x) + \Delta y(x))$ обозначим соответствующие им решения задачи (3)–(6). Тогда ясно, что $(\Delta z(t, x), \Delta y(x))$ будет решением задачи

$$\frac{\partial \Delta z(t, x)}{\partial t} = f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t)) - f(t, x, z(t, x), u(t)), \quad (t, x) \in D, \quad (7)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta y(x), \quad (8)$$

$$\Delta \dot{y}(x) = g(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x)) - g(x, y(x), v(x)), \quad x \in X, \quad (9)$$

$$\Delta y(x_0) = 0. \quad (10)$$

Введем аналоги функции Гамильтона–Понтрягина

$$\begin{aligned} H(t, x, z, u, \psi^0) &= \psi^{0'} f(t, x, z, u), \\ M(x, y, v, p^0) &= p^{0'} g(x, y, v). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\psi^0(t, x), p^0(x)$ – произвольные n -мерные вектор функции. Учитывая (7), (9) получаем, что

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi^{0'}(t, x) \frac{\partial \Delta z(t, x)}{\partial t} dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi^{0'}(t, x) (f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t)) - f(t, x, z(t, x), u(t))) dx dt, \\ & \int_{x_0}^{x_1} p^{0'}(x) \Delta \dot{y}(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} p^{0'}(x) (g(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x)) - g(x, y(x), v(x))) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда соответствующие управлениям $(u^0(t), v^0(x))$, $(\bar{u}(t), \bar{v}(x))$ приращение функционала (1), принимая во внимание (10)–(12) можно записать в виде (используя формулу Тейлора):

$$\begin{aligned} \Delta I(u^0, v^0) &= \varphi'_y(y^0(x_1)) \Delta y(x_1) + \frac{1}{2} \Delta y'(x_1) \varphi_{yy}(y^0(x_1)) \Delta y(x_1) + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} G'_z(x, z^0(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) G_{zz}(x, z^0(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx + \\ & + p'(x_1) \Delta y(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \dot{p}'(x) \Delta y(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \psi^0(t_1, x) \Delta z(t_1, x) dx - \int_{x_0}^{x_1} \psi^{0'}(t_0, x) \Delta z(t_0, x) dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \psi^{\circ'}(t, x)}{\partial t} \Delta z(t, x) dx dt - \int_{x_0}^{x_1} M'_y(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta y(x) dx - \\
& - \int_{x_0}^{x_1} M'_v(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta v(x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta y'(x) M_{yy}(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta y(x) + \\
& + 2 \Delta v'(x) M_{yv}(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta y(x) + \Delta v'(x) M_{vv}(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta v(x)] - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta u(t) dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) + 2 \Delta u'(t) H_{uz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) + \\
& + \Delta u'(t) H_{uu}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta u(t)] dx dt + o_1(\|\Delta y(x_1)\|^2) + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} (\|\Delta z(t_1, x)\|^2) dx - \int_{x_0}^{x_1} o_5(\|\Delta y(x)\| + \|\Delta v(x)\|)^2 dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_6(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u(t)\|)^2 dx dt. \quad (13)
\end{aligned}$$

Здесь величины $o_5(\cdot)$, $o_6(\cdot)$ определяются соответственно из разложений

$$\begin{aligned}
& M(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), p^{\circ}(x)) - M(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) = \\
& = M'_y(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta y(x) + M'_v(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta v(x) + \\
& + \frac{1}{2} [\Delta y'(x) M_{yy}(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta y(x) + \Delta v'(x) M_{yv}(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta y(x) + \\
& + \Delta v'(x) M_{vv}(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta v(x)] + o_5(\|\Delta y(x)\| + \|\Delta v(x)\|)^2, \\
& H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t), \psi^{\circ}(t, x)) - H(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) = \\
& = H'_z(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) + H'_u(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta u(t) + \\
& + \frac{1}{2} [\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) + 2 \Delta u'(t) H_{uz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) + \\
& + \Delta u'(t) H_{uu}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta u(t)] + o_6(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u(t)\|)^2.
\end{aligned}$$

Если предполагать, что вектор-функция $(\psi^{\circ}(t, x), p^{\circ}(x))$ является решением сопряженной системы

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi^{\circ}(t, x)}{\partial t} &= -H_z(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)), \quad \psi^{\circ}(t_1, x) = -\frac{\partial(z^{\circ}(t, x))}{\partial z}, \\
\dot{p}^{\circ}(x) &= -M_y(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)), \quad p^{\circ}(x_1) = -\frac{\partial \varphi(y^{\circ}(x_1))}{\partial y},
\end{aligned}$$

то формула приращения функционала (13) качества (1) примет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta I(u^{\circ}, v^{\circ}) &= - \int_{x_0}^{x_1} M'_v(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta v(x) dx - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta u(t) dx dt + \frac{1}{2} \Delta y'(x_1) \varphi_{yy}(y^{\circ}(x_1)) \Delta y(x_1) - \\
& - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta y'(x) M_{yy}(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) \Delta y(x) + 2 \Delta v'(x) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times M_{vy}(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) \Delta y(x) + \Delta v'(x) M_{vv}(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) \Delta v(x) \Big] + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi^o(t, x)) \Delta z(t, x) + \right. \\
 & + 2 \Delta u'(t) H_{uz}(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi^o(t, x)) \Delta z(t, x) + \\
 & \left. + \Delta u'(t) H_{uu}(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi^o(t, x)) \Delta u(t) \right] dx dt + \eta_1(\Delta u, \Delta v), \quad (14)
 \end{aligned}$$

где по определению

$$\begin{aligned}
 \eta_1(\Delta u, \Delta v) = & o_1(\|\Delta y(x_1)\|^2) + o_2(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) - \int_{x_0}^{x_1} o_5(\|\Delta y(x)\| + \|\Delta v(x)\|)^2 dx - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_6(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u(t)\|)^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Далее из системы уравнений (7)–(10) следует, что $(\Delta z(t, x), \Delta y(x))$ является решением линеаризованной задачи

$$\frac{\partial \Delta z(t, x)}{\partial t} = f_z(t, x, z^o(t, x), u^o(t)) \Delta z(t, x) + f_u(t, x, z^o(t, x), u^o(t)) \Delta u(t) + o_7(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u(t)\|), \quad (15)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta y(x), \quad (16)$$

$$\Delta \dot{y}(x) = g_y(x, y^o(x), v^o(x)) \Delta y(x) + g_v(x, y^o(x), v^o(x)) \Delta v(x) + o_8(\|\Delta y(x)\| + \|\Delta v(x)\|), \quad (17)$$

$$\Delta y(x_0) = 0, \quad (18)$$

где величины $o_7(\cdot)$, $o_8(\cdot)$ определяются из разложений соответственно

$$\begin{aligned}
 f(t, x, \bar{z}, \bar{u}) - f(t, x, z^o, u^o) &= f_z(t, x, z^o, u^o) \Delta z + f_u(t, x, z^o, u^o) \Delta u + o_7(\|\Delta z\| + \|\Delta u\|), \\
 g(x, \bar{y}, \bar{v}) - g(x, y^o, v^o) &= g_y(x, y^o, v^o) \Delta y + g_v(x, y^o, v^o) \Delta v + o_8(\|\Delta y\| + \|\Delta v\|).
 \end{aligned}$$

3. Оценка нормы приращения состояния

Из системы уравнений переходя к соответствующим интегральным уравнениям, получаем

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq \|\Delta y(x)\| + L_1 \int_{t_0}^t \|\Delta z(\tau)\| + \|\Delta u(\tau)\| d\tau, \quad (19)$$

$$\|\Delta y(x)\| \leq L_2 \int_{x_0}^x \|\Delta y(s)\| + \|\Delta v(s)\| ds, \quad (20)$$

где $L_1, L_2 = \text{const} > 0$ – некоторые постоянные.

Применяя к неравенствам (19), (20) лемму Гронуолла–Беллмана, после некоторых преобразований будем иметь

$$\|\Delta y(x)\| \leq L_3 \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta v(s)\| ds, \quad (21)$$

где $L_3 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq L_4 \left(\int_{x_0}^{x_1} \|\Delta v(s)\| ds + \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u(\tau)\| d\tau \right), \quad (L_4 = \text{const} > 0). \quad (22)$$

4. Специальное приращение управления функционала качества

По предположению множества U и V являются выпуклыми. Поэтому специальное приращение допустимого управления $(u^\circ(t), v^\circ(x))$ можно определить по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_\mu(t) = \mu[u(t) - u^\circ(t)], \\ \Delta v_\mu(x) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где $\mu \in [0, 1]$ – произвольное число, а $u(t) \in U$, $t \in T$ – произвольная допустимая управляющая функция.

Через $(\Delta z_\mu(t, x), \Delta y_\mu(x))$ обозначим специальное приращение состояния $(z^\circ(t, x), y^\circ(x))$, отвечающее приращению (23) управления $(u^\circ(t), v^\circ(x))$.

Из оценок (21), (22) следует, что

$$\|\Delta z_\mu(t, x)\| \leq L_5 \mu, \quad \|\Delta y_\mu(x)\| = 0, \quad (24)$$

где $L_5 = \text{const} > 0$ – некоторая постоянная.

Далее, используя (23), (24), при помощи (15)–(17) доказывается, что

$$\Delta z_\mu(t, x) = \mu \ell(t, x) + o(\mu; t, x), \quad (25)$$

где $\ell(t, x)$ – n -мерная вектор-функция являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial \ell(t, x)}{\partial t} = f_z(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t)) \ell(t, x) + f_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t)) (u(t) - u^\circ(t)), \quad (26)$$

$$\ell(t_0, x) = 0. \quad (27)$$

С учетом (23), (26), (27) из формулы приращения следует справедливость разложения

$$\begin{aligned} I(u^\circ + \Delta u_\mu, v^\circ) - I(u^\circ, v^\circ) &= -\mu \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t), \psi^\circ(t, x)) (u(t) - u^\circ(t)) dt dx + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1, x) \frac{\partial^2 \phi_2(x, z^\circ(t_1, x))}{\partial z^2} \ell(t_1, x) - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\ell'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t), \psi^\circ(t, x)) \times \right. \right. \\ &\times \ell(t, x) + 2(u(t) - u^\circ(t))' H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t), \psi^\circ(t, x)) \ell(t, x) + \\ &\left. \left. + (u(t) - u^\circ(t))' H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t), \psi^\circ(t, x)) (u(t) - u^\circ(t)) \right] dx dt \right\} + o_1(\mu^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь специальное приращение управления $(u^\circ(t), v^\circ(x))$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_v(t) = 0, \\ \Delta v_v(x) = v[v(x) - v^\circ(x)]. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь $v \in [0, 1]$ – произвольное число, а $v(x) \in V$, $x \in X$ – произвольная допустимая управляющая функция.

Через $(\Delta z_v(t, x), \Delta y_v(x))$ обозначим специальное приращение вектора состояния $(z^\circ(t, x), y^\circ(x))$. Из оценок (21), (22) следует, что

$$\|\Delta z_v(t, x)\| \leq L_6 v, \quad (t, x) \in D, \quad \|\Delta y_v(x)\| \leq L_7 v, \quad x \in X, \quad (30)$$

где $L_6, L_7 = \text{const} > 0$ – некоторые постоянные.

Учитывая (15)–(18), с помощью (29), (30) доказывается, что

$$\Delta z_v(t, x) = v q(t, x) + o(v; t, x), \quad (31)$$

$$\Delta y_v(x) = v m(x) + o(v; x), \quad (32)$$

где вектор-функции $q(t, x)$ и $m(x)$ являются соответственно решениями задач

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial t} = f_z(t, x, z^o(t, x), u^o(t)) q(t, x), \quad (33)$$

$$q(t_0, x) = m(x), \quad (34)$$

$$\dot{m}(x) = g_y(x, y^o(x), v^o(x)) m(x) + g_v(x, y^o(x), v^o(x)) (v(x) - v^o(x)), \quad (35)$$

$$m(x_0) = 0. \quad (36)$$

Поэтому из формулы приращения (28) будем иметь

$$\begin{aligned} I(u^o, v^o + \Delta v_v) - I(u^o, v^o) = & -v \int_{x_0}^{x_1} M'_v(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) (v(x) - v^o(x)) dx + \\ & + \frac{v^2}{2} \left\{ m'(x_1) \frac{\partial^2 \Phi_1(y^o(x_1))}{\partial y^2} m(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} q'(t_1, x) \frac{\partial^2 \Phi_2(x, z^o(t_1, x))}{\partial z^2} q(t_1, x) - \right. \\ & - \int_{x_0}^{x_1} \left[m'(x) M_{vv}(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) m(x) + 2(v(x) - v^o(x))' M_{vy}(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) \times \right. \\ & \times m(x) + (v(x) - v^o(x))' M_{vy}(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) (v(x) - v^o(x)) \left. \right] dx + \\ & \left. + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) H_{zz}(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi^o(t, x)) q(t, x) dx dt \right\} + o(v^2). \end{aligned} \quad (37)$$

Полученные разложения позволяют получить как линеаризованные, так и квадратичные необходимые условия оптимальности.

Из разложений (28), (37) получаем, что вдоль процесса $(u^o(t), v^o(x), z^o(t, x), y^o(x))$

$$I(u^o + \Delta u_\mu, v^o) - I(u^o, v^o) = -\mu \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi^o(t, x)) (u(t) - u^o(t)) dt dx + o_1(\mu) \geq 0, \quad (38)$$

$$I(u^o, v^o + \Delta v_v) - I(u^o, v^o) = -v \int_{x_0}^{x_1} M'_v(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) (v(x) - v^o(x)) dx + o(v) \geq 0. \quad (39)$$

Из последних неравенств в силу произвольности μ и v следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi^o(t, x)) (u(t) - u^o(t)) dt dx \leq 0, \quad (40)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} M'_v(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) (v(x) - v^o(x)) dx \leq 0. \quad (41)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Если множества U и V выпуклые, то для оптимальности допустимого управления $(u^o(t), v^o(x))$ необходимо, чтобы неравенства (40) и (41) выполнялись для всех $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(x) \in V$, $x \in X$ соответственно.

Неравенства (40), (41) являются интегральными необходимыми условиями оптимальности. Из них, используя лемму из работы [10. С. 3], можно получить поточечные линеаризованные необходимые условия оптимальности вида

$$\int_{x_0}^{x_1} H'_u(\theta, x, z^\circ(\theta, x), u^\circ(\theta), \psi^\circ(\theta, x))(u - u^\circ(\theta)) dx \leq 0, \quad (42)$$

$$M'_v(\xi, y^\circ(\xi), v^\circ(\xi), p^\circ(\xi))(v - v^\circ(\xi)) \leq 0, \quad (43)$$

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $(u^\circ(t), v^\circ(x))$ в случае выпуклости множеств U и V в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы соотношения (42), (43) выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $u \in U$ и $\xi \in [x_0, x_1)$, $v \in V$ соответственно.

Пара соотношений (42), (43) является поточечным необходимым условием оптимальности в задаче (1)–(6).

Следуя схеме работы [10], можно доказать, что необходимые условия оптимальности (40), (41) и (42), (43) эквивалентны.

5. Квадратичные многоточечные необходимые условия оптимальности

В этом разделе изучается случай вырождения линеаризованного условия максимума (особый случай). Заметим, что особые случаи возникают во многих прикладных задачах из техники и экономики (см. напр.: [7, 8, 11])

Определение 1. Допустимое управление $(u^\circ(t), v^\circ(x))$ назовем квазиособым управлением в задаче (1)–(6), если для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $u \in U$ и $\xi \in [x_0, x_1)$, $v \in V$ выполняются соответственно соотношения

$$\left(\int_{x_0}^{x_1} H'_u(\theta, x, z^\circ(\theta, x), u^\circ(\theta), \psi^\circ(\theta, x)) dx \right) (u - u^\circ(\theta)) \equiv 0, \quad (44)$$

$$M'_v(\xi, y^\circ(\xi), v^\circ(\xi), p^\circ(\xi))(v - v^\circ(\xi)) \equiv 0. \quad (45)$$

Из разложений (28), (37) следует, что для оптимальности квазиособого управления $(u^\circ(t), v^\circ(x))$ необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \ell'(t_1, x) \frac{\partial^2 G(x, z^\circ(t_1, x))}{\partial z^2} \ell(t_1, x) - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\ell'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t), \psi^\circ(t, x)) \ell(t, x) + \right. \\ & \quad + 2(u(t) - u^\circ(t))' H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t), \psi^\circ(t, x)) \ell(t, x) + \\ & \quad \left. + (u(t) - u^\circ(t))' H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t), \psi^\circ(t, x)) (u(t) - u^\circ(t)) \right] dx dt \geq 0, \quad (46) \\ & m'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(y^\circ(x_1))}{\partial y^2} m(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} q'(t_1, x) \frac{\partial^2 G(x, z^\circ(t_1, x))}{\partial z^2} q(t_1, x) dx - \\ & \quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t), \psi^\circ(t, x)) q(t, x) dx dt - \\ & \quad - \int_{x_0}^{x_1} \left[m'(x) M_{vv}(x, y^\circ(x), v^\circ(x), p^\circ(x)) m(x) + 2(v(x) - v^\circ(x))' M_{vy}(x, y^\circ(x), v^\circ(x), p^\circ(x)) \times \right. \\ & \quad \left. \times m(x) + (v(x) - v^\circ(x))' M_{yy}(x, y^\circ(x), v^\circ(x), p^\circ(x)) (v(x) - v^\circ(x)) \right] dx \geq 0. \quad (47) \end{aligned}$$

Неравенства (46), (47) являются неявными необходимыми условиями оптимальности квазиособых управлений. Однако они позволяют получить ряд более легко проверяемых необходимых условий оптимальности квазиособых управлений.

С этой целью напомним представления решений задач (26), (27), (33)–(36). Имеем

$$\ell(t, x) = \int_{t_0}^t F(t, \tau, x) f_u(\tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau)) (u(\tau) - u^0(\tau)) d\tau, \quad (48)$$

$$m(x) = \int_{x_0}^x \Phi(x, m) g_v(m, y^0(m), v^0(m)) (v(m) - v^0(m)) dm, \quad (49)$$

$$q(t, x) = \int_{x_0}^x F(t, t_0, x) \Phi(x, m) g_v(m, y^0(m), v^0(m)) (v(m) - v^0(m)) dm, \quad (50)$$

где $F(t, \tau, x)$ и $\Phi(x, s)$ являются решениями задач

$$F_t(t, \tau, x) = -F(t, \tau, x) f_z(\tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau, x)), \quad F(t, t, x) = E,$$

$$\Phi_x(x, s) = -\Phi(x, s) g_y(m, y^0(m), v^0(m)), \quad \Phi(m, m) = E,$$

соответствующими квазиособому процессу $(u^0(t), v^0(x), z^0(t, x), y^0(x))$. Здесь E – единичная матрица. Введем обозначения:

$$K(x, \tau, s) = -F'(t_1, \tau, x) G_{zz}(z^0(t_1, x)) F(t_1, x, s) + \\ + \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} F'(t, \tau, x) H_{zz}(t, x, z^0(t, x), u^0(t, x), \psi^0(t, x)) F(t, x, s) dt, \quad (51)$$

$$N(m, \ell) = -\Phi'(x_1, m) \phi_{yy}(y^0(x_1)) \Phi(x_1, \ell) + \\ + \int_{\max(m, \ell)}^{t_1} [F'(t_1, t_0, x) \Phi'(x, m) G_{zz}(x, z^0(t_1, x)) \Phi(x, \ell) F(t_1, t_0, x)] dx + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\max(m, \ell)}^{x_1} F'(t, t_0, x) \Phi'(x, m) H_{zz}(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x)) \Phi(x, \ell) F(t, t_0, x) dx + \\ + \int_{\max(m, \ell)}^{x_1} \Phi'(x, m) M_{yy}(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x)) \Phi(x, \ell) dx. \quad (52)$$

Принимая во внимание представления (48)–(50) и обозначения (51), (52) в неравенствах (46), (47), после некоторых преобразований приходим к соотношениям

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} (u(\tau) - u^0(\tau))' f_u'(\tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau)) F'(t_1, \tau, x) K(x, \tau, s) f_u(s, x, z^0(s, x), u^0(s)) \times \\ \times F(t_1, s, x) (u(s) - u^0(s)) ds d\tau dx + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_t^{t_1} (u(\tau) - u^0(\tau))' H_{uz}(\tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau), \psi^0(\tau, x)) \times \\ \times F(\tau, t, x) f_u(t, x, z^0(t, x), u^0(t)) (u(t) - u^0(t)) d\tau dx dt + \\ + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (u(t) - u^0(t))' H_{uu}(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x)) (u(t) - u^0(t)) dx dt \leq 0 \quad (53)$$

для всех $u(t) \in U \subset R^r$, $t \in [t_0, t_1]$,

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} (v(m) - v^0(m))' g_v(m, y^0(m), v^0(m)) N(m, \ell) g_v(\ell, y^0(\ell), v^0(\ell)) (v(\ell) - v^0(\ell)) d\ell dm + \\ + 2 \int_{x_0}^x \int_x^{x_1} (v(m) - v^0(m))' M_{vy}(m, y^0(m), v^0(m), p^0(m)) \Phi(m, x) g_v(x, y^0(x), v^0(x)) dm \Big] \times$$

$$\times (v(x) - v^o(x)) dx + \int_{x_0}^{x_1} (v(x) - v^o(x))' M_{vv}(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) (v(x) - v^o(x)) dx \leq 0 \quad (54)$$

для всех $v(x) \in V$, $x \in [x_0, x_1]$.

Следовательно, имеет место

Теорема 3. Для оптимальности квазиисобого управления в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы выполнялись соотношения (53) и (54).

Неравенства (53), (54) являются интегральными необходимыми условиями оптимальности второго порядка. Из них можно получить ряд более конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности. В частности, имеет место

Следствие 2. Для оптимальности квазиисобого управления $(u^o(t), v^o(x))$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенства

$$(u - u^o(\theta))' \left[\int_{x_0}^{x_1} H_{uu}(\theta, x, z^o(\theta, x), u^o(\theta), \psi^o(\theta, x)) dx \right] (u - u^o(\theta)) \leq 0, \quad (55)$$

$$(v - v^o(\xi))' M_{vv}(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)) (v - v^o(\xi)) \leq 0 \quad (56)$$

выполнялись для всех $u \in U$, $\theta \in [t_0, t_1]$, $v \in V$, $\xi \in [x_0, x_1]$ соответственно.

Заметим, что условия оптимальности (53), (54) позволяют исследовать на оптимальность также те квазиисобые управления, для которых необходимые условия оптимальности (55), (56) вырождаются.

Определение 2. Квазиисобое управление $(u^o(t), v^o(x))$ назовем квазиисобым второго порядка управлением, если для всех $\theta \in [t_0, t_1]$, $u \in U$ и $\xi \in [x_0, x_1]$, $v \in V$ выполняются соответственно соотношения

$$(u - u^o(\theta))' \left[\int_{x_0}^{x_1} H_{uu}(\theta, x, z^o(\theta, x), u^o(\theta), \psi^o(\theta, x)) dx \right] (u - u^o(\theta)) = 0, \quad (57)$$

$$(v - v^o(\xi))' M_{vv}(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)) (v - v^o(\xi)) = 0. \quad (58)$$

6. Многоточечные необходимые условия оптимальности квазиисобых второго порядка управлений

Неравенства (53) и (54) позволяют получить многоточечные необходимые условия оптимальности квазиисобых второго порядка управлений.

Пусть $(u^o(t), v^o(x))$ – квазиисобое второго порядка управление. Специальные приращения управляющих функций $u^o(t)$, $v^o(x)$ определим по формулам

$$u_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^m \delta u(t, \varepsilon; \theta_i, \ell_i, u_i), \quad (59)$$

$$v_\mu(x; \mu) = \sum_{i=1}^m \delta v(x, \mu; \xi_i, \ell_i, v_i). \quad (60)$$

Здесь $\delta u(t, \varepsilon; \theta_j, \ell_j, u_j)$, $\delta v(x, \mu; \xi_j, \ell_j, v_j)$ – игольчатого типа вариации управлений $u^o(t)$, $v^o(x)$, определяемые формулами

$$\delta u(t, \varepsilon; \theta_i, \ell_i, u_i) = \begin{cases} u_i, & t \in [\theta_i, \theta_i + \ell_i \varepsilon), \\ u^o(t), & t \in T \setminus [\theta_i, \theta_i + \ell_i \varepsilon), \end{cases} \quad (61)$$

$$\delta v(x, \mu; \xi_i, \ell_i, v_i) = \begin{cases} v_i, & x \in [\xi_i, \xi_i + \ell_i \mu), \\ v^o(x), & x \in X \setminus [\xi_i, \xi_i + \ell_i \mu), \end{cases} \quad (62)$$

где $\ell \geq 0, i = \overline{1, m}$, – произвольные числа, $u_i \in U, v_i \in V, i = \overline{1, m}$, – произвольные векторы, $\varepsilon > 0, \mu > 0$ – произвольные достаточно малые числа, θ_i, ξ_i – произвольные точки.

Суммирование игольчатого типа вариаций понимается в смысле [12].

Учитывая определение квазиисобого второго порядка управления, из (53), ((54)), а также (55), (56) после некоторых преобразований получим, что вдоль квазиисобого второго порядка управления $(u^o(t), v^o(x))$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \left[\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i,j=1}^m \ell_i \ell_j (u_i - u(\theta_i))' f_u'(\theta_i, x, z^o(\theta_i, x), u(\theta_i)) K(x, \xi_i, \xi_j) f_u(\theta_j, x, z^o(\theta_j, x), u(\theta_j)) \times \right. \\ & \quad \times (u_j - u^o(\theta_j)) + \sum_{i=1}^m \ell_i (u_i - u(\theta_i))' H_z'(\theta_i, x, z^o(\theta_i, x), u^o(\theta_i), \psi^o(\theta_i, x)) \times \\ & \quad \times \left[\ell_i (u_i - u(\theta_i))' f_u(\theta_i, x, z^o(\theta_i, x), u^o(\theta_i)) (u_j - u(\theta_j)) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \ell_j f_u(\theta_j, x, z^o(\theta_j, x), u^o(\theta_j)) \right] \times \\ & \quad \times (u_j - u(\theta_j)) \Big] dx + o(\varepsilon^2) \leq 0, \\ & \mu^2 \left\{ \sum_{i,j=1}^m \ell_i \ell_j (v_i - v(\xi_i))' g_v'(\xi_i, y^o(\xi_i), v_i) N(\xi_i, \xi_j) g_v(\xi_j, y^o(\xi_j), v_j) (v_j - v(\xi_j)) + \right. \\ & \quad + \sum_{i=1}^m \ell_i (v_i - v(\xi_i))' M_{vy}(\xi_i, y^o(\xi_i), v(\xi_i), p^o(\xi_i)) \times \\ & \quad \times \left[\ell_i g_v(\xi_i, y^o(\xi_i), v^o(\xi_i)) (v_i - v(\xi_i)) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \ell_j g_v(\xi_j, y^o(\xi_j), v(\xi_j)) (v_j - v(\xi_j)) \right] \Big\} + o(\mu^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности ε и μ приходим к следующему утверждению:

Теорема 4. Для оптимальности квазиисобого второго порядка управления $(u^o(t), v^o(x))$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы для любого натурального числа m неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i,j=1}^m \ell_i \ell_j (u_i - u(\theta_i))' f_u'(\theta_i, x, z^o(\theta_i, x), u^o(\theta_i)) K(x, \theta_i, \theta_j) f_u(\theta_j, x, z^o(\theta_j, x), u(\theta_j)) \times \\ & \quad \times (u_j - u^o(\theta_j)) + \sum_{i=1}^m \ell_i (u_i - u(\theta_i))' H_{uz}(\theta_i, x, z^o(\theta_i, x), u^o(\theta_i), \psi^o(\theta_i, x)) \times \\ & \quad \times \left[\ell_i f_u(\theta_i, x, z^o(\theta_i, x), u^o(\theta_i)) (u_i - u(\theta_i)) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \ell_j F(\theta_i, \theta_j, x) f_u(\theta_j, x, z^o(\theta_j, x), u^o(\theta_j)) \right] \times \\ & \quad \times (u_j - u(\theta_j)) \Big] dx \leq 0, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^m \ell_i \ell_j (v_i - v(\xi_i))' g_v'(\xi_i, y^o(\xi_i), v^o(\xi_i)) N(\xi_i, \xi_j) g_v(\xi_j, y^o(\xi_j), v^o(\xi_j)) \times (v_j - v^o(\xi_j)) + \\ & + \sum_{i=1}^m \ell_i (v_i - v^o(\xi_i))' M_{vy}(\xi_i, y^o(\xi_i), v^o(\xi_i), p^o(\xi_i)) \times \left[\ell_i g_v(\xi_i, y^o(\xi_i), v^o(\xi_i)) (v_i - v(\xi_i)) + \right. \\ & \quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \ell_j \Phi(\xi_i, \xi_j) g_v(\xi_j, y^o(\xi_j), v^o(\xi_j)) (v_j - v^o(\xi_j)) \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (64)$$

выполнялись для всех $\ell_i \geq 0$, $u_i \in U$, $\theta_i \in [t_0, t_1)$ ($\ell_i \geq 0$, $v_i \in V$, $\xi_i \in [x_0, x_1]$), $i = \overline{1, m}$ ($t_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_m < t_1$) ($(x_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_m < x_1)$) соответственно.

Следует отметить, что полученные многоточечные необходимые условия оптимальности (63), (64) более информативны и, более того, остаются в силе также в случае вырождения этих необходимых условий оптимальности при $m=1, 2$ и т.д.

Заключение

В статье ставится и изучается одна задача оптимального управления типа А.И. Москаленко при предположении выпуклости области управления. Построена и исследована формула приращения критерия качества для игольчатых вариаций управления. Доказан аналог линеаризованного принципа максимума и исследован случай его вырождения. Установлено необходимое условие оптимальности квазисобых управлений. Доказаны многоточечные необходимые условия оптимальности для квазисобых управлений второго порядка, позволяющие сузить множество квазисобых управлений, подозрительных на оптимальность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москаленко А.И. Об одной задаче оптимального регулирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. № 1. С. 68–95.
2. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20, № 10. С. 1320–1334; № 11. С. 1441–1458; № 12. С. 1561–1578.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М. : Либроком, 2011. 472 с.
4. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М. : Факториал пресс, 2002. 824 с.
5. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и метод линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1989. 164 с.
6. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Баку : Элм, 2010. 360 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Либроком, 2011. 256 с.
8. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление. Вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 5–15.
9. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. : Физматлит, 2005. 525 с.
10. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1982. 110 с.
11. Параев Ю.И. Оптимальное управление двухсекторной экономикой // Вестник Томского государственного университета. Управление. Вычислительная техника и информатика. 2014. № 3 (28). С. 2–11.
12. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференциальные уравнения. 1975. № 10. С. 1765–1773.

Поступила в редакцию 25 сентября 2019 г.

Rasulzade Sh.M. (2020) INTEGRAL AND MULTIPOINT NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS OF QUASI-SINGULAR CONTROLS IN ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 10–21

DOI: 10.17223/19988605/51/2

Consider the minimum functional problem

$$S(u, v) = \varphi(y(x_1)) + \int_{t_0}^{t_1} G(x, z(t_1, x)) dx,$$

under restrictions

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ v(x) &\in V \subset R^q, \quad x \in X = [x_0, x_1], \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= f(t, x, z, u), \quad (t, x) \in D = T \times X, \end{aligned}$$

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x \in X,$$

$$\dot{y} = g(x, y, v), \quad x \in X, \quad y(x_0) = y_0.$$

Here $\varphi(y)$, $G(x, z)$ are continuous and twice continuously differentiable with respect to y , (z) scalar functions, U and V are the given non-empty bounded and convex sets, $f(t, x, z, u)$, $(g(x, y, v))$ are n -dimensional vector-functions continuous in the aggregate of variables together with partial derivatives with respect to (z, u) $((y, v))$ up to second order inclusive, $u(t)$, $(v(x))$ are the piecewise continuous (with a finite number of break points of the first kind) vectors of control actions, y_0 is a constant vector.

The necessary optimality condition in the form of the linearized maximum principle is proved, and the necessary optimality conditions for quasi-singular controls are established.

Keywords: system with distributed parameters; increment method; linearized maximum principle; necessary optimality condition; quasi-singular control; multi-point necessary optimality condition.

RASULZADE Shahla Majid gyzy (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: akja@rambler.ru

REFERENCES

1. Moskalenko, A.I. (1969) Ob odnoy zadache optimal'nogo regulirovaniya [On one problem of optimal regulation]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1. pp. 68–95.
2. Rozonoer, L.I. (1959) Pontryagin maximum principle in the theory of optimum systems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 20(10). pp. 1320–1334.
3. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2011) *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in the theory of optimal control]. Moscow: Librokom.
4. Vasilyev, F.P. (2002) *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Faktorial press.
5. Srochko, V.A. (1987) *Variatsionnyy printsip maksimuma i metod linearizatsii v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [The variational maximum principle and the linearization method in optimal control problems]. Irkutsk: Irkutsk State University.
6. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.Dz. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Qualitative theory of optimal control of systems with distributed parameters]. Baku: ELM.
7. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2011) *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Special optimal controls] Moscow: Librocom.
8. Paraev, Yu.I., Grekova, T.I. & Danilyuk, E.Yu. (2011) Analytical solution to the problem of optimal control of a single-sector economy over a finite time interval. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17) pp. 5–115.
9. Alekseyev, V.M., Tikhomirov, V.M. & Fomin, S.V. (2005) *Optimal'noe upravlenie* [Optimal Control]. Moscow: Fizmatlit.
10. Srochko, V.A. (1982) *Vychislitel'nye metody optimal'nogo upravleniya* [Computational Optimal Control Methods]. Irkutsk: Irkutsk State University
11. Parayev, Yu.I. (2014) Optimal management of a two-sector economy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(28). pp. 2–11.
12. Gorokhovik, S.Ya. (1975) Necessary optimality conditions in a problem with a movable right hand endpoint of the trajectory. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 10. p. 765–1773.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/51/3

С.Г. Алиева

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
С ОТСРОЧЕННЫМИ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Изучаются модели многоканальных систем массового обслуживания с отсроченными обратными связями. Вызов принимается для обслуживания, если в момент его поступления имеется хотя бы один свободный канал, иначе он, согласно схеме Бернулли, либо получает отказ, либо уходит в орбиту для повторения своего запроса после некоторого промежутка времени. После завершения обслуживания каждый вызов, согласно схеме Бернулли, либо окончательно покидает систему, либо уходит в орбиту. Поступающий с орбиты вызов принимается для обслуживания, если в этот момент имеется свободный канал, иначе он, согласно схеме Бернулли, либо покидает орбиту, либо остается в ней. Изучаются модели с конечным и бесконечным размером орбиты. Разработаны точный и приближенный методы расчета вероятностей состояний системы и ее характеристик. Даны результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: система массового обслуживания; отсроченная обратная связь; численный анализ.

Модели систем массового обслуживания (СМО) с обратными связями [1, 2] адекватно описывают процессы передачи информации в телекоммуникационных сетях. Это объясняется тем, что в этих сетях ошибочно переданные данные (пакеты, кадры и т.д.) требуют повторной передачи. При этом в зависимости от принятого протокола эти данные могут быть повторно переданы либо мгновенно, либо с некоторой задержкой. В первом случае потребуется использовать модели СМО с мгновенной обратной связью [3–14], а во втором – СМО с отсроченной обратной связью [15–22].

Анализ указанных работ показал, что для стационарного распределения вероятностей состояний СМО с обратными связями не удастся получить простые расчетные формулы даже для моделей систем с числом каналов больше двух. Поэтому разработка эффективных методов для численного анализа многоканальных СМО с обратными связями является актуальной проблемой.

В данной работе предлагаются точный и приближенный методы анализа характеристик модели многоканальной СМО с отсроченной обратной связью. Подобная модель ранее была изучена в [22], где предполагалось, что если в момент поступления первичного вызова (т.е. вызова, который поступает извне) все каналы системы заняты, то он теряется с вероятностью, равной единице. В настоящей работе предполагается, что в этих случаях такие вызовы, согласно схеме Бернулли, либо отправляются в орбиту для повторения своего запроса для обслуживания, либо теряются. Кроме того, здесь же корректируются технические ошибки, допущенные в работе [22].

1. Описание модели системы и постановка задачи

На вход многоканальной системы, которая содержит N , $1 < N < \infty$, идентичных каналов, поступает пуассоновский поток вызовов с интенсивностью λ . Эти вызовы называются первичными вызовами (p -вызовы). Если в момент поступления p -вызова имеется хотя бы один свободный канал,

то он принимается в систему, и немедленно начинается процесс его обслуживания; иначе, т.е. если в этот момент все каналы системы заняты, поступивший p -вызов, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью $\sigma(r)$, $0 \leq \sigma(r) \leq 1$, уходит в орбиту для повторения обслуживания через некоторое случайное время, либо с дополнительной вероятностью $1 - \sigma(r)$ покидает систему, где r – текущее число вызовов в орбите (рис. 1).

Времена обработки p -вызовов являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, которые имеют показательную функцию распределения со средним μ^{-1} . После завершения обслуживания p -вызов, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью $\alpha(n)$ уходит в орбиту для повторения обслуживания через случайное время, либо с дополнительной вероятностью $1 - \alpha(n)$ вызов уходит из системы. Здесь параметр n указывает число занятых каналов непосредственно перед моментом завершения обслуживания данного вызова, $n = 1, 2, \dots, N$. Считается, что $\alpha(n) > 0$ для всех n , $n = 1, 2, \dots, N$.

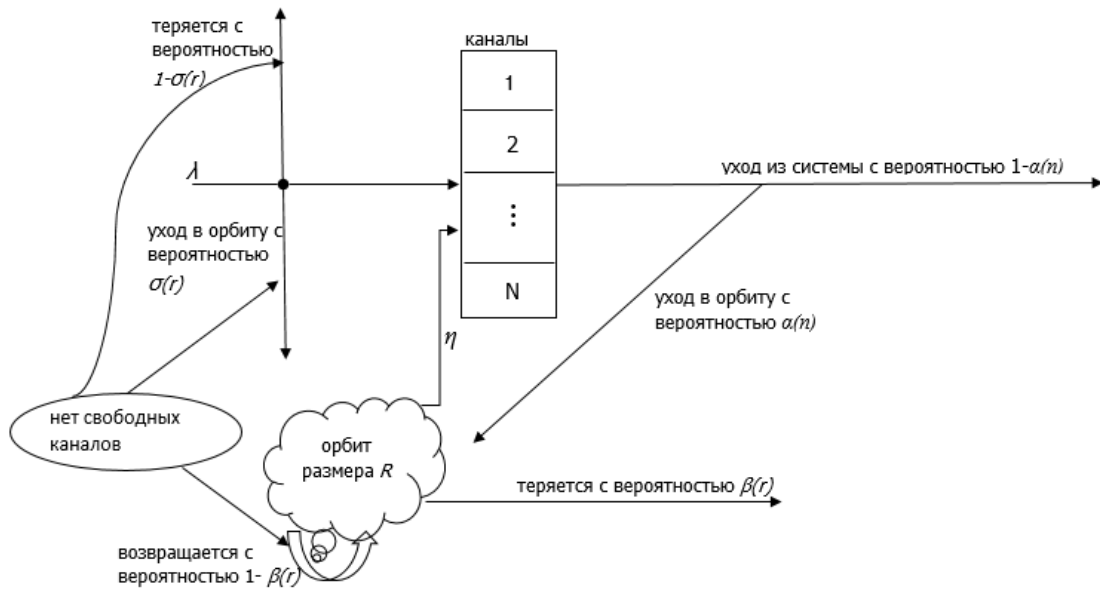


Рис. 1. Структурная схема системы
Fig. 1. The structural diagram of the system

Вызовы, которые требуют повторного обслуживания, и вызовы, которые не смогли получить доступ в канал в момент поступления, организуют общую орбиту повторных вызовов (r -вызовы) с максимальным размером R , $0 < R \leq \infty$. В случае $R < \infty$ вызов принимается в орбиту, если в момент его поступления общее число повторных вызовов в орбите меньше, чем R , иначе он покидает систему с вероятностью, равной единице. Орбита генерирует запросы для обслуживания через случайные моменты времени, которые подчиняются показательному закону распределения со средним $(r\eta)^{-1}$, где параметр r указывает текущее число r -вызовов в орбите. Считается, что r -вызовы и p -вызовы являются идентичными по длительности их обслуживания. Считается, что если в момент поступления r -вызова все каналы системы заняты, то он, согласно схеме Бернулли, с вероятностью $\beta(r)$, $0 \leq \beta(r) \leq 1$, покидает систему или с дополнительной вероятностью $1 - \beta(r)$ остается в орбите, где r – текущее число r -вызовов в орбите, $r = 1, 2, \dots, R$.

Проблема состоит в определении стационарного распределения состояний данной системы и ее характеристик, при этом характеристиками данной системы являются вероятности потерь первичных (PB_p) и повторных (PB_r) вызовов, среднее число занятых каналов (N_{av}), и среднее число повторных вызовов в орбите (L_0).

2. Точный метод расчета характеристик системы

Сначала рассмотрим модель системы с ограниченным размером орбиты. В этом случае состояние этой системы в произвольный момент времени определяется двумерным вектором (n, r) , где n , $n = 0, 1, \dots, N$, означает суммарное число вызовов (первичных и повторных) в каналах, а r , $r = 0, 1, \dots, R$, указывает на число повторных вызовов в орбите. Тогда изучаемая система описывается двумерной цепью Маркова (Two Dimensional Markov Chain, 2D MC), где ее пространство состояний (ПС) задается так:

$$E = \{(n, r) : n = 0, 1, \dots, N; r = 0, 1, \dots, R\}. \quad (1)$$

Интенсивность перехода из состояния $(n_1, r_1) \in E$ в состояние $(n_2, r_2) \in E$ обозначается через $q((n_1, r_1), (n_2, r_2))$. Совокупность этих величин составляет производящую матрицу (ПМ) данной 2D MC. Исходя из описания работы системы заключаем, что положительные элементы ПМ определяются следующим образом (см. рис. 1).

Случай $0 \leq n_1 \leq N-1$:

$$q((n_1, r_1), (n_2, r_2)) = \begin{cases} \lambda, & (n_2, r_2) = (n_1 + 1, r_1), \\ n_1 \mu \alpha(n_1), & r_1 < R, (n_2, r_2) = (n_1 - 1, r_1 + 1), \\ n_1 \mu (1 - \alpha(n_1)), & r_1 < R, (n_2, r_2) = (n_1 - 1, r_1), \\ n_1 \mu, & r_1 = R, (n_2, r_2) = (n_1 - 1, r_1), \\ r_1 \eta, & (n_2, r_2) = (n_1 + 1, r_1 - 1). \end{cases} \quad (2)$$

Случай $n_1 = N$:

$$q((N, r_1), (n_2, r_2)) = \begin{cases} \lambda \sigma(r_1), & \text{если } r_1 < R, (n_2, r_2) = (N, r_1 + 1), \\ N \mu \alpha(N), & \text{если } r_1 < R, (n_2, r_2) = (N - 1, r_1 + 1), \\ N \mu (1 - \alpha(N)), & \text{если } r_1 < R, (n_2, r_2) = (N - 1, r_1), \\ N \mu, & \text{если } r_1 = R, (n_2, r_2) = (N - 1, R), \\ r_1 \eta \beta(r_1), & \text{если } (n_2, r_2) = (N, r_1 - 1). \end{cases} \quad (3)$$

Данная 2D MC является неприводимой, так как ее состояния сообщаются друг с другом (рис. 2). Поэтому при любых положительных значениях нагрузочных параметров системы в ней существует стационарный режим.

Пусть $p(n, r)$ обозначает стационарную вероятность состояния $(n, r) \in E$. Эти вероятности удовлетворяют соответствующей системе уравнений равновесия (СУР), которая составляется на основе соотношений (2) и (3). Она имеет следующий вид.

Случай $(n, r), r < R$:

$$\begin{aligned} p(n, r) & (\lambda I(n < N) + \lambda \sigma(r) \delta(n, N) + n \mu + r \eta) = (r + 1) \eta p(n - 1, r + 1) I(n > 0) + \\ & + (r + 1) \eta \beta(r + 1) p(N, r + 1) \delta(n, N) + (n + 1) \mu (1 - \alpha(n + 1)) p(n + 1, r) I(n < N) + \\ & + \lambda p(n - 1, r) I(n > 0) + (n + 1) \mu \alpha(n + 1) p(n + 1, r - 1) I(r > 0) + \\ & + \lambda \sigma(r - 1) p(n, r - 1) I(1 < r < R) \delta(n, N). \end{aligned} \quad (4)$$

Случай (n, R) :

$$\begin{aligned} p(n, R) & (\lambda I(n < N) + n \mu + R \eta I(n < N) + R \eta \beta(R) \delta(n, N)) = \lambda p(n - 1, R) I(n > 0) + \\ & + (n + 1) \mu p(n + 1, R) I(n < N) + (n + 1) \mu \alpha(n + 1) p(n + 1, R - 1) + \\ & + \lambda \sigma(R - 1) p(N, R) \delta(n, R). \end{aligned} \quad (5)$$

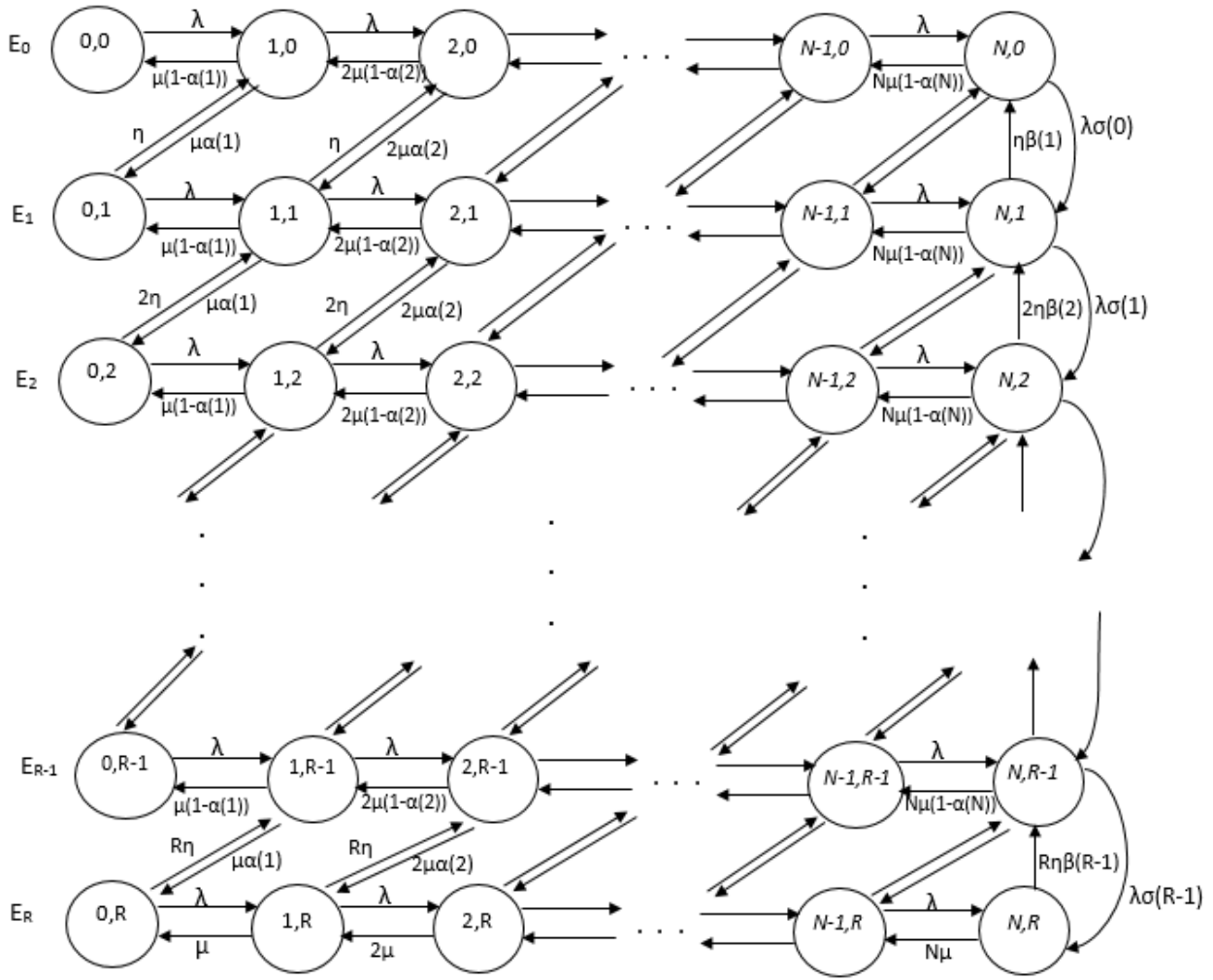


Рис. 2. Граф переходов
Fig. 2. Transition graph

В уравнениях (4), (5) и далее приняты следующие обозначения: $I(A)$ – индикаторная функция события A , $\delta(i, j)$ – символы Кронекера.

Нормирующее условие записывается как

$$\sum_{(n,r) \in E} p(n,r) = 1. \quad (6)$$

Характеристики системы определяются как

$$PB_p = \sum_{r=0}^R p(N,r)(1-\sigma(r)); \quad (7)$$

$$PB_r = \sum_{i=1}^R p(N,i)\beta(i); \quad (8)$$

$$N_{av} = \sum_{n=1}^N n \sum_{r=0}^R p(n,r); \quad (9)$$

$$L_o = \sum_{r=1}^R r \sum_{n=0}^N p(n,r). \quad (10)$$

Описанный выше точный метод позволяет вычислить характеристики (7)–(10) для моделей умеренной размерности. С ростом размерности ПС (1) этот метод испытывает серьезные вычислительные трудности. Для их устранения используем метод приближенного расчета стационарного распределения 2D MC [22].

3. Приближенный метод расчета характеристик системы

Для корректного применения указанного метода предположим, что интенсивность первичных вызовов существенно превышает интенсивности повторных вызовов, т.е. принимается, что $\lambda \gg \eta$. В силу указанного допущения получаем, что интенсивности переходов между состояниями внутри строк в диаграмме переходов модели намного превышают интенсивности переходов между ними (см. рис. 2). На основе этого факта в работе [22] используется следующее расщепление исходного ПС:

$$E = \bigcup_{r=0}^R E_r, E_r \cap E_{r'} = \emptyset, \text{ если } r \neq r', \quad (11)$$

где $E_r = \{(n, r) \in E : n = 0, 1, \dots, N\}$, $r = 0, 1, \dots, R$. Иными словами, осуществляется расслоение графа переходов по строкам (см. рис. 1).

На основе расщепления (11) вводится следующая функция укрупнения:

$$U((n, r)) = \langle r \rangle, (n, r) \in E_r,$$

где $\langle r \rangle$ является укрупненным состоянием, которое включает в себе все состояния из класса E_r и обозначается как $\Omega = \{\langle r \rangle : r = 0, 1, \dots, R\}$.

Согласно алгоритму приближенного расчета стационарного распределения 2D МС [22] находим, что вероятности состояний исходной модели определяются следующим образом:

$$p(n, r) \approx \rho_r(n) \pi(\langle r \rangle), \quad (12)$$

где $\rho_r(n)$ – вероятность состояния (n, r) внутри расщепленной модели с пространством состояний E_r , а $\pi(\langle r \rangle)$ – вероятность укрупненного состояния $\langle r \rangle \in \Omega$.

Из схемы разбиения (11) видно, что все расщепленные модели представляют собой идентичные одномерные процессы размножения и гибели (One-Dimensional Birth Death Process, 1-D BDP), так как в классе состояний E_r вторая компонента является постоянной. Поэтому при изучении расщепленной модели с ПС E_r микросостояние $(n, r) \in E$ исходной модели может быть задано лишь одной компонентой n , $n = 0, 1, \dots, N$.

Интенсивность перехода между состояниями n и n' в расщепленных моделях с ПС E_r обозначается через $q_r(n, n')$, $n, n' = 0, 1, \dots, N, n \neq n'$. Из (2) и (3) заключаем, что для всех расщепленных моделей с ПС $E_r, r = 0, 1, \dots, R-1$, при этом эти величины определяются одинаковым образом как

$$q_r(n, n') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n' = n + 1, \\ n\mu(1 - \alpha(n)), & \text{если } n' = n - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (13)$$

В расщепленной модели с ПС E_R эти величины определяются так:

$$q_R(n, n') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n' = n + 1, \\ n\mu, & \text{если } n' = n - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (14)$$

Из (13) заключаем, что вероятности состояний внутри расщепленных моделей с ПС $E_r, r = 0, 1, \dots, R-1$, не зависят от параметра r и определяются следующим образом:

$$\rho_r(n) = \frac{v^n}{n! \prod_{i=1}^n (1 - \alpha(i))} \rho_r(0), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

где $v = \lambda / \mu$, $\rho_r(0)$ находится из условия нормировки, т.е. $\sum_{n=0}^N \rho_r(n) = 1$.

Замечание. Поскольку вероятности состояний $\rho_r(n)$ не зависят от индекса при $0 \leq r \leq R-1$, то ниже этот индекс для этих вероятностей иногда (когда это не приводит к недоразумению) опускается.

Из (14) находим, что вероятности состояний внутри расщепленной модели с ПС E_R совпадают с вероятностями состояний классической модели Эрланга $M/M/N/N$ с нагрузкой v :

$$\rho_R(n) = \frac{v^n}{n!} / \sum_{i=0}^N \frac{v^i}{i!}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (16)$$

Тогда с учетом (2), (3), (15) и (16) после определенных математических выкладок получаем

$$q(<r_1>, <r_2>) = \begin{cases} \Lambda(r_1), & \text{если } r_2 = r_1 + 1, \\ r_1 M(r_1), & \text{если } r_2 = r_1 - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (17)$$

где $\Lambda(r) = \mu \sum_{n=1}^N n \alpha(n) \rho(n) + \lambda \sigma(r) \rho(N)$, $M(r) = \eta(1 - (1 - \beta(r)) \rho_r(N))$.

Из (17) видно, что вероятности укрупненных состояний вычисляются как вероятности состояний 1-D BDP с переменными параметрами, т.е.

$$\pi(<r>) = \frac{1}{r!} \prod_{i=1}^r \frac{\Lambda(i-1)}{M(i)} \pi(<0>), \quad r = 1, \dots, R, \quad (18)$$

где $\pi(<0>)$ находится из условия нормировки, т.е. $\sum_{r=0}^R \pi(<r>) = 1$.

Тогда с учетом соотношений (7)–(10), (12), (15), (16) и (18) после определенных математических выкладок получим следующие приближенные формулы для расчета искомых характеристик системы:

$$PB_p \approx \rho(N) \sum_{i=0}^{R-1} (1 - \sigma(i)) \pi(<i>) + E_B(v, N) \pi(<R>); \quad (19)$$

$$PB_r \approx \rho(N) \sum_{r=1}^{R-1} \beta(r) \pi(<r>) + E_B(v, N) \pi(<R>) \beta(R); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} N_{av} &\approx \sum_{n=1}^N n \sum_{r=0}^R \rho_r(n) \pi(<r>) = (1 - \pi(<R>)) \sum_{n=1}^N n \rho(n) + \pi(<R>) \sum_{n=1}^N n \rho_r(n) = \\ &= (1 - \pi(<R>)) \sum_{n=1}^N n \rho(n) + v(1 - E_B(v, N)) \pi(<R>); \end{aligned} \quad (21)$$

$$L_o \approx \sum_{r=1}^R r \pi(<r>). \quad (22)$$

В (19)–(22) и далее $E_B(v, N)$ означает В-формулы Эрланга для системы $M/M/N/N$ с нагрузкой v , т.е. $E_B(v, N) = \rho_R(N)$. Отметим, что при выводе формулы (21) учитывается, что множитель $\sum_{k=1}^N k \rho_r(k)$ представляет собой среднее число занятых каналов в системе $M/M/N/N$ с нагрузкой v erl, которое равно $v(1 - E_B(v, N))$.

Отметим, что когда вероятности $\alpha(n)$, $\sigma(r)$ и $\beta(r)$ являются постоянными величинами, т.е. если $\alpha(n) = \alpha$ для всех $n = 1, \dots, N$, $\beta(r) = \beta$ и $\sigma(r) = \sigma$ для всех $r = 1, \dots, R$, то полученные выше формулы упрощаются. Действительно, в этом случае вероятности состояний $\rho_r(n)$ не зависят от индекса r при $0 \leq r \leq R-1$ и совпадают с вероятностями состояний классической модели Эрланга $M/M/N/N$ с нагрузкой $\tilde{v} = v/(1 - \alpha)$, т.е. эти вероятности определяются так:

$$\rho(n) = \frac{\tilde{v}^n}{n!} / \sum_{i=0}^N \frac{\tilde{v}^i}{i!}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (23)$$

Вероятности состояний $\rho_R(n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, внутри расщепленной модели с ПС E_R вычисляются с помощью (16). Тогда с учетом (2), (3), (16) и (23) после определенных математических выкладок получаем, что в этом случае интенсивности переходов между укрупненными состояниями определяются как

$$q(< r_1 >, < r_2 >) = \begin{cases} \Lambda_1, & \text{если } r_2 = r_1 + 1, \\ r_1 M_1(r_1), & \text{если } r_2 = r_1 - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \mu \alpha \tilde{v} (1 - E_B(\tilde{v}, N)) + \lambda \sigma E_B(\tilde{v}, N), \\ M_1(r) &= \begin{cases} M_1, & \text{если } 1 \leq r \leq R-1, \\ M_2, & \text{если } r = R, \end{cases} \\ M_1 &= \eta (1 - (1 - \beta) E_B(\tilde{v}, N)), \quad M_2 = \eta (1 - (1 - \beta) E_B(v, N)). \end{aligned}$$

Из (24) заключаем, что в этом случае вероятности укрупненных состояний вычисляются так:

$$\pi(< r >) = \begin{cases} \frac{1}{r!} \cdot \left(\frac{\Lambda_1}{M_1} \right)^r \pi(< 0 >), & \text{если } 1 \leq r \leq R-1, \\ \frac{1}{R!} \cdot \left(\frac{\Lambda_1}{M_1} \right)^R \cdot \frac{M_1}{M_2} \pi(< 0 >), & \text{если } r = R, \end{cases} \quad (25)$$

где $\pi(< 0 >)$ находится из условия нормировки.

В такой модели характеристика (10) вычисляется с помощью (22) с учетом формулы (25), а остальные характеристики (7)–(9) определяются из следующих простых формул:

$$PB_p \approx (1 - \sigma) \rho(N) (1 - \pi(< R >)) + E_B(v, N) \pi(< R >); \quad (26)$$

$$PB_r \approx \beta (\rho(N) (1 - \pi(< 0 >) - \pi(< R >)) + E_B(v, N) \pi(< R >)); \quad (27)$$

$$N_{av} \approx \tilde{v} (1 - E_B(\tilde{v}, N)) (1 - \pi(< R >)) + v (1 - E_B(v, N)) \pi(< R >). \quad (28)$$

Важно отметить, что в случаях, когда указанные выше вероятности являются постоянными величинами, удастся получить явные формулы и для расчета характеристик моделей с бесконечным размером орбиты (т.е. $R = \infty$). Заметим, что в отличие от модели с конечным размером орбиты, здесь вызовы, которые требуют повторного обслуживания, всегда принимаются в орбиту. Это означает, что все расщепленные модели с ПС E_r , $r = 0, 1, \dots$, являются идентичными, т.е. вероятности состояний внутри расщепленных моделей определяются из формулы (23).

С учетом (23) из (17) получим, что в данной модели интенсивности переходов между состояниями укрупненной модели определяются так:

$$q(< r_1 >, < r_2 >) = \begin{cases} \Lambda_1, & \text{если } r_2 = r_1 + 1, \\ r_1 M_1, & \text{если } r_2 = r_1 - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (29)$$

Из соотношений (29) видно, что вероятности укрупненных состояний определяются как вероятности состояний модели Эрланга $M/M/\infty$ с нагрузкой $\Psi = \Lambda_1/M_1$

$$\pi(< r >) = \frac{\Psi^r}{r!} e^{-\Psi}, \quad r = 0, 1, \dots \quad (30)$$

Таким образом, с учетом соотношений (7)–(10), (23) и (25) после определенных математических выкладок получим следующие приближенные формулы для расчета искомых характеристик системы с бесконечным размером орбиты:

$$PB_p = (1 - \sigma) E_B(\tilde{v}, N); \quad (31)$$

$$PB_r \approx \beta E_B(\tilde{v}, N) (1 - e^{-\Psi}); \quad (32)$$

$$N_{av} \approx \tilde{v} (1 - E_B(\tilde{v}, N)); \quad (33)$$

$$L_o \approx \Psi. \quad (34)$$

В отличие от системы с конечным размером орбиты, здесь вероятность потери первичных вызовов и среднее число занятых каналов системы не зависят от интенсивности поступления повторных вызовов с орбиты (см. формулы (31) и (33)). Это объясняется тем, что согласно нашему допущению интенсивность поступления первичных вызовов существенно больше, чем интенсивность поступления повторных вызовов. Вместе с тем эти величины зависят от интенсивности ухода вызовов в орбиту, так как на них косвенно влияет число вызовов в орбите. Вероятность потери повторных вызовов и их среднее число в орбите зависят от всех структурных и нагрузочных параметров системы (см. формулы (32) и (34)).

Выше мы рассматривали случай линейной интенсивности поступления повторных вызовов с орбиты, т.е. считали, что если суммарное число таких вызовов в орбите равно r , то интенсивность их поступления равна $r\eta$. Вместе с тем можно исследовать и модель с постоянной интенсивностью поступления повторных вызовов с орбиты, т.е. предположить, что лишь вызов, который стоит в очереди повторных вызовов, может генерировать запрос для обслуживания. В таком случае интенсивность поступления повторных вызовов с орбиты не зависит от числа вызовов в ней и всегда равна η . В этой модели элементы ПМ также определяются из формул (2) и (3), однако здесь в правой части данных формул в последних строках следует учитывать, что $r = 1$. При точном подходе соответствующие замены должны быть учтены и в СУР (4)–(6). Аналогичные изменения необходимо учитывать и в полученных приближенных формулах в случае орбиты конечного размера. Однако в случае бесконечного размера орбиты требуется выполнение условия эргодичности модели, т.е. необходимо выполнение условия $\Psi < 1$. Отметим, что выполнение последнего условия трудно проверить на практике. Вместе с тем можно показать, что если выполняется легко проверяемое условие $\lambda \max\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \sigma\right\} < \eta$, то условие эргодичности $\Psi < 1$ выполняется.

В конце данного раздела отметим, что предложенные точный и приближенный методы могут быть применены и для изучения модели с нетерпеливыми r -вызовами в орбите, т.е. можно предположить, что допустимое время пребывания r -вызова в орбите является случайной величиной, которая имеет показательное распределение с параметром $\tau > 0$. Иными словами, если время пребывания r -вызова превышает допустимое предельное значение, то он покидает орбиту с вероятностью, равной единице. Для этой модели элементы ПМ соответствующей двумерной цепи Маркова с ПС (1) определяются аналогично (2) и (3), но при этом следует учесть, что здесь появляются новые переходы из состояния типа $(n, r), r > 0$, в состояние $(n, r-1)$ с интенсивностью $r\tau$. Из-за ограниченности объема статьи эта модель здесь не рассматривается.

4. Численные результаты

Полученные формулы позволяют изучить поведение характеристик системы относительно изменения всех ее параметров. Из-за ограниченности объема статьи здесь предполагается, что параметры $\beta(r), r = 1, 2, \dots, R$, имеют релейный характер изменения, т.е. они определяются так:

$$\beta(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r > K, \\ 0, & \text{если } r \leq K, \end{cases} \quad (35)$$

где K , $1 < K \leq R$, является известной величиной.

Соотношение (35) описывает схему, согласно которой повторные вызовы покидают орбиту, если в моменты их генерации все каналы системы оказываются занятыми и при этом число вызовов в орбите больше некоторой величины K , $1 < K \leq R$. Этой схеме адекватно соответствует реальное поведение вызовов в СМО с обратной связью.

Проведено большое количество вычислительных экспериментов для изучения зависимости характеристик системы от порогового параметра K при различных комбинациях изменения исходных данных. Результаты этих экспериментов показаны на рис. 3, где постоянные исходные данные выбирались так: $N = 10, R = 50, \mu = 30, \eta = 4, \sigma = 0,3$.

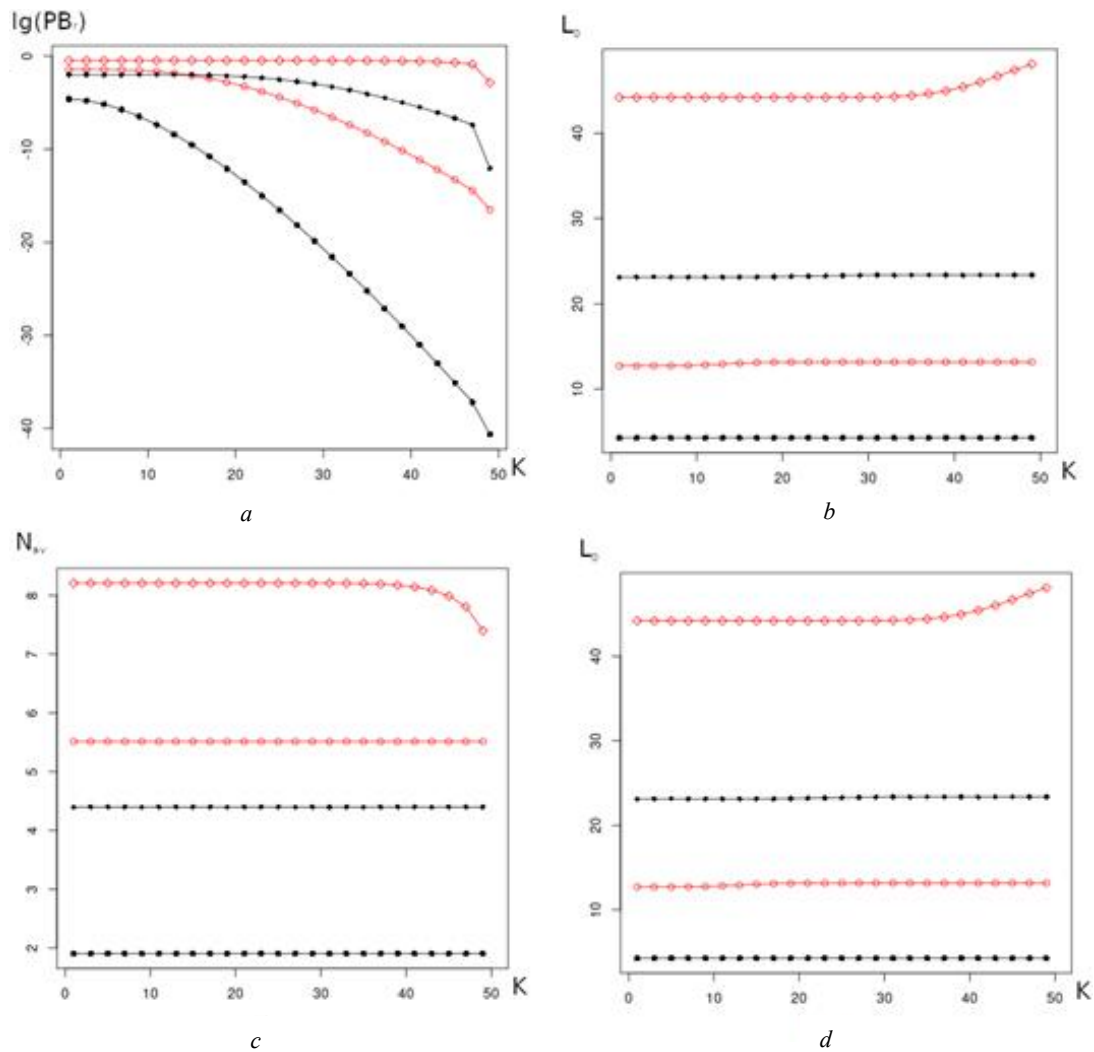


Рис. 3. Зависимость характеристик системы от параметра K

Fig. 3. Dependence of system characteristics on parameter K

Рассмотрены четыре серии экспериментов для пары параметров (λ, α) :

- 1) $(\lambda, \alpha) = (120; 0,7)$;
- 2) $(\lambda, \alpha) = (120; 0,3)$;
- 3) $(\lambda, \alpha) = (40; 0,7)$;
- 4) $(\lambda, \alpha) = (40; 0,3)$.

На графиках символ $\diamond$ соответствует первой серии, $\circ$ – второй серии, $\blacklozenge$ – третьей серии, $\bullet$ – четвертой серии. Из графиков видно, что для выбранных исходных данных только вероятность потери повторных вызовов (PB_p) существенно зависит от значения порогового параметра K (см. рис. 3, а), а остальные характеристики для трех серий экспериментов, кроме первой, являются почти постоянными величинами. Во всех сериях экспериментов вероятность потери повторных вызовов является убывающей относительно порогового параметра K , что вполне логично, ибо увеличение параметра K приводит к уменьшению шансов вызовов с орбиты быть потерянными. При этом с ростом нагрузки системы (ν) и вероятности возвращения вызовов в орбиту после окончания обслуживания (α) растет и вероятность потери повторных вызовов. Отметим, что при $\alpha = 0,3$ для обеих нагрузок эта функция практически равна нулю для больших значений параметра K .

Среднее число повторных вызовов в орбите (L_o) зависит от значения порогового параметра K только в первой серии экспериментов и при этом лишь при его критических значениях, близких к максимально возможному значению R (см. рис. 3, б). Для указанной серии экспериментов при критических значениях K орбита оказывается почти полной. Как и для функции PB_p , здесь также с ростом нагрузки системы (ν) и вероятности возвращения вызовов в орбиту после окончания обслуживания (α) растет и среднее число повторных вызовов в орбите.

В первой серии экспериментов несколько неожиданным является поведение функции N_{av} относительно параметра K (см. рис. 3, в). Так, при критических значениях параметра K она, хоть и с очень малой скоростью, начинает уменьшаться. Этот факт объясняется тем, что поскольку в этой серии экспериментов орбита оказывается почти полной (см. рис. 3, а), то при критических значениях параметра K вызовы с орбиты теряются часто и потому получается малая интенсивность поступления с орбиты, иными словами, при критических значениях параметра K функция N_{av} начинает уменьшаться. Уменьшение значений функции PB_p (с очень малой скоростью) относительно параметра K при его критических значениях (см. рис. 3, д) объясняется тем, что при этих значениях уменьшается и среднее число занятых каналов (т.е. функция N_{av}). Отметим, что с ростом нагрузки системы (ν) и вероятности возвращения вызовов в орбиту после окончания обслуживания (α) растут обе функции – N_{av} и PB_p .

Заключение

В работе изучаются математические модели многоканальных СМО с отсроченными обратными связями. Поступающие извне вызовы принимаются для обслуживания при наличии хотя бы одного свободного канала, иначе они, согласно схеме Бернулли, либо покидают систему, либо уходят в орбиту. После завершения обслуживания вызовы, согласно схеме Бернулли, либо покидают систему, либо уходят в орбиту и оттуда генерируют запросы в случайные моменты времени. Изучены модели с конечными и бесконечными размерами орбиты для пребывания повторных вызовов. Разработаны точный и приближенный методы расчета характеристик рассмотренных моделей и даны результаты численных экспериментов.

В качестве направлений дальнейших исследований можно указать изучение моделей с коррелированными потоками, а также моделей с отдельными орбитами для первичных и повторных вызовов.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность члену-корреспонденту НАН Азербайджана, доктору технических наук, профессору А.З. Меликову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Takács L. A single-server queue with feedback // *Bell System Technical Journal*. 1963. V. 42. P. 505–519.
2. Takács L. A queuing model with feedback // *Operations Research*. 1977. V. 11. P. 345–354.
3. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследования СМО с повторным обслуживанием и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // *Вычислительные технологии*. 2008. Т. 13, вып. 5. С. 88–92.
4. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // *Автометрия*. 2011. Т. 47, вып. 6. С. 51–58.
5. Wortman M.A., Disney R.L., Kiessler P.C. The M/GI/1 Bernoulli feedback queue with vacations // *Queueing Systems*. 1991. V. 9, No. 4. P. 353–363.
6. D'Avignon G.R., Disney R.L. Queues with instantaneous feedback // *Management Sciences*. 1977. V. 24, No. 2. P. 168–180.
7. Berg J.L., Boxma O.J. The M/G/1 queue with processor sharing and its relation to feedback queue // *Queueing Systems*. 1991. V. 9, No. 4. P. 365–402.
8. Hunter J.J. Sojourn time problems in feedback queue // *Queueing Systems*. 1989. V. 5, No. 1-3. P. 55–76.
9. Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U. The queuing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment // *Austrian Journal of Statistics*. 2005. V. 34, No. 2. P. 101–110.
10. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Kuliyeva Kh.N. Calculation of the characteristics of multi-channel queuing system with pure losses and feedback // *Journal of Automation and Information Science*. 2015. V. 47, No. 5. P. 19–29.
11. Gemikonakli O., Ever E., Kocyigit A. Approximate solution for two stage open networks with Markov-modulated queues minimizing the state space explosion problem // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2009. V. 223, No. 1. P. 519–533.
12. Ever E., Gemikonakli O., Kocyigit A., Gemikonakli E. A hybrid approach to minimize state explosion problem for the solution of two stage tandem queues // *Journal of Network and Computer Applications*. 2013. V. 36. P. 908–926.
13. Kirsal Y., Ever E., Kocyigit A., Gemikonakli O., Mapp G. A generic analytical modeling approach for performance evaluation of the handover schemes in heterogeneous environments // *Wireless Personal Communications*. 2014. V. 79. P. 1247–1276.
14. Kirsal Y., Ever E., Kocyigit A., Gemikonakli O., Mapp G. Modeling and analysis of vertical handover in highly mobile environments // *Journal of Supercomputing*. 2015. V. 71. P. 4352–4380.
15. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under non-pre-emptive priority service by matrix geometric method // *Applied Mathematical Sciences*. 2010. V. 4. P. 2379–2389.
16. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under pre-emptive priority service // *International Journal of Computer Applications*. 2010. V. 2. P. 27–34.
17. Bouchentouf A.A., Belarbi F. Performance evaluation of two markovian retrial queuing model with balking and feedback // *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*. 2013. V. 5. P. 132–146.
18. Choi B.D., Kim Y.C., Lee Y.W. The M/M/c retrial queue with geometric loss and feedback // *Computers and Mathematics with Applications*. 1998. V. 36. P. 41–52.
19. Krishna K.B., Rukmani R., Thangaraj V. On multi-server feedback retrial queue with finite buffer // *Applied Mathematical Modeling*. 2009. V. 33. P. 2062–2083.
20. Do T.V. An efficient computation algorithm for a multi-server feedback retrial queue with a large queuing capacity // *Applied Mathematical Modeling*. 2010. V. 34. P. 2272–2278.
21. Mokaddis G.S., Metwally S.A., Zaki B.M. A feedback retrial queuing system with starting failures and single vacation // *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 2007. V. 10. P. 183–192.
22. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Kuliyeva Kh.N. Numerical analysis of the queuing system with feedback // *Cybernetics and System Analysis*. 2015. V. 51, No. 2. P. 566–573.

Поступила в редакцию 15 ноября 2019 г.

Aliyeva S.H. (2020) NUMERICAL INVESTIGATION OF QUEUING MODELS WITH DELAYED FEEDBACKS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 22–34

DOI: 10.17223/19988605/51/3

We consider queuing system with N , $1 < N < \infty$, identical channels and Poisson input flow of primary calls (p -calls). If upon arrival of a p -call there is at least one free channel, then it accepted into the system and the service process immediately begins. Otherwise, i.e. if at this moment all the channels of the system are busy, then the incoming p -call, according to the Bernoulli scheme, either goes into orbit with probability $\sigma(r)$, $0 \leq \sigma(r) \leq 1$, to repeat service after some random time, or leaves the system with an complementary probability $1 - \sigma(r)$, where r means the current number of calls in orbit.

The p -call service times are independent and identically distributed random variables that have an exponential distribution function with a common mean. After completing the service, the p -call, according to the Bernoulli scheme, either with probability $\alpha(n)$

join to orbit for repeat the service after a random time, or with an complementary probability $1 - \alpha(n)$ the call leaves the system. Here, the parameter n indicates the number of occupied channels immediately before the moment the service is completed for this call, $n = 1, 2, \dots, N$. Calls that require repeated service and calls that were not able to access the channel at the time of arrival, organize a common orbit of repeated calls (r -calls) with a maximum size R , $0 < R \leq \infty$.

In the case $R < \infty$, the call is accepted into orbit, if at the time of its arrival the total number of repeated calls in the orbit is less than R . Otherwise, he/she leaves the system with a probability one. The orbit generates service requests at random times that obey the exponential distribution with a finite mean. It is assumed that r -calls and p -calls are identical in duration of their service time.

Repeated calls are persistent, i.e. if upon arrival of the r -call all the channels of the system are busy, then, according to the Bernoulli scheme, he/she leave the system with probability $\beta(r)$, $0 \leq \beta(r) \leq 1$, or he/she remain in orbit with an complementary probability $1 - \beta(r)$, where r means the current number of r -calls in orbit, $r = 1, 2, \dots, R$.

It is shown that the mathematical model of this system is a certain two-dimensional Markov chain. An algorithm for constructing the generating matrix of the constructed chain is developed. The paper proposes exact and approximate methods for calculating the steady-stationary probabilities of the constructed two-dimensional Markov chain. Formulas are obtained for calculating the characteristics of the system - the probability of loss of primary and repeated calls, the average number of busy channels and the average number of repeated calls in orbit. The exact method is based on the application of the balance equation method for steady-state probabilities, and it is effective for moderate-dimensional models. An approximate method for studying large-dimensional models, which is based on the principles of state space merging of the multidimensional Markov chains, is developed as well. The proposed approaches also allow us to investigate models with a constant intensity of retrial calls (i.e., a model in which only the r -call at the head of the queue of repeated calls can generate a request) and with impatient r -calls in orbit. Moreover, in cases where the indicated above probabilities are constant values, it is possible to obtain explicit formulas for calculating the characteristics of models with infinite orbit size. The results of numerical experiments are demonstrated and their analysis is given.

Keywords: queuing system; delayed feedback; numerical analysis.

ALIYEVA Sevindj Hamzaga kizi (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Baku State University, Baku, Azerbaijan).
E-mail: s@aliyeva.info

REFERENCES

1. Takacs, L. (1963) A single-server queue with feedback. *Bell System Technical Journal*. 42. pp. 505–519. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1963.tb00510.x
2. Takacs, L. (1977) A queuing model with feedback. *Operations Research*. 11. pp. 345–354.
3. Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. & Morozova, A.S. (2008) Investigation systems of service with repeated handling. method of limit decomposition. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(5). pp. 88–92.
4. Moiseeva, S.P. & Zakhvor'naya, I.A. (2011) Mathematical Model of Parallel Retrial Queueing of Multiple Requests. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 47(6). pp. 51–58.
5. Wortman, M.A., Disney, R.L. & Kiessler, P.C. (1991) The M/GI/1 Bernoulli feedback queue with vacations. *Queueing Systems*. 9(4). pp. 353–363. DOI: 10.1007/BF01159222
6. D'Avignon, G.R. & Disney, R.L. (1977) Queues with instantaneous feedback. *Management Sciences*. 24(2). pp.168–180. DOI: 10.1287/mnsc.24.2.168
7. Berg, J.L. & Boxma, O.J. (1991) The M/G/1 queue with processor sharing and its relation to feedback queue. *Queueing Systems*. 9(4). pp. 365–402. DOI: 10.1007/BF01159223
8. Hunter, J.J. (1989) Sojourn time problems in feedback queue. *Queueing Systems*. 5(1–3). pp. 55–76. DOI: 10.1007/BF01149186
9. Dudin, A.N., Kazimirsky, A.V., Klimenok, V.I., Breuer, L. & Krieger, U. (2005) The queuing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment. *Austrian Journal of Statistics*. 34(2). pp. 101–110. DOI: 10.17713/ajs.v34i2.403
10. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Kuliyeva, Kh.N. (2015) Calculation of the characteristics of multi-channel queuing system with pure losses and feedback. *Journal of Automation and Information Science*. 47(5). pp.19–29. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i5.20
11. Gemikonakli, O., Ever, E. & Kocyigit, A. (2009) Approximate solution for two stage open networks with Markov-modulated queues minimizing the state space explosion problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 223(1). pp. 519–533. DOI: 10.1016/j.cam.2008.02.009
12. Ever, E., Gemikonakli, O., Kocyigit, A. & Gemikonakli, E. (2013) A hybrid approach to minimize state explosion problem for the solution of two stage tandem queues. *Journal of Network and Computer Applications*. 36. pp. 908–926. DOI: 10.1016/j.jnca.2012.10.006
13. Kirsal, Y., Ever, E., Kocyigit, A., Gemikonakli, O. & Mapp, G. (2014) A generic analytical modeling approach for performance evaluation of the handover schemes in heterogeneous environments. *Wireless Personal Communications*. 79. pp. 1247–1276. DOI: 10.1007/s11277-014-1929-2
14. Kirsal, Y., Ever, E., Kocyigit, A., Gemikonakli, O. & Mapp, G. (2015) Modeling and analysis of vertical handover in highly mobile environments. *Journal of Supercomputing*. 71. pp. 4352–4380. DOI: 10.1007/s11227-015-1528-3

15. Ayyapan, G., Subramanian, A.M.G. & Sekar, G (2010) M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under non-pre-emptive priority service by matrix geometric method. *Applied Mathematical Sciences*. 4. pp. 2379–2389. DOI: 10.5120/672-945
16. Ayyapan, G., Subramanian, A.M.G. & Sekar, G (2010) M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under pre-emptive priority service. *International Journal of Computer Applications*. 2. pp. 27–34. DOI: 10.5120/672-945
17. Bouchentouf, A.A. & Belarbi, F. (2013) Performance evaluation of two markovian retrial queuing model with balking and feedback. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*. 5. pp 132–146. DOI: 10.2478/ausm-2014-0009
18. Choi, B.D., Kim, Y.C. & Lee, Y.W. (1998) The M/M/c retrial queue with geometric loss and feedback. *Computers and Mathematics with Applications*. 36. pp. 41–52. DOI: 10.1016/S0898-1221(98)00160-6
19. Krishna, K.B., Rukmani, R. & Thangaraj, V. (2009) On multi-server feedback retrial queue with finite buffer. *Applied Mathematical Modeling*. 33. pp. 2062–2083. DOI: 10.1016/j.apm.2008.05.011
20. Do, T.V (2010) An efficient computation algorithm for a multi-server feedback retrial queue with a large queuing capacity. *Applied Mathematical Modeling*. 34. pp. 2272–2278. DOI: 10.1016/j.apm.2009.10.025
21. Mokaddis, G.S., Metwally, S.A. & Zaki, B.M. (2007) A feedback retrial queuing system with starting failures and single vacation. *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 10. pp. 183–192.
22. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Kuliyeva, Kh.N. (2015) Numerical analysis of the queuing system with feedback. *Cybernetics and System Analysis*. 51(2). pp. 566–573. DOI: 10.1007/s10559-015-9747-4

УДК 537.874.6

DOI: 10.17223/19988605/51/4

А.Г. Дмитренко, О.М. Балашова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ТОНКИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРАХ

Метод вспомогательных источников использован для моделирования в резонансной частотной области электромагнитного рассеяния на тонких параллельных идеально проводящем и диэлектрическом цилиндрах. Приведены некоторые результаты численных расчетов бистатистических сечений рассеяния и сечений обратного рассеяния рассматриваемой структуры. Выполнено сравнение получаемых результатов с известными результатами, определена область применимости использованного метода решения задачи.

Ключевые слова: электромагнитное рассеяние; метод вспомогательных источников; идеально проводящий цилиндр; диэлектрический цилиндр; сечение рассеяния.

Значительный интерес для исследователей представляет изучение рассеяния электромагнитных волн в резонансной частотной области на структурах, состоящих из одного или нескольких тонких цилиндров конечной длины. Этот интерес обусловлен необходимостью решения таких практически важных проблем, как проблемы радиолокационной заметности, идентификации объектов, оценки рассеяния диэлектрическими или металлическими цилиндрическими деталями различных геометрически сложных тел и др.

Под тонким цилиндром обычно понимается цилиндрическое тело, поперечные размеры которого много меньше его длины и длины падающей волны. Анализ имеющейся в распоряжении авторов литературы показывает, что известны работы, например [1–4], в которых рассмотрено рассеяние электромагнитной волны на одиночном тонком прямолинейном идеально проводящем цилиндре, а также работы, например [5–8], в которых рассмотрено рассеяние электромагнитной волны на одиночном тонком однородном прямолинейном диэлектрическом цилиндре. Однако в известной литературе до сих пор отсутствуют работы, посвященные рассеянию на структурах, состоящих как из идеально проводящих, так и из диэлектрических тонких цилиндров.

В данной статье рассматривается электромагнитное рассеяние на одной из структур, содержащих как идеально проводящие, так и диэлектрические тонкие цилиндры, а именно на структуре, образованной параллельными цилиндрами. Изложен численный метод решения задачи, приведены некоторые результаты численных расчетов бистатистических сечений рассеяния и сечений обратного рассеяния рассматриваемой структуры, выполнено сравнение получаемых результатов с известными результатами, определена область применимости использованного метода решения задачи.

1. Формулировка задачи

Геометрия задачи показана на рис. 1. Будем рассматривать стационарную (зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$) задачу дифракции электромагнитного поля $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$ на структуре, состоящей из двух тонких прямолинейных параллельных цилиндров, один из которых является диэлектрическим, а другой – идеально проводящим. Диэлектрический цилиндр D_i имеет длину l_d , радиус r_d и характеризуется электродинамическими параметрами ε_i, μ_i . Идеально проводящий ци-

цилиндр D имеет длину l_p , радиус r_p . Для цилиндров выполняются условия $2r_d \ll \lambda$, $r_d \ll l_d$; $2r_p \ll \lambda$, $r_p \ll l_p$, где λ – длина падающей волны. Декартова система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что ее начало O совпадает с серединой осевой линии диэлектрического цилиндра, а ось z направлена вдоль осевой линии. Структура размещена в однородной среде D_e с электродинамическими параметрами ϵ_e, μ_e . Требуется найти рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в области D_e .

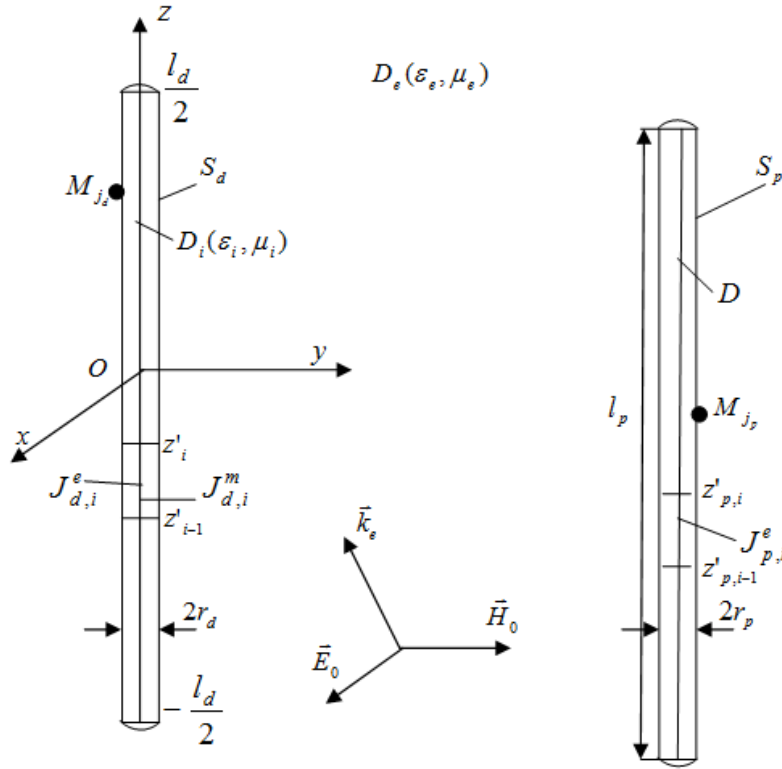


Рис. 1. Геометрия задачи
Fig. 1. Geometry of the problem

Кроме поля $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e , существует поле $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$ внутри диэлектрического цилиндра (в области D_i).

Поля $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ и $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$ должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \vec{E}_e = i\omega\mu_e \vec{H}_e, \quad \nabla \times \vec{H}_e = -i\omega\epsilon_e \vec{E}_e \quad \text{в } D_e, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i = i\omega\mu_i \vec{H}_i, \quad \nabla \times \vec{H}_i = -i\omega\epsilon_i \vec{E}_i \quad \text{в } D_i, \quad (2)$$

граничным условиям

$$\vec{n}_d \times (\vec{E}_i - \vec{E}_e) = \vec{n}_d \times \vec{E}_0, \quad \vec{n}_d \times (\vec{H}_i - \vec{H}_e) = \vec{n}_d \times \vec{H}_0 \quad (3)$$

на поверхности S_d диэлектрического цилиндра и граничным условиям

$$\vec{n}_p \times \vec{E}_e = -\vec{n}_p \times \vec{E}_0 \quad (4)$$

на поверхности S_p идеально проводящего цилиндра.

Кроме того, поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e должно удовлетворять условиям излучения

$$\{\sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e; \sqrt{\mu_e} \vec{H}_e\} \times \vec{R} / R + \{\sqrt{\mu_e} \vec{H}_e; -\sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e\} = O(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В выражениях (3)–(4) $\vec{n}_d$ – единичный вектор нормали к поверхности S_d ; $\vec{n}_p$ – единичный вектор нормали к поверхности S_p ; $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторное произведение.

2. Модель рассеянного поля и определение неизвестных параметров модели

Модель рассеянного поля строится следующим образом. Введем на оси диэлектрического цилиндра неизвестные непрерывно распределенные электрический $\vec{J}_d^e$ и магнитный $\vec{J}_d^m$ токи, а на оси идеально проводящего цилиндра – только непрерывно распределенный электрический ток $\vec{J}_p^e$. Представим неизвестное рассеянное поле в виде суммы полей введенных вспомогательных токов:

$$\begin{aligned}\vec{E}_e(M) &= \frac{i}{\omega\epsilon_e} \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_d^e) - \nabla \times \vec{\Pi}_d^m + \frac{i}{\omega\epsilon_e} \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_p^e), \\ \vec{H}_e(M) &= \nabla \times \vec{\Pi}_d^e + \frac{i}{\omega\mu_e} \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_d^m) + \nabla \times \vec{\Pi}_p^e, \\ \vec{\Pi}_d^e &= \int_{-l_d/2}^{l_d/2} \frac{\vec{J}_d^e(z') e^{ik_e R_{MM'}}}{4\pi R_{MM'}} dz', \quad \vec{\Pi}_d^m = \int_{-l_d/2}^{l_d/2} \frac{\vec{J}_d^m(z') e^{ik_e R_{MM'}}}{4\pi R_{MM'}} dz', \\ \vec{\Pi}_p^e &= \int_{l_p} \frac{\vec{J}_p^e(z'_p) e^{ik_e \bar{R}_{MM'}}}{4\pi \bar{R}_{MM'}} dz'_p, \quad M \in D_e.\end{aligned}\quad (6)$$

В выражениях для $\vec{\Pi}_d^e$ и $\vec{\Pi}_d^m$ интегрирование проводится вдоль оси z диэлектрического цилиндра; $R_{MM'} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$ – расстояние от точки z' на оси диэлектрического цилиндра до точки M в D_e ; x, y, z – декартовы координаты точки M ; $k_e = \omega\sqrt{\epsilon_e\mu_e}$. В выражении для $\vec{\Pi}_p^e$ интегрирование проводится вдоль оси идеально проводящего цилиндра; $\bar{R}_{MM'} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z'_p)^2}$ – расстояние от точки z'_p на оси идеально проводящего цилиндра до точки M в D_e ; x_0 и y_0 – координаты осевой линии идеально проводящего цилиндра в системе отсчета $Oxyz$.

Для представления электромагнитного поля $\vec{E}_i, \vec{H}_i$ внутри диэлектрического цилиндра введем вспомогательную поверхность S_i (рис. 2), охватывающую цилиндр, аналогично тому, как это сделано в работе [7]. Поверхность S_i также представляет собой круговой цилиндр со сферически скругленными торцами; радиус цилиндра равен R_i , его длина равна длине рассеивающего цилиндра l_d .

Выберем на вспомогательной поверхности S_i конечную совокупность точек $\{M_{n,i}\}_{n=1}^{N_i}$, в каждой из которых разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau_1}^{n,i} = p_{\tau_1}^{n,i} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i}$ и $\vec{p}_{\tau_2}^{n,i} = p_{\tau_2}^{n,i} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i}$. Единичные векторы $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i}$ и $\vec{e}_{\tau_2}^{n,i}$ выбраны в плоскости, касательной к S_i в точке $M_{n,i}$; вектор $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i}$ расположен в сечении $\varphi = const$, проходящем через точку $M_{n,i}$, а вектор $\vec{e}_{\tau_2}^{n,i}$ ортогонален вектору $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i}$. Предполагается, что диполи, размещенные на S_i , излучают в однородную среду с проницаемостями ϵ_i и μ_i .

Представим неизвестное поле $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$ внутри диэлектрического цилиндра в виде суммы полей введенных вспомогательных диполей:

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(M) &= \frac{i}{\omega\epsilon_i} \sum_{n=1}^{N_i} \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_{n,i}), \quad \vec{H}_i(M) = \sum_{n=1}^{N_i} \nabla \times \vec{\Pi}_{n,i}, \\ \vec{\Pi}_{n,i} &= \Psi_i(M, M_{n,i}) \vec{p}_{\tau}^{n,i}, \quad \vec{p}_{\tau}^{n,i} = p_{\tau_1}^{n,i} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i} + p_{\tau_2}^{n,i} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i}, \quad M \in D_i.\end{aligned}\quad (7)$$

В выражениях (7) функция $\Psi_i(M, M_{n,i}) = \exp(ik_i R_{MM_{n,i}}) / (4\pi R_{MM_{n,i}})$, $R_{MM_{n,i}}$ – расстояние от точки $M_{n,i}$ на вспомогательной поверхности S_i до точки M внутри диэлектрического цилиндра;

$k_i = \omega\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$; N_i – число точек размещения на S_i ; $p_{\tau_1}^{n,i}$, $p_{\tau_2}^{n,i}$ ($n = 1, 2, \dots, N_i$) – неизвестные дипольные моменты.

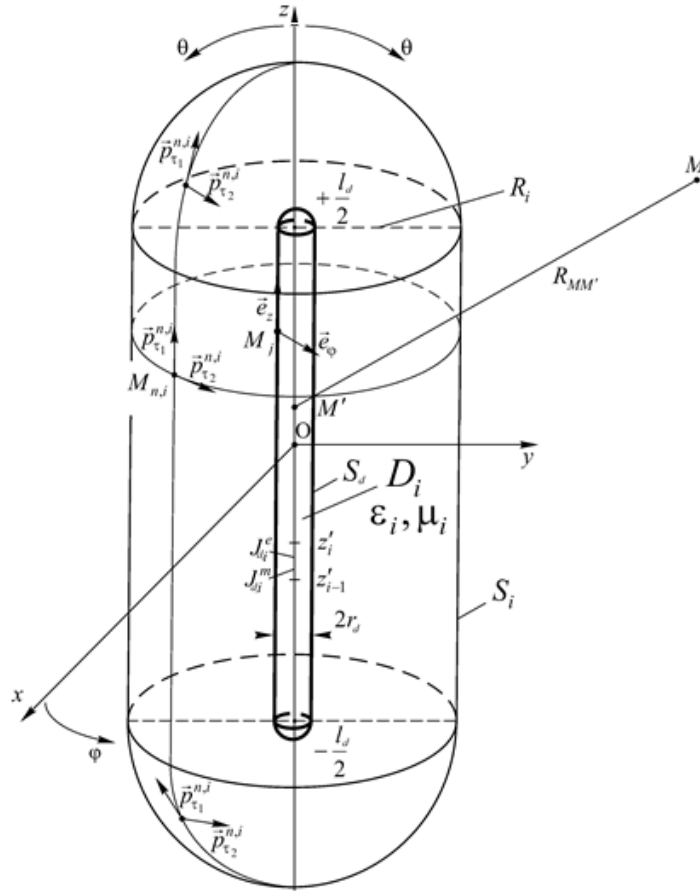


Рис. 2. Вспомогательная поверхность, охватывающая диэлектрический цилиндр
Fig. 2. The auxiliary surface enclosing the dielectric cylinder

Представления (6) удовлетворяют уравнениям Максвелла (1) для внешней области D_e и условиям излучения (5), а представления (7) – уравнениям Максвелла (2) для области D_i . Чтобы удовлетворить граничным условиям (3)–(4), необходимо соответствующим образом выбрать дипольные моменты $p_{\tau_1}^{n,i}$, $p_{\tau_2}^{n,i}$ ($n = 1, 2, \dots, N_i$) и распределения осевых токов $\vec{J}_d^e$, $\vec{J}_d^m$ и $\vec{J}_p^e$.

Предварительно введем кусочно-постоянную аппроксимацию вспомогательных осевых токов. Разобьем осевую линию диэлектрического цилиндра на N_d участков, в пределах каждого из которых величины токов $\vec{J}_d^e$ и $\vec{J}_d^m$ можно считать постоянными, а осевую линию идеально проводящего цилиндра разобьем на N_p участков, в пределах каждого из которых величину тока $\vec{J}_p^e$ также можно считать постоянной. Тогда выражения для $\vec{\Pi}_d^e$, $\vec{\Pi}_d^m$ и $\vec{\Pi}_p^e$ в (6) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_d^e &= \vec{e}_z \sum_{i=1}^{N_d} J_{d,i}^e \int_{z'_{i-1}}^{z'_i} \frac{\exp(ik_e R_{MM'})}{4\pi R_{MM'}} dz', \quad \vec{\Pi}_d^m = \vec{e}_z \sum_{i=1}^{N_d} J_{d,i}^m \int_{z'_{i-1}}^{z'_i} \frac{\exp(ik_e R_{MM'})}{4\pi R_{MM'}} dz', \\ \vec{\Pi}_p^e &= \vec{e}_z \sum_{i=1}^{N_p} J_{p,i}^e \int_{z'_{p,i-1}}^{z'_{p,i}} \frac{\exp(ik_e \bar{R}_{MM'})}{4\pi \bar{R}_{MM'}} dz', \end{aligned} \quad (8)$$

где $J_{d,i}^e$ и $J_{d,i}^m$ – элементы электрического и магнитного токов на i -м участке осевой линии диэлектрического цилиндра; $J_{p,i}^e$ – элемент электрического тока на i -м участке осевой линии идеально про-

водящего цилиндра; $\vec{e}_z$ – единичный вектор, направленный вдоль оси z . При таком подходе нахождение неизвестных распределений осевых токов сводится к нахождению значений $(2N_d + N_p)$ элементов тока.

Для определения дипольных моментов и элементов токов используем граничные условия (3)–(4), удовлетворяя им в соответствии с методом коллокаций. Предварительно учтем, что для идеально проводящего тонкого цилиндра, в силу малости его диаметра по сравнению с длиной волны возбуждающего поля, вкладом в рассеянное поле азимутальной составляющей тока на поверхности цилиндра можно пренебречь.

Пусть M_{j_d} – точки коллокации на поверхности S_d диэлектрического цилиндра, а M_{j_p} – точки коллокации на поверхности S_p идеально проводящего цилиндра. Пусть число точек коллокации на поверхности S_d равно L_d , а число точек коллокации на поверхности S_p равно L_p . Тогда для нахождения неизвестных дипольных моментов $p_{\tau_1}^{n,i}$, $p_{\tau_2}^{n,i}$ ($n = 1, 2, \dots, N_i$) и элементов токов $J_{d,i}^e$, $J_{d,i}^m$ ($i = 1, 2, \dots, N_i$), $J_{p,i}^e$ ($i = 1, 2, \dots, N_p$) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$[\vec{n}_i^{j_d}, (\vec{E}_i^{j_d} - \vec{E}_e^{j_d})] = [\vec{n}_i^{j_d}, \vec{E}_0^{j_d}], \quad [\vec{n}_i^{j_d}, (\vec{H}_i^{j_d} - \vec{H}_e^{j_d})] = [\vec{n}_i^{j_d}, \vec{H}_0^{j_d}], \quad j_d = 1, 2, \dots, L_d, \\ E_{e,z}^{j_p} = -E_{0,z}^{j_p}, \quad j_p = 1, 2, \dots, L_p, \quad (9)$$

где $\vec{n}_i^{j_d}$ – единичный вектор нормали в точках коллокации M_{j_d} на поверхности диэлектрического цилиндра; $\vec{E}_e^{j_d}, \vec{H}_e^{j_d}, \vec{E}_i^{j_d}, \vec{H}_i^{j_d}$ и $\vec{E}_0^{j_d}, \vec{H}_0^{j_d}$ – компоненты внешнего, внутреннего и возбуждающего полей в этих же точках; $\vec{E}_{e,z}^{j_p}, \vec{E}_{0,z}^{j_p}$ – ориентированные вдоль оси z составляющие рассеянного и возбуждающего полей в точках коллокации M_{j_p} на поверхности идеально проводящего цилиндра.

Решение системы (9) осуществляем путем минимизации функционала

$$\sum_{j_d=1}^{L_d} \left\{ \left| [\vec{n}_i^{j_d}, (\vec{E}_i^{j_d} - \vec{E}_e^{j_d}) - [\vec{n}_i^{j_d}, \vec{E}_0^{j_d}]] \right|^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} \left| [\vec{n}_i^{j_d}, (\vec{H}_i^{j_d} - \vec{H}_e^{j_d}) - [\vec{n}_i^{j_d}, \vec{H}_0^{j_d}]] \right|^2 \right\} + \sum_{j_p=1}^{L_p} \left| E_{e,z}^{j_p} + E_{0,z}^{j_p} \right|^2. \quad (10)$$

После решения системы (9) – определения неизвестных дипольных моментов $p_{\tau_1}^{n,i}$, $p_{\tau_2}^{n,i}$ ($n = 1, 2, \dots, N_i$) и элементов токов $J_{d,i}^e, J_{d,i}^m$ ($i = 1, 2, \dots, N_i$), $J_{p,i}^e$ ($i = 1, 2, \dots, N_p$) – необходимые характеристики рассеянного поля определяются из представлений (6). В частности, для рассеянного поля в дальней зоне получаем следующие выражения:

$$E_{e,\theta}(M) = \sqrt{\frac{\mu_e}{\varepsilon_e}} H_{e,\varphi}(M) = \frac{e^{ik_e R}}{R} D_\theta(\theta, \varphi) + O(R^{-2}), \\ E_{e,\varphi}(M) = -\sqrt{\frac{\mu_e}{\varepsilon_e}} H_{e,\theta}(M) = \frac{e^{ik_e R}}{R} D_\varphi(\theta) + O(R^{-2}), \quad (11)$$

где компоненты диаграммы рассеяния $D_\theta(\theta, \varphi)$ и $D_\varphi(\theta)$ определяются выражениями

$$D_\theta(\theta, \varphi) = -\frac{i\omega\mu_e}{4\pi} \sin\theta \left[\sum_{i=1}^{N_d} J_{d,i}^e \int_{z'_{i-1}}^{z'_i} e^{-ik_e z' \cos\theta} dz' + e^{-ik_e(x_0 \sin\theta \cos\varphi + y_0 \sin\theta \sin\varphi)} \sum_{i=1}^{N_p} J_{p,i}^e \int_{z'_{p,i-1}}^{z'_{p,i}} e^{-ik_e z' \cos\theta} dz'_p \right], \\ D_\varphi(\theta) = \frac{ik_e}{4\pi} \sin\theta \sum_{i=1}^{N_d} J_{d,i}^m \int_{z'_{i-1}}^{z'_i} e^{-ik_e z' \cos\theta} dz', \quad (12)$$

где R , θ и φ – общепринятые сферические координаты точки наблюдения M .

Контроль точности решения осуществляем по критерию невязки граничных условий, т.е. путем вычисления относительного значения функционала (10) на сетке точек, промежуточных по отношению к точкам коллокации, выбираемых на поверхностях S_d и S_p :

$$\Delta = (\Phi' / \Phi_0)^{1/2}, \quad (13)$$

где Φ' – значение функционала (10) на указанной выше совокупности точек; Φ_0 – значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек, определяемое выражением

$$\sum_{j_d=1}^{L'_d} \left\{ \left| [\vec{n}_i^{j_d}, \vec{E}_0^{j_d}] \right|^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} \left| [\vec{n}_i^{j_d}, \vec{H}_0^{j_d}] \right|^2 \right\} + \sum_{j_p=1}^{L'_p} \left| E_{0,z}^j \right|^2,$$

в котором L'_d и L'_p – число промежуточных точек соответственно на поверхностях S_d и S_p .

3. Результаты моделирования

Изложенные выше соотношения реализованы в виде программы для расчета компонент рассеянного поля и контроля точности получаемых результатов по критерию невязки граничных условий. Входными величинами программы являются длины цилиндров l_d и l_p , их радиусы r_d и r_p , значения относительной и магнитной проницаемостей диэлектрического цилиндра $\varepsilon'_i = \varepsilon_i / \varepsilon_e$, $\mu'_i = \mu_i / \mu_e$, координаты x_0, y_0 осевой линии идеально проводящего цилиндра, координата z_0 середины его осевой линии, а также параметры метода $N_d, N_p, R_i, N_i, L_d, L_p$, определяющие разбиение осевых линий цилиндров, выбор вспомогательной поверхности, количество точек размещения диполей на ней, количество точек коллокации на поверхностях цилиндров. Данная программа была использована для определения области применимости метода решения задачи, сравнения получаемых с ее помощью результатов с известными результатами, а также для расчета сечений рассеяния некоторых конкретных структур. Ниже приведены некоторые результаты, полученные для структуры, показанной на рис. 3.

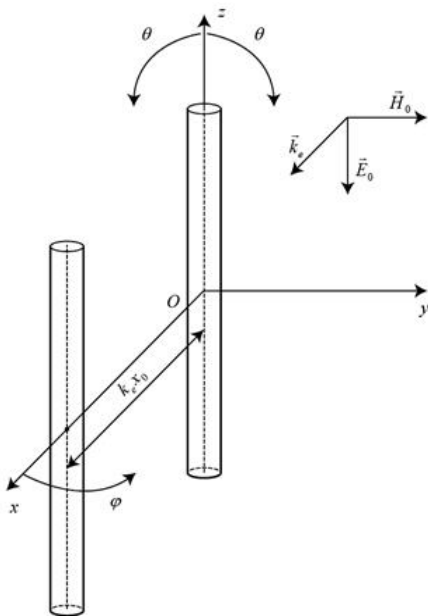


Рис. 3. Исследованная структура
Fig. 3. The investigated structure

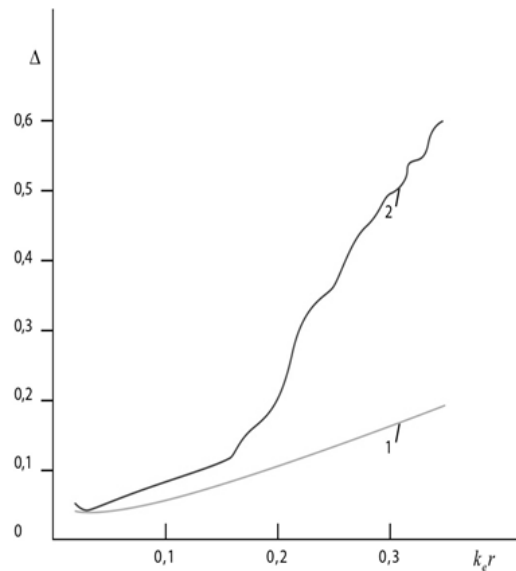


Рис. 4. Зависимость нормы невязки граничных условий от радиусов цилиндров
Fig. 4. Dependence of the residual norm of the boundary conditions on radii of the cylinders

Структура состоит из диэлектрического цилиндра с осью, направленной вдоль оси z , и параллельного ему идеально проводящего цилиндра. Середины осевых линий цилиндров расположены на оси x на расстоянии $k_e x_0$ одна от другой. При выполнении вычислений, результаты которых представ-

лены ниже, длины цилиндров $k_e l_d$ и $k_e l_p$ предполагались одинаковыми и равными $4,71$ ($l_d = l_p = 0,75\lambda$), относительная магнитная проницаемость диэлектрического цилиндра предполагалась равной 1 (немagnetный цилиндр). Остальные параметры структуры менялись в зависимости от целей исследований. Во всех случаях предполагалось, что структура возбуждается плоской волной, падающей вдоль оси x , вектор $\vec{E}_0$ падающей волны направлен вдоль оси z .

Параметры метода для диэлектрического цилиндра, определяющие положение вспомогательной поверхности, а также число и расположение диполей на ней во всех рассмотренных ниже случаях одинаковые. Радиус $k_e R_i$ вспомогательной поверхности выбран равным двум, число точек размещения диполей на вспомогательной поверхности равно 160 . Эти точки размещены как на цилиндрической части вспомогательной поверхности (60 точек), так и на ее сферических скруглениях (по 50 точек на каждом скруглении). Линии тока (осевые линии) обоих цилиндров разбиты на 30 участков ($N_d = N_p = 30$).

Число поперечных сечений $z = \text{const}$, в которых размещены точки коллокации на поверхностях каждого из цилиндров, выбрано также равным 30 . Эти сечения проведены посередине каждого из участков разбиения осевой линии, в каждом сечении расположено 4 точки коллокации равномерно по азимутальному углу. Такой выбор параметров для диэлектрического цилиндра основан на результатах работы [9].

Результаты, представленные на рис. 4, определяют область применимости метода решения задачи. По оси абсцисс отложены значения радиусов цилиндров $k_e r_d = k_e r_p = k_e r$, по оси ординат – значения невязки граничных условий (13). Кривая 1 относится к случаю, когда относительная диэлектрическая проницаемость ϵ'_i диэлектрического цилиндра равна 4 , а кривая 2 – к случаю, когда она равна 20 .

Как показывает рисунок, область применимости метода сужается с ростом относительной диэлектрической проницаемости диэлектрического цилиндра. Если считать приемлемым значение невязки, меньшее $0,1$, то при $\epsilon'_i = 4$ метод можно применять при $k_e r_d = k_e r_p < 0,2$, тогда как при $\epsilon'_i = 20$ его можно применять только при $k_e r_d = k_e r_p < 0,13$.

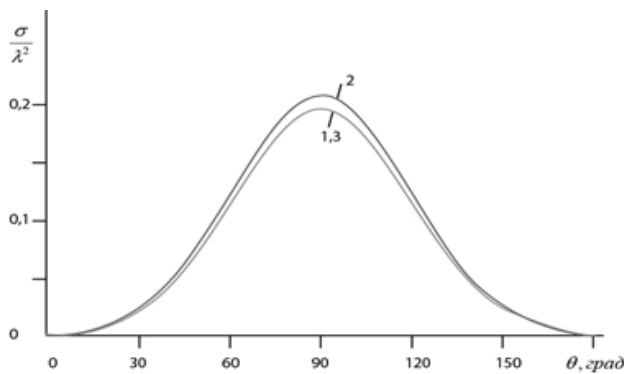


Рис. 5. Сравнение бистатических сечений рассеяния, вычисленных предложенным методом, с результатами работы [4]
Fig. 5. Comparison of the bistatic cross sections calculated with the help of proposed method and results from study [4]

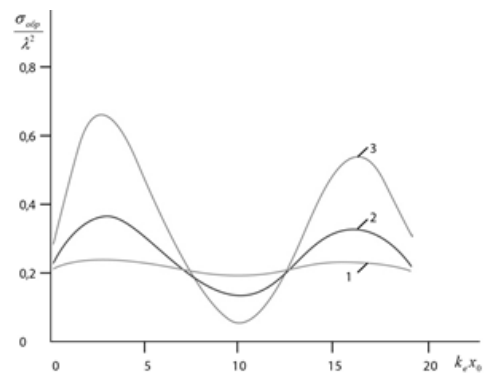


Рис. 6. Зависимость сечений обратного рассеяния от расстояния между цилиндрами
Fig. 6. Dependence of the backscattering cross sections on the distance between cylinders

Рисунок 5 иллюстрирует сравнение результатов расчета, выполненных предлагаемым методом, с результатами других авторов. Поскольку решенная нами задача другими авторами ранее не решалась, мы не имеем возможности сравнить наши результаты с такими же результатами других авторов для рассматриваемой задачи. Однако при малых значениях относительной диэлектрической проницаемости диэлектрического цилиндра получаемые нами результаты должны быть очень близки соответствующим результатам для одиночного идеально проводящего цилиндра. Последняя задача является решенной, и результаты ее решения содержатся, в частности, в работе [4]. Это обстоятельство и

было использовано для контроля правильности получаемых нами результатов. По оси абсцисс на рис. 5 отложен угол θ в градусах (см. рис. 3), по оси ординат – сечение рассеяния

$$\sigma(\theta, \varphi) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 [|E_{e,\theta}|^2 + |E_{e,\varphi}|^2] / |\vec{E}_0|^2,$$

нормированное на квадрат длины волны. Кривая 1 – сечение рассеяния, взятое из работы [4], кривые 2 и 3 – сечения рассеяния для рассматриваемой структуры при относительной диэлектрической проницаемости диэлектрического цилиндра $\varepsilon'_i = 4$ в полуплоскостях $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ соответственно.

При получении кривых 2 и 3 радиус $k_e r_d$ диэлектрического цилиндра выбран равным 0,1, а радиус идеально проводящего цилиндра $k_e r_p$ – равным 0,03; расстояние между цилиндрами $k_e x_0 = 1,884$ ($x_0 = 0,3\lambda$). Уменьшение радиуса идеально проводящего цилиндра обусловлено стремлением приблизиться к радиусу, который выбран в работе [4] (в работе [4] $k_e r_p = 0,03$).

При анализе результатов, представленных на рис. 5, необходимо иметь в виду, что для одиночного идеально проводящего цилиндра бистатистические сечения рассеяния во всех полуплоскостях $\varphi = \text{const}$ одинаковы. Для нашей задачи они в общем случае должны быть различными в силу отсутствия у структуры осевой симметрии. Однако, как показывают приведенные на рис. 5 кривые, при $\varepsilon'_i = 4$, как и следовало ожидать, различия сечений рассеяния для разных полуплоскостей $\varphi = \text{const}$ очень малы. Близость полученных нами сечений рассеяния к сечениям рассеяния, представленным в работе [4], говорит как о правильности самого метода решения задачи, так и о правильности выбора параметров метода.

На рис. 6 показаны полученные в результате выполненных расчетов зависимости сечений обратного рассеяния исследуемой структуры от расстояния между осевыми линиями цилиндров при различных значениях относительной диэлектрической проницаемости ε'_i диэлектрического цилиндра. По оси абсцисс отложено расстояние между осями цилиндров, по оси ординат – сечение обратного рассеяния, нормированное на квадрат длины волны. Кривая 1 относится к случаю, когда $\varepsilon'_i = 4$, кривая 2 – к случаю, когда $\varepsilon'_i = 15$, кривая 3 – к случаю, когда $\varepsilon'_i = 30$.

Как показывают кривые на рис. 6, зависимость сечения обратного рассеяния от расстояния между осевыми линиями цилиндров имеет немонотонный (осциллирующий) характер. Амплитуда осцилляций тем больше, чем больше значение относительной диэлектрической проницаемости диэлектрического цилиндра. Такое поведение сечения обратного рассеяния определяется интерференцией рассеянных волн, одна из которых создается диэлектрическим цилиндром, а другая – идеально проводящим цилиндром.

Заключение

В работе на основе метода вспомогательных источников построена модель поля, рассеянного структурой, состоящей из тонких параллельных идеально проводящего и диэлектрического цилиндров. На основе этой модели разработан численный алгоритм решения задачи электромагнитного рассеяния рассматриваемой структурой. Алгоритм реализован в виде компьютерной программы для расчета компонент рассеянного поля. Определена область применимости предложенной модели, выполнено сравнение получаемых результатов с известными. Приведены некоторые результаты моделирования, характеризующие зависимость сечения обратного рассеяния от расстояния между цилиндрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bogerd J.C., Tijhuis A.G., Klaasen J.J.A. Electromagnetic excitation of a thin wire: a traveling-wave approach // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 1998. V. 46, No. 8. P. 1202–1211.
2. Hatamzadeh-Varmazyar S. New numerical method for determining the scattered electromagnetic fields from thin wires // Progress in Electromagnetic Research B. 2008. V. 3. P. 207–218.

3. Tavis M.T. Total radar cross section of thin wires at all angles of incidence // J. of Applied Physics. 1975. V. 46, No. 7. P. 3213–3215.
4. Bowman J.J., Senior T.B.A., Uslengli P.L.E. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes. Amsterdam : North-Holland Publ. Company, 1969. P. 488.
5. Sarabandi K., Senior T.B.A. Low-frequency scattering from cylindrical structures at oblique incidence // IEEE Trans. on GRS. 1990. V. 28, No. 5. P. 879–885.
6. Yan W.Z., Du Y., Wu H., Liu D.W. EM scattering from a long dielectric circular cylinder // Progress in Electromagnetic Research, PIER 85. 2008. P. 39–67.
7. Дмитренко А.Г., Гольцварт Е.П. Решение задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре методом вспомогательных источников // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56, № 5. С. 600–607.
8. Santalla del Rio V., Abalde-Lima L., Christodoulou C.G. Electromagnetic scattering from vegetation cylindrical components // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. 2015. V. 12, No. 4. P. 751–755.
9. Дмитренко А.Г., Полин Е.П. Исследование особенностей применения метода вспомогательных источников к решению задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11/2. С. 15–21.

Статья поступила 27 октября 2019 г.

Dmitrenko A.G., Balashova O.M. (2020) SIMULATING OF ELECTROMAGNETIC SCATTERING ON THIN PARALLEL IDEALLY CONDUCTING AND DIELECTRIC CYLINDERS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 35–44

DOI: 10.17223/19988605/51/4

Using the method of auxiliary sources, we solve the problem of electromagnetic-wave scattering by a structure consisting of a thin dielectric cylinder and a thin perfectly conducting cylinder oriented parallel towards dielectric cylinder. The gist of the method to be used is the following. We introduce an unknown continuously distributed auxiliary electric current and an unknown continuously distributed auxiliary magnetic current on the axis of dielectric cylinder and we introduce only unknown continuously distributed auxiliary electric current on the axis of perfectly conducting cylinder. Now we represent the unknown scattered field $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ in outer medium D_e as a sum of the fields from the introduced auxiliary currents.

In order to represent field $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$ inside the dielectric cylinder we introduce auxiliary surface S_i enclosing the cylinder. Surface S_i is also a circular cylinder with spherically rounded butt-ends. Then we choose finite set of points $M_{n,i}$ on auxiliary surface S_i . At each of these points we place a pair of independent auxiliary electric dipoles with the moments which are chosen in the plane tangent to S_i at point $M_{n,i}$. It is assumed that dipoles placed on S_i , radiate into a homogeneous medium with dielectric and magnetic permeabilities which are equal to permeabilities of the dielectric cylinder. Now we represent unknown field $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$ inside the dielectric cylinder as the sum of the fields of the introduced auxiliary dipoles.

The chosen representations of the fields satisfy Maxwell's equations and radiation conditions. To satisfy boundary conditions on the surfaces of the cylinders, we should properly select the unknown dipole moments and axial currents. Before making that, we introduce the piecewise-constant approximation for the axial currents by dividing the axial lines of dielectric cylinder and perfectly conducting cylinder into small sections (current elements) such that the current can be assumed constant within each section. Then we use the boundary conditions on the surfaces of the cylinders, which are satisfied according to the collocation method, to obtain the system of linear algebraic equations for determination of unknown dipole moments and the current elements. For perfectly conducting cylinder we take into account that the contribution of the azimuthal component of the current on the cylinder surface to the scattered radiation can be neglected due to the fact that the cylinder diameter is small compared with the wavelength of the exciting-field.

Based on the method described above, we developed a computer code for calculating the scattered-field components. Using this code, we carried out a series of computational calculations aimed at determination the domain of applicability of the proposed method, comparison of the results calculated with the help of proposed method and known results, and analysis of the scattering cross section of different structures.

Keywords: electromagnetic scattering; auxiliary sources method; thin perfectly conducting cylinder; thin dielectric cylinder; scattering cross section.

DMITRENKO Anatoly Grigor'evich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: agdmitr.202@mail.ru

BALASHOVA Olga Mihailovna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: balashovajkz@mail.ru

REFERENCES

1. Bogerd, J.C., Tijhuis, A.G. & Klaasen, J.J.A. (1998) Electromagnetic excitation of a thin wire: a traveling-wave approach. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*. 48(8). pp. 1202–1211. DOI: 10.1109/8.718576
2. Varmazyar, S. & Naser-Moghadasi, M. (2008) New numerical method for determining the scattered electromagnetic fields from thin wires. *Progress in Electromagnetic Research B*. 3. pp. 207–218. DOI: 10.2528/PIERB07121303
3. Tavis, M.T. (1975) Total radar cross section of thin wires at all angles of incidence. *Journal of Applied Physics*. 46(7). pp. 3213–3215. DOI: 10.1063/1.321977
4. Bowman, J.J., Senior, T.B.A. & Uslengli, P.L.E. (eds) (1969) *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*. Amsterdam: North-Holland Publ. Company.
5. Sarabandi, K. & Senior, T.B.A. (1990) Low-frequency scattering from cylindrical structures at oblique incidence. *IEEE Transactions on GRS*. 28(5). pp. 879–885. DOI: 10.1109/36.58977
6. Yan, W.Z., Du, Y., Wu, H. & Liu, D.W. (2008) EM scattering from a long dielectric circular cylinder. *Progress in Electromagnetic Research, PIER*. 85. pp. 39–67. DOI: 10.2528/PIER08081106
7. Dmitrenko, A.G. & Goltsvart, E.P. (2011) Solution of the problem of electromagnetic scattering by a thin dielectric cylinder with the use of the auxiliary source method. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 56(5). pp. 557–564.
8. Santalla del Rio, V., Abalde-Lima, L. & Christodoulou C.G. (2015) Electromagnetic scattering from vegetation cylindrical components. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*. 12(4). pp. 751–755. DOI: 10.1109/LGRS.2014.2361066
9. Dmitrenko, A.G. & Polin, E.P. (2015) Investigation of particularities of using of auxiliary sources method to the solution of the problem of electromagnetic scattering by a thin dielectric cylinder. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Fizika – Russian Physics Journal*. 58(11/2). pp. 15–21.

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/51/5

Л.А. Истратов, А.Г. Смычкова, Д.О. Жуков

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ГРУППОВОГО ПОВЕДЕНИЯ
НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ С ПАМЯТЬЮ И СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ***Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-29-09458 офи_м.*

Рассмотрен комплекс из микрокинетической (на основе клеточных автоматов) и макрокинетической (на основе систем кинетических дифференциальных уравнений) моделей описания группового поведения пользователей в сложных социальных системах. Для оценки величин параметров моделей и их применимости для моделирования группового поведения избирателей была проведена с помощью метода почти-периодических функций обработка социологических данных электоральной кампании 2015–2016 гг. в США.

Ключевые слова: групповое поведение; диаграммы переходов; стохастические клеточные автоматы; кинетические дифференциальные уравнения.

Анализ динамики изменений и моделирование процессов группового поведения представляют огромный интерес и являются очень актуальными. События 2016 г. – Brexit Великобритании и выборы в США – показали слабую состоятельность современных социологических моделей прогнозирования итогов группового выбора. Большинство социологических служб предсказывало победу Хиллари Клинтон и отказ Великобритании от выхода из Евросоюза. Тем не менее, даже основываясь на статистически значимых социологических выборках в опросе респондентов об их намерениях в голосовании, большинство служб сделало неправильные прогнозы. С одной стороны, это было связано с большой волатильностью данных, получаемых в опросах, а с другой – с тем, что существующие методы моделирования и прогнозов не являются эффективными. Таким образом, необходим поиск новых методик анализа данных и создания моделей социологического прогнозирования.

Следует отметить, что основное число научных исследований группового поведения посвящено хотя и важным, но частным вопросам, а также преимущественно имеет описательный характер. В частности, можно указать работу [1], в которой описывается изменение политических предпочтений (поляризация взглядов) врачей в Соединенных Штатах во время кампаний на федеральных выборах с 1991 по 2012 г. и их финансовых вкладов в фонды республиканцев и демократов в зависимости от пола и врачебной специализации. Общий вывод, который был сделан авторами этой работы на основании представленных ими данных, заключается в том, что в период с 1991 по 2012 г. политические предпочтения американских врачей сместились от республиканцев в сторону демократов. Однако причины такого изменения проанализированы не были.

В работе [2] описана динамика изменения предпочтений избирателей в Конгресс США на промежуточных выборах 2010 г. Исследования показали снижение поддержки кандидатов от демократов по отношению к республиканцам на завершающем этапе кампании (отметим, что то же самое произошло при выборе президента США в 2016 г.: Трамп обошел Клинтон). На основе описанной динамики приводятся рекомендации о том, какие изменения в проведении кампании имело бы смысл сделать для повышения рейтингов.

Существенную роль в формировании предпочтений избирателей играют средства массовой информации (телевидение, пресса, Интернет, социальные сети и т.д.). В частности, в работе [3] рас-

считается влияние на предпочтения избирателей средств массовой информации в бразильских президентских кампаниях 2002 и 2006 гг. В этой работе учитывались следующие факторы: общая партийная пропаганда кандидатов, время свободных публичных выступлений кандидатов, освещение их деятельности комментаторами, – и сделан вывод, что партийная пропаганда и выступления самих кандидатов оказали большее воздействие на результаты выборов, чем освещение их деятельности комментаторами.

Существенным фактором, препятствующим возможности прогнозирования исхода избирательных кампаний, является большая волатильность предпочтений избирателей. Волатильность предпочтений избирателей во время региональных выборов в Бельгии в 2009 г. была изучена в работе [4]. Результаты показывают, что избиратели с низким уровнем политической эффективности – понимания программ кандидатов и партий, интереса к ним, как правило, чаще меняют свои предпочтения как в рамках одной кампании, так и между выборами. Избиратели с более высоким уровнем интереса к политике переключили свои намерения до начала кампании.

Обзор моделей выбора предпочтений при голосовании и избирательной политики представлен в работе [5]. В ней обсуждается два класса моделей: те, в которых выборы рассматриваются с позиции агрегации предпочтений, и те, которые смотрят на выборы, исходя из механизмов агрегации информации. Модели первого класса, как правило, учитывают общее изменение с течением времени доли избирателей с определенными предпочтениями (являются феноменологическими, не связывают изменения и вызывающие их причины), а модели второго класса учитывают влияние общего количества информации о кандидатах или партиях на избирателей во время выборов (частично связывают изменения с вызывающими их причинами).

В работе [6] для описания изменения предпочтений избирателей во время выборов президента в Ирландии в 1997 г. использовалась модель смешанного членства в разных группах. Согласно этой модели один и тот же человек может быть одновременно отнесен к группам с разными взглядами, т.е. не имеет четко выраженных предпочтений.

Для моделирования поведения избирателей можно использовать теорию многоагентных систем, в которых действуют группы агентов. На основании некоторых правил переходов агенты принимают определенные состояния, образуют связанную по своим свойствам группу, могут сотрудничать, чтобы решить некую задачу или достигнуть определенной цели [7]. Временная логика поведения агентов (например, изменение предпочтений избирателей) может зависеть от динамически меняющихся условий [8].

В [9] исследуется распространение информационного возбуждения в социальных сетях. В данной работе был использован подход, в котором предполагается, что социальные медиа состоит из десятков тысяч общественных агентов, где полезная информация может быть передана до ближайших соседних агентов. Особенность этой модели заключается в том, что для определения задержки реакции, определяющей взаимное сотрудничество между несколькими агентами, используется модель искусственного нейрона, в которой агенты имеют нелинейную функцию активации. Причем каждый агент своей группы может послать свой сигнал возбуждения для руководителей других групп.

Социальные процессы обычно характеризуются сложными механизмами протекания и стохастичностью, когда различные множественные состояния узлов зависят от влияния соседей, состояния которых также могут быть различными [10–12]. Например, для молодежной среды очень важно учитывать давление со стороны сверстников [7], влияющее на динамику и конечный результат процесса.

Теоретический подход для описания таких социальных систем имеет много общего с кинетическим описанием физических систем [13–15], что в значительной степени помогает понять их поведение. Кинетические модели, использующие пороговые механизмы, сосредоточены в основном на рассмотрении каскадных или цепных явлений, где макроскопическая доля узлов с определенным состоянием в сети быстро возникает из некоторого микроскопического состояния, захватывающего все новые и новые узлы. Такой подход был создан в ранних социальных теориях [16] и подробно описан в модели каскадных явлений [14]. Актуальность этой модели является неоспоримой [14, 17–22], однако наблюдения реальных процессов в социальных сетях показывают ее ограничения. В частности, дан-

ная модель фокусируется на появлении мгновенных глобальных каскадов, инициированных одиночными локальными возмущениями, в то время как существуют примеры, когда играют роль пороговые механизмы развития процессов в социальных системах. Кроме того, состояния узлов могут зависеть от внешних импульсов, прибывающих из средств массовой информации или рекламы [23] и определяющих стохастическую составляющую процессов.

В ряде случаев для описания процессов в социальных сетях применяются стохастические подходы, учитывающие зависимости от времени [24–26]. Например, в работе [24] рассматривается модель смешанного членства в стохастически формирующихся группах. Данная модель основывается на рассмотрении попарных измерений, таких как присутствие или отсутствие связей между парой объектов. Анализ вероятностных изменений между парами объектов требует специальных предположений, например независимости или непостоянства данной связи (смешанного членства в стохастически формирующихся группах). Данная модель позволяет при определенных допущениях отслеживать динамику изменения численности членов в формирующихся группах и кластеризацию членов по группам.

В работах [26–28] групповые социальные процессы рассматриваются с позиций теории перколяции, что позволяет учитывать структуру сети. В частности, влияние среднего числа связей, приходящихся на один узел социальной сети, на величину порога ее перколяции (проводимости сети в целом) и динамику его достижения.

Для описания группового поведения и выбора можно использовать аппарат теории клеточных автоматов. В работе [29] теория клеточных автоматов была применена к описанию процессов в социальных системах. По мысли авторов данной работы, поведение социальной системы зависит от свойств внешней среды и структуры поведения, которая может быть описана с помощью четырех параметров: разнообразия, связности, взаимозависимости и адаптируемости. В этой статье показано, что поведение становится более упорядоченным и целенаправленным при увеличении взаимозависимости и адаптивности.

В работе [30] авторы изучали влияние структуры сетей (случайные структуры, маленькие миры, цикл, колесо, звезда, иерархическая), в которых функционируют клеточные автоматы, и правил их поведения на динамику процессов в социальных сетях. Было показано, что при одинаковых правилах взаимодействия клеток динамика процессов сильно зависит от топологии сети (неупорядоченные структуры оказывают тормозящее влияние, а наибольшая скорость наблюдается в регулярных структурах).

В работе [31] исследователи построили сотовую модель клеточных автоматов для распространения слухов в социальных сетях. Экспериментальное моделирование проводилось при периодических граничных ограничениях в процессе распространения слухов. Результат показал, что модель клеточных автоматов способна охарактеризовать реально наблюдаемое поведение распространения слухов в социальной сети. На основании полученных результатов о влиянии граничных условий на распространение слухов авторы работы предложили эффективную стратегию иммунизации сети для их подавления.

Эволюционная динамика социальных сетей с использованием моделей клеточных автоматов для исследования статистических характеристик процессов кластеризации (разделение на плохо связанные группы), например таких, как степень разделения, была исследована в работе [32]. Рассмотрено три вида факторов в поведении пользователей, названных ими «себялюбие», «взаимность» и «альтруизм», которые необходимы для построения социальной сети и анализа их влияния на ее рост. Результаты моделирования показали, что принцип взаимности и альтруизм способствуют росту числа объединенных узлов в социальной сети, а эгоизм тормозит рост.

На наш взгляд, представляется интересным разработать комплекс моделей, основанный на использовании микрокинетического и макрокинетического подходов. В микрокинетическом подходе при описании, анализе и управлении групповым поведением необходимо рассмотреть взаимодействие на уровне отдельных пользователей. При макрокинетическом описании процессов нужно рассматривать динамику изменения интегративных параметров, описывающих систему в целом. Следует

отметить, что и при микрокинетическом, и при макрокинетическом подходе для создания моделей нужен набор параметров, конкретные величины которых и соотношения между которыми могут быть определены, исходя из анализа временных рядов социальных процессов группового поведения. Очень часто величины параметров, которые описывают процессы группового поведения в социальных, экономических и социотехнических системах, имеют колебательную и трендовую составляющие. Для эффективного анализа колебаний необходимо разделить тренд и колебания без потери существенной информации о процессе. При анализе социальных процессов использование метода почти-периодических функций является более предпочтительным, чем традиционные методы гармонического анализа, основанные на Фурье-преобразованиях. Это объясняется целым рядом причин, основной из которых является наличие в социальных процессах человеческого фактора, играющего существенную роль, что приводит к нечеткости, неопределенности и недетерминированности характеристик процессов, в то время как методы Фурье-анализа основаны на том, что сигналы обладают гармонической природой.

На наш взгляд, макрокинетическая модель может быть построена на основе рассмотрения группового поведения с помощью метода графических диаграмм переходов между состояниями всей рассматриваемой системы в целом. Далее на основе рассмотрения полученной диаграммы может быть записана система дифференциальных кинетических уравнений, решение которой при определенном наборе коэффициентов будет моделировать групповое поведение.

Для создания микрокинетической модели может быть использован, например, подход, разработанный на основе стохастических клеточных автоматов с переменной памятью.

1. Анализ временных рядов сложных процессов группового поведения в социальных системах с помощью метода почти-периодических функций

В качестве примера обработки данных с помощью метода почти-периодических функций представлены результаты наблюдений предпочтений избирателей, проводившихся в США на протяжении 500 дней, с 1 июля 2015 г. по 7 ноября 2016 г., во время президентской кампании 2016 г.¹ Используемые данные имеют трендовую (нисходящую и восходящую базовые линии) и колебательную составляющие.

Анализ наблюдаемых электоральных данных в президентской кампании США 2016 г. с помощью метода почти-периодических функций [33] показал, что у Дональда Трампа был один почти-период в колебаниях предпочтений избирателей, равный 80 дней, который с учетом погрешности определения практически сохранился для всей кампании. У Хиллари Клинтон их наблюдалось два: 50 и 130 дней. Полученные данные могут быть использованы для создания моделей анализа, описания и управления групповыми процессами на основе стохастических клеточных автоматов с переменной памятью и систем кинетических дифференциальных уравнений при определении величин параметров этих моделей и соотношений между ними.

2. Модель группового поведения пользователей в сложных социальных системах на основе систем дифференциальных кинетических уравнений

Для описания группового поведения и выбора предпочтений может быть использован метод графических диаграмм. Обозначим число избирателей, находящихся в момент времени t в состоянии, при котором они отдадут предпочтение данному кандидату (назовем его **A**), как $y_1(t)$. Число избирателей, находящихся в состоянии, при котором они будут голосовать за кандидата **B** в данный момент времени t , обозначим как $y_2(t)$. Число избирателей, находящихся в нейтральном состоянии (не определились ни за одного из кандидатов), обозначим как $y_3(t)$. Задачей построения модели является установление зависимости изменения с течением времени числа избирателей, которые отдадут на выборах предпочтение каждому из кандидатов.

¹ Данные взяты с ресурса: http://www.realclearpolitics.com/epolls/2016/president/us/general_election_trump_vs_clinton-5491.html#polls

Под действием средств массовой информации и PR-компаний кандидата **A** взгляды избирателей кандидата **B** могут изменяться с течением времени, вследствие чего они могут сначала переходить в нейтральное (кандидат **C**) состояние $y_3(t)$, а затем начинать поддерживать кандидата **A**. То же самое может происходить и со сторонниками кандидата **A**. Введем следующие параметры модели: τ_1 – время изменения (или смены) предпочтений избирателей $y_1(t)$ кандидата **A**, т.е. данные избиратели становятся уязвимыми для новых попыток сторонников кандидата **B** переубедить их поддерживать данного кандидата спустя некоторое время τ_1 (изменение настроений); τ_2 – время изменения взглядов избирателей $y_2(t)$. Величины времен τ_1 и τ_2 зависят от действий средств массовой информации и PR-компаний кандидатов. Например, чем эффективнее ведет предвыборную кампанию кандидат **B**, тем меньше будет величина времени τ_1 смены взглядов избирателей кандидата **A** и больше величина времени τ_2 – смены взглядов для избирателей кандидата **B**.

При большем числе кандидатов граф, представленный на рис. 1, будет содержать большее число узлов и связей (при m кандидатах число взаимных связей составит $m(m-1)/2$). Заметим, что узел, отвечающий за массмедиа, будет иметь с другими узлами однонаправленные связи.

В качестве примера рассмотрим диаграмму переходов между предпочтениями избирателей по отношению к кандидатам во время кампании по выборам президента США в 2016 г. (см. рис. 1).

На основании графической диаграммы переходов между предпочтениями избирателей могут быть записаны кинетические дифференциальные уравнения (1)–(3), описывающие изменение настроений с течением времени.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} = & ay_1(t - \tau_1)y_3(t) - py_1(t - \tau_1) - by_1(t - \tau_1)y_2(t - \tau_2) + \\ & + qy_1(t - \tau_1)y_2(t - \tau_2) = ay_1(t - \tau_1)y_3(t) - py_1(t - \tau_1) - \\ & - (b - q)y_1(t - \tau_1)y_2(t - \tau_2), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_2(t)}{dt} = & cy_2(t - \tau_2)y_3(t) - ky_2(t - \tau_2) + by_1(t - \tau_1)y_2(t - \tau_2) - \\ & - qy_1(t - \tau_1)y_2(t - \tau_2) = cy_2(t - \tau_2)y_3(t) - ky_2(t - \tau_2) + \\ & + (b - q)y_1(t - \tau_1)y_2(t - \tau_2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_3(t)}{dt} = & -ay_1(t - \tau_1)y_3(t) - cy_2(t - \tau_2)y_3(t) + \\ & + ky_2(t - \tau_2) + py_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где a, b, c, p, q и k – коэффициенты дифференциальных уравнений, величины которых и соотношения между которыми определяются на основе нелинейного анализа временных рядов рассматриваемых процессов, например на основе метода почти-периодических функций.

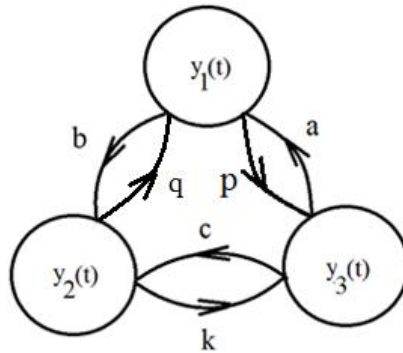


Рис. 1. Диаграмма процесса изменения предпочтений избирателей во время выборов

Fig. 1. Diagram of the process of changing preferences of voters during elections

Для пояснения модели рассмотрим более подробно одно из кинетических уравнений, например (2). Член уравнения $\frac{dy_2(t)}{dt}$ описывает скорость изменения числа избирателей, поддерживающих кандидата **B**; $cy_2(t - \tau_2)y_3(t)$ – определяет прирост таких избирателей за счет влияния сторонников $y_2(t - \tau_2)$ кандидата **B** на неопределившихся избирателей $y_3(t)$; $ky_2(t - \tau_2)$ – определяет убыль сто-

ронников кандидата **В** за счет устаревания их взглядов τ_2 , и такой процесс имеет линейный характер; $by_1(t - \tau_1)y_2(t - \tau_2)$ – определяет прирост за счет агитации избирателей $y_1(t - \tau_1)$, отдающих предпочтение кандидату **А**, сторонниками кандидата **В** $y_2(t - \tau_2)$ (поскольку данный процесс связан с взаимным влиянием одних на других, то он записывается в виде произведения функций $y_1(t - \tau_1)$ и $y_2(t - \tau_2)$; $qy_1(t - \tau_1)y_2(t - \tau_2)$ – определяет убыль за счет агитации избирателей, отдающих предпочтение кандидату **В**, сторонниками кандидата **А**. Аналогичным образом определяется смысловое значение членов кинетических уравнений (1) и (3).

Результаты оценочного моделирования с значениями параметров модели $a = 0,0054$; $b = 0,00056$; $c = 0,0008$; $p = 0,024$; $k = 0,032$; $q = 0,000045$ и значениями времен изменения взглядов $\tau_1 = \tau_2 = 43$ дня показаны на рис. 2 (кривая 1 – предпочтения избирателей за Клинтон, кривая 2 – за Трампа, кривая 3 – неопределившиеся избиратели). Отметим, что длительность изменения взглядов избирателей для Хиллари Клинтон ($\tau_1 = 43$ дня) и для Дональда Трампа ($\tau_2 = 43$ дня) приняты равными минимальному из почти-периодов кандидатов (80–90 дней для Трампа и 50 дней для Клинтон).

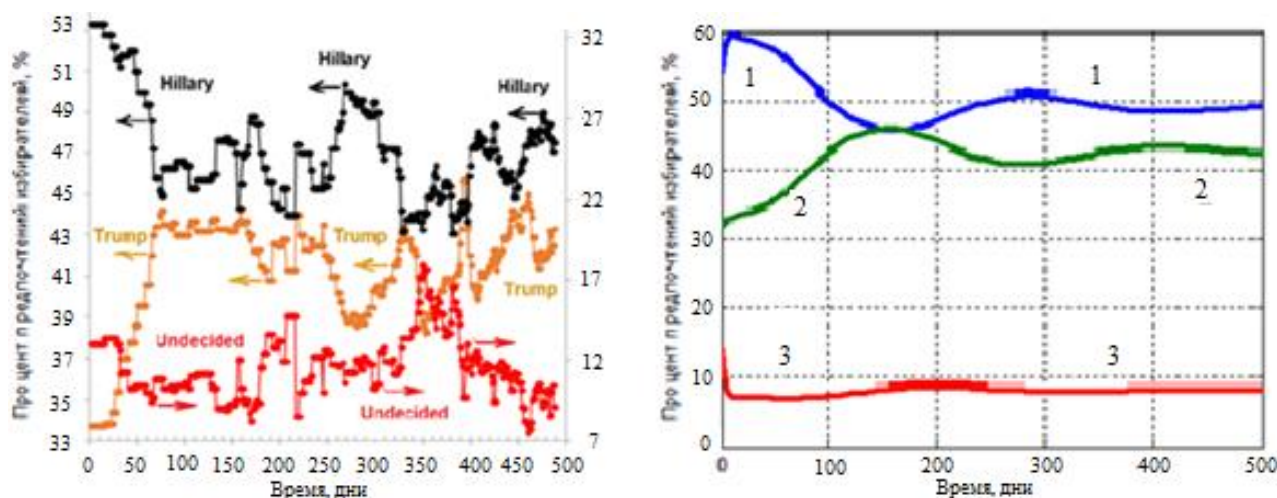


Рис. 2. Сравнение наблюдаемых предпочтений избирателей США во время президентской кампании 2016 г (Трампа, Хиллари и неопределившиеся избиратели) и результатов моделирования

Fig. 2. Comparison of observed preferences of US voters during the 2016 presidential campaign (Trump, Hillary, and undecided voters) and simulation results

Подбор коэффициентов в кинетических уравнениях позволяет получить достаточно хорошее соответствие теоретических результатов модели с наблюдаемыми данными (см. рис. 2).

3. Модель группового поведения на основе стохастических клеточных автоматов с переменной памятью

В предложенной модели стохастических клеточных автоматов с переменной памятью на каждом шаге процесса между его ячейками устанавливается новая сеть случайных связей, минимальное и максимальное число которых выбирается из заданного диапазона. В момент времени $t = 0$ узлу каждого типа присваивается числовой параметр, задающий число шагов, в течение которого память ячейки будет сохранять свой тип. Переход узлов между состояниями определяется суммарным числом узлов разного типа, с которыми было взаимодействие на заданном числе шагов памяти. Через число шагов, равное глубине памяти, происходит его переход в тот тип, который имел максимальное значение своей суммы. Действие внешних факторов (например, СМИ) на изменения типов узлов можно задать с помощью матрицы вероятностей переходов.

При построении предлагаемой модели начнем с того, что зададим типы и начальное число различных ячеек, каждому из которых могут быть поставлены в соответствие определенные свойства ячеек клеточного автомата. При взаимодействии ячеек или внешнем воздействии на них их свойства могут изменяться в соответствии с заданными правилами (один тип клеток переходит в другой). При

моделировании процессов в социальных системах, например избирательных кампаниях, свойствами ячеек могут являться предпочтения избирателей за того или иного кандидата (или политическую партию). Отметим, что в других процессах ячейки могут обладать иными свойствами, поэтому для построения модели и формализации описания введем понятие «цвет». Таким образом, каждому типу ячеек будет соответствовать свой «цвет», который может меняться в процессе функционирования клеточного автомата. Начальное число ячеек каждого типа задается перед запуском клеточного автомата, в момент времени $t = 0$. На каждом шаге процесса строится новая сеть случайных связей между узлами в системе, а не рассматривается физическое движение ячеек. При этом минимальное и максимальное число связей каждого узла выбирается из некоторого заданного диапазона моделирования (что обуславливает построение стохастической сети на каждом шаге процесса).

Рассмотрим динамику изменения состояний клеточного автомата, моделирующего избирательную кампанию Трамп–Клинтон. Среднее число связей любой ячейки клеточного автомата на каждом шаге процесса в качестве примера возьмем равным от 3 до 7, это примерно соответствует числу обсуждений политических тем в течение одного месяца одним человеком с другими. Обработка социологических данных с помощью метода почти-периодических функций показывает, что величина колебаний настроений избирателей Трампа и неопределившихся составляла 86 дней, а избирателей Хиллари Клинтон – 50, поэтому глубину памяти избирателей Клинтон можно принять равной одному условному шагу, а избирателей Трампа и неопределившихся – двум шагам (так как почти-период Клинтон меньше). Длительность одного шага примем равной 50 дням, тогда длительность всей 500-дневной избирательной кампании составит 10 шагов моделирования. В качестве одного из возможных вариантов для моделирования были выбраны значения вероятностей переходов между состояниями ячеек под действием внешних факторов, представленные в таблице.

Величины вероятностей переходов за один шаг при действии случайных внешних факторов

	Клинтон	Трамп	Неопределившиеся
Клинтон	0,790	0,030	0,180
Трамп	0,025	0,775	0,200
Неопределившиеся	0,272	0,235	0,493

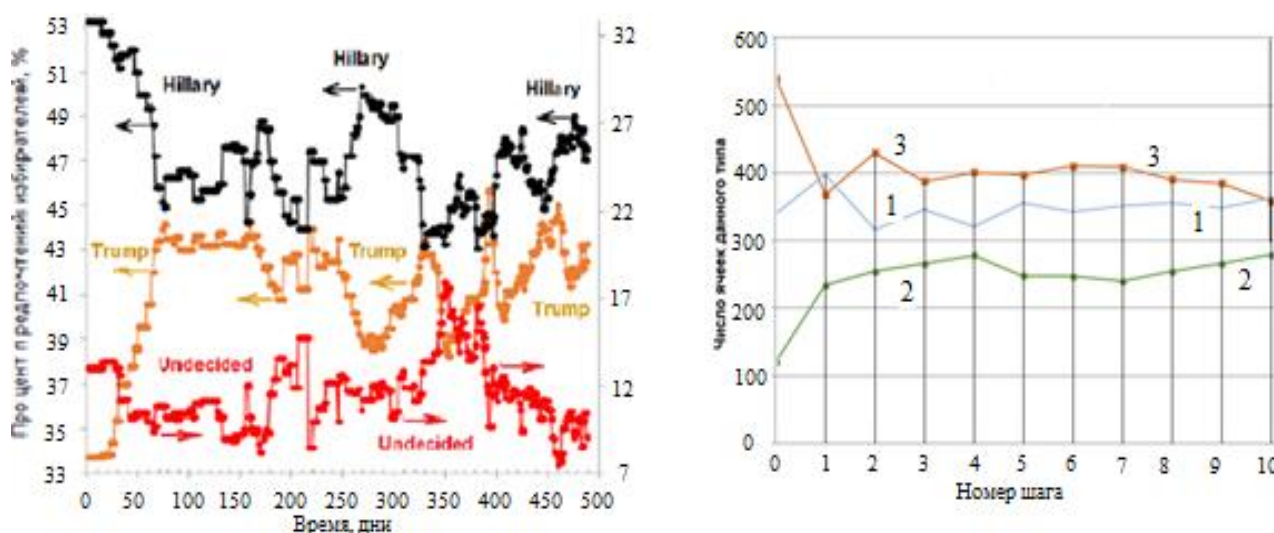


Рис. 3. Моделирование переходов клеточного автомата, описывающего избирательную кампанию в США Клинтон – Трамп
Fig. 3. Modeling transitions of the cellular automaton describing the election campaign in the USA Clinton – Trump

Результаты моделирования (рис. 3) показывают, что к концу избирательной кампании значения предпочтений избирателей практически сходятся к одной точке в районе 38%, что неплохо согласуется с наблюдаемыми значениями предпочтений избирателей на практике. Однако следует отметить, что полученные результаты дают в большей степени качественную оценку.

Заключение

1. Разработаны макрокинетическая (на основе системы дифференциальных уравнений, описывающих переходы между состояниями) и микрокинетическая (на основе стохастических клеточных уравнений с переменной памятью) модели описания группового поведения в социальных системах. Сравнение результатов поведения моделей с наблюдаемыми социологическими данными показывает, что они могут быть использованы для описания группового поведения в социальных системах, например группового выбора во время избирательных кампаний. Данные модели являются непротиворечивыми и могут взаимно дополнять друг друга при прогнозировании результатов выборов.

2. С целью получения значений параметров макро- и микрокинетических моделей на основе применения метода почти-периодических функций разработаны методики анализа временных рядов, описывающих сложные социальные процессы. При анализе социальных, в том числе электоральных, процессов использование методов, основанных на Фурье-преобразованиях, не является эффективным, поскольку их применение основано на том, что формирование колебаний представляет собой суперпозицию гармонических колебаний. Однако реальные процессы изменения предпочтений избирателей по механизмам их формирования могут не соответствовать этому условию и являются нелинейными в силу наличия человеческого фактора, приводящего к нечеткости, неопределенности и недетерминированности характеристик процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bonica A., Rosenthal H.B., Rothman D.J.C. The political polarization of physicians in the United States: an analysis of campaign contributions to federal elections, 1991 through 2012 // *JAMA Internal Medicine*. 2014. V. 174, is. 8. P. 1308–1317.
2. Panagopoulos C. The dynamics of voter preferences in the 2010 congressional midterm elections // *Forum*. 2010. V. 8, is. 4. Article 9.
3. Mundim P.S. The press and the vote in the 2002 and 2006 Brazilian presidential campaigns // *Revista de Sociologia e Política*, 2012. V. 20, is. 41. P. 123–147.
4. Dassonneville R. Electoral volatility, political sophistication, trust and efficacy: a study on changes in voter preferences during the Belgian regional elections of 2009 // *Acta Politica*. 2012. V. 47, is. 1. P. 18–41.
5. Dewan T.A., Shepsle K.A.B. Political economy models of elections // *Annual Review of Political Science*. 2011. V. 14. P. 311–330.
6. Gormley I.C., Murphy T.B. A grade of membership model for rank data // *Bayesian Analysis*. 2009. V. 4, is. 2. P. 265–296.
7. Gasser L. social conceptions of knowledge and action: DAI foundations and open system semantics // *Artificial Intelligence*. 1991. V. 47, No. 1-3. P. 107–138.
8. Jennings N.R., Faratin P., Lomuscio A.R., Parsons S., Sierra C., Wooldridge M. Automated negotiation: prospects, methods and challenges // *International Journal of Group Decision and Negotiation*. 2001. V. 10, No. 2. P. 199–215.
9. Plikynas D., Raudys A., Raudys S. Agent-based modelling of excitation propagation in social media groups // *J. of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence*. 2015. V. 27 (4). P. 1–16.
10. Easley D., Kleinberg J. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a highly connected world*. Cambridge : Cambridge University Press, 2010.
11. Karsai M., In'iguez G., Kaski K., Kert'esz J. Complex contagion process in spreading of online innovation // *J. R. Soc. Interface*. 2014. V. 11. 20140694.
12. Centola D., Macy M. Complex contagions and the weakness of long ties // *Am. J. Sociol.* 2007. V. 113. P. 702–734.
13. Barrat A., Barth'elemy M., Vespignani A. *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge : Cambridge University Press, 2008.
14. Watts D.J. A simple model of global cascades on random networks // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2002. V. 99. P. 5766–5771.
15. Gleeson J.P., Cahalane D.J. Seed size strongly affects cascades on random networks // *Phys. Rev. E*. 2007. V. 75. 056103.
16. Granovetter M., Soong R. Threshold models of diffusion and collective behavior // *J. Math. Sociol.* 1983. V. 9. P. 165–179.
17. Gleeson J.P. Binary-state dynamics on complex networks: Pair approximation and beyond // *Phys. Rev. X*. 2013. V. 3. 021004.
18. Gleeson J.P. High-accuracy approximation of binary-state dynamics on networks // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 107. 068701.
19. Ya'gan O., Gligor V. Analysis of complex contagions in random multiplex networks // *Phys. Rev. E*. 2012. V. 86. 036103.
20. Nematzadeh A., Ferrara E., Flammini A., Ahn Y.-Y. Optimal network modularity for information diffusion // *Phys. Rev. Lett.* 2014. V. 113. 088701.
21. Singh P., Sreenivasan S., Szymanski B.K., Korniss G. Threshold-limited spreading in social networks with multiple initiators // *Sci. Rep.* 2013. V. 3. 2330.
22. Piedrah'ita P., Borge-Holthoefer J., Moreno Y., Arenas A. Modeling self-sustained activity cascades in socio-technical networks // *Europhys. Lett.* 2013. V. 104. 48004.
23. Kocsis G., Kun F. Competition of information channels in the spreading of innovations // *Phys. Rev. E*. 2011. V. 84. 026111.
24. Airoldi E.M., Blei D.M., Fienberg S.E., Xing E.P. Mixed membership stochastic blockmodels // *J. Mach. Learn. Res.* 2008. V. 9. P. 1981–2014.
25. Zhukov D., Khvatova T., Zaltsman A. Stochastic Dynamics of Influence Expansion in Social Networks and Managing Users' Transitions from One State to Another // *Proc. of the 11th European Conf. on Information Systems Management (ECISM)*. 2017. P. 322–329.

26. Khvatova T.Yu., Zaltsman A.D., Zhukov D.O. Information processes in social networks: Percolation and stochastic dynamics. CEUR // Workshop Proc. 2nd Int. Scientific Conf. "Convergent Cognitive Information Technologies", Convergent 2017. V. 2064. P. 277–288.
27. Khvatova T., Block M., Zhukov D., Lesko S. How to measure trust: the percolation model applied to intra-organisational knowledge sharing networks // J. of Knowledge Management. 2016. V. 20, is. 5. P. 918–935.
28. Zhukov D., Khvatova T., Lesko S., Zaltsman A. Managing social networks: applying Percolation theory methodology to understand individuals' attitudes and moods // Technological Forecasting and Social Change. 2018. V. 129. P. 297–307.
29. Hay J., Flynn D. How external environment and internal structure change the behavior of discrete systems // Complex Systems. 2016. V. 25 (1). P. 39–49.
30. Hay J., Flynn D. The effect of network structure on individual behavior // Complex Systems. 2014. V. 23 (4). P. 295–311.
31. Wang A., Wu W., Chen J. Social network rumors spread model based on cellular automata // Proc. 2014 10th Int. Conf. on Mobile Ad-Hoc and Sensor Networks. MSN. 2014.
32. Li J., Chen Z., Qin T. Document Using cellular automata to model evolutionary dynamics of social network // IET Conference Publications (644 CP). 2013. P. 200–205.
33. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М. : Гостехиздат, 1953.

Поступила в редакцию 10 февраля 2019 г.

Istratov L.A., Smichkova A.G., Zhukov D.O. (2020) MODELING GROUP BEHAVIOR BASED ON STOCHASTIC CELLULAR AUTOMATA WITH MEMORY AND SYSTEMS OF DIFFERENTIAL KINETIC EQUATIONS WITH DELAY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 45–54

DOI: 10.17223/19988605/51/5

The article describes a complex of microkinetic (based on cellular automata) and macrokinetic (based on systems of kinetic differential equations) models describing the group behavior of users in complex social systems. To assess the values of the parameters of the complex of models and use them to simulate the group behavior of voters, the sociological data of the electoral campaign of 2015–2016, selected by the US president, were processed using the method of almost periodic functions. With the help of the developed models, in particular, for example, electoral processes can be simulated, during which the choice of preferences from several possible ones is carried out. For example, with two candidates, the choice is made of three states: for candidate A, for candidate B and the undecided (candidate C). The dynamics of change in preferences of voters are described graphically by a diagram of possible transitions between states, on the basis of which one can obtain a system of differential kinetic equations describing the specified process. In the developed model of stochastic cellular automata with variable memory, at each step of the process of interaction between its cells, a new network of random connections is established, the minimum and maximum number of which is chosen from the specified range. At the initial time, each type of cell is assigned a numeric parameter that specifies the number of steps during which it will retain its type (cell memory). The transition of cells between states is determined by the total number of cells of different types with which there was interaction at a given number of memory steps. After a number of steps equal to the depth of the memory, it passes to the type that had the maximum value of its sum. The effect of external factors (eg, media) on changes in node types, for each step, can be specified using the transition probability matrix. The conducted studies show a good agreement between the data observed in sociology and theoretical calculations.

Keywords: group behavior; conversion charts; stochastic cellular automata; kinetic differential equations.

ISTRATOV Leonid Andreevich (Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation).
E-mail: kuyahstibov@gmail.com

SMYCHKOVA Anna Gulamovna (Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation).
E-mail: nsmych@yandex.com

ZHUKOV Dmitry Olegovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation).
E-mail: zhukovdm@ya.ru

REFERENCES

1. Bonica, A., Rosenthal, H.B. & Rothman, D.J.C. (2014) The political polarization of physicians in the United States: An analysis of campaign contributions to federal elections, 1991 through 2012. *JAMA Internal Medicine*. 174(8). pp. 1308–1317. DOI: 10.1001/jamainternmed.2014.2105
2. Panagopoulos, C. (2010) The dynamics of voter preferences in the 2010 congressional midterm elections. *Forum*. 8(4). Article number 9. DOI: 10.2202/1540-8884.1402
3. Mundim, P.S. (2012) The press and the vote in the 2002 and 2006 Brazilian presidential campaigns. *Revista de Sociologia e Politica*. 20(41). pp. 123–147.
4. Dassonneville, R. (2012) Electoral volatility, political sophistication, trust and efficacy: A study on changes in voter preferences during the Belgian regional elections of 2009. *Acta Politica*. 47(1). p. 18–41. DOI: 10.1057/ap.2011.19

5. Dewan, T.A. & Shepsle, K.A.B. (2011) Political economy models of elections. *Annual Review of Political Science*. 14. pp. 311–330. DOI: 10.1146/annurev.polisci.12.042507.094704
6. Gormley, I.C. & Murphy, T.B. (2009) A grade of membership model for rank data. *Bayesian Analysis*. 4(2). pp. 265–296. DOI: 10.1214/09-BA410
7. Gasser, L. (1991) Social Conceptions of Knowledge and Action: DAI Foundations and Open System Semantics. *Artificial Intelligence*. 47(1–3). pp. 107–138. DOI: 10.1016/0004-3702(91)90052-L
8. Jennings, N.R., Faratin, P., Lomuscio, A.R., Parsons, S., Sierra, C. & Wooldridge, M. (2001) Automated negotiation: prospects, methods and challenges. *International Journal of Group Decision and Negotiation*. 10(2). pp. 199–215. DOI: 10.1023/A:1008746126376
9. Plikynas, D., Raudys, A. & Raudys, S. (2015) Agent-based modelling of excitation propagation in social media groups. *Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence*. 27(4). pp. 1–16. DOI: 10.1080/0952813X.2014.954631
10. Easley, D. & Kleinberg, J. (2010) *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a highly connected world*. Cambridge: Cambridge University Press.
11. Karsai, M., In'iguez, G., Kaski, K. & Kert'esz, J. (2014) Complex contagion process in spreading of online innovation. *Journal of the Royal Society Interface*. 11. DOI: 10.1038/srep02330
12. Centola, D. & Macy, M. (2007) Complex contagions and the weakness of long ties. *American Journal of Sociology*. 113. pp. 702–734. DOI: 10.1086/521848
13. Barrat, A., Barth'elemy, M. & Vespignani, A. (2008) *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge: Cambridge University Press.
14. Watts, D.J. (2012) A simple model of global cascades on random networks. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 99. pp. 5766–5771. DOI: 10.1073/pnas.082090499
15. Gleeson, J.P. & Cahalane, D.J. (2007) Seed size strongly affects cascades on random networks. *Physical Review*. E 75. 056103. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.056103
16. Granovetter, M. & Soong, R. (1983) Threshold models of diffusion and collective behavior. *Journal of Mathematical Sociology*. 9. pp. 165–179. DOI: 10.1080/0022250X.1983.9989941
17. Gleeson, J.P. (2013) Binary-state dynamics on complex networks: Pair approximation and beyond. *Physical Review*. X 3. 021004. DOI: 10.1103/PhysRevX.3.021004
18. Gleeson, J.P. (2011) High-accuracy approximation of binary-state dynamics on networks. *Physical Review Letters*. 107. 068701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.068701
19. Ya'gan, O. & Gligor, V. (2012) Analysis of complex contagions in random multiplex networks. *Physical Review*. E 86. 036103. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036103
20. Nematzadeh, A., Ferrara, E., Flammini, A. & Ahn, Y.-Y. (2014) Optimal network modularity for information diffusion. *Physical Review Letters*. 113. 08870. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.088701
21. Singh, P., Sreenivasan, S., Szymanski, B. K. & Korniss, G. (2013) Threshold-limited spreading in social networks with multiple initiators. *Scientific Reports*. 3. 2330. DOI: 10.1038/srep02330
22. Piedrah'ita, P., Borge-Holthoefer, J., Moreno, Y. & Arenas, A. (2013) Modeling self-sustained activity cascades in socio-technical networks. *Europhysics Letters*. 104. 48004. DOI: 10.1093/cmnet/cnt006
23. Kocsis, G. & Kun, F. (2011) Competition of information channels in the spreading of innovations. *Physical Review*. E 84. 026111. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.026111
24. Airolidi, E.M., Blei, D.M., Fienberg, S.E. & Xing, E.P. (2008) Mixed membership stochastic blockmodels. *Journal of Machine Learning Research*. 9. pp.1981–2014.
25. Zhukov, D., Khvatova, T. & Zaltsman, A. (2017) Stochastic Dynamics of Influence Expansion in Social Networks and Managing Users' Transitions from One State to Another. *Proc. of the 11th European Conference on Information Systems Management, ECISM*. pp. 322–329.
26. Khvatova, T.Yu., Zaltsman, A.D. & Zhukov, D.O. (2017) Information processes in social networks: Percolation and stochastic dynamics. *CEUR Workshop Proc. 2nd Int. Scientific Conf. "Convergent Cognitive Information Technologies"*, Convergent. vol. 2064. pp. 277–288.
27. Khvatova, T., Block, M., Zhukov, D. & Lesko, S. (2016) How to measure trust: the percolation model applied to intra-organisational knowledge sharing networks. *Journal of Knowledge Management*. 20(5). pp. 918–935. DOI: 10.1108/JKM-11-2015-0464
28. Zhukov, D., Khvatova, T., Lesko, S. & Zaltsman, A. (2018) Managing social networks: applying Percolation theory methodology to understand individuals' attitudes and moods. *Technological Forecasting and Social Change*. 129. pp. 297–307. DOI: 10.1016/j.techfore.2017.09.039
29. Hay, J. & Flynn, D. (2016) How external environment and internal structure change the behavior of discrete systems. *Complex Systems*. 25(1). pp. 39–49. DOI: 10.25088/ComplexSystems.25.1.39
30. Hay, J. & Flynn, D. (2014) The effect of network structure on individual behavior. *Complex Systems*. 23(4). pp. 295–311. DOI: 10.25088/ComplexSystems.23.4.295
31. Wang, A., Wu, W. & Chen, J. (2014) Social network rumors spread model based on cellular automata. *Proc. - 2014 10th Int. Conf. on Mobile Ad-Hoc and Sensor Networks, MSN*. DOI: 10.1109/MSN.2014.39
32. Li, J., Chen, Z. & Qin, T. (2013) Using cellular automata to model evolutionary dynamics of social network. *IET Conference Publications (644 CP)*. pp. 200–205. DOI: 10.1049/cp.2013.2283
33. Levitan, B.M. (1953) *Pochti-periodicheskie funktsii* [Almost-periodic functions]. Moscow: Gostekhizdat.

УДК 519.63:621.1.016.4
DOI: 10.17223/19988605/51/6

В.К. Толстых, К.А. Пшеничный

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРОТИВОТОЧНЫХ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТАХ

Обсуждаются проблемы математического и численного моделирования нестационарных процессов теплопереноса в противоточных теплообменных аппаратах. Получены одномерные модели нестационарного конвективного переноса тепла, которые позволяют учитывать изменения теплофизических параметров по длине потоков хладагентов (теплоносителей), что особенно актуально при фазовых переходах в хладагентах, когда плотность, коэффициент теплопередачи и другие параметры меняются во много раз. Приводятся примеры численного моделирования.

Ключевые слова: противоточный теплообменный аппарат; коэффициент теплопередачи; математическое моделирование; конечно-разностная схема.

В энергетике, металлургии, химической промышленности и других отраслях широко используются теплообменные аппараты, обычно – противоточные. От качества работы таких аппаратов существенно зависит качество работы других объектов потребителей теплоносителей и всей промышленности в целом.

Для проектирования управления теплообменными аппаратами в переходных режимах необходимо знание достаточно точных математических моделей нестационарных теплофизических процессов, протекающих в них. Кроме получения достоверных математических моделей нестационарных противоточных процессов возникает и задача их совместного численного решения с учетом реального изменения теплофизических параметров по длине потоков.

1. Состояние вопроса

Переходные теплофизические процессы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. К сожалению, на практике от прямого решения таких уравнений для моделирования переходных процессов в противоточных теплообменных аппаратах отказываются – вводят существенные ограничения на состояние процессов и переходят от дифференциальных уравнений к передаточным функциям [1–3]. Такая модель хоть и описывает температурное поле внутри теплообменного аппарата, но формулируется с существенными допущениями, предполагающими постоянство плотности скорости потока и других параметров теплоносителей по длине теплообменника.

Рассмотрим математическую модель одномерного нестационарного теплового потока, состоящую из уравнений теплопереноса, движения, неразрывности и состояния [4, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} + v \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{q}{c_p \rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} &= 0, \quad \Phi(p, \rho, T) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $T(x, \tau)$ – температура теплоносителя, $\tau \in [0, T]$ – время, $x \in [x_a, x_b]$ – пространственная координата, $v(x, \tau)$ – скорость потока, $\rho(x, \tau)$ – плотность теплоносителя, $p(x, \tau)$ – давление в потоке, λ – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, $q = \bar{q} + \hat{q}$ –

удельный тепловой поток $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3} \right]$ от внешних источников $\bar{q}$ и возможных фазовых переходов $\hat{q}$, η – коэффициент динамической вязкости, Φ – уравнение состояния неізотермических процессов.

Скорости хладагентов в промышленных теплообменных аппаратах достигают десятков метров в секунду. Конвективный теплообмен здесь существенно преобладает над диффузионным, поэтому диффузионным членом в первом уравнении пренебрегают.

Во втором уравнении присутствует член, характеризующий вязкость потока. Он определяет диссипативные процессы, приводящие к потере гидродинамического напора по длине теплообменного аппарата и, соответственно, – к некоторому нагреванию хладагентов. В реальных аппаратах потеря напора в теплообменниках составляет примерно 1%. Это – незначительная величина, поэтому далее вязкостью и изменением гидродинамического напора, связанного с диссипацией, мы будем пренебрегать. Естественно, будем пренебрегать и теплотой образующейся от диссипации энергии. Именно поэтому в систему (1) мы заранее не добавляли уравнение энергии.

Второе и третье уравнения представляют собой систему гиперболических уравнений, которая описывает волновые гидродинамические процессы в сжимаемых средах, когда изменение давления $p(x, \tau)$ приводит к изменению плотности $\rho(x, \tau)$. Как известно, скорость волн определяется в основном скоростью звука в среде, которая в промышленных хладагентах на несколько порядков выше скорости движения среды. В то же время волны повышения и понижения давления переносят импульс, а не сами частицы среды, как это происходит при конвективном теплообмене. Таким образом, в среднем по длине потока влиянием быстротечных волновых процессов повышения и понижения давления на относительно медленный тепловой конвективный перенос можно пренебречь. В итоге мы можем считать, что среда с хладагентом несжимаема и давление в среде по всей длине хладагента постоянно, т.е. $p(x, \tau) = p(\tau)$.

Невязкость и несжимаемость сред приводят к тому, что второе уравнение в системе (1) исчезает, а вся система с учетом предыдущих допущений приобретает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{c_p \rho} [\bar{q} + \hat{q}], \quad \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad \rho(T)|_p = 0. \quad (2)$$

Последнее уравнение состояния Φ вырождается в зависимость плотности среды от ее температуры при заданном давлении [6].

2. Математическое моделирование противоточных сред

На рис. 1 показана принципиальная схема работы противоточного теплообменного аппарата, в котором прямым потоком может быть, например, воздух, а обратным – жидкий кислород. Будем отмечать индексом 1 прямоточную среду (воздух) и индексом 2 – противоточную среду (кислород).

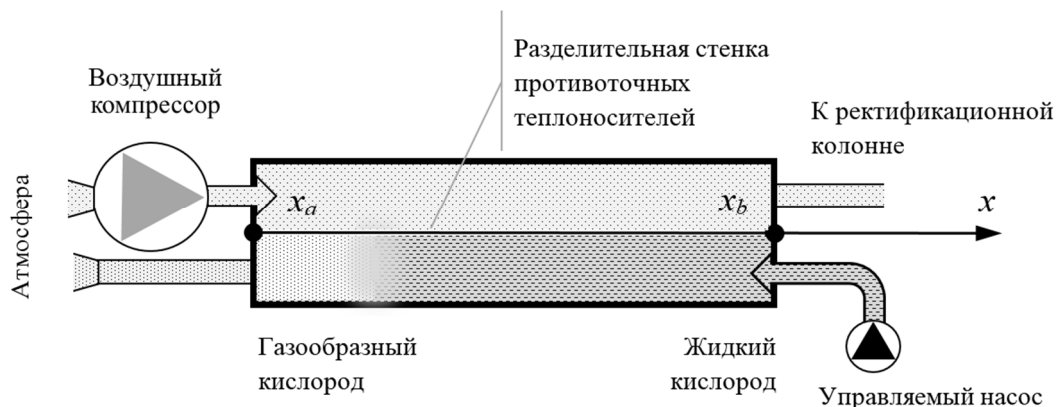


Рис. 1. Схема противоточного теплообменного аппарата
Fig. 1. Diagram of a counterflow heat exchanger

Одномерная постановка задачи предполагает достаточно интенсивное турбулентное перемешивание, такое что температура и скорость в поперечном сечении каждого потока элементарной толщины dx постоянны. Тогда процесс передачи тепла между участками длиной dx через площадь их взаимодействия $dF = Hdx$ (H – ширина разделительной стенки потоков), согласно законам теплопроводности и теплоотдачи, можно описать уравнениями мощностей элементарных тепловых потоков dP [7, 8]:

$$dP_1 = -\alpha_1 dF (T_1 - \tilde{T}_1), \quad dP_{12} = -\frac{\lambda_{12}}{\delta} dF (\tilde{T}_1 - \tilde{T}_2), \quad dP_2 = -\alpha_2 dF (\tilde{T}_2 - T_2),$$

где dP_1 – мощность теплового потока от теплоносителя 1 к стенке, dP_{12} – мощность потока в стенке, dP_2 – мощность теплового потока от стенки к теплоносителю 2, α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи от теплоносителя 1 к стенке и от стенки к теплоносителю 2 соответственно, λ_{12} – коэффициент теплопроводности стенки, δ – толщина стенки, $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ – температуры стенки со стороны 1-го и 2-го теплоносителей. Здесь $T_1 > \tilde{T}_1 > \tilde{T}_2 > T_2$.

Мы видим, что тепло из среды 1 в среду 2 попадает с некоторым термическим сопротивлением

$$R_k = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_{12}} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Поскольку в теплообменных аппаратах разделительную стенку делают малой толщины и из высоко теплопроводящих материалов, то значение ее термического сопротивления $\delta/\lambda_{12} \approx 0$, и им пренебрегают. Кроме того, подразумевая качественную внешнюю теплоизоляцию теплообменных аппаратов, тепловыми потерями в окружающую среду также обычно пренебрегают. Тогда теплообмен для каждой среды можно представить как удельную мощность (на единицу объема) теплового потока $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3} \right]$:

$$\bar{q} = \pm k dF (T_1 - T_2) / dV,$$

где $k = (1/\alpha_1 + 1/\alpha_2)^{-1}$ – коэффициент теплопередачи $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}} \right]$, $dV = S dx$ – объем элементарной ячейки, принимающей (знак плюс) или отдающей (знак минус) тепло, S – площадь поперечного сечения потока.

Если течения сопровождаются фазовыми переходами, то необходимо учитывать соответствующие выделения и поглощения тепла. Например, охладитель в виде жидкого кислорода внутри теплообменника всегда закипает и выходит в виде газа. При парообразовании кислород поглощает удельный тепловой поток $\hat{q}_2 = \bar{q}_1$ из первой противоточной среды (воздух) и удерживает температуру на уровне кипения $T_2 = T_{2\text{кип}}$ вплоть до полного испарения. Здесь

$$\hat{q}_2 = \begin{cases} -\rho_2 L_2 / \Delta \tau_2, & \text{если есть кипение,} \\ 0, & \text{если нет кипения,} \end{cases}$$

$$\bar{q}_1 = -k dF (T_1 - T_2) / dV,$$

где L_2 – удельная теплота парообразования кислорода $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right]$, $\Delta \tau_2$ – время кипения ячейки кислорода до полного испарения.

Таким образом система (2) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= \frac{1}{c_{p1} \rho_1} \left[-k \frac{H}{S_1} (T_1 - T_2) + \hat{q}_1 \right], \\ \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - v_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} &= \frac{1}{c_{p2} \rho_2} \left[k \frac{H}{S_2} (T_1 - T_2) + \hat{q}_2 \right], \\ \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x} = 0, \quad \rho_1 (T_1) \Big|_{P_1} = 0, \quad \rho_2 (T_2) \Big|_{P_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Если для какого-либо хладагента отсутствуют табличные данные зависимости $\rho(T)$ в диапазоне рабочих давлений теплообменника, то необходимо воспользоваться уравнением состояния неидеальных сред (при высоких давлениях p), например в виде уравнения Битти–Бриджмена [9]. Запишем его для одного моля вещества

$$RT \frac{(1-\varepsilon)(V+B)}{V^2} - \frac{A}{V^2} - p = 0, \quad (4)$$

где R – универсальная газовая постоянная, $V(T)$ – объем моля вещества массой M , коэффициенты $A = A_0 \left(1 - \frac{a}{V}\right)$, $B = B_0 \left(1 - \frac{b}{V}\right)$, $\varepsilon = \frac{c}{VT^3}$, A_0 , B_0 , a , b , c – эмпирические постоянные [10]. Объем V из нелинейного уравнения (4) при заданном давлении p можно найти итерационно. Обычно это делается методом Ньютона. После чего мы получаем плотность

$$\rho(T) = \frac{M}{V(T)}. \quad (5)$$

Для вычисления удельной теплоемкости $c_p(T)$ обеих сред используют табличные данные, например [11]. На основе этих данных делается интерполяция функции $c_p(T)$.

В системе (3) первые два уравнения конвективного теплопереноса нуждаются в граничных и начальных условиях. Зададим их в виде:

$$T_1(\tau, x_a) = T_{1a}(\tau), \quad T_2(\tau, x_b) = T_{2b}(\tau), \quad T_1(0, x) = T_{10}(x), \quad T_2(0, x) = T_{20}(x). \quad (6)$$

Третье и четвертое уравнения неразрывности в (3) легко интегрируются с точностью до констант $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ по длине потоков, откуда мы можем найти скорости хладагентов, зависящие от плотности потоков:

$$v_1(x, \tau) = \frac{C_1(\tau)}{\rho_1(T_1(x, \tau))}, \quad v_2(x, \tau) = \frac{C_2(\tau)}{\rho_2(T_2(x, \tau))}. \quad (7)$$

Пространственные константы C_1 , C_2 задаем через, как правило, известные плотности и скорости на входе или выходе потоков, например:

$$C_1(\tau) = \rho_{1a}(T_{1a}(\tau))v_1(x_a, \tau), \quad C_2(\tau) = \rho_{2b}(T_{2b}(\tau))v_2(x_b, \tau).$$

Система (3) при условиях (5)–(7) принимает вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{1}{c_{p1}\rho_1} [kF(T_2 - T_1) + \hat{q}_1], \quad \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - v_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{1}{c_{p2}\rho_2} [kF(T_1 - T_2) + \hat{q}_2]. \quad (8)$$

Полученная математическая модель в виде уравнений (5)–(8), в отличие от описываемых ранее в литературе, позволяет для противоточных теплообменников моделировать температуру $T(x, \tau)$ с учетом не только переходных и фазовых превращений в хладагентах, но и пространственной распределенности физических параметров потоков, таких как плотность, скорость, теплоемкость и теплопередача.

3. Численное моделирование

Для численного решения дифференциальных уравнений (8) для обеих сред использовалась одна и та же равномерная по пространству сетка $\left\{x_i = x_a + i\Delta x, i = 0, 1 \dots n, \Delta x = \frac{x_b - x_a}{n}\right\}$ с шагами по времени $\left\{\tau_j = j\Delta \tau, j = 0, 1 \dots m, \Delta \tau = \frac{T}{m}\right\}$. Для аппроксимации производных привлекалась неявная схема «прямоугольник» [11–13].

Согласно этой схеме значение производной по времени $\frac{\partial T}{\partial \tau}$ усредняется по пространственным точкам i и $i + 1$, а значение пространственной производной $\frac{\partial T}{\partial x}$ усредняется по временным слоям j и $j + 1$. Кроме того, все коэффициенты уравнений определяются в центре рассматриваемого прямоугольника. Погрешность аппроксимаций такой схемы имеет второй порядок малости относительно $\Delta \tau$ и Δx .

Система (8) приобретает следующий конечно-разностный вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta\tau}(T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i}^j + T_{1,i+1}^{j+1} - T_{1,i+1}^j) + \frac{v_1}{2\Delta x}(T_{1,i+1}^{j+1} - T_{1,i}^{j+1} + T_{1,i+1}^j - T_{1,i}^j) &= \frac{1}{c_{p1}\rho_1} \left[k \frac{H}{S_1} (T_{2,i+1/2}^{j+1/2} - T_{1,i+1/2}^{j+1/2}) + \hat{q}_1 \right], \\ \frac{1}{2\Delta\tau}(T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i}^j + T_{2,i+1}^{j+1} - T_{2,i+1}^j) - \frac{v_2}{2\Delta x}(T_{2,i+1}^{j+1} - T_{2,i}^{j+1} + T_{2,i+1}^j - T_{2,i}^j) &= \frac{1}{c_{p2}\rho_2} \left[k \frac{H}{S_2} (T_{1,i+1/2}^{j+1/2} - T_{2,i+1/2}^{j+1/2}) + \hat{q}_2 \right], \end{aligned} \quad (9)$$

Шаги аппроксимаций должны удовлетворять условию Куранта:

$$\frac{\Delta x}{\max(|v_1(x, \tau)|, |v_2(x, \tau)|)} \leq \Delta \tau.$$

Система уравнений (9) – это система $2(n + m)$ алгебраических уравнений, которую мы будем решать совместно для обеих сред в пространственных узлах сетки на каждом новом временном слое. Поскольку первая среда (в примере – воздух) движется слева направо, то его искомая температура должна находиться в правой верхней точке конечно-разностного прямоугольника, т.е. в $T_{1,i+1}^{j+1}$. Соответственно для противоточной второй среды (в примере – кислород), движущейся справа налево, искомая температура должна находиться в левой верхней точке $T_{2,i}^{j+1}$.

Найти явным образом искомые температуры теплоносителей из уравнений (9) невозможно. Во-первых, потому что коэффициенты должны рассчитываться через неизвестную температуру $T_{i+1/2}^{j+1/2} = (T_i^{j+1} + T_i^j + T_{i+1}^{j+1} + T_{i+1}^j) / 4$. Во-вторых, как видно из правых частей уравнений (9), теплообмен определяется опять-таки неизвестной температурой противоточного теплоносителя. Для преодоления указанных проблем поступим следующим образом.

Сначала выберем, какая из сред будет рассчитываться первой на каждом временном слое. Пусть это будет кислород, поскольку работа теплообменника заключается в охлаждении воздуха. Тогда коэффициенты второго уравнения (кислород) будем вычислять по трехточечному шаблону через $(T_{2,i+1}^j, T_{2,i+1}^j, T_{2,i}^j)$, а для воздуха – через $(T_{1,i}^{j+1}, T_{1,i}^j, T_{1,i+1}^j)$. Разности температур теплоносителей в правой части второго уравнения будем вычислять по данным только старого временного слоя, т.е. через $(T_{1,i+1/2}^j - T_{2,i+1/2}^j)$. Для первого уравнения (воздух), такой проблемы не возникает, так как температура кислорода будет уже известна.

Теперь с учетом сделанных уточнений аппроксимаций можно из уравнений (9) выразить искомые температуры:

$$\begin{aligned} T_{2,i}^{j+1} &= T_{2,i}^j \frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2}{1 + \gamma_1} - T_{2,i+1}^{j+1} \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} + T_{2,i+1}^j \frac{1 + \gamma_1 - \gamma_2}{1 + \gamma_1} + \frac{2\gamma_2 T_{1,i+1/2}^j}{1 + \gamma_1} + \frac{2\chi \hat{q}_2}{1 + \gamma_1}, \quad i = n - 1 \dots 0, \\ T_{1,i+1}^{j+1} &= T_{1,i+1}^j \frac{1 + \gamma_1 - 0.5\gamma_2}{1 + \gamma_1 + \gamma_2} - T_{1,i}^{j+1} \frac{1 - \gamma_1 + 0.5\gamma_2}{1 + \gamma_1 + \gamma_2} + T_{1,i}^j \frac{1 + \gamma_1 + 0.5\gamma_2}{1 + \gamma_1 + \gamma_2} + \\ &\quad + \frac{2\gamma_2 T_{2,i+1/2}^{j+1/2}}{1 + \gamma_1 + \gamma_2} + \frac{2\chi \hat{q}_1}{1 + \gamma_1 + \gamma_2}, \quad i = 0 \dots n - 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\gamma_1 = \frac{v_1 \Delta \tau}{\Delta x}$, $\gamma_2 = \frac{\Delta \tau k H}{S_{1,2} c_p \rho}$, $\chi = \frac{\Delta \tau}{c_p \rho}$, S_1 – первая среда (воздух), S_2 – вторая среда (кислород).

5. Результаты расчетов

При расчете нестационарных процессов почти всегда возникает проблема определения начальных условий. Пусть в начальный момент времени противоточные среды не взаимодействуют т.е. $k = 0$, тогда можно задать постоянные температуры, например $T_1(0, x) = 315 \text{ К}$ и $T_2(0, x) = 90 \text{ К}$. На следующем временном слое $j = 1$, когда $k \neq 0$, начнется нестационарное течение. Рассмотрением именно такого нестационарного процесса мы в данной статье и ограничимся. В начальный момент времени примем давления в потоках $p_1 = 5 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $p_2 = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Па}$ и константы $C_1 = 1285$, $C_2 = 1717$. Константа для воздуха задавалась при скорости $v_1(x_a, \tau) = 20 \text{ м/с}$, а для жидкого кислорода – при скорости $v_2(x_b, \tau) = 1,5 \text{ м/с}$. Длина теплообменной поверхности аппарата принималась равной 9 м, площади поперечных сечений потоков $S_1 = 0,53 \text{ м}^2$, $S_2 = 0,18 \text{ м}^2$, площадь взаимодействия потоков $F = 1100 \text{ м}^2$. Приведенные данные соответствуют типичному кожухотрубному теплообменному аппарату. Расчетная сетка задавалась $\Delta x = 0,045 \text{ м}$ и $\Delta \tau = 0,00075 \text{ с}$, $T = 7 \text{ с}$ – время полного установления процесса.

Для указанного теплообменника воздух не меняет своего фазового состояния, $\hat{q}_1 = 0$, а вот кислород меняет. В этих условиях коэффициент теплопередачи между кислородом и воздухом нельзя считать постоянным по длине потоков. Будем задавать $k = 6 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ – для зоны жидкого кислорода, $k = 4,5 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ – для зоны парожидкостной смеси кислорода, $k = 3 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ – для зоны газообразного кислорода.

На рис. 2 приведены результаты расчетов температуры воздуха (сплошная линия) и кислорода (пунктирная линия) в момент установления изначально нестационарного потока в рассматриваемом теплообменном аппарате. Две точки на температурных кривых для кислорода указывают на начало и конец парожидкостной зоны. В этой зоне, естественно, температура не меняется и равна $T_{2\text{кип}} = 135 \text{ К}$. Рисунок 2, б получен при постоянном по всей длине потоков коэффициенте теплопередачи со средним значением $k = 4,5 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2\text{К}$.

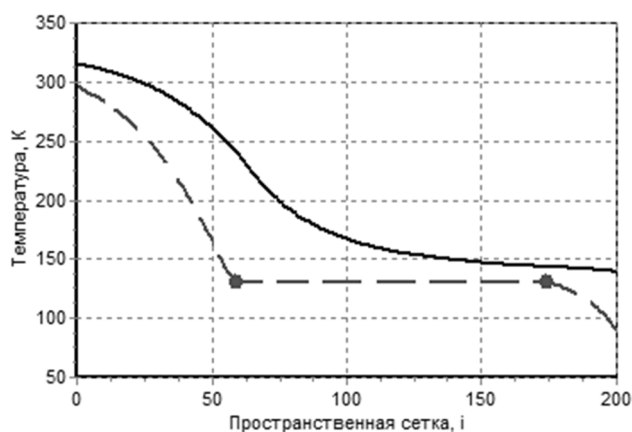


Рис. 2, а. Температуры потоков при переменном k
Fig. 2, a. Flows temperatures at variable k

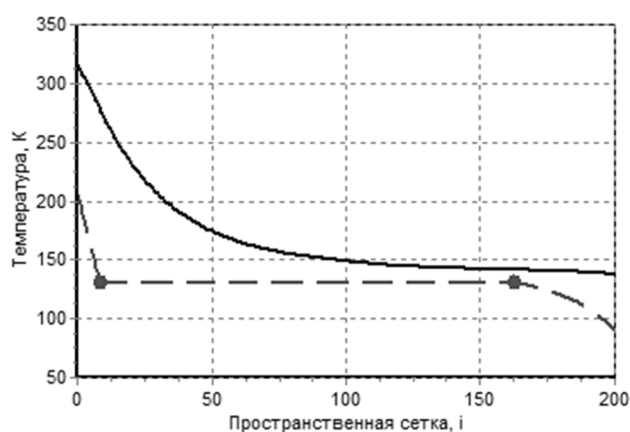


Рис. 2, б. Температуры потоков при постоянном k
Fig. 2, b. Flows temperatures at permanent k

Можно заметить, что распределенность коэффициента теплопередачи по длине теплообменного аппарата заметно влияет на процесс теплообмена.

На рис. 3 показаны конечные распределения скоростей потоков. Видно, как кислород (пунктирная линия) ускоряется справа налево по мере кипения за счет изменения своей плотности от жидкости к газу. В то же время поток воздуха замедляется слева направо из-за существенного охлаждения и повышения своей плотности.

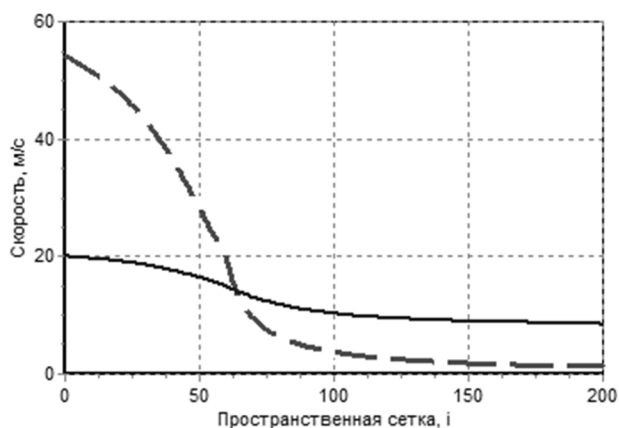


Рис. 3, а. Скорости потоков при переменном k
Fig. 3, a. Flows rate at a variable k

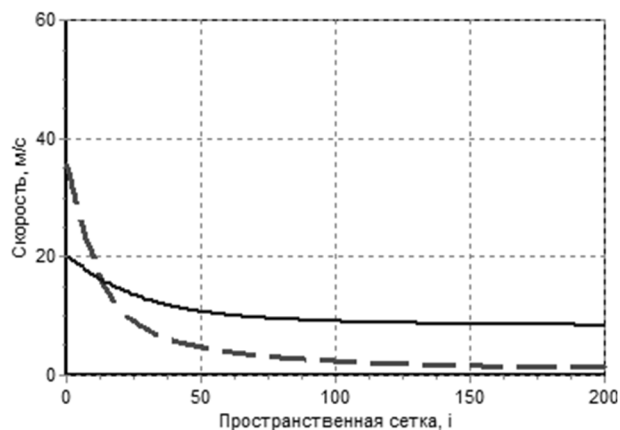


Рис. 3, б. Скорости потоков при постоянном k
Fig. 3, b. Flows rate at a permanent k

Приведенные расчеты показывают, что учет фазовых переходов в хладагентах и учет изменения коэффициента теплопередачи вдоль теплообменного аппарата существенно влияют на физическую картину тепловых и гидродинамических процессов теплообменного аппарата.

Заключение

Полученная математическая модель (5)–(8) и ее конечно-разностное представление (10) позволяют осуществлять физически обоснованное численное моделирование одномерных нестационарных тепловых потоков в противоточных теплообменных аппаратах. Такая модель дает возможность учитывать распределенность физических параметров по длине потоков, таких как плотность, скорость, теплоемкость и теплопередача между потоками, и позволяет моделировать потоки противоточных хладагентов с фазовыми переходами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилушкин И.А., Лежнев М.В. Структурное представление процесса теплообмена при встречном направлении взаимодействующих потоков // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. 2007. № 1 (19). С. 16–22.
2. Данилушкин И.А., Гусева М.А. Построение численно-аналитических моделей теплообменных аппаратов // Проблемы управления, передачи и обработки информации – АТМ-ТКИ-50 : междунар. науч. конф. : сб. тр. / под ред. А.Г. Александрова, М.Ф. Степанова. Саратов : Саратов. гос. техн. ун-т, 2009. С. 168–170.
3. Лежнев М.В., Рапопорт Э.Я., Данилушкин И.А. Численное моделирование процессов теплопереноса в противоточном теплообменном аппарате // Математическое моделирование и краевые задачи : тр. пятой Всерос. науч. конф. Самара : СамГТУ, 2008. Ч. 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами. С. 66–69.
4. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи : пер. с англ. М. : Мир, 1983. 512 с.
5. Кафаров В.В., Глебов М.Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств : учеб. пособие для вузов. М. : Высшая школа, 1991. 440 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика гидродинамика. М. : Физматлит, 1986. 736 с.
7. Григорьев В.А., Крохин Ю.И. Тепло и массообменные аппараты криогенной техники : учеб. пособие для вузов. М. : Энергоиздат, 1982. 312 с.
8. Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. М. : Наука, 1982. 472 с.
9. Уэйлес С. Фазовые равновесия в химической технологии : в 2 ч. М. : Мир, 1989. Ч. 1. 304 с.
10. Шпильрайн Э.Э., Кессельман П.М. Основы теории теплофизических свойств веществ. М. : Энергия, 1977. 248 с.
11. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М. : Наука, 1972. 720 с.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1977. 656 с.
13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. : Физматлит, Лаб. базовых знаний, 2002. 630 с.

Поступила в редакцию 25 сентября 2019 г.

Tolstykh V.K., Pshenychnyi K.A. (2020) MATHEMATICAL MODELING OF UNSTEADY HEAT PROCESSES IN COUNTER-CURRENT HEAT EXCHANGERS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 55–62

The countercurrent heat exchangers, usually are widely used in power engineering, metallurgy, chemical industry and other industries. For the design, management of heat exchangers in transient conditions, it is necessary to know sufficiently accurate mathematical models of non-stationary thermophysical processes flowing in them.

The paper deals with a mathematical model of one-dimensional unsteady heat fluxes, consisting of the equations of heat transfer, hydrodynamics and state. The issues of assumptions and accounting for various physical factors, including phase transitions that determine the specific kind of mathematical model, are discussed.

The resulting mathematical model allows for countercurrent heat exchangers to simulate the temperature, taking into account not only the transitional and phase transformations in refrigerants, but also taking into account the spatial distribution of the physical parameters of the flow.

For the numerical solution of differential equations “rectangle” scheme was used same for both environments. The error of approximations of such a scheme has a second order. The resulting system of algebraic equations was modernized, since in this scheme the coefficients must be calculated through an unknown temperature, and the heat transfer must be determined through an unknown temperature of the countercurrent coolant. A new scheme was obtained for explicitly calculating the temperature of the coolant.

The results of numerical calculations for a counter-flow heat exchanger are given. For this device, the air does not change its phase state, but the oxygen change. In such conditions, the density and flow rate are significantly variable along the length of the apparatus, respectively, and the heat transfer coefficient between oxygen and air cannot be considered constant along the length of the flow.

For calculations, large pressures in the flows were taken $p_1 = 5 \cdot 10^6$ Pa, $p_2 = 2,4 \cdot 10^6$ Pa. The length of the heat exchange surface was taken 9 m, the interaction area of the flows $F = 1100$ m². The flow temperatures at the initial moment of time were set as $T_1(0, x) = 315$ K, $T_2(0, x) = 90$ K. The data given correspond to a typical industrial shell-and-tube heat exchanger.

The influence of the constant and piecewise constant heat transfer coefficient k along the length of the flow, on the heat exchanger's operation was investigated. According to the results, it follows that the heat transfer coefficient, its distribution, significantly affects the heat exchange process.

The resulting mathematical model and its finite-difference representation allow physically-based numerical simulation of one-dimensional unsteady heat fluxes in countercurrent heat exchangers. This model allows to take into account the distribution of physical parameters along the length of the streams, such as density, speed, heat capacity and heat transfer between the streams, and allows to simulate the flows of counterflow refrigerants with phase transitions.

Keywords: heat exchanger; counterflow coolants; mathematical model; finite difference scheme; heat transfer coefficient.

TOLSTYKH Viktor Konstantinovich (Doctor of physics and mathematics, Professor, Donetsk National University).

E-mail: mail@tolstikh.com

PSHENYCHNYI Kyrylo Anatoliiovych (Post-graduate Student, Donetsk National University).

E-mail: kirill_pch@mail.ru

REFERENCES

1. Danilushkin, I.A. & Lezhnev, M.V. (2007) Strukturnoe predstavlenie protsessa teploobmena pri vstrechnom napravlenii vzaimodeystviyushchikh potokov [Structural representation of the heat exchange process in the opposite direction of the interacting flows]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Tekhnicheskie nauki – Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*. 1(19). pp. 16–22.
2. Danilushkin, I.A. & Guseva, M.A. (2009) Postroenie chislenno-analiticheskikh modeley teploobmennyykh apparatov [Construction of numerical-analytical models of heat exchangers]. In: Aleksandrov, A.G. & Stepanov, M.F. (eds) *Problemy upravleniya, peredachi i obrabotki informatsii – ATM-TKI-50* [Problems of management, transmission and processing of information – ATM-TKI-50]. Saratov: Saratov State Tech. University. pp. 168–170.
3. Lezhnev, M.V., Rapoport, E.Ya. & Danilushkin, I.A. (2008) Chislennoe modelirovanie protsessov teploperenosa v protivotochnom teploobmennom apparate [Numerical modeling of heat transfer processes in a countercurrent heat exchanger]. In: Radchenko, V.P. (ed.) *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi* [Mathematical modeling and boundary value problems]. Part. 2. Samara: Samara State Technical University. pp. 66–69.
4. Kreith, F. & Black, W.Z. (1980) *Basic Heat Transfer*. New York: Harper & Row.
5. Kafarov, V.V. & Glebov, M.B. (1991) *Matematicheskoe modelirovanie osnovnykh protsessov khimicheskikh proizvodstv* [Mathematical modeling of the main processes of chemical production]. Moscow: Vysshaya shkola.
6. Landau, L.D. & Lifshits, E.M. (1986) *Teoreticheskaya fizika gidrodinamika* [Theoretical Physics and Hydrodynamics]. 3rd ed. Moscow: Nauka.
7. Grigoriev, V.A. & Krokhin, Yu.I. (1982) *Teplo i massoobmennyye apparaty kriogennoy tekhniki* [Heat and Mass Transfer Devices of Cryogenic Equipment]. Moscow: Energoizdat.
8. Zhukauskas, A.A. (1982) *Konvektivnyy perenos v teploobmennikakh* [Convective Transfer in Heat Exchangers]. Moscow: Nauka.
9. Walas, S. (1984) *Phase equilibria in chemical engineering*. Boston-London: Butterworth Publisher.
10. Shpilrayn, E.E. & Kesselman, P.M. (1977) *Osnovy teorii teplofizicheskikh svoystv veshchestv* [Fundamentals of the theory of thermophysical properties of substances]. Moscow: Energiya.
11. Vargaftik, N.B. (1972) *Spravochnik po teplofizicheskim svoystvam gazov i zhidkostey* [Handbook of thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow: Nauka.
12. Samarsky, A.A. (1977) *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
13. Bakhvalov, N.S., Zhidkov, N.P. & Kobelkov, G.M. (2002) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Fizmatlit, Lab. bazovykh znaniy.

УДК 539.3

DOI: 10.17223/19988605/51/7

Б.А. Худаяров, О.Р. Кучаров**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАЦИИ ТРУБОПРОВОДА
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ БАЛКИ ТИМОШЕНКО**

Численно исследован колебательный процесс вязкоупругого трубопровода, лежащего на упругом основании, описываемом моделью Винклера. На основе теории балки Тимошенко разработана математическая модель вибрации вязкоупругого трубопровода, транспортирующего жидкость. Для описания процессов деформирования вязкоупругих материалов использована интегральная модель Больцмана–Вольтерра. Решение интегродифференциальных уравнений определяется численным методом, основанным на исключении особенности в ядре релаксации интегрального оператора.

Ключевые слова: математическая модель; вычислительный алгоритм; вязкоупругость; трубопровод; теория Тимошенко.

В настоящее время нефть, газ и нефтепродукты являются основой топливно-энергетического комплекса, а трубопроводы имеют большое значение для его эффективного функционирования. Трубопроводы для транспортировки различных жидкостей – один из основных факторов экономического развития энергетических отраслей многих стран мира. Безопасная эксплуатация трубопроводов – это ключ к бесперебойному обеспечению энергоресурсами и нормальной работе всех отраслей промышленности.

Сильная вибрация трубопровода подвергает его конструкцию усталостному повреждению, вызывая ослабление и разрыв соединительных частей. Чрезмерная вибрация может повлиять на эффективность транспортировки нефтепродуктов и даже привести к серьезным авариям, что влечет значительные экономические потери, а также риск загрязнения окружающей среды.

Анализ изгибных вибрационных свойств трубопровода, содержащего проточную жидкость, имеет большое практическое значение при проектировании трубопроводов. Действительно, скорость потока жидкости внутри трубы оказывает существенное влияние на ее динамические свойства.

В работе [1] представлен метод конечных элементов для нелинейного анализа колебаний труб Тимошенко, транспортирующих жидкость. В ней обсуждены предельный цикл и связанная с ним амплитуда вибрации для проблемы вибрации, вызванной потоком. Проведен анализ для оценки влияния скорости потока и соотношения масс жидкости / трубы на амплитуду колебаний предельного цикла. Динамика и устойчивость коротких труб, транспортирующих жидкость, рассмотрена с помощью теории балки Тимошенко для трубы [2]. Численные результаты сравнены с экспериментальными данными. Показано, что уточненная теория балки Тимошенко необходима для адекватного описания динамического поведения чрезвычайно коротких трубок.

Тенденция развития исследований динамики трубопроводов идет по пути усложнения математических моделей, описывающих колебательные процессы трубопроводов с протекающей жидкостью. Математическому моделированию колебания упругих трубопроводов посвящено большое количество теоретических исследований [3–8]. Однако моделирование задач колебаний трубопроводов на базе теории балки Тимошенко с учетом вязкоупругих свойств материала конструкций рассматривается в сравнительно небольшом количестве работ. Последнее объясняется специфическими аналитическими трудностями исследования вязкоупругих трубопроводов типа стержня.

В работе [9] разработана математическая модель вязкоупругих труб, транспортирующих жидкость. При рассмотрении упругих систем внутреннее трение материала учитывается с помощью мо-

дели Кельвина–Фойгта. Безразмерное уравнение поперечного движения и связанные с ним классические и неклассические граничные условия получены с использованием вариационного подхода.

Анализ устойчивости композитной тонкостенной консольной трубы, транспортирующей жидкость, рассматривается в работе [10]. Основные уравнения системы получены по принципу Гамильтона. С применением модели Галеркина выполняется анализ собственных значений, при этом анализируются критическая скорость жидкости и, следовательно, устойчивость системы.

В настоящее время задача колебательных процессов вязкоупругих трубопроводов, лежащих на грунтовом основании, представляет большой теоретический и прикладной интерес. На сегодняшний день разработано множество подходов для решения подобных задач, но ни один из них не способен адекватно отразить реальную картину взаимодействия между трубопроводом и подстилающим грунтом. В основном эти подходы описывают отдельные стадии процессов, происходящих в трубопроводе. Поэтому несомненный научный и практический интерес вызывает построение математических моделей, позволяющих исследовать динамические процессы вязкоупругих трубопроводов с жидкостью.

Из приведенного обзора можно сделать вывод, что разработка динамических моделей процессов колебаний трубопроводов из композиционных материалов с протекающей жидкостью, учитывающих основания Винклера, представляет собой достаточно сложную и актуальную исследовательскую задачу. В данной статье исследуется изгибная вибрация вязкоупругого трубопровода, транспортирующего жидкость и лежащего на упругом основании, что является обычной практической проблемой.

Целью данной работы является создание математической модели, численного алгоритма и компьютерной программы для решения линейных задач о колебаниях вязкоупругих трубопроводов на основе теории Тимошенко.

1. Постановка задачи

Рассмотрим вязкоупругий трубопровод длиной L , лежащий на упругом основании, описываемом моделью Винклера (рис. 1). По трубопроводу передается поток несжимаемой жидкости, имеющий осевую скорость V . Предполагается, что поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформированной оси трубы.

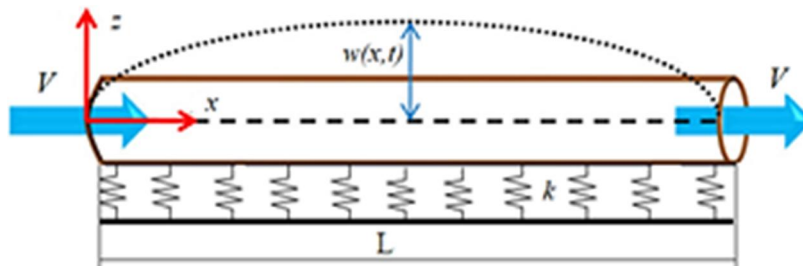


Рис. 1. Геометрия трубопровода

Fig. 1. The geometry of the pipeline

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось x проходила через центры тяжести сечений трубы, а начало оси совместим с левым концом трубы. Перемещения точек оси трубопровода по оси z представляют неизвестную функцию прогибов $w(x, t)$. Перемещения произвольной точки нормали с координатой (до деформации) z по теории Тимошенко будут равны [11–13]

$$u^{\bar{z}}(x, z, t) = u(x, t) + z\psi(x, t), \quad w^{\bar{z}}(x, z, t) = w(x, t).$$

Здесь $u(x, t)$ – перемещения в направлении оси x , $\psi(x, t)$ – угол поворота отрезка нормали к срединной поверхности (рис. 2); z – расстояние от точки поперечного сечения стержня до нейтральной оси.

Интегральную модель Больцмана–Вольтерра, которая характеризует закон зависимости напряжения σ от деформации ϵ в одномерном случае определяется из уравнения [14]

$$\sigma = E(1 - R^*)\epsilon = E \left\{ \epsilon - \int_0^t R(t - \tau)\epsilon(\tau) d\tau \right\}, \quad (1)$$

здесь E – модуль упругости материала; $R(t - \tau)$ – ядро релаксации; t – время наблюдения; τ – время, предшествующее моменту наблюдения.

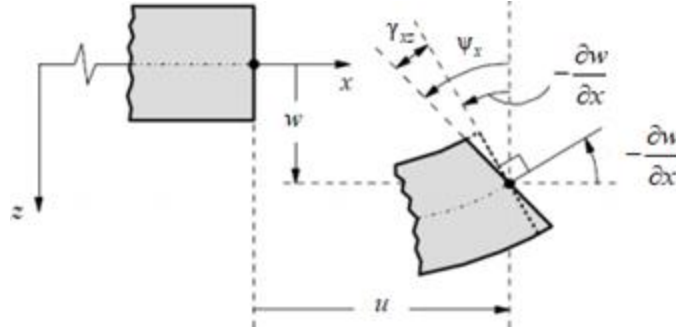


Рис. 2. Деформация элемента балки по гипотезе типа Тимошенко
Fig. 2. Deformation of the beam by the Timoshenko type hypothesis

Геометрическую зависимость зададим уравнением [12]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi. \quad (2)$$

Усилие, изгибающий момент и сдвигающие усилие

$$N_{xx} = \int_{A_p} \sigma_{xx} dA, \quad M_{xx} = \int_{A_p} z \sigma_{xx} dA, \quad Q_x = K_s \int_{A_p} \sigma_{xz} dA, \quad (3)$$

где K_s – поправочный коэффициент на сдвиг; A_p – площадь поперечного сечения трубы.

Подставляя (1) и (2) в (3), получим

$$N_{xx} = E_p A_p (1 - R^*) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad M_{xx} = E_p I_p (1 - R^*) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Q_x = G_p A_p K_s (1 - R^*) \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right], \quad (4)$$

где $I_p = \int_{A_p} z^2 dA$; E_p – модуль упругости материала трубы; G_p – модуль сдвига.

Пользуясь принципом Гамильтона–Остроградского, после некоторых преобразований получим уравнения движения трубопровода, основанные на теории Тимошенко [11–13]. С учетом вязкоупругих свойств материала конструкции и наличия упругого основания они имеют вид:

$$(m_p + m_f) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E_p A_p (1 - R^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (5a)$$

$$(m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w = G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (5b)$$

$$(\rho_p I_p + \rho_f I_f) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = E_p I_p (1 - R^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (5c)$$

Здесь m_p , m_f – соответственно масса трубы и жидкости, отнесенные к единице длины; $I_f = \int_{A_f} z^2 dA$;

A_f – площадь, ограничивающая объем потока жидкости; k_w – жесткость основания Винклера; ρ_f , ρ_p – плотности жидкости и материала трубы соответственно.

Очевидно, что уравнение (5a) может полностью отсоединиться от (5b) и (5c), поэтому осевая деформация рассматривается независимо от проблемы поперечной деформации. Поперечная деформация трубопровода будет рассмотрена в этой работе.

$$(m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w = G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (6)$$

$$(\rho_p I_p + \rho_f I_f) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = E_p I_p (1 - R^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right).$$

2. Метод решения

Приближенное решение системы уравнений движения (6) будем искать в виде:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N w_n(t) \theta_n(x), \quad \psi(x, t) = \sum_{n=1}^N \psi_n(t) \chi_n(x), \quad (7)$$

где $w_n(t)$, $\psi_n(t)$ – неизвестные функции времени. Координатные функции $\theta_n(x)$, $\chi_n(x)$ должны быть подобраны так, чтобы каждый член суммы (7) удовлетворял граничным условиям.

Граничные условия имеют вид:

$$u|_{x=0} = 0, v|_{x=0} = 0, w|_{x=0} = 0, M_{xx}|_{x=0} = 0, \quad (8)$$

В этом случае в разложении метода Бубнова–Галеркина (7) аппроксимирующее координатные функции выбираем в виде:

$$\theta_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}; \quad \chi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Подставляя (7) в систему (5) и применяя метод Бубнова–Галеркина, получим систему интегродифференциальных уравнений (ИДУ). Введя в ИДУ следующие безразмерные величины:

$$x \leftrightarrow \frac{x}{L}, \quad w \leftrightarrow \frac{w}{L}, \quad V \leftrightarrow VL \sqrt{\frac{m_p}{EI_p}}, \quad t \leftrightarrow \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{E_p I_p}{m_p + m_f}}, \quad (9)$$

и сохраняя при этом прежние обозначения, запишем

$$\begin{aligned} \ddot{w}_k + 2V \sqrt{m_{fp} \beta_{fp}} \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} \dot{w}_n + \frac{G_p}{E_p} \gamma_1 K_s k^2 \pi^2 (1 - R^*) w_k - \frac{G_p}{E_p} \frac{\gamma_1 K_s}{2} \sum_{n=1}^N (1 - R^*) \gamma_{nk} \psi_n - m_{fp} V^2 k^2 \pi^2 w_k + k_w w_k &= 0, \\ \ddot{\psi}_k + (1 - R^*) \frac{k^2 \pi^2}{\rho_{fp}} \psi_k + \gamma_1 \frac{G_p}{E_p} \frac{K_s}{\rho_{fp}} (1 - R^*) \left(\sum_{n=1}^N \gamma_{nk} w_n + \psi_k \right) &= 0, \\ w_k(0) = w_{0k}; \quad \dot{w}_k(0) = \dot{w}_{0k}; \quad \psi_k(0) = \psi_{0k}; \quad \dot{\psi}_k(0) = \dot{\psi}_{0k}; \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\beta_{fp} = \frac{m_f}{m_p + m_f}$, $m_{fp} = \frac{m_f}{m_p}$, $\rho_{fp} = \frac{\rho_p I_p + \rho_f I_f}{(m_p + m_f) L^2}$, $\gamma_1 = \frac{A_p L^2}{I_p}$, γ_{nk} – безразмерные коэффициенты,

связанные с координатными функциями и их производными; точки над переменной означают взятие производной по времени соответствующего порядка.

Интегрирование системы (10) проводилось численным методом, основанном на использовании квадратурных формул [15–18]. На основе этого метода описан алгоритм численного решения системы (10).

Проинтегрировав полученную систему (10) два раза по t и заменив интегралы квадратурными формулами трапеций, полагая $t = t_i$, $t_i = i \Delta t$, $i = 1, 2, \dots$ (Δt – шаг интегрирования), для вычисления $u_{in} = u_{in}(t_i)$, $\phi_{in} = \phi_{in}(t_i)$, $w_{in} = w_{in}(t_i)$, получим следующие формулы при ядре Колтунова–Ржаницына ($R(t) = A t^{\alpha-1} e^{-\beta t}$, $A > 0$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} w_{pk} + 2V \sqrt{m_{fp} \beta_{fp}} \sum_{n=1}^N B_p \gamma_{nk} w_{pn} = w_{0p} + \dot{w}_{0p} t_p - \sum_{r=0}^{p-1} B_r \left\{ 2V \sqrt{m_{fp} \beta_{fp}} \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} w_{rn} - m_{fp} V^2 k^2 \pi^2 w_{rk} + k_w w_{rk} + \right. \\ \left. + \frac{G_p}{E_p} \gamma_1 K_s k^2 \pi^2 \left(w_{rk} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} w_{r-s,k} \right) - \frac{G_p}{E_p} \frac{\gamma_1 K_s}{2} \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} \left(\psi_{r,n} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} \psi_{r-s,n} \right) \right\}, \\ \psi_{pk} = \psi_{0p} + t_p \dot{\psi}_{0p} - \sum_{r=0}^{p-1} B_r (t_p - t_r) \left\{ \frac{k^2 \pi^2}{\rho_{fp}} \left(\psi_{rk} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} \psi_{r-s,k} \right) + \right. \\ \left. + \gamma_1 \frac{G_p}{E_p} \frac{K_s}{\rho_{fp}} \left[\left(\phi_{rk} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} \psi_{r-s,k} \right) + \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} \left(w_{rn} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} w_{r-s,n} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$p = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, \dots, N$.

Здесь B_r, C_s – коэффициенты квадратурной формулы трапеций [19–20].

Результаты вычислений отражаются графиками, приведенными на рис. 3–4.

3. Обсуждение результатов

Исследовано влияние свойств материала на колебания для вязкоупругих трубопроводов, лежащих на упругом основании, при скорости потока выше критической. На рис. 3 представлена зависимость перемещений w от времени срединной точки упругого ($A = 0$; см. рис. 3, *a*) и вязкоупругих трубопроводов ($A = 0,005$; см. рис. 3, *b*; $A = 0,05$; см. рис. 3, *c*; $A = 0,1$; см. рис. 3, *d*). Из графиков видно, что решение упругих и вязкоупругих задач существенно отличается. В упругом случае происходят периодические колебания, и амплитуда колебаний уже с момента $t = 10,5$ резко возрастает. Подобные вибрации являются нежелательными, так как приводят к зарождению и развитию усталостных трещин. С поступательным увеличением параметра вязкости в начальный период времени происходит затухание с дальнейшим переходом периодических колебаний, однако этот процесс недолго по времени, и процесс периодических вибраций заменятся нежелательными вибрациями. Из графиков видно, что критическое время, за которое возникают колебания с быстро возрастающими амплитудами, зависит от параметра вязкости. Чем больше значение параметра вязкости, тем раньше начинается нежелательный процесс колебаний. При расчете были использованы следующие значения геометрических и физических параметров: $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $\gamma_1 = 410$; $m_{fp} = 0,01$; $k_w = 100$; $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 2$.

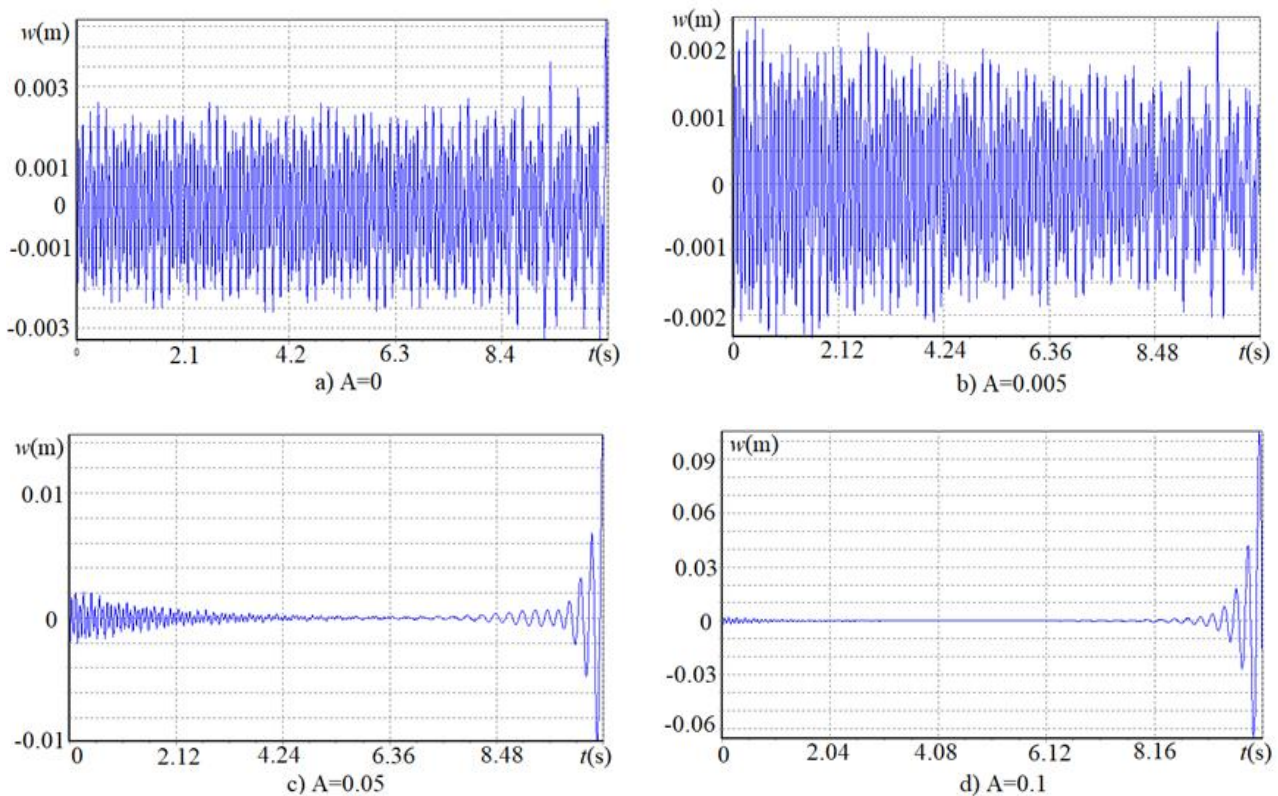


Рис. 3. Зависимости прогиба трубопровода от времени t для различных значений параметра вязкости:

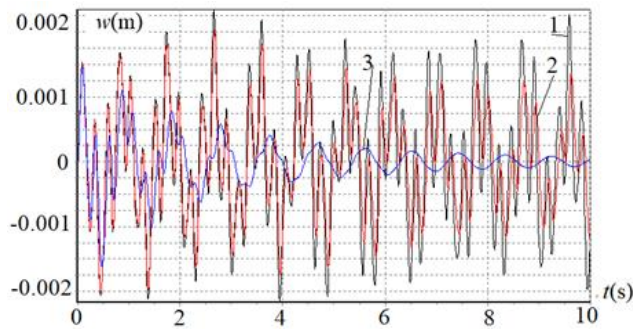
$A = 0$ (*a*); $A = 0,005$ (*b*); $A = 0,05$ (*c*); $A = 0,1$ (*d*)

Fig. 3. Displacement-time dependences at $A = 0$ (*a*); $A = 0,005$ (*b*); $A = 0,05$ (*c*); $A = 0,1$ (*d*)

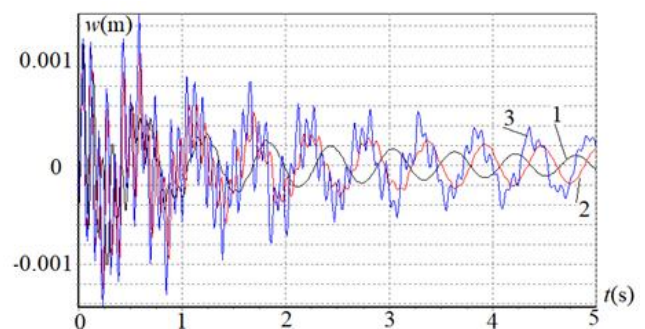
Таким образом, на основании полученных результатов (см. рис. 3 *b, c, d*) можно заключить, что учет вязкоупругого свойства материала трубопровода приводит к снижению значения критической скорости жидкости и вызывает при $V > V_{cr}$ увеличение частоты колебаний, имеющих быстро возрастающую амплитуду.

На рис. 4, *a* приведены зависимости прогиба w от времени t для различных значений параметра вязкости A при скорости потока меньше критической. Из этого рисунка также видно, что с увеличением параметра A амплитуда и частота колебаний трубопровода уменьшается.

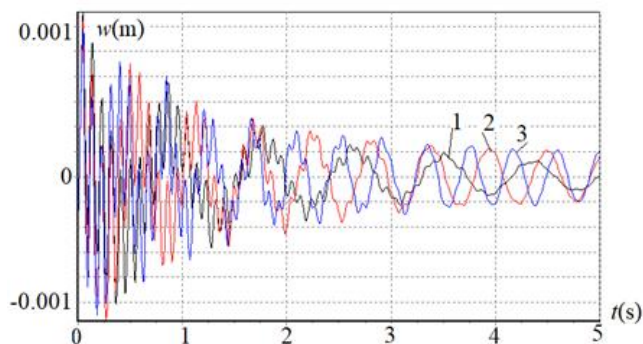
На рис. 4, *b* приведены зависимости прогиба w от времени t для вязкоупругого трубопровода при различных параметрах сингулярности α : 0,1 (кривая 1); 0,25 (кривая 2); 0,5 (кривая 3). Влияние параметра сингулярности α в этом случае достаточно заметно и состоит в увеличении амплитуды и частоты колебаний. Следовательно, учет этого влияния при проектировании тонкостенных конструкций имеет важное значение, так как чем меньше параметр сингулярности материала конструкции, тем интенсивнее протекают диссипативные процессы в этих конструкциях.



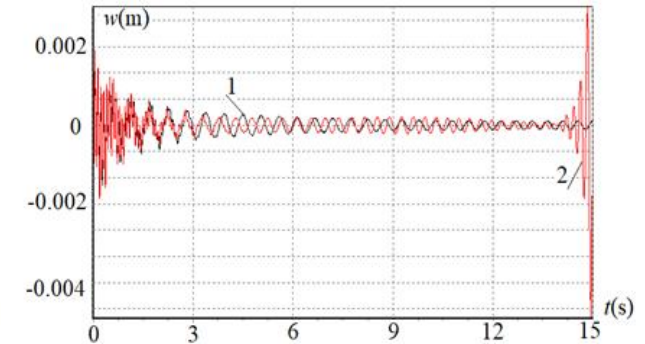
a) $A = 0$ (1); $A = 0,01$ (2); $A = 0,1$ (3);
 $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 2$



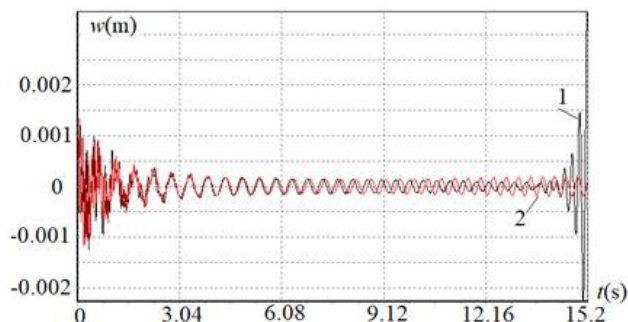
b) $\alpha = 0,1$ (1); $\alpha = 0,25$ (2); $\alpha = 0,5$ (3); $A = 0,1$; $\beta = 0,05$;
 $\gamma_1 = 400$; $m_{fp} = 0,01$; $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 2$



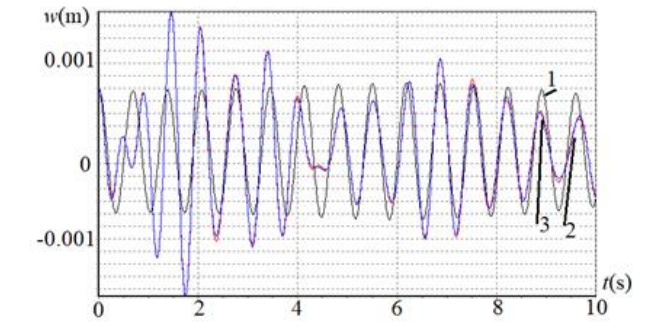
c) $k_w = 0$ (1); $k_w = 100$ (2); $k_w = 250$ (3); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$;
 $\beta = 0,05$; $\gamma_1 = 300$; $m_{fp} = 0,1$; $k_s = 0,35$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 0,4$



d) $\beta_{fp} = 0,001$ (1); $\beta_{fp} = 0,007$ (2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$;
 $\gamma_1 = 300$; $m_{fp} = 0,01$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 1$



e) $\gamma_1 = 200$ (1); $\gamma_1 = 300$ (2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$;
 $m_{fp} = 0,1$; $k_w = 100$; $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 0,8$



f) $N = 2$ (1); $N = 5$ (2); $N = 6$ (3); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$;
 $m_{fp} = 0,1$; $\gamma_1 = 20$; $k_w = 80$; $\rho_{fp} = 0,001$; $\beta_{fp} = 0,001$; $V = 0,02$

Рис. 4. Зависимости прогиба трубопровода от времени t для различных совокупностей значений параметров модели

Fig. 4. Displacement-time dependences for different sets of model parameter values

Влияние параметра оснований Винклера k_w на колебательный процесс показано на рис. 4, *c*. При неучете оснований ($k_w=0$) амплитуда колебаний медленно затухает. При наличии оснований и увеличении значения параметра k_w это приводит к увеличению частоты колебаний. В качестве исход-

ных данных при вычислениях были приняты следующие: $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $\gamma_1 = 300$; $m_{fp} = 0,1$; $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 0,4$.

На рис. 4, *d* показано влияние параметра β_{fp} на колебательный процесс трубопровода. При $\beta_{fp} = 0,001$ амплитуда колебаний со временем затухает (кривая 1). Увеличение значения параметра β_{fp} до 0,007 приводит резкому изменению колебаний. С ростом параметра β_{fp} уменьшаются масса трубы и, соответственно, ее относительная жесткость. Амплитуда колебаний уже с момента $t > 14$ резко возрастает. Подобные вибрации являются нежелательными, так как приводят к зарождению и развитию усталостных трещин.

На рис. 4, *e* приводятся графики движения трубопровода по времени. Номера кривых на графиках соответствуют следующим значениям параметра γ_1 : 200 (кривая 1); 300 (кривая 2). Приведенные результаты свидетельствуют о том, что для второго значения параметра γ_1 имеет место периодический характер. Для значения параметра $\gamma_1 = 200$ даже при малых прогибах движение трубопровода носит нерегулярный характер. Особенно с момента $t > 14,5$, когда трубопровод испытывает высокочастотные колебания с большой амплитудой, быстро возрастающими с течением времени.

Изучена сходимость метода Бубнова–Галеркина (рис. 4, *f*). Приведенные здесь результаты показывают, что при вычислениях значений критических скоростей потока в (11) необходимо удерживать по крайней мере пять первых гармоник ($N = 5$). Расчеты показали, что дальнейшее увеличение количества членов не оказывает существенного влияния на амплитуду колебаний вязкоупругой трубы. Все приведенные результаты получены с учетом пяти членов ряда (пяти первых гармоник).

Заключение

В работе исследован колебательный процесс вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих жидкость. Разработана математическая модель линейной вибрации вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих жидкость, на основе теории Тимошенко. Разработан вычислительный алгоритм, основанный на исключении особенностей интегро-дифференциальных уравнений со слабосингулярными ядрами. На основе разработанного вычислительного алгоритма создана прикладная компьютерная программа, которая позволяет проводить численные исследования вибрации трубопровода. При моделировании линейных задач исследован ряд новых динамических эффектов:

- установлено, что учет вязкоупругих свойств материала трубопровода приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний;
- показано, что увеличение параметра оснований приводит к увеличению частоты колебаний трубопровода;
- выявлено, что уменьшение массы трубы к единице ее длины приводит к увеличению амплитуды и частоты колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yih-Hwang Lin, Yau-Kun Tsai. Nonlinear vibrations of Timoshenko pipes conveying fluid // International Journal of Solids and Structures. 1997. V. 34, No 23. P. 2945–2956.
2. Païdoussis M.P., Luu T.P., Laithier B.E. Dynamics of finite-length tubular beams conveying fluid // Journal of Sound and Vibration. 1986. V. 106, No. 2. P. 311–331.
3. Xia Tan, Xiao-Ye Mao, Hu Ding, Li-Qun Chen. Vibration around non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid // Journal of Sound and Vibration. 2018. No. 428. P. 104–118.
4. Jijun Gu, Tianqi Ma, Menglan Duan. Effect of aspect ratio on the dynamic response of a fluid-conveying pipe using the Timoshenko beam model // Ocean Engineering. 2016. No. 114. P. 185–191. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2016.01.021
5. Yih Hwang Lin, Chih Liang Chu. Active modal control of Timoshenko pipes conveying fluid // Journal of the Chinese Institute of Engineers. 2001. V. 24 (1). P. 65–74. DOI: 10.1080/02533839.2001.9670607
6. Sällström J.H., Kesson B. Fluid-conveying damped Rayleigh–Timoshenko beams in transverse vibration analyzed by use of an exact finite element. Part I: Theory // Journal of Fluids and Structures. 1990. No. 4 (6). P. 561–572.
7. Tkachenko O. Construction of Mathematical Model of Complex Pipeline with Variable Geometry // Underground urbanization as a Prerequisite for Sustainable Development : 15th International scientific conference // Proc. Engineering. 2016. V. 165. P. 1261–1274.

8. Zhi-Yuan Liu, Lin Wang, Xi-Ping Sun. Nonlinear Forced Vibration of Cantilevered Pipes Conveying Fluid // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2018. V. 31, No. 1. P. 32–50.
9. Nematollahi M.S., Mohammadi H., Taghvaei S. Fluttering and divergence instability of functionally graded viscoelastic nanotubes conveying fluid based on nonlocal strain gradient theory // *Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. V. 29, No. 3. DOI: 10.1063/1.5057738
10. Bahaadini R., Dashtbayazi M.R., Hosseini M., Khalili-Parizi Z. Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid // *Ocean Engineering*. 2018. V. 160. P. 311–323.
11. Reddy J.N., Wang C.M. Dynamics of Fluid-Conveying Beams: Governing Equations and Finite Element Models : CORE Report No. 2004-03. Centre for Offshore Research and Engineering (CORE), The National University of Singapore, 2004. 22 p.
12. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. : Наука, 1972.
13. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Saltykova O.A., Krysko V.A. Chaotic vibrations in flexible multi-layered Bernoulli–Euler and Timoshenko type beams // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2008. V. 5. P. 319–363.
14. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация : учеб. пособие для втузов. М. : Высшая школа, 1976. 277 с.
15. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости : справ. пособие. Ташкент : Мехнат, 1987. 269 с.
16. Badalov F.B., Eshmatov Kh., Yusupov M. One Method of Solution of System of Integro-differential Problems of Viscoelasticity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1987. V. 51. P. 867–871.
17. Badalov F.B., Abduraimov A., Khudayarov B.A. Effect of the Hereditary Kernel on the Solution of Linear and Nonlinear Dynamic Problems of Hereditary Deformable Systems // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2007. No. 36. P. 328–335.
18. Badalov F.B., Abduraimov A., Khudayarov B.A. Numerical Investigation of the Influence of Rheological Parameters on the Character of Vibrations in Heredity-deformable Systems // *Computational technologies*. 2007. No. 12. P. 17–26.
19. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. Mathematical Simulation of Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Pipelines Conveying Fluid // *Applied Mathematical Modelling*. 2019. V. 66. P. 662–679.
20. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. Nonlinear supersonic flutter for the viscoelastic orthotropic cylindrical shells in supersonic flow // *Aerospace Science and Technology*. 2019. Vol. 84. P. 120–130.

Поступила в редакцию 11 мая 2019 г.

Khudayarov B.A., Kucharov O.R. (2020) MODELING OF VIBRATION OF A PIPELINE ON THE THEORY OF TIMOSHENKO. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 63–71

DOI: 10.17223/19988605/51/7

In this paper the oscillatory process of a viscoelastic pipeline is investigated numerically according to the theory of Timoshenko lying on an elastic foundation, described by the Winkler model. To describe the deformation processes of viscoelastic materials, the Boltzmann-Volterra integral model with weakly singular nuclei was used:

$$\sigma = E(1 - R^*)\varepsilon = E \left\{ \varepsilon - \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right\},$$

here E is the modulus of elasticity of the material; $R(t - \tau)$ is the relaxation kernel; t is the observation time; τ is the time preceding the moment of observation.

A mathematical model of pipelines conveying fluid flow has been developed with account for viscosity properties of structure material and the base of the pipeline:

$$(m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w = G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

$$(\rho_p I_p + \rho_f I_f) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = E_p I_p (1 - R^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right).$$

Here m_p, m_f are the masses of the pipe and fluid, respectively, referred to the unit of length; $I_f = \int_{A_f} z^2 dA$; A_f is the area limiting the volume of fluid flow; ρ_f, ρ_p are the densities of the fluid and the pipe material, respectively.

When modeling problems, a number of new dynamic effects were investigated: it was found that an account of viscoelastic properties of the pipeline material led to a decrease in the amplitude and frequency of vibrations; it was shown that an increase in the base parameter led to an increase in the vibration frequency of the pipeline; it was found that a decrease in the pipe mass per unit length led to an increase in the amplitude and frequency of vibrations.

Keywords: mathematical model; viscoelasticity; pipeline; computational algorithm; Timoshenko theory.

KHUDAYAROV Bakhtiyar Alimovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan).

E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

KUCHAROV Olimzhon Ruzimurotovich (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies, Tashkent, Uzbekistan).

E-mail: k.r.olimjon@mail.ru

REFERENCES

1. Yih-Hwang Lin & Yau-Kun Tsai. (1997) Nonlinear vibrations of Timoshenko pipes conveying fluid. *International Journal of Solids and Structures*. 34(23). pp. 2945–2956. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00217-X
2. Païdoussis, M.P., Luu, T.P. & Laithier, B.E. (1986) Dynamics of finite-length tubular beams conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*. 106(2). pp. 311–331. DOI: 10.1016/0022-460X(86)90321-4
3. Xia Tan, Xiao-Ye Mao, Hu Ding & Li-Qun Chen. (2018) Vibration around non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*. 428. pp. 104–118. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.04.041
4. Jijun Gu, Tianqi Ma & Menglan Duan. (2018) Effect of aspect ratio on the dynamic response of a fluid-conveying pipe using the Timoshenko beam model. *Ocean Engineering*. 114. pp. 185–191. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2016.01.021
5. Yih Hwang Lin & Chih Liang Chu. (2001) Active modal control of Timoshenko pipes conveying fluid. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*. 24(1). pp. 65–74. DOI: 10.1080/02533839.2001.9670607
6. Sällström, J.H. & Kesson, B. (1990) Fluid-conveying damped Rayleigh-Timoshenko beams in transverse vibration analyzed by use of an exact finite element part I: Theory. *Journal of Fluids and Structures*. 4(6). pp. 561–572. DOI: 10.1016/0889-9746(90)90202-G
7. Tkachenko, O. (2016) Construction of Mathematical Model of Complex Pipeline with Variable Geometry. *Procedia Engineering*. 165. pp. 1261–1274. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.11.849
8. Zhi-Yuan Liu, Lin Wang & Xi-Ping Sun. (2018) Nonlinear Forced Vibration of Cantilevered Pipes Conveying Fluid. *Acta Mechanica Sinica*. 31(1). pp. 32–50. DOI: 10.1007/s10338-018-0011-0
9. Nematollahi, M.S., Mohammadi, H. & Taghvaei, S. (2019) Fluttering and divergence instability of functionally graded viscoelastic nanotubes conveying fluid based on nonlocal strain gradient theory. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 29(3). DOI: 10.1063/1.5057738
10. Bahaadini, R., Dashtbayazi, M.R., Hosseini, M. & Khalili-Parizi, Z. (2018) Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid. *Ocean Engineering*. 160. pp. 311–323. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2018.04.061
11. Reddy, J.N. & Wang, C.M. (2004) *Dynamics of Fluid-Conveying Beam: Governing Equations and Finite Element Models*. Singapore: Centre for Offshore Research and Engineering (CORE), The National University of Singapore.
12. Volmir, A.S. (1972) *Nelineynaya dinamika platinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka.
13. Awrejcewicz, J., Krysko, A.V., Zhigalov, M.V., Saltykova, O.A. & Krysko, V.A. (2008) Chaotic vibrations in flexible multi-layered Bernoulli-Euler and Timoshenko type beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 5. pp. 319–363.
14. Koltunov, M.A. (1976) *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creeping and relaxation]. Moscow: Vysshaya shkola.
15. Badalov, F.B. (1987) *Metody resheniya integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravneniy nasledstvennoy teorii vyazkouprugosti* [Methods for Solving Integral and Integro-differential Equations of the Hereditary Theory of Viscoelasticity]. Tashkent: Mekhnat.
16. Badalov, F.B., Eshmatov, Kh. & Yusupov, M. (1987) One Method of Solution of System of Integro – differential Problems of Viscoelasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 51(1). pp. 867–871.
17. Badalov, F.B., Abduraimov, A. & Khudayarov, B.A. (2007) Effect of the Hereditary Kernel on the Solution of Linear and Nonlinear Dynamic Problems of Hereditary Deformable Systems. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 36. pp. 328–335. DOI: 10.3103/S1052618807040048
18. Badalov, F.B., Abduraimov, A. & Khudayarov, B.A. (2007) Numerical Investigation of the Influence of Rheological Parameters on the Character of Vibrations in Hereditary-deformable Systems. *Computational Technologies*. 12. pp. 17–26.
19. Khudayarov, B.A. & Turaev, F.Zh. (2019) Mathematical Simulation of Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Pipelines Conveying Fluid. *Applied Mathematical Modelling*. 66. pp. 662–679. DOI: 10.1016/j.apm.2018.10.008
20. Khudayarov, B.A. & Turaev, F.Zh. (2019) Nonlinear supersonic flutter for the viscoelastic orthotropic cylindrical shells in supersonic flow. *Aerospace Science and Technology*. 84. pp. 120–130. DOI: 10.1016/j.ast.2018.08.044

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 004.855

DOI: 10.17223/19988605/51/8

A.A. Druki, V.G. Spitsyn, E.U. Arkalykov

SEMANTIC SEGMENTATION ALGORITHMS OF THE EARTH'S SURFACE PICTURES BASED ON NEURAL NETWORK METHODS

*The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-08-00977A
and in the framework of Tomsk Polytechnic University Competitiveness Enhancement Program.*

The aim of the work is to develop algorithms that solve the problem of semantic segmentation of images. A convolutional neural network with an original architecture was developed. Performing a software implementation of the algorithm, which allows to build a map of segmented objects of a different class. A comparison of the results of the proposed algorithm with existing analogues is presented.

Keywords: computer vision; artificial neural networks; semantic segmentation; image processing.

Semantic image segmentation is the division of the original image into local areas (segments) corresponding to certain classes of objects. These systems are used in a wide variety of fields from security systems to various types of medical diagnostics. Today, methods and algorithms for classifying objects in images are actively developing, however, this task has not been fully solved and part of the work is done by people manually, which leads to errors and time costs.

There is a wide selection of computer vision methods and algorithms that can be used to solve this problem [1]. The main approach for semantic image segmentation is a combination of three algorithms: detectors, descriptors and classifiers. These algorithms determine the basic parameters of the image, select objects and classify them. Such image parameters include brightness, color, texture, borders and angles of objects, and the like. Image parameters are fixed using detector algorithms, and then mathematically described using descriptor algorithms. Next, you need to determine to which class the objects belong, classifier algorithms are involved in this procedure.

Among the detectors and descriptors, the following algorithms can be distinguished:

- SIFT detector and descriptor (Scale invariant feature transform) [2];
- SURF (Speeded up robust features) [3];
- FAST (Features from accelerated segment test) [4];
- MSER (Maximally stable extremal regions) [5];
- HOG (Histogram of oriented gradients) [6].

These algorithms in many respects have a similar principle of operation and results. Their advantage is a rather high resistance to various noise distortions in the frame and to change the scale of the object. The disadvantage is the decrease in stability when changing the camera angle, poor lighting and in the presence of reflective surfaces in the frame.

In machine learning, many different classification algorithms and their modifications are presented, so we will consider two classes of widely used classifiers: Bag of words and SVM (Support Vector Machine) and neural networks.

This algorithm is one of the most common classes of image classification algorithms. Its name largely determines the principle of its work, because in fact it uses a histogram of occurrences of individual templates in the image [7].

Basically, this algorithm was used to classify texts, in which a histogram was also constructed of the entry of words from a pre-prepared dictionary into a document, but can be effectively applied to other tasks.

The main disadvantages of this classifier in the large size of the dictionary, and its size should not exceed a certain value at which it will be resistant to noise. Also, the bag of words does not take into account spatial information about the object in any way, which, if there are similar points in descriptors of different points of different objects in the image, their descriptions may coincide [7].

The support vector machine (SVM is support vector machine) is one of the most popular methods for training classifiers. Initially, this method was used for binary classification problems, but it can be easily generalized for problems with a large number of classes, as well as for regression restoration problems.

The advantages of this algorithm in addition to the prevalence and simplicity include a small training sample, in which the classifier will provide an acceptable result. This is also a drawback: the algorithm does not use the whole set, but only a small part of them at the boundaries of the regions [8].

The main disadvantage of classical neural networks for image processing is the large size of the input vector (i.e. each pixel of the image). As a result of this, the number of neurons in each layer is growing, and for large images the network becomes too large and heavy for training. Also, classical neural networks cannot take into account the topology of the original image, since they accept it in its entirety [9].

Convolutional neural networks (CNN), which have special convolutional and subsampling layers, are devoid of these shortcomings. The basic idea of these layers is to create shared weights, i.e. some neurons use the same weights and are combined into feature maps, each neuron of which is associated with the previous layer. Each neuron of such a layer performs a mathematical convolution operation on a certain area of the previous layer, and such a layer is accordingly called a convolutional layer and models some features of human vision, responsible for detecting a specific symptom. Layers of downsampling are responsible for reducing the input vector by a number of times (usually 2 times).

Thus, CNN have a much smaller number of customizable weights, which allows the network to learn generalization of information, rather than memorization. Such networks provide high resilience to zooming, shear and bends.

1. Development of segmentation algorithm

Convolutional neural networks were chosen to develop an image segmentation algorithm. Despite the active development of neural network algorithms, to date, there are still no specific rules for choosing the structure and such networks. As a rule, developers experimentally choose network parameters: the number and organization of layers, the number and size of feature maps, the size of convolution matrices, the choice of a learning algorithm, the activation function, etc. You need to understand that too many network parameters can increase computational complexity, while this does not guarantee improved work results. Too few parameters can lead to reduced classification accuracy. Thus, the goal is to choose a neural network architecture that would provide high performance with the least number of tunable parameters.

In the process of doing work, several libraries of neural network construction were studied.

TensorFlow is an open software library for machine learning developed by Google to solve the problems of building and training a neural network in order to automatically find and classify images, achieving the quality of human perception. It is used both for research and for developing Google's own products. The main API for working with the library is implemented for Python, there are also implementations for C++, Haskell, Java [10].

Torch is a library for scientific computing with broad support for machine learning algorithms. Developed by Idiap Research Institute, New York University and NEC Laboratories America. The library is implemented in Lua using C and CUDA. The fast scripting language Lua in combination with SSE, OpenMP, CUDA technologies allows Torch to show good speed compared to other libraries. Currently supported operating systems are Linux, FreeBSD, Mac OS X. The main modules also work on Windows [11].

Keras is an open neural network library written in Python [12]. It is an add-on to the frameworks TensorFlow and Theano. It is aimed at the operational work with deep learning networks, while it is compact, modular and expandable.

For comparison, library libraries used the CIFAR-10 data set containing 10 classes of images [13]. In total, the data set contains 60,000 color images 32 by 32 pixels in size, where for each class there are 6,000 images, respectively. Classes included in CIFAR-10: airplanes, cars, trucks, birds, cats, deer, dogs, frogs, horses and ships.

According to the results of the training time, the Torch library was the fastest to learn 168 seconds, the TensorFlow and Keras libraries showed about 250 seconds. The libraries of Torch and TensorFlow show the same results in terms of accuracy 78%, Keras is one percent less 77%.

All libraries have similar performance, but Torch has an advantage, since the dynamic graph of calculations allows you to change the structure of the neural network before each program start, without preliminary compilation, which allows you to spend less time building the architecture of the neural network, so the Torch library was chosen for further development.

In the process of experimental studies, CNN of various architectures were implemented, including a different number of parameters. The experiments showed that neural networks with a simplified architecture and a small number of parameters showed worse results. With a sequential complication of the architecture of the CNN, it was possible to select the optimal architecture that provides high classification results (Fig. 1). Further experiments to complicate the architecture and increase the number of SNA parameters did not provide an improvement in the quality of classification, but at the same time, the time and network training increased significantly.

This neural network consists of 21 layers and includes 11 convolutional layers, 4 pooling layers, 4 up-sampling layers and one resulting layer.

As input, color images are used. The input layer has a size of 256×256 neurons. This layer does not perform any transformations and is intended only for supplying input data to it.

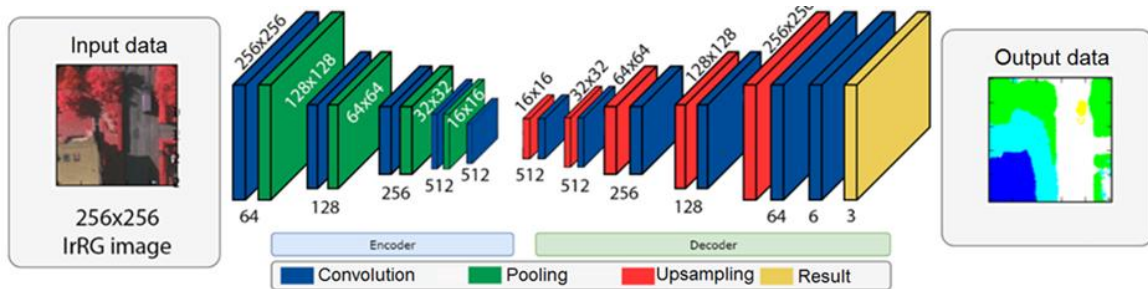


Fig. 1. Full convolution network architecture

Next to the input layer is the first hidden layer. This layer is a convolutional one, contains 64 feature maps, each of which has a size of 256×256 neurons.

The second hidden layer is a subsampling layer; it consists of 128 feature maps, each of which has a size of 128×128 neurons. The convolution matrix has a size of 2×2 neuron. Displacement is performed by 1 neuron. This layer reduces the size of the previous layer by half.

The third hidden layer C2 is a convolutional layer and consists of 128 feature cards, each of which has a size of 128×128 neurons. The convolution matrix has a size of 4×4 neuron. Displacement is performed by 1 neuron.

The fourth hidden layer is also a convolutional layer and consists of 256 feature cards of the size of 64×64 neurons. The convolution matrix has a size of 4×4 neuron. Displacement is performed by 1 neuron.

The fifth hidden layer is also a convolutional layer and consists of 512 symptom cards of size 32×32 neuron. The convolution matrix has a size of 4×4 neuron. Displacement is performed by 1 neuron.

The sixth hidden layer is a subsample layer; it consists of 512 feature maps, each of which has a size of 32×32 neurons. The first five layers of the network have a two-dimensional structure and are designed to extract features in the image. The sixth layer is also a convolution layer. Upsampling layers are used to enlarge the image to its original values, which take the data for enlargement from the subsample layers. At the last stages, we get a convolutional layer with 6 feature cards, which we later translate into 3 channels and get a classified image at the output.

2. Neural network training

For training neural networks, the error back propagation algorithm and its various modifications are usually used. The classical algorithm has a number of drawbacks, divergence is possible in some situations, if you choose a learning speed that is too high, if the convergence rate is too low, there is a chance of retraining. It was decided to carry out network training using the following gradient descent optimizers:

Nesterov Accelerated Gradient. This optimization method is based on the idea of momentum accumulation, i.e. with prolonged movement in one direction, the speed will remain for some time after. To do this, you need to store several previous values and calculate the average. The calculation of the average value takes up too much memory for a large number of occurrences, therefore, the average estimate is used [14].

Adagrad-adaptive Gradient. This is a family of algorithms, the main idea of which is to save some rarely found signs to protect them from noise. For this, a certain quantity is created, for example, the sum of the squares of updates or their modules for a certain parameter of an artificial neural network. Based on this value, element updates are regulated – frequently encountered updates are less common, freeing up space for rare ones, thereby producing an adaptive learning speed or attenuation of the learning speed [15].

Adam-adaptive Moment Estimation. This optimization method combines the pulse accumulation considered in the Nesterov method, as well as storing the frequency of the gradient change, similar to Adagrad [16].

To train the neural network, a data set from ISPRS.com for the city of Vaihingen Germany was used (Fig. 2). The spatial resolution of images is 9 cm per pixel. Image channels comprise near infrared-red-green (IRRG). The city is divided into sectors, each of which has its own unique number (Fig. 2).



Fig. 2. Sectors of the city of Vaihingen

Depending on the color, each mask element represents a specific object in the picture. Roads and sidewalks are white, buildings are blue, trees are green, grass and bushes are turquoise, vehicles are yellow. A total of 22 images were used for training and 15 images for verification. The images used have a resolution of about 2000 by 2500 pixels [17]. The training was carried out on 50 eras of 2000 iterations in each, where fragments of 256 by 256 pixels were used (Fig. 3).

A convolutional neural network processes the input image with a scanning window of 64×64 pixels in accordance with the size of the input layer. In each section, the neural network performs data segmentation, forming the corresponding map with a size of 16×16 pixels at the output. This size difference is due to the fact that when sampling a small portion of the image it is often difficult to find out what is shown on it.

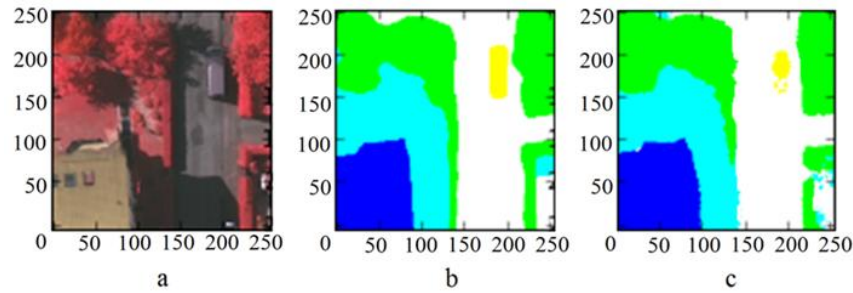


Fig. 3. The learning process:

a) the source image; b) a training example; c) the predicted result

To eliminate the problems of retraining, the DropOutmethod is included in the fifth fully connected network layer [18]. This method consists in randomly allocating some area of the neural network in which weights are updated. Neurons get on the subnet with a probability of 0,5.

We also used the L2 network regularization method, which consists in a large fine of too high a weight value and a small one at a low value. Also, during training, the loss function was minimized using the Mini-batch gradient descent method [18].

To increase the network stability to various rotations and distortions and to increase the training set, the original images were rotated at a random angle.

For training and testing, the following network parameters were selected:

- learning coefficient 0,0005;
- the frequency of changes in the learning coefficient 104;
- the magnitude of the change in the learning coefficient of 0,1;
- attenuation for regularization L2 0,0005.

The experiments were carried out on a PC with the following characteristics: Intel Core i5-4690k (4GHz) processor, 8GB RAM, NVIDIA Quadro FX 4800 video adapter.

The training of the developed neural network was carried out using three training algorithms: Nesterov accelerated gradient, AdaGrad and Adam. The structure and parameters of the network remained unchanged. The number of training eras is 500. Table 1 presents the learning outcomes.

Table 1

CNN learningoutcomes

Algorithmname	Studyingtime		Accuracy (%)
	h.	min.	
Nesterovacceleratedgradient [16]	14	46	85,56
AdaGrad [17]		30	82,24
Adam [18]		28	89,2

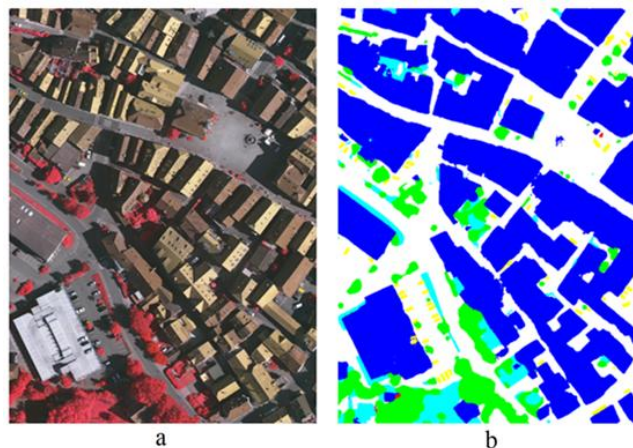


Fig. 4. The result of image segmentation:

a) the original image; b) the result obtained

The results presented in table 1 show that the Adam algorithm showed the best results relative to the rest: training time 14 hours 28 minutes, classification accuracy 89,2%. Accuracy for each class of objects: roads 90,89%, buildings 94,65%, trees 89,89%, bushes and grass 80,62%, cars 89,32%.

Fig. 4 shows the results of image segmentation developed by a neural network.

The results of the proposed neural network were compared with the results of the work of analogues (Table 2).

Table 2

Comparison with analogues

Name	Roads (%)	Buildings (%)	Grassandbushes (%)	Trees (%)	Cars (%)	Total (%)
EPSO [19]	91	93	81,3	88,3	83	87,32
PSO k-MEANS [19]	90,6	93,2	82	88,8	86,6	88,24
EDGEFLOW [20]	92,7	95,3	84,6	89,2	85,8	90,3
EDISON [20]	93,9	96	85,6	89,8	89,8	91
JSEG [20]	93,7	96	87,6	89,9	88	91
MULTISCALE [20]	91,5	93,7	81,5	88,4	84,9	88
Developedsystem	92,8	95,7	81,6	89,9	89,3	89,8 (+0,023;-0,04)

A comparative study of the accuracy of segmentation algorithms was carried out on a set of reference and test images subjected to noise distortion. To compare the results of segmentation, we used the boundaries of segmented objects, which is a set of points independent of the shading of the segments. To measure the results of segmentation, two metrics were used: average and Hausdorff distance [20]. A study of the quality of work of a number of popular segmentators showed that they behave unstably when noisy and blurry. Thus, we can conclude that it is advisable to clean the image from noise and increase its clarity before the segmentation procedure.

From table 2 it is seen that the developed system provides an accuracy of 89,8%, with a confidence interval: +0,023; -0,04. The results of the analogues are obtained from open sources. As you can see, the developed system is somewhat inferior in terms of accuracy to some analogs in such indicators as roads, buildings, grass. However, in terms of indicators such as trees and cars, she wins.

Conclusion

In the process of performing the work, a convolutional neural network was implemented, which performs segmentation of objects in the images of remote sensing of the Earth into the following classes: roads, buildings, trees, grass and cars. Experiments were conducted on the selection of a learning algorithm. The best results were obtained using the Adam algorithm.

The results of the neural network showed a classification accuracy of 89,9%. When compared with analog systems, the developed neural network is inferior in some respects, but generally shows good results and a competitive level.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) in the framework of the scientific project No. 18-08-00977 A "Creation of an Intelligent System for the Detection, Recognition and Understanding of Distorted Printed Texts in Images and Videos" and within the framework of the Competitiveness Improvement Program of the Tomsk Polytechnic University.

REFERENCES

1. Bundzel, M. & Hashimoto, S. (2010) Object identification in dynamic images based on the memory-prediction theory of brain function. *Journal of Intelligent Learning Systems and Applications*. 2(4). pp. 212–220. DOI: 10.4236/jilsa.2010.24024
2. Park, S. & Yoo, J.H. (2013) Realtime face recognition with SIFT based local feature points for mobile devices. *The 1st Int. Conf. on Artificial Intelligence, Modelling and Simulation (AIMS 13)*. Malaysia. pp. 304–308. DOI: 10.1109/AIMS.2013.56
3. Tawfiq, A. & Ahmed, J. (2016) Object detection and recognition by using enhanced speeded up robust feature. *International Journal of Computer Science and Network Security*. 16(4). pp. 66–71.
4. Tore, V. & Chawan, P.M. (2016) FAST Clustering based feature subset selection algorithm for high dimensional data. *International Journal of Computer Science and Mobile Computing*. 5(7). pp. 234–238. DOI: 10.1109/TKDE.2011.181

5. Mammeri, A., Boukerche, A. & Khiari, E. (2016) MSER based text detection and communication algorithm for autonomous vehicles. *IEEE Symposium of Computers and Communication*. Messina, Italy. pp. 456–460. DOI: 10.1109/ISCC.2016.7543902
6. Dalal, N. & Triggs, B. (2005) Histograms of oriented gradients for human detection. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. San Diego, USA. Vol. 1. pp. 886–893. DOI: 10.1109/CVPR.2005.177
7. Mohey el-Din, D. (2016) Enhancement bag-of-words model for solving the challenges of sentiment analysis. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 7(1). pp. 244–251. DOI: 10.14569/IJACSA.2016.070134
8. Kecman, V. & Melki, G. (2016) Fast online algorithms for support vector machines. *IEEE South East Conference (SoutheastCon 2016)*. Virginia, USA. pp. 26–31. DOI: 10.1109/SECON.2016.7506733
9. Le Cun, Y. & Bengio, Y. (1998) Convolutional networks for images, speech and time series. In: Arbib, M.A. (ed.) *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*. Vol. 7(1). Bradford Book. pp. 255–258.
10. Tensorflow.org. (n.d.) *TensorFlow: The Python deep learning library*. [Online] Available from: <https://www.tensorflow.org> (Accessed: 22nd October 2019).
11. Microway.com. (n.d.) *Deep Learning Frameworks: A Survey of TensorFlow, Torch, Theano, Caffe, Neon, and the IBM Machine Learning Stack*. [Online] Available from: <https://www.microway.com/hpc-tech-tips/deep-learning-frameworks-survey-tensorflow-torch-theano-caffe-neon-ibm-machine-learning-stack> (Accessed: 22nd October 2019).
12. Keras.io. (n.d.) *Keras: The Python deep learning library*. [Online] Available from: <https://keras.io> (Accessed: 22nd October 2019).
13. CS.toronto.edu. (n.d.) *CIFAR-10 dataset of images*. [Online] Available from: <https://www.cs.toronto.edu/~kriz/cifar.html> (Accessed: 22nd October 2019).
14. Abadi, M. (2016) TensorFlow: A System for Large-Scale Machine Learning. *12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation*. 33. pp. 25–33.
15. Duchi, J., Hazan, E., & Singer, Y. (2011) Adaptive Subgradient Methods for Online Learning and Stochastic Optimization. *Journal of Machine Learning Research*. 12. pp. 2121–2159.
16. Kingma, D.P. (2015) Adam: a Method for Stochastic Optimization. In: Kingma, D.P. & Ba, J.L. (eds) *Proc. Int. Conf. on Learning Representations*. San Diego, USA. pp. 1–13.
17. ISPRS. (n.d.) *2D Semantic Labeling - Vaihingen dataset*. [Online] Available from: <http://www2.isprs.org/commissions/comm3/wg4/2d-sem-label-vaihingen.html>
18. Nguyen, V., Kim, H. & Jun, S. (2018) A Study on Real-Time Detection Method of Lane and Vehicle for Lane Change Assistant System Using Vision System on Highway. *Engineering Science and Technology*. pp. 822–833. DOI: 10.1016/j.jestch.2018.06.006
19. El-Khatib, S.A. (2015) Image segmentation using a mixed and exponential particle-based algorithm. *Computer Science and Cybernetics*. 1. pp. 126–133.
20. Koltsov, P.P. (2011) The use of metrics in a comparative study of the quality of work of image segmentation algorithms. *Informatics and Its Applications*. 5. pp. 53–634.

Received: November 18, 2019

Druki A.A., Spitsyn V.G., Arkalykov E.U. (2020) SEMANTIC SEGMENTATION ALGORITHMS OF THE EARTH'S SURFACE PICTURES BASED ON NEURAL NETWORK METHODS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'noy tekhniki i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 72–78

DOI: 10.17223/19988605/51/8

Друки А.А., Спицын В.Г., Аркалыков Е.У. АЛГОРИТМЫ СЕМАНТИЧЕСКОЙ СЕГМЕНТАЦИИ СНИМКОВ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2020. № 51. С. 72–78

Целью работы является разработка алгоритмов, решающих задачу семантической сегментации изображений. Была разработана сверточная нейронная сеть с оригинальной архитектурой. Выполнена программная реализация алгоритма, позволяющая строить карту из сегментированных объектов. Представлено сравнение результатов, предложенного алгоритма, с существующими аналогами.

DRUKI Alexey Alexeevich (Candidate of Technical sciences, Associate professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: druki@tpu.ru

SPITSYN Vladimir Grigorievich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: spvg@tpu.ru

ARKALYKOV Erbolat Usenovich (National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: arkalykov@tpu.ru

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/51/9

К.С. Ким, В.И. Смагин

ФИЛЬТРАЦИЯ И ДИАГНОСТИКА В ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-31-90080.

Рассмотрен алгоритм диагностики состояния марковской цепи по косвенным наблюдениям за вектором состояния дискретной стохастической системы с мультипликативными возмущениями. Для построения оценок используется алгоритм фильтрации Калмана с неизвестным входом. Для иллюстрации предложенного подхода приводится пример.

Ключевые слова: фильтрация Калмана; диагностика марковской цепи; мультипликативные возмущения; неизвестный вход.

Задачи построения оценок и управлений для систем со случайными скачкообразными параметрами актуальны для различных реальных объектов. В качестве примера таких объектов можно рассмотреть, например, энергетические системы [1, 2], системы управления летательными аппаратами [3], системы связи [4, 5], задачи обнаружения неисправностей [6–8] и экономические системы [9, 10].

В работах [10–16] задачи фильтрации и управления рассматриваются для систем со случайными скачкообразными параметрами и аддитивными мультипликативными возмущениями. В настоящей работе рассмотрена задача фильтрации вектора состояния и идентификации состояния марковской цепи, которая входит в описание линейной стохастической системы с мультипликативными возмущениями. Решение получено с использованием принципа разделения, фильтрации Калмана и оценок неизвестного входного сигнала [17–22]. Предлагается выбрать матрицу коэффициентов передачи фильтра на основе минимизации суммы квадратичных форм ошибок оценивания. Приведен численный пример решения задачи фильтрации и идентификации для линейной стохастической системы с мультипликативными возмущениями и скачкообразными параметрами.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую линейную дискретную стохастическую систему с мультипликативными возмущениями и скачкообразным параметром:

$$x(k+1) = A_{\gamma(k)}x(k) + B_{\gamma(k)}u(k) + \sum_{s=1}^m A_{s,\gamma(k)}x(k)\theta_{s,\gamma(k)}(k) + q_{\gamma(k)}(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, x_0 – случайный вектор с известным математическим ожиданием и ковариацией $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$, $N_{0,i} = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T / \gamma = \gamma_i\}$, $i = \overline{1, r}$; $A_{\gamma(k)}$, $B_{\gamma(k)}$, $A_{s,\gamma(k)}$ – известные матрицы; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ – известный вектор; $\gamma = \gamma(k)$ – марковская цепь с r состояниями $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$; $q_{\gamma(k)}(k)$, $\theta_{s,\gamma(k)}(k)$ – гауссовские случайные векторы с характеристиками $M\{q_{\gamma(k)}(k)\} = 0$, $M\{\theta_{\gamma(k)}(k)\} = 0$, $M\{q_{\gamma(k)}(k)q_{\gamma(k)}^T(j) / \gamma(\xi) = \gamma(k), k \leq \xi \leq j\} = Q_{\gamma(k)}\delta_{kj}$, $M\{\theta_{\gamma(k)}(k)\theta_{\gamma(k)}^T(j) / \gamma(\xi) = \gamma(k), k \leq \xi \leq j\} = \Xi_{\gamma(k)}\delta_{kj}$ ($M\{\}$ – математическое ожидание, T – символ матричного транспонирования, δ_{kj} – символ Кронекера).

Вероятность состояний скачкообразного процесса $p_j(k) = P\{\gamma(k) = j\}$, $j = \overline{1, r}$, удовлетворяет уравнению

$$p_j(k+1) = \sum_{i=1}^r p_i(k) p_{i,j}, \quad p_j(0) = \bar{p}_j, \quad j = \overline{1, r}. \quad (2)$$

Здесь $p_{i,j}$ – вероятность перехода из состояния i в состояние j за один шаг, $\bar{p}_j$ – начальная вероятность j -го состояния.

Вектор наблюдения:

$$y(k) = S_{\gamma(k)} x(k) + v_{\gamma(k)}(k), \quad (3)$$

где $v_{\gamma(k)}(k)$ – гауссовская случайная последовательность, не зависящая от $q_{\gamma(k)}(k)$, с характеристиками: $M\{v_{\gamma(k)}(k)\} = 0$, $M\{v_{\gamma(k)}(k) v_{\gamma(k)}^T(j) / \gamma(\xi) = \gamma(k), k \leq \xi \leq j\} = V_{\gamma(k)} \delta_{kj}$. Предполагается, что пара матриц $A_{\gamma_i}, S_{\gamma_i}$ детектируема.

По наблюдениям (3) требуется найти оценку параметра скачкообразного параметра $\hat{\gamma}(k)$ (проблема диагностики) и оценку вектора состояния $\hat{x}(k)$, которую определим из условия минимума следующего критерия:

$$J(0, T, i) = M \left\{ \sum_{k=0}^T e^T(k) H e(k) / \gamma(0) = \gamma_i \right\}, \quad (4)$$

где $H > 0$ – весовая матрица, $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, $k \in [0, T]$.

2. Синтез оптимального фильтра

Нетрудно убедиться, что при ошибочном определении значения скачкообразного параметра $\gamma(k)$ модель (1) можно представить в эквивалентном виде, но с дополнительным вектором входа. Действительно, когда система (1) находится в j -м состоянии ($\gamma = \gamma_j$) и это состояние ошибочно идентифицировано как i -е ($j \neq i$), уравнение (1) представляется как модель с дополнительным входом:

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + f_i(k) + \sum_{s=1}^m A_{s,i} x(k) \theta_{s,i}(k) + q_i(k), \quad x(0) = x_0, \quad (5)$$

где вектор дополнительного входа определяется по формуле

$$f_i(k) = (A_j - A_i) x(k) + (B_j - B_i) u(k) + \sum_{s=1}^m A_{s,j} x(k) \theta_{s,j}(k) - \sum_{s=1}^m A_{s,i} x(k) \theta_{s,i}(k) + q_j(k) - q_i(k). \quad (6)$$

Здесь и далее введены обозначения для матриц $A_{\gamma(k)}$, $A_{s,\gamma(k)}$, $B_{\gamma(k)}$, $S_{\gamma(k)}$, $Q_{\gamma(k)}$, $\Xi_{\gamma(k)}$, $V_{\gamma(k)}$ при $\gamma(k) = \gamma_i$: A_i , $A_{s,i}$, B_i , S_i , Q_i , Ξ_i , V_i ($i = \overline{1, r}$).

Заметим также, так как j -е состояние нам неизвестно, то дополнительный вход $f_i(k)$ также будет неизвестным. Поэтому для построения оценки вектора состояния воспользуемся рекуррентным оценщиком, совпадающим по структуре с фильтром Калмана и вычисляющим оценку состояния $\hat{x}(k)$ при наличии в модели объекта неизвестного входа [17–22]:

$$\hat{x}(k+1) = A_i \hat{x}(k) + \hat{f}_i(k) + K_i(k)(y(k+1) - S_i(A_i \hat{x}(k) + \hat{f}_i(k))), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (6)$$

где $K_i(k)$ ($i = \overline{1, r}$) – матрица коэффициентов передачи фильтра. При этом мы воспользуемся принципом разделения, который означает, что сначала мы построим оценки вектора $\hat{x}(k)$ в предположении, что вектор $f_i(k)$ известен, затем строятся оценки вектора $\hat{f}_i(k)$ в предположении, что оценка вектора состояния $\hat{x}(k)$ известна.

Матрицы $K_i(k)$ определяются на основе минимизации критерия (4). Запишем критерий (4) в виде суммы:

$$J(0, T, i) = \sum_{k=0}^T \text{tr } N_i(k)H, \quad (8)$$

где tr – след квадратичной матрицы, матрица $N_i(k) = M\{e(k)e(k)^T / \gamma = \gamma_i\}$ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} N_i(k+1) = & (A_i - K_i(k)S_i A_i) \left(\sum_{j=1}^r p_{i,j} N_j(k) \right) (A_i - K_i(k)S_i A_i)^T + K_i(k) V_i K_i(k)^T + \\ & + (E - K_i(k)S_i) \left[\sum_{s=1}^m A_{s,i} \left(\sum_{j=1}^r p_{i,j} N_j(k) \right) A_{s,i}^T + \sum_{s=1}^m A_{s,i} \hat{x}(k) \hat{x}(k)^T A_{s,i}^T + Q_i \right] (E - K_i(k)S_i)^T, \quad N_i(0) = N_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где E – единичная матрица соответствующей размерности.

Введем функцию Ляпунова следующего вида:

$$W(k, N_i(k)) = \text{tr } N_i(k)H + \text{tr} \sum_{t=k}^T \bar{\Psi}_i(t) L_i(t), \quad (10)$$

где $\bar{\Psi}_i(t) = (E - K_i(k)S_i) \Xi_i (E - K_i(k)S_i)^T + K_i(t) V_i K_i(t)^T + \Psi_i(t)$ ($\Psi_i(t)$ – некоторые положительно определенные матрицы, $\Xi_i = \sum_{s=1}^m A_{s,i} \left(\sum_{j=1}^r p_{i,j} N_j(k) \right) A_{s,i}^T + \sum_{s=1}^m A_{s,i} \hat{x}(k) \hat{x}(k)^T A_{s,i}^T + Q_i$). Здесь предполагается, что в (10) матрицы $L_i(t)$ положительно определены и удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} L_i(t) = & (A_i - K_i(t)S_i A_i)^T \left(\sum_{j=1}^r p_{i,j} L_j(t+1) \right) (A_i - K_i(t)S_i A_i) + H + \\ & + (E - K_i(k)S_i)^T \left(\sum_{s=1}^m A_{s,i}^T \left(\sum_{j=1}^r p_{i,j} L_j(t+1) \right) A_{s,i} \right) (E - K_i(k)S_i), \quad L_i(T) = L_T, \end{aligned} \quad (11)$$

где L_T – некоторая положительно определенная матрица.

Суммируя по $k = t, T-1$ конечные разности функции $W(k, N_i(k))$ и учитывая формулу (11), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{T-1} \Delta W(k, N_i(k)) = & \sum_{k=t}^{T-1} [W(k+1, N_i(k+1)) - W(k, N_i(k))] = \\ = & \sum_{k=t}^{T-1} \text{tr} [N_i(k+1) L_i(k+1) - N_i(k) L_i(k) - \bar{\Psi}_i(k) L_i(k)]. \end{aligned} \quad (12)$$

С другой стороны, это выражение может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{T-1} \Delta W(k, N_i(k)) = & W(t+1, N_i(t+1)) - W(t, N_i(t)) + \dots + W(T, N_i(T)) - \\ & - W(T-1, N_i(T-1)) = \text{tr } N_i(T) L_T - \text{tr } N_i(t) L_i(t) - \text{tr} \sum_{k=t}^{T-1} \bar{\Psi}_i(k) L_i(k). \end{aligned} \quad (13)$$

Добавим к формуле (8) разность правых частей (12) и (13). В результате критерий (8) примет вид:

$$\begin{aligned} J(0, T, i) = & \sum_{k=0}^{T-1} \text{tr } N_i(k)H - \sum_{k=1}^{T-1} \text{tr } N_i(k) L_i(k) + \sum_{k=0}^{T-1} \text{tr} [(A_i - K_i(k)S_i A_i) \left(\sum_{j=1}^r p_{i,j} N_j(k) \right) (A_i - K_i(k)S_i A_i)^T + \\ & + (E - K_i(k)S_i) \Xi_i (E - K_i(k)S_i)^T + K_i(k) V_i K_i(k)^T] L_i(k+1). \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя правила матричного дифференцирования функции tr [23], вычислим производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(0, T, i)}{\partial K_i(k)} = & \frac{\partial}{\partial K_i(k)} \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} \text{tr } N_i(k)H - \sum_{k=1}^{T-1} \text{tr } N_i(k) L_i(k) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{T-1} \text{tr} [(A_i - K_i(k)S_i A_i) \left(\sum_{j=1}^r p_{i,j} N_j(k) \right) (A_i - K_i(k)S_i A_i)^T + (E - K_i(k)S_i) \Xi_i (E - K_i(k)S_i)^T + \right. \end{aligned}$$

$$+K_i(k)V_iK_i(k)^T]L_i(k+1)\} = \sum_{k=0}^{T-1} 2[-L_i(k+1)A_i(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j(k))A_i^T S_i^T + L_i(k+1)K_i(k)S_iA_i \times \\ \times (\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j(k))A_i^T S_i^T - L_i(k+1)S_i\Xi_i S_i^T + L_i(k+1)K_i(k)S_i\Xi_i S_i^T + L_i(k+1)K_i(k)V_i]. \quad (15)$$

Приравнявая эту производную к нулю, получаем формулу для определения матриц $K_i(k)$ ($i = \overline{1, r}$):

$$K_i(k) = (A_i(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j(k))A_i^T S_i^T + \Xi_i S_i^T)[S_i A_i(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j(k))A_i^T S_i^T + S_i \Xi_i S_i^T + V_i]^{-1}. \quad (16)$$

Учитывая (12) и (13), можно показать, что конечная разность функции Ляпунова (10) определяется по формуле

$$\Delta W(k, N_i(k)) = W(k+1, N_i(k+1)) - W(k, N_i(k)) = \\ = \text{tr } N_i(k+1)H - \text{tr } N_i(k)H - \text{tr}[(E - K_i(k)S_i)\Xi_i(E - K_i(k)S_i)^T + K_i(k)V_iK_i(k)^T + \Psi_i(t)]L_i(k). \quad (17)$$

В силу того, что решения матричных разностных уравнений (9), (11) положительно определены, функция Ляпунова (10) будет положительной. Устойчивость по Ляпунову динамики фильтра гарантируется тем, что матрицу $\Psi_i(t)$ всегда можно задать так, чтобы выражение (17) стало отрицательным.

В стационарном случае матрицы переноса K_i будут постоянными и определяются из следующих матричных алгебраических уравнений:

$$N_i = (A_i - K_i S_i A_i)(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j)(A_i - K_i S_i A_i)^T + \\ + (E - K_i S_i)[\sum_{s=1}^m A_{s,i}(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j)A_{s,i}^T + \sum_{s=1}^m A_{s,i}\hat{x}\hat{x}^T A_{s,i}^T + Q_i](E - K_i S_i)^T + K_i V_i K_i^T, \quad (18)$$

$$K_i = (A_i(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j)A_i^T S_i^T + [\sum_{s=1}^m A_{s,i}(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j)A_{s,i}^T + \sum_{s=1}^m A_{s,i}\hat{x}\hat{x}^T A_{s,i}^T + Q_i]S_i^T) \times \\ \times [S_i A_i(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j)A_i^T S_i^T + S_i [\sum_{s=1}^m A_{s,i}(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j)A_{s,i}^T + \sum_{s=1}^m A_{s,i}\hat{x}\hat{x}^T A_{s,i}^T + Q_i]S_i^T + V_i]^{-1}. \quad (19)$$

Отметим, что если существуют положительно определенные решения N_i ($i = \overline{1, r}$) матричного уравнения (18), то из условия $(E - K_i S_i)[\sum_{s=1}^m A_{s,i}(\sum_{j=1}^r p_{i,j}N_j)A_{s,i}^T + \sum_{s=1}^m A_{s,i}\hat{x}\hat{x}^T A_{s,i}^T + Q_i](E - K_i S_i)^T + K_i V_i K_i^T > 0$ следует справедливость теоремы 1.6 [24], а это означает устойчивость стационарного фильтра:

$$\hat{x}(k+1) = A_i \hat{x}(k) + \hat{f}_i(k) + K_i(y(k+1) - S_i(A_i \hat{x}(k) + \hat{f}_i(k))), \hat{x}(0) = \bar{x}_0. \quad (20)$$

В качестве алгоритма оценки неизвестного входа мы будем использовать МНК-оценки; в этом случае оценка может быть построена на основе минимизации дополнительного критерия [17] в предположении, что значение скачкообразного параметра известно (здесь предполагается, что $\gamma = \gamma_i$):

$$J^{<LMS>}(f_i(k)) = \sum_{t=1}^{k+1} \left\{ \|y(t) - S_i(A_i \hat{x}(t-1) + B_i u(t-1) + f_i(t-1))\|_{\bar{W}}^2 + \|f_i(t-1)\|_{\bar{W}}^2 \right\}, \quad (21)$$

где $\bar{W}, \bar{\bar{W}}$ – положительно определенные весовые матрицы.

Минимизируя (21), мы получаем оценки неизвестного входа:

$$\hat{f}_i(k) = (S_i^T \bar{W} S_i + \bar{\bar{W}})^{-1} S_i^T \bar{W} [y(k+1) - S_i(A_i \hat{x}(k) + B_i u(k))]. \quad (22)$$

3. Оценка скачкообразного параметра

Из (6) видно, что дополнительный вход в модели (5) будет отсутствовать, если состояние скачкообразного параметра идентифицировано правильно, т.е. $j = i$. Поэтому предлагается алгоритм оценивания параметра $\gamma(k)$ строить на основе определения номера i по оценке (22), для которой

евклидова норма минимальна. Отметим, что для повышения точности определения значения оценки скачкообразного параметра $\hat{\gamma}(k)$ предлагается использовать предварительное экспоненциальное сглаживание значения нормы $\|\hat{f}_i(k)\|$.

Значение параметра определяется по следующему алгоритму:

- 1) вычисляется норма оценки неизвестного вектора $\psi(i, k) = \|\hat{f}_i(k)\|$ для всех $\gamma = \gamma_i$ ($i = \overline{1, r}$);
- 2) выполняется экспоненциальное сглаживание для значений $\psi(i, k)$

$$\psi_s(i, k+1) = \alpha \psi(i, k) + (1 - \alpha) \psi_s(i, k), \quad i = \overline{1, r}, \quad (23)$$

где α – коэффициент сглаживания;

3) для каждого момента времени k определяется значение i , для которого сглаженное значение нормы $\psi_s(i, k)$ минимально ($i = \arg \min \{\psi_s(i, k)\}$).

В качестве оценки $\hat{\gamma}(k)$ выбирается γ_i , у которого значение индекса i определено в п. 3 алгоритма.

4. Результаты моделирования

Рассмотрим задачу моделирования алгоритма фильтрации и диагностики для дискретной системы с мультипликативными возмущениями и тремя состояниями цепи $\gamma(k)$ ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 3$) со следующей матрицей вероятностей перехода:

$$[p_{i,j}] = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Моделирование выполнено на интервале времени $k \in [0, 400]$ для следующих исходных данных:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 \\ -0,05 & 0,94 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,05 \\ -0,02 & 0,45 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,12 \\ -0,04 & 0,62 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_2 = B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u(k) = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0,005 & 0 \\ 0 & 0,005 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,0005 \end{pmatrix},$$

$$W_1 = 1, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = S_2 = S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_1 = V_2 = V_3 = 0,01.$$

Оценки фильтрации рассчитываются по формулам (18)–(20), (22). Параметр $\gamma(k)$ оценивался с помощью алгоритма, описанного в разд. 3.

Результаты моделирования приведены на рис. 1–4, которые иллюстрируют качество оценивания и идентификации.

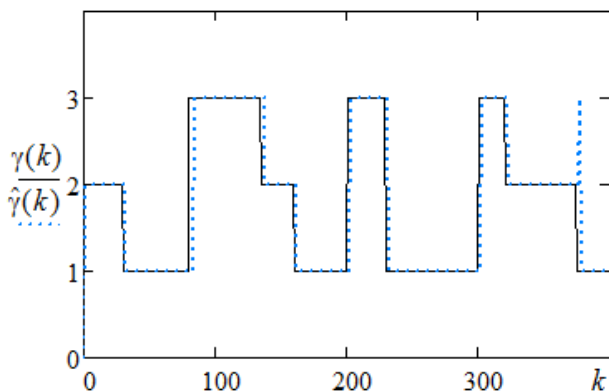


Рис. 1. Значения параметра $\gamma(k)$ и оценки $\hat{\gamma}(k)$

Fig. 1. Parameter value $\gamma(k)$ and estimate $\hat{\gamma}(k)$

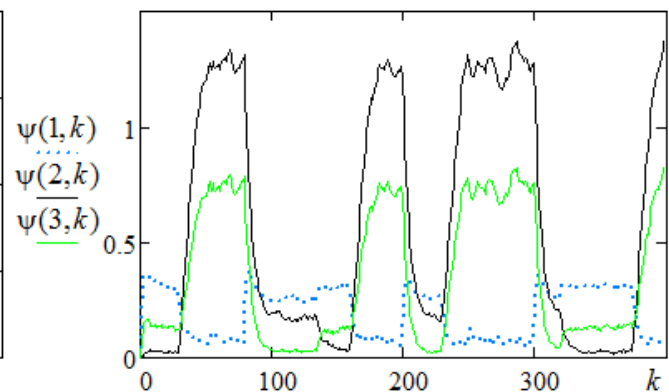


Рис. 2. Сглаженные величины норм $\psi(i, k)$ ($i = \overline{1, 3}$)

Fig. 2. Smoothed values of norms $\psi(i, k)$ ($i = \overline{1, 3}$)

На рис. 1 видно, что ошибки идентификации возникают в момент изменения значения параметра перехода. На рис. 2 показано, что минимальному значению нормы $\psi(i, k)$ соответствует номер i , который принимается за оценку скачкообразного параметра $\hat{\gamma}(k)$.

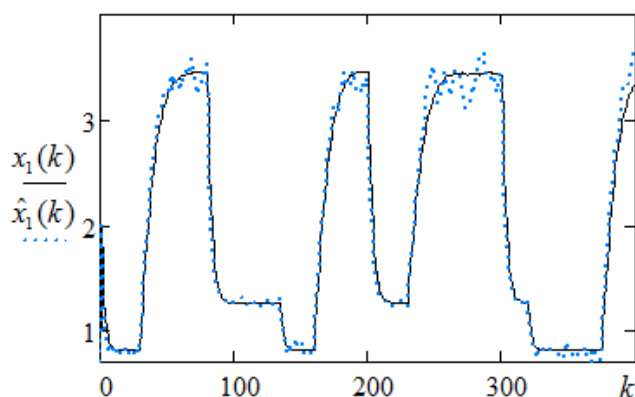


Рис. 3. Графики компоненты вектора состояния $x_1(k)$ и ее оценки $\hat{x}_1(k)$

Fig. 3. Graphs of the component of state vector $x_1(k)$ and its estimate $\hat{x}_1(k)$

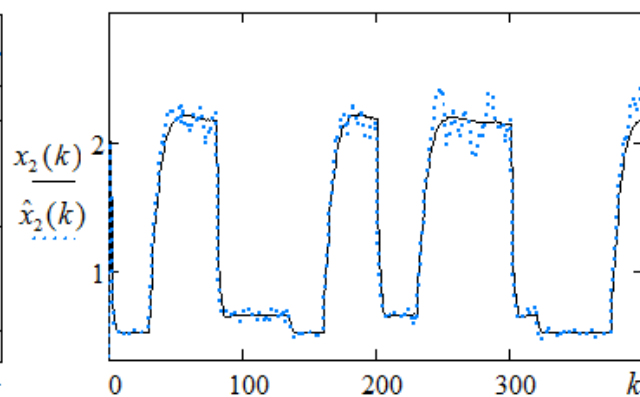


Рис. 4. Графики компоненты вектора состояния $x_2(k)$ и ее оценки $\hat{x}_2(k)$

Fig. 4. Graphs of the component of state vector $x_2(k)$ and its estimate $\hat{x}_2(k)$

С помощью метода статистического моделирования (для 100 реализаций) получили, что процент ошибочных оценок значений параметров $\gamma(k)$ составляет 5,75%.

Заключение

Получено решение задачи синтеза алгоритма фильтрации вектора состояния и идентификации значения скачкообразного параметра, входящего в описание линейной дискретной системы с аддитивными и мультипликативными возмущениями. Задача решена посредством интерпретации модели в виде модели системы с неизвестным входным вектором, который появляется при ошибке идентификации скачкообразного параметра. Значение оценки скачкообразного параметра предлагается определять из условия минимума сглаженной нормы оценки вектора неизвестного входа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ugrinovskii V.A., Pota H.R. Decentralized control of power systems via robust control of uncertain Markov jump parameter systems // *Int. J. Control.* 2005. V. 78. P. 662–677.
2. Sales-Setien E., Penarrocha-Alos I. Markovian jump system approach for the estimation and adaptive diagnosis of decreased power generation in wind farms // *Iet Control Theory and Applications*, 2019. V. 13, is. 18. P. 3006–3018.
3. Zhang H., Gray W.S., Gonzalez O.R. Performance analysis of recoverable flight control systems using hybrid dynamical models // *Proc. American Control Conf.* 2005 (ACC). Portland. Jun. 08–10. 2005. P. 2787–2792.
4. Zhu Y., Zhong Z., Zheng W.X. and etc. HMM-based H-infinity filtering for discrete-time Markov jump LPV systems over unreliable communication channels // *IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-Systems*. 2018. V. 48, is. 12. P. 2035–2046.
5. Wang J., Yao F., Shen H. Dissipativity-based state estimation for Markov jump discrete-time neural networks with unreliable communication links // *Neurocomputing*. 2014. V. 139/SI. P. 107–113.
6. Wang H., Wang C., Gao H., Wu L. An LMI approach to fault detection and isolation filter design for Markovian jump system with mode-dependent time-delays // *Proc. of the American Control Conf.*, Minneapolis, USA. 2006. P. 5686–5691.
7. Yao X., Wu L., Zheng W.X. Fault detection filter design for Markovian jump singular systems with intermittent measurements // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2011. V. 59/7. P. 3099–3109.
8. Gagliardi G., Casavola A., Famularo D.A. Fault detection and isolation filter design method for Markov jump linear parameter-varying systems // *Int. Journal of Adaptive Control and Signal. Processing*. 2012. V. 26, is. 3/SI. P. 241–257.
9. Домбровский В.В., Пашинская Т.Ю. Прогнозирующее управление системами с марковскими скачками и авторегрессионным мультипликативным шумом с марковским переключением режимов // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2018. № 44. С. 4–9.
10. Dombrovskij V.V., Pashinskaya T.Y. Design of model predictive control for constrained Markov jump linear systems with multiplicative noises and online portfolio selection // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2020. V. 30, No. 3. P. 1050–1070.
11. Costa O.L.V., Benites G.R.A.M. Linear minimum mean square filter for discrete-time linear systems with Markov jumps and multiplicative noises // *Automatica*. 2011. V. 47, No. 3. P. 466–476.

12. Liu W. On State Estimation of Discrete-Time Linear Systems with Multiplicative Noises and Markov Jumps // 32nd Chinese Control Conference. Xian, CHINA. JUL 26–28, 2013. P. 3744–3749.
13. Costa O.L.V., Benites G.R.A.M. Robust mode-independent filtering for discrete-time Markov jump linear systems with multiplicative noises // Int. J. of Control. 2013. V. 86, No. 5. P. 779–793.
14. Geng H., Wang Z., Liang Y. et al. State estimation for asynchronous sensor systems with Markov jumps and multiplicative noises // Information Sciences. 2017. V. 417. P. 1–19.
15. Смагин В.И., Поползухина Е.В. Синтез следящих систем управления для объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 271. С. 171–174.
16. Смагин В.И., Ломакина С.С. Робастные следящие регуляторы для непрерывных систем со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // Автоматика и вычислительная техника. 2004. № 4. С. 31–43.
17. Janczak D., Grishin Y. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cybernetics. 2006. V. 35/4. P. 851–862.
18. Gillijns S., Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // Automatica. 2007. V. 43. P. 111–116.
19. Смагин В.И., Смагин С.В. Фильтрация в линейных дискретных нестационарных системах с неизвестными возмущениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 3(16). С. 43–51.
20. Smagin V., Koshkin G., Udod V. State estimation for linear discrete-time systems with unknown input using nonparametric technique // ACSR-Advances in Computer Science Research. 2015. V. 18. P. 675–677.
21. Смагин В.И. Прогнозирование состояний дискретных систем при неизвестных входах с использованием компенсаций // Известия вузов. Физика. 2016. Т. 59, № 9. С. 162–167.
22. Kim K.S., Smagin V.I. Robust filtering for discrete systems with unknown inputs and jump parameters // Automatic Control and Computer Sciences. 2020. V. 54, No. 1. P. 1–9.
23. Athans M. The matrix minimum principle // Information and Control. 1968. V. 11. P. 592–606.
24. Li F., Shi P., Wu L. Control and filtering for semi-markovian jump systems. New York : Springer, 2016. 208 p.

Поступила в редакцию 8 ноября 2019 г.

Kim K.S., Smagin V.I. (2020) FILTRATION AND DIAGNOSTICS IN DISCRETE STOCHASTIC SYSTEMS WITH JUMP PARAMETERS AND MULTIPLICATIVE PERTURBATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 79–86

DOI: 10.17223/19988605/51/9

Let an model with multiplicative perturbations and jump parameters be described by the equation

$$x(k+1) = A_{\gamma(k)}x(k) + B_{\gamma(k)}u(k) + \sum_{s=1}^m A_{s,\gamma(k)}x(k)\theta_{s,\gamma(k)}(k) + q_{\gamma(k)}(k), \quad x(0) = x_0,$$

where $x(k) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $\gamma = \gamma(k)$ is the Markov chain with r states $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$; x_0 is a random vector (the variance $N_{0,i} = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T / \gamma = \gamma_i\}$, and the expectation $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$ are assumed to be known) $i = \overline{1, r}$; $A_{\gamma(k)}$, $B_{\gamma(k)}$, $A_{s,\gamma(k)}$ are the known matrices; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ is the known vector; $q_{\gamma(k)}(k)$, $\theta_{s,\gamma(k)}$ are the Gaussian random vector sequences with the following characteristics: $M\{q_{\gamma(k)}(k)\} = 0$, $M\{\theta_{\gamma(k)}(k)\} = 0$, $M\{q_{\gamma(k)}(k)q_{\gamma(k)}^T(j) / \gamma(\xi) = \gamma(k), k \leq \xi \leq j\} = Q_{\gamma(k)}\delta_{kj}$, $M\{\theta_{\gamma(k)}(k)\theta_{\gamma(k)}^T(j) / \gamma(\xi) = \gamma(k), k \leq \xi \leq j\} = \Theta_{\gamma(k)}\delta_{kj}$. The probabilities of states of a jump process $p_j(k) = P\{\gamma(k) = j\}$, $j = \overline{1, r}$ satisfy the equations

$$p_j(k+1) = \sum_{i=1}^r p_i(k)p_{i,j}, \quad p_j(0) = p_{j,0}, \quad j = \overline{1, r},$$

where $p_{i,j}$ is the probability of the transition from state i to state j .

The observation vector is determined by the formula

$$y(k) = S_{\gamma(k)}x(k) + v_{\gamma(k)}(k),$$

where $v_{\gamma(k)}(k)$ is the Gaussian random sequence ($M\{v_{\gamma(k)}(k)\} = 0$, $M\{v_{\gamma(k)}(k)v_{\gamma(k)}^T(j) / \gamma(\xi) = \gamma(k), k \leq \xi \leq j\} = V_{\gamma(k)}\delta_{kj}$).

The solution to the synthesis problem for filtering the state vector $\hat{x}(k)$ and identifying the value of the jump parameter $\hat{\gamma}(k)$ included in the description of a linear discrete system with additive and multiplicative perturbations is obtained. The problem is solved by introducing into the model of the system an unknown input vector that appears when the identification error of a jump parameter and the use of Kalman filtering with an unknown input.

Keywords: Kalman filtering; diagnostics of the Markov chain; multiplicative disturbances; unknown input.

KIM Konstantin Stanislavovich (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: kks93@rambler.ru

SMAGIN Valery Ivanovich (Doctor of Technical Science, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: vsm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Ugrinovskii, V.A. & Pota, H.R. (2005) Decentralized control of power systems via robust control of uncertain Markov jump parameter systems. *International Journal of Control*. 78. pp. 662–677. DOI: 10.1109/CDC.2004.1429255
2. Sales-Setien, E. & Penarrocha-Alos, I. (2019) Markovian jump system approach for the estimation and adaptive diagnosis of decreased power generation in wind farms. *Iet Control Theory and Applications*. 13(18). pp. 3006–3018. DOI: 10.1049/iet-cta.2018.6199
3. Zhang, H., Gray, W.S. & Gonzalez, O.R. (2005) Performance analysis of recoverable flight control systems using hybrid dynamical models. *Proc. American Control Conference 2005 (ACC)*. Portland. June 08–10. pp. 2787–2792. DOI: 10.1109/ACC.2005.1470391
4. Zhu, Y., Zhong, Z., Zheng, W.X. & et al. (2018) HMM-based H-infinity filtering for discrete-time Markov jump LPV systems over unreliable communication channels. *IEEE Trans. on Systems Man Cybernetics-Systems*. 48(12). pp. 2035–2046. DOI: 10.1109/TSMC.2017.2723038
5. Wang, J., Yao, F. & Shen, H. (2014) Dissipativity-based state estimation for Markov jump discrete-time neural networks with unreliable communication links. *Neurocomputing*. 139/SI. pp. 107–113. DOI: 10.1016/j.neucom.2014.02.055
6. Wang, H., Wang, C., Gao, H. & Wu, L. (2006) An LMI approach to fault detection and isolation filter design for Markovian jump system with mode-dependent time-delays. *Proc. of the American Control Conf.* Minneapolis, USA. pp. 5686–5691. DOI: 10.1109/ACC.2006.1657631
7. Yao, X., Wu, L. & Zheng, W.X. (2011) Fault detection filter design for Markovian jump singular systems with intermittent measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 59/7. pp. 3099–3109. DOI: 10.1109/TSP.2011.2141666
8. Gagliardi, G., Casavola, A. & Famularo, D.A. (2012) A fault detection and isolation filter design method for Markov jump linear parameter-varying systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 26(3/ SI). pp. 241–257. DOI: 10.1002/acs.1261
9. Dombrovskii, V.V. & Pashinskaya, T.Yu. (2018) Predictive control for markov jump systems with markov switching autoregressive multiplicative noise. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo univer-siteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 44. pp. 4–9. DOI: 10.17223/19988605/44/1
10. Dombrovskii, V.V. & Pashinskaya, T.Y. (2020) Design of model predictive control for constrained Markov jump linear systems with multiplicative noises and online portfolio selection. *International Journal of Robust Nonlinear Control*. 30(3). pp. 1050–1070. DOI: 10.1002/rnc.4807
11. Costa, O.L.V. & Benites, G.R.A.M. (2011) Linear minimum mean square filter for discrete-time linear systems with Markov jumps and multiplicative noises. *Automatica*. 47(3). pp. 466–476. DOI: 10.1016/j.automatica.2011.01.015
12. Liu, W. (2013) On State Estimation of Discrete-Time Linear Systems with Multiplicative Noises and Markov Jumps. *32nd Chinese Control Conference*. Xian, China. JUL 26–28. pp. 3744–3749.
13. Costa, O.L.V. & Benites, G.R.A.M. (2013) Robust mode-independent filtering for discrete-time Markov jump linear systems with multiplicative noises. *International Journal of Control*. 86(5). pp. 779–793. DOI: 10.1080/00207179.2012.760047
14. Geng, H., Wang, Z., Liang, Y. et al. (2017) State estimation for asynchronous sensor systems with Markov jumps and multiplicative noises. *Information Sciences*. 417. pp. 1–19. DOI: 10.1016/j.ins.2017.07.001
15. Smagin, V.I. & Popolzukhina, E.V. (2000) Synthesis of tracking control systems for objects with random jump parameters and multiplicative perturbations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 271. pp. 171–174.
16. Smagin, V.I. & Lomakina, S.S. (2004) Robastnye sledyashchie regulatory dlya nepreryvnykh sistem so sluchaynymi skachkoobraznymi parametrami i mul'tiplikativnymi vozmushcheniyami [Robust tracking controllers for continuous systems with random jump parameters and multiplicative perturbations]. *Automatic Control and Computer Sciences*. 4. pp. 31–43.
17. Janczak, D. & Grishin, Y. (2006) State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 35/4 pp. 851–862.
18. Gillijns, S. & Moor, B. (2007) Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*. 43. pp. 111–116. DOI: 10.1016/j.automatica.2006.11.016
19. Smagin, V.I. & Smagin, S.V. (2011) Filtering for linear not stationary discrete system with unknown disturbances. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(16). pp. 43–51.
20. Smagin, V., Koshkin, G. & Udod, V. (2015) State estimation for linear discrete-time systems with unknown input using nonparametric technique. *ACSR-Advances in Computer Science Research*. 18. pp. 675–677. DOI: 10.2991/cisia-15.2015
21. Smagin, V.I. (2017) Prediction of states of discrete systems with unknown input of the model using compensation. *Russian Physics Journal*. 59(9). pp. 1507–1514. DOI: 10.1007/s11182-017-0937-6
22. Kim, K.S. & Smagin, V.I. (2020) Robust filtering for discrete systems with unknown inputs and jump parameters. *Automatic Control and Computer Sciences*. 54(1). pp. 1–9. DOI: 10.3103/S014641162001006X
23. Athans, M. (1968) The matrix minimum principle. *Information and Control*. 11. pp. 592–606. DOI: 10.1016/S0019-9958(67)90803-0
24. Li, F., Shi, P. & Wu, L. (2016) *Control and filtering for semi-markovian jump systems*. New York: Springer.

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/51/10

Л.А. Нежелская, А.А. Першина

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ОБОБЩЕННОМ АСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается обобщенный асинхронный поток событий (обобщенный ММРР-поток), являющийся пространственной математической моделью потока элементарных частиц, информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий. Функционирование потока рассматривается в условиях случайного непродлевающегося мертвого времени, распределенного по равномерному закону на отрезке $[0, T^*]$. Рассматривается особый случай, когда на параметры потока накладываются ограничения: $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2, p = 1$. Производится оценивание параметра T^* мертвого времени методом моментов. Приводятся результаты статистических экспериментов.

Ключевые слова: обобщенный асинхронный поток событий; непродлевающееся случайное мертвое время; оценка параметра; метод моментов.

В связи с интенсивным развитием сетей связи модель простейшего потока событий перестала быть адекватной реальным информационным потокам. Требования практики послужили стимулом к рассмотрению дважды стохастических потоков [1–14] в качестве математической модели реальных потоков событий в телекоммуникационных сетях.

Большинство авторов рассматривают математические модели потоков событий, когда события потока доступны наблюдению. В реальности же зарегистрированное событие создает период мертвого времени [15], в течение которого другие события потока становятся ненаблюдаемыми. При этом, чтобы оценить потери событий потока, необходимо оценить значение длительности мертвого времени. Период ненаблюдаемости потока может продолжаться некоторое фиксированное время, а также может быть случайным. Задачи по оценке параметров и состояний потока событий в условиях мертвого времени фиксированной длительности рассматривались в работах [16–23]. При этом в [16, 18, 20–23] получены результаты для непродлевающегося мертвого времени, в [17, 19] – для продлевающегося.

Достаточно открытым остается вопрос изучения потоков событий, когда мертвое время является случайной величиной. Здесь отметим работу [24], в которой решается задача оценки параметров асинхронного потока событий в условиях случайного мертвого времени, работу [25], в которой решается задача оценки параметра распределения непродлевающегося случайного мертвого времени в пуассоновском потоке, и работу [26], в которой находятся формулы для начальных моментов общего периода ненаблюдаемости в пуассоновском потоке событий при продлеваемом случайном мертвом времени.

В настоящей статье рассматривается обобщенный асинхронный поток событий (обобщенный ММРР-поток) в условиях непродлевающегося случайного мертвого времени, распределенного по равномерному закону, когда на параметры потока накладываются ограничения: $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2, p = 1$ (особый случай). Методом моментов находится оценка параметра равномерного распределения, приводятся результаты статистических экспериментов.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий, сопровождающий процесс которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i , $i = 1, 2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$) дополнительное событие во втором состоянии. Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$) дополнительное событие в первом состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый (принципиально ненаблюдаемый) марковский процесс. После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мертвого времени случайной длительности, и другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мертвого времени (периода ненаблюдаемости), недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Принимается, что случайная длительность мертвого времени распределена по равномерному закону с плотностью $p(T) = 1/T^*$, $0 \leq T \leq T^*$.

Рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока. Необходимо в момент времени t на основании выборки $t_1, t_2, \dots, t_n$ наблюдаемых на полуинтервале $(t_0, t]$ моментов наступления событий оценить методом моментов параметр T^* . В настоящей работе рассматривается особый случай, когда на параметры потока накладываются ограничения: $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = 1$.

Заметим, что задача оценки параметра T^* методом моментов без указанных ограничений на параметры потока решена в статье [27].

2. ММ-оценка параметра T^*

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k \geq 0$). Плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p_{T^*}(\tau_k) = p_{T^*}(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k , т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. В [20] получено выражение для плотности $p(\tau|T)$ в особом случае ($\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = 1$), когда длительность мертвого времени является детерминированной величиной:

$$p(\tau|T) = 0, 0 \leq \tau < T, \quad p(\tau|T) = \{\lambda_1 + \alpha_1 - \alpha_2(1-q)[1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)]\pi_2(T)\} e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, \tau \geq T; \quad (1)$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}, \quad \pi_2(0|T) = (p_{12} + \delta\pi_2[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}]) / (1 - \delta e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}),$$

$$\delta = (\lambda_1\lambda_2 - q\alpha_1\alpha_2) / (\lambda_1 + \alpha_1)^2, \quad \pi_2 = \alpha_1 / (\alpha_1 + \alpha_2), \quad p_{12} = \alpha_1 / (\lambda_1 + \alpha_1).$$

Тогда плотность $p_{T^*}(\tau)$ примет вид (для упрощения индекс T^* опустим):

$$p(\tau) = \int_{(T)} p(T) p(\tau|T) dT = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^\tau p(T) p(\tau|T) dT, & 0 \leq \tau < T^*; \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T) p(\tau|T) dT, & \tau \geq T^*. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя в (2) выражение (1), учитывая, что $p(T) = 1/T^*$, находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \left[1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} \right] + \frac{1}{T^*} \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} (1-q) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} \left\{ [(\lambda_1 + \alpha_1)\tau - 1] J_1(\tau) + (\lambda_1 - \alpha_2) \left[\frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} - \tau \right] \times \right.$$

$$\times J_2(\tau) + \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} J_3(\tau) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} J_4(\tau) \Big\}, 0 \leq \tau < T^*; \quad (3)$$

$$p_2(\tau) = \frac{1}{T^*} e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} \left[e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)T^*} - 1 \right] + \frac{1}{T^*} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} (1 - q) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} \left\{ [(\lambda_1 + \alpha_1)\tau - 1] J_1(T^*) + (\lambda_1 - \alpha_2) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} - \tau \right] J_2(T^*) + \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} J_3(T^*) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} J_4(T^*) \right\}, \tau \geq T^*, \quad (4)$$

где

$$J_s(z) = \int_{\varphi(z)}^1 f_s(x) dx, \quad s = \overline{1, 4}, \quad \varphi(z) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)z}, \quad z = \tau \text{ либо } z = T^*;$$

$$f_1(x) = 1/(1 - \delta x) x^{\left(1 + \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)}, \quad f_2(x) = 1/(1 - \delta x) x^{\left(\frac{\lambda_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)}, \quad f_3(x) = (\ln x)/(1 - \delta x) x^{\left(1 + \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)}, \\ f_4(x) = (\ln x)/(1 - \delta x) x^{\left(\frac{\lambda_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)}, \quad 1 - \delta x > 0 \text{ для } x \in [0, 1].$$

В точке $\tau = T^*$ имеем: 1) $p_1(T^*) = p_2(T^*)$, 2) $p_1'(T^*) \neq p_2'(T^*)$, – т.е. плотность $p(\tau)$ в точке $\tau = T^*$ непрерывна, но имеет излом.

Подчеркнем, что обобщенный асинхронный поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося случайного времени, при $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = 1$ является коррелированным потоком.

Получим оценку параметра T^* методом моментов [28]. Математическое ожидание длительности τ интервала между соседними событиями наблюдаемого потока есть

$$M(\tau | T^*) = \int_0^\infty \tau p(\tau) d\tau = \int_0^{T^*} \tau p_1(\tau) d\tau + \int_{T^*}^\infty \tau p_2(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражения (3), (4), получаем

$$M(\tau | T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (1 - q)}{T^* (\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left\{ \int_0^{T^*} \tau [(\lambda_1 + \alpha_1)\tau - 1] \left[J_1(\tau) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_1} J_2(\tau) \right] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} d\tau + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \int_0^{T^*} \tau \left[J_3(\tau) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_1} J_4(\tau) \right] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} d\tau + e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)T^*} \left[(T^*)^2 + \frac{T^*}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{1}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[J_1(T^*) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_1} J_2(T^*) \right] + \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(T^* + \frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} \right) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)T^*} \left[J_3(T^*) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_1} J_4(T^*) \right] \right\},$$

где $J_s(\tau)$, $J_s(T^*)$ определены в (4), $s = \overline{1, 4}$.

Оценка $\hat{T}^*$ находится численно из уравнения моментов $M(\tau | T^*) = C_1$, $C_1 = (1/n) \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k)$; значение C_1 находится путем имитационного моделирования наблюдаемого потока. Можно показать, что $(dM(\tau | T^*)/dT^*) > 0$, $0 \leq T^* < \infty$. Последнее означает, что $M(\tau | T^*)$ – возрастающая функция переменной T^* . Отсюда следует, что уравнение моментов имеет единственное решение.

Особый случай $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $q = 1$ симметричен рассмотренному: нужно только в формуле для $M(\tau | T^*)$ заменить q на p . Наконец, особый случай $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = q = 1$ приводит к формуле $\hat{T}^* = 2[C_1 - 1/(\lambda_1 + \alpha_1)]$.

3. Результаты статистических экспериментов

С целью установления качества получаемых методом моментов оценок параметра T^* поставлены статистические эксперименты.

Первый статистический эксперимент (установление стационарного режима). Отдельный j -й эксперимент ($j = 1, \dots, N$) заключается в следующем:

1) при заданных значениях параметра потока λ_i , $i = 1, 2$, $\alpha_1, \alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1$, $p = 1$, q , T^* , Tm осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока; выходом имитационной модели в отдельном j -м эксперименте является последовательность значений $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$;

2) численно решается уравнение $M(\tau | T^*) = C_1$, т.е. находится оценка $\hat{T}_j^*$;

3) осуществляется повторение N раз шагов 1, 2.

Результатом алгоритма является выборка $(\hat{T}_1^*, \dots, \hat{T}_N^*)$, на основании которой вычисляются

$$\hat{M}(\hat{T}^*) = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{T}_j^*, \quad \hat{V}(\hat{T}^*) = (1/N) \sum_{j=1}^N [\hat{T}_j^* - T^*]^2.$$

T^* – известное из имитационной модели значение параметра.

При проведении статистического эксперимента выбраны следующие параметры имитационной модели: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 1,5$, $p = 1$, $q = 0,5$, $T^* = 1$. В табл. 1 приведены результаты эксперимента ($N = 100$).

Таблица 1

Первый статистический эксперимент при $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 1,5$, $p = 1$, $q = 0,5$, $T^* = 1$

Tm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0,9966	1,0038	0,9997	0,9978	0,9978	0,9977	0,9993	0,9991	0,9992	0,9997
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,0055	0,0025	0,0029	0,0013	0,0011	0,0011	0,0008	0,0007	0,0008	0,0004

Второй статистический эксперимент (исследование влияния параметра T^* на качество оценок). Второй статистический эксперимент организован аналогично первому и поставлен при фиксированном времени моделирования $Tm = 500$, которое соответствует (см. табл. 1) времени установления стационарного режима, и при тех же значениях параметров потока, что и первый статистический эксперимент, за исключением значений T^* . Сначала второй статистический эксперимент реализуется для $T^* = 1$, затем для $T^* = 2$, ..., затем для $T^* = 5$. В табл. 2 приведены результаты второго статистического эксперимента ($N = 100$, $Tm = 500$).

Таблица 2

Результаты второго статистического эксперимента

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0,9950	2,0025	2,9825	3,9700	5,0143
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,0153	0,0155	0,0348	0,0352	0,0576

Анализ численных результатов показывает, что в смысле введенного критерия $\hat{V}(\hat{T}^*)$ увеличение параметра T^* отрицательно сказывается на качестве оценок $\hat{T}^*$, что является вполне естественным: увеличение параметра T^* приводит к увеличению числа потерянных событий исходного потока.

Заключение

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

- 1) аналитически показано, что уравнение моментов имеет единственное решение;
- 2) результаты имитационного моделирования показывают, что качество оценок в смысле введенного критерия (выборочная вариация оценки $\hat{T}^*$) вполне удовлетворительное; при этом смещение оценок $\hat{T}^*$ относительно истинного значения параметра T^* , как это видно из результатов второго статистического эксперимента, не превышает сотых долей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.

2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
3. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16, No. 4. P. 764–779.
4. Lucantoni D.M. New results on single server with a bath Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7, No. 1. P. 1–46.
5. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady – state distributions for the MAP|SM|1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10, No. 3. P. 575–598.
6. Дудин А.Н., Клименок В.Н., Царенков Г.В. Расчет характеристик однолинейной системы обслуживания с групповым марковским потоком, полумарковским обслуживанием и конечным буфером // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. С. 8–101.
7. Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова Н.А. Новый этап развития математической теории телетрафика // Автоматика и телемеханика. 2009. № 12. С. 16–28.
8. Basharin G.P., Gaidamaka Y.V., Samouylov K.E. Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, No. 2. P. 62–69.
9. Вишневский В.М., Ляхов А.И. Оценка пропускной способности локальной беспроводной сети при высокой нагрузке и помехах // Автоматика и телемеханика. 2001. № 8. С. 8–96.
10. Vishnevsky V.M., Larionov A.A., Smolnikov R.V. Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes // Distributed Computer and Communications Networks: Control, Computation, Communications : proc. of the eighteenth Int. Scientific Conf. (DCCN–2015) (Moscow, 19–22 October 2015). M. : ICS RAS, 2015. P. 27–35.
11. Вишневский В.М., Ларионов А.А. Открытая сеть массового обслуживания с коррелированными входными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016) : материалы XV Междунар. конф. Катунь, 12–16 сентября 2016. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 1. С. 36–50.
12. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
13. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Теория телетрафика мультисервисных сетей. М. : Изд-во РУДН, 2007. 191 с.
14. Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи. М. : Изд-во РУДН, 2008. 72 с.
15. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
16. Gortsev A.M., Klimov I.S. An estimate for intensity of Poisson flow of events under the condition of its partial missing // Radiotekhnika. 1991. No. 12. P. 3–7.
17. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow // Radiotekhnika. 1996. No. 2. P. 8–11.
18. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
19. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
20. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
21. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated map event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. V. 487. P. 342–350.
22. Nezhelskaya L.A. Probability density function for modulated map event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Sciences. V. 564. P. 141–151.
23. Nezhelskaya L.A. Conditions for recurrence of a flow of physical events with unextendable dead time period // Russian Physics Journal. 2016. V. 58, No. 12. P. 1859–1867.
24. Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 9–13.
25. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценивание параметра непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 40. С. 32–40.
26. Глухова Е.В., Терпугов А.Ф. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий при наличии продлевающегося мертвого времени // Известия вузов. Физика. 1995. Т. 38, № 3. С. 22–31.
27. Нежелская Л.А., Першина А.А. Оценивание параметра непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в обобщенном асинхронном потоке событий // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2019) : материалы XVIII междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. Томск : Изд-во НТЛ, 2019. Ч. 2. С. 352–357.
28. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.

Поступила в редакцию 6 сентября 2019 г.

Nezhel'skaya L.A., Pershina A.A. (2020) ESTIMATION OF THE UNIFORM DISTRIBUTION PARAMETER OF UNEXTENDABLE DEAD TIME DURATION IN A GENERALIZED ASYNCHRONOUS FLOW OF EVENTS IN SPECIAL CASE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 87–93

DOI: 10.17223/19988605/51/10

We consider a generalized asynchronous flow of events (a generalized MMPP flow), which is a common mathematical model of a flow of elementary particles, information flows of applications operating in telecommunication and information-computer communication networks, and belongs to the class of doubly stochastic flows of events. The functioning of the flow is considered under the conditions of a random unextendable dead time distributed according to the uniform law on the interval $[0, T^*]$. A special case is considered when restrictions are imposed on the flow parameters: $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = 1$. The dead time parameter T^* is estimated using the moment method. The results of statistical experiments are presented.

The mathematical expectation of the duration τ of the interval between adjacent events of the observed flow is given by the formula

$$M(\tau | T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (1 - q)}{T^* (\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left\{ \int_0^{T^*} \tau [\tau (\lambda_1 + \alpha_1) - 1] \left[J_1(\tau) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_1} J_2(\tau) \right] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} d\tau + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \int_0^{T^*} \tau \left[J_3(\tau) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_1} J_4(\tau) \right] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} d\tau + e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)T^*} \left[(T^*)^2 + \frac{T^*}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{1}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[J_1(T^*) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_1} J_2(T^*) \right] + \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(T^* + \frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} \right) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)T^*} \left[J_3(T^*) - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_1} J_4(T^*) \right] \right\},$$

The estimate $\hat{T}^*$ is found numerically from the equation of moments $M(\tau | T^*) = C_1$, $C_1 = (1/n) \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k)$; the value C_1 is found by simulating the observed flow. An analysis of the numerical results shows that, in the sense of the introduced criterion, an increase in the parameter T^* negatively affects the quality of the estimates, which is quite natural: an increase in the parameter T^* leads to an increase in the number of lost events in the initial stream.

Based on the results of the study, the following conclusions can be drawn: 1) it is analytically shown that the equation of moments has a unique solution; 2) the results of simulation modeling show that the quality of the estimates in the sense of the introduced criterion (sampling variance of the estimate $\hat{T}^*$) is quite satisfactory; in this case, the bias of the estimates relative to the true value of the parameter T^* does not exceed hundredth values.

Keywords: generalized asynchronous flow of events; unextendable random dead time; parameter estimation; method of moments.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Applied Mathematics Department of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation). E-mail: ludne@mail.tsu.ru

PERSHINA Anna Alexandrovna (Post-graduate Student of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation). E-mail: diana1323@mail.ru

REFERENCES

1. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication network]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication network]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. pp. 55–61.
3. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
4. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
5. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 10(3). pp. 575–598. DOI: 10.1080/15326349408807311
6. Dudin, A.N., Klimenok, V.N. & Tsarenkov, G.V. (2002) Calculation of the characteristics of a single-line service system with a group Markov flow, semi-Markov service, and a finite buffer. *Automation and Remote Control*. 8. pp. 87–101.
7. Basharin, G.P., Samouylov, K.E., Yarkina, N.V. & Gudkova, N.A. (2009) A new stage in the development of the mathematical theory of teletraffic. *Automation and Remote Control*. 12. pp. 16–28. DOI: 10.1134/S0005117909120030

8. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
9. Vishnevsky, V.M. & Lyakhov A.I. (2001) Estimation of the throughput of a local wireless network under high load and interference. *Automation and Remote Control*. 8. pp. 81–96.
10. Vishnevsky, V.M., Larionov, A.A. & Smolnikov, R.V. (2015) Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes. *Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. Proc. of the 18th International Conference (DCCN-2015)*. Moscow, October 19–22, 2015. Moscow: ICS RAS. pp. 27–35.
11. Vishnevsky, V.M. & Larionov, A.A. (2016) [Open queueing network with correlated input flows for estimating the performance of broadband wireless networks]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2016)* [Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM 2016)]. Proc. of the 15th International Conference. September 12–16, 2016. Tomsk. pp. 36–50.
12. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i pri-menenie v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
13. Naumov, V.A., Samouylov, K.E. & Yarkina, N.V. (2007) *Teoriya teletrafika mul'tiservisnykh setey* [Teletraffic Theory of Multi-service Networks]. Moscow: PFUR.
14. Gaidamaka, Yu.V., Zaripova, E.R. & Samouylov, K.E. (2008) *Modeli obsluzhivaniya vyzovov v seti sotovoy podvizhnoy svyazi*. [Call Service Models in Cellular Mobile Network]. Moscow: PFUR.
15. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
16. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) An estimate for intensity of Poisson flow of events under the condition of its partial missing. *Radiotekhnika*. 12. pp. 3–7.
17. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radio-tekhnika*. 1996. No. 2. pp. 8–11.
18. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536–545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
19. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semisynchronous twice stochastic flow of events with prolonged dead time. *Computational Technologies*. 13(1). pp. 31–41.
20. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized asynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14–25.
21. Nezhelskaya, L.A. (2014) Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. In: Dudin A., Nazarov A., Yakupov R., Gortsev A. (eds) *Information Technologies and Mathematical Modelling. ITMM 2014. Communications in Computer and Information Science*. Vol. 487. Springer, Cham. pp. 342–350. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_39
22. Nezhelskaya, L.A. (2015) Probability density function for modulated map event flows with unextendable dead time. In: Dudin A., Nazarov A., Yakupov R., Gortsev A. (eds) *Information Technologies and Mathematical Modelling: Queueing Theory and Applications*. Vol. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
23. Nezhelskaya, L.A. (2016) Conditions for recurrence of a flow of physical events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 58(12). pp. 1859–1867. DOI: 10.1007/s11182-016-0727-6
24. Vasilieva, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytii v usloviyakh prisutstviya mertvogo vremeni [The abstract of clause estimation of parameters twice-stochastic flow of events in conditions of presence of dead time]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1-1. pp. 9–13.
25. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (2017) Estimation of the parameter of unextendable dead time random duration in the Poisson flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 40. pp. 32–40. DOI: 10.17223/19988605/40/4
26. Glukhova, E.V. & Terpugov, A.F. (1995) Estimation of the intensity of the Poisson flow of events in the presence of prolonged dead time. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika*. 38(3). pp. 22–31.
27. Nezhelskaya, L.A. & Pershina, A.A. (2019) [Estimation of the unextendable dead time random duration parameter in a generalized asynchronous flow of events]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2019)* [Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2019): Proceedings of the 18th International Conference named after A.F. Terpugov]. Part 2. Tomsk: NTL. pp. 352–357.
28. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Tomsk: NTL.

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.652.8

DOI: 10.17223/19988605/51/11

А.М. Бабанов, А.В. Петров

ДЕКЛАРАТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ В ERM-МЕТАСХЕМЕ

Продолжено описание реализации ERM-репозитория и представлен альтернативный способ создания механизма, обеспечивающего непротиворечивость схем. Он заключается в расширении метасхемы ERM-модели за счет включения в нее условий непротиворечивости элементов схем. При таком декларативном подходе (в противоположность преимущественно процедурному подходу, реализованному в текущем прототипе репозитория) появление новых условий не будет сопровождаться программированием соответствующих проверок элементов репозитория, так как верификацию будет выполнять универсальная программа интерпретации метасхемы.

Ключевые слова: ERM-модель; непротиворечивость репозитория; схема данных; метасхема модели данных; разработка, управляемая моделями.

Современные системные методики проектирования схем баз данных (БД) предполагают в качестве языка первоначальной формализации описания предметной области (ПрО) ту или иную семантическую модель данных. Наряду с удобным и выразительным языком модели программные CASE-инструменты проектировщика (Computer Aided System Engineering – CASE) предоставляют также возможность автоматической генерации SQL-скрипта для создания БД в той или иной системе управления базами данных (СУБД).

Для информационного обеспечения этих задач такое CASE-средство использует репозиторий – хранилище всех аналитических и проектных артефактов разработки. Важной задачей, стоящей перед разработчиками репозитория, является обеспечение непротиворечивости всех хранящихся в нем схем.

Характерной чертой большинства информационных систем является преимущественно процедурный, алгоритмический способ удовлетворения функциональных требований. Более изящным и, главное, гибким является решение, основанное на принципах разработки, управляемой моделями (Model Driven Development – MDD) [1–5]. При таком подходе строится декларативная модель, описывающая требуемую функциональность, а универсальная программа на ее основе осуществляет необходимые действия. Изменение требований влечет за собой лишь коррекцию модели, в переписывании универсальных программ, реализующих модель, нет необходимости.

Первая реализация исследовательского прототипа репозитория ERM-модели [6, 7] выполнялась в основном традиционным способом. Исключение составляли, пожалуй, проверки, которые осуществляются реляционной СУБД на основании ограничений целостности репозитория, декларированных в его схеме.

Выразительная мощность ERM-модели [8] позволяет представить в метасхеме репозитория все условия непротиворечивости элементов ERM-схем. Это побудило исследователей ERM-модели попытаться реализовать механизм проверок схем на непротиворечивость в соответствии с MDD.

Такой подход обеспечит гибкость разработки и минимизацию программного кода и его изменения, что является немаловажным фактором эффективности в условиях постоянного совершенствования правил структуризации и задания ограничений целостности ERM-модели. Первым шагом на этом пути является расширение ERM-метасхемы соответствующими описаниями условий непротиворечивости. Вторым шагом будет реализация универсальной программы верификации.

1. Понятие метасхемы модели данных

Р. Велке [9–10] так определяет основные понятия, связанные с моделями репозитория:

«Метамодель – набор примитивов, каждый для описания отдельного типа предметов, которые могут быть представлены в любом репозитории, созданном в терминах этой метамодели. Например, если предположить использование в качестве метамодели ER-модели, такими примитивами будут “Сущность”, “Связь” и “Атрибут”. Другими словами, выбор метамодели диктует выбор категорий, в терминах которых будет описываться вся аналитическая и проектная информация о системе.

Каждая метамодель как набор примитивов или категорий ссылается на них, как на метатипы. Так, среди метатипов ER-метамодели есть такой, как “Сущность”. Метасхема утверждает, какие экземпляры метатипов и их взаимосвязи допустимы в конкретном репозитории с точки зрения метамодели. Таким образом, метамодель определяет язык метасхемы. Экземпляр метасхемы (где, например, определен такой экземпляр метатипа, как “Человек”) соответствует схеме обычных данных» [9. С. 3–4].

Репозиторий Oracle Designer (OD), как и любой другой репозиторий, имеет свою метасхему. Все структуры данных, находящиеся в репозитории, можно разделить на три основных метатипа, составляющих метамодель OD [6]:

- элементные типы,
- ассоциативные типы,
- текстовые типы.

Изначально в репозитории OD представлены метасхемы таких моделей, как реляционная модель данных, ER-модель данных в нотации Баркера, функциональные модели потоков данных и иерархий функций и некоторые другие. В ходе реализации прототипа ERM-репозитория на базе репозитория OD метасхема последнего была расширена метатипами структурных понятий ERM-модели [6].

2. ERM-метасхема на языке расширенной ER-модели

Как отмечалось в [8], ERM-модель отличается следующими особенностями: богатые выразительные способности, синонимия элементов схемы, возможность наличия в схеме одновременно нескольких представлений одних и тех же явлений предметной области. Богатство языка ERM-модели обеспечивают ее базовые понятия – классы и отображения (типы); объекты и экземпляры отображений (знаки). Однако для удобства проектирования в модель добавлены в качестве производных традиционные структурные понятия – сущность, связь, атрибут [Ibid.]. На рис. 1 представлена каркасная диаграмма ERM-метасхемы на языке расширенной ER-модели.

Данный вид метасхемы принято называть каркасным, потому что на нем представлены структурные понятия ERM-модели и их взаимосвязи. Также уже обозначены элементы метасхемы, с помощью которых будут определяться условия непротиворечивости схем данных – отношения между классами, отношения между отображениями, операции над классами и отображениями.

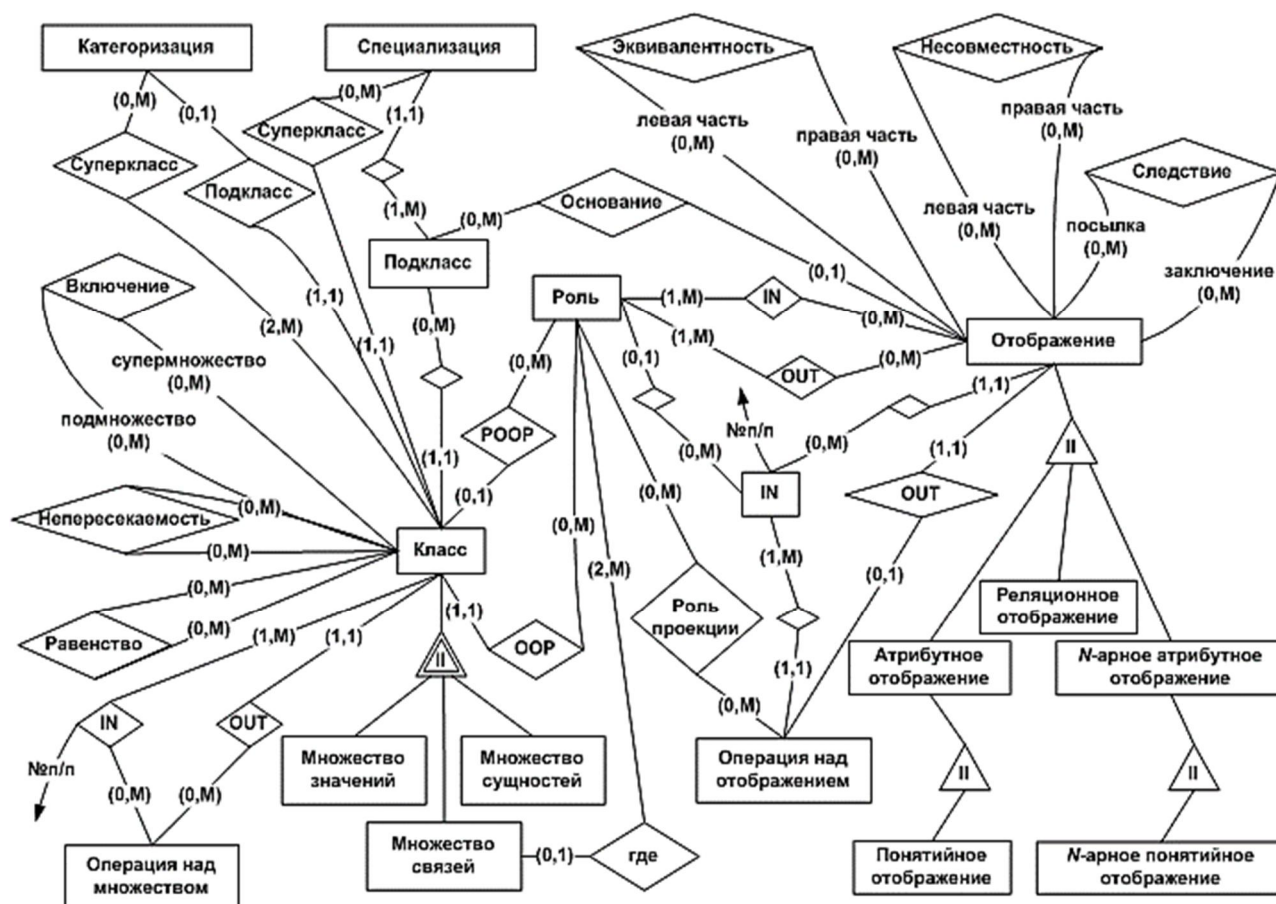


Рис. 1. Каркасная диаграмма метасхемы ERM-модели

Fig. 1. Skeleton diagram of the ERM model metaschema

Есть на каркасной диаграмме метасхемы и условия непротиворечивости, заданные в виде ограничений на максимальные и минимальные кардинальные числа отображений (пометки на дугах). К сожалению, язык ER-модели может передать только эти ограничения. Для определения всех остальных условий непротиворечивости необходимо переходить на более мощный язык отображений, т.е. использовать в качестве метамодели саму ERM-модель.

3. Уточнение используемого понятийного базиса

В технологии БД сложилась следующая терминологическая основа. Состояние ПрО описывают данные. В табличном представлении – это тела таблиц. Строки соответствуют объектам или связям, которые определяются значениями характеристик. Для образования из данных осмысленной информации используются их интерпретации – имена таблиц и столбцов. Эти интерпретации определяют структуру и семантику (смысл) данных. Вместе с ограничениями целостности, реализующими бизнес-правила ПрО, они составляют схему данных, которая первоначально (до ввода самих данных) передается СУБД.

Таким образом, конечная цель технологии БД – актуальные структурированные данные, описывающие объекты и связи между ними. Схема БД на уровне типов описывает представляющие интерес понятия о предметах и их кортежах, а также представляющие интерес признаки этих предметов. Для достижения указанной цели каждая СУБД предоставляет пользователям конкретную модель, которая состоит из правил построения схем (структур и ограничений целостности), а также операций над данными.

В репозиториях CASE-систем предметную область составляют сами схемы данных. Такие системы, как правило, создаются по технологии БД и представляют собой не что иное, как специали-

зированные системы БД. Элементы схем данных «обычных» ПрО (типы) превращаются в их БД (репозитории) в данные (знаки). Например, множество сущностей ЧЕЛОВЕК описывается строкой в таблице МНОЖЕСТВА СУЩНОСТЕЙ. Атрибут множества сущностей ЧЕЛОВЕК с именем Дата Рождения превращается в строку таблицы АТРИБУТЫ.

В зависимости от используемой метамодели (в примере фигурировали структурные понятия ER-модели Чена) схему репозитория (хранилища схем) будут составлять соответствующие понятиям именно этой модели структуры.

Что же собой представляют ограничения целостности этой схемы? Например, такое, как обязательность наличия ссылки на одно и только одно множество сущностей для каждой роли любого множества связей. С точки зрения данных репозитория – это действительно ограничение целостности. И если репозиторий реализован как реляционная БД, то это ограничение целостности декларативно определяется как обязательность (NOT NULL) значения внешнего ключа (FOREIGN KEY).

Для таких понятий предпочтительней использовать термин «условие непротиворечивости», потому как с точки зрения схемы ПрО это не что иное, как необходимое условие синтаксической корректности. И звучит оно, как грамматическое правило модели данных – «каждую роль множества связей может и должно играть одно и только одно множество сущностей».

4. Пополнение метасхемы ERM-модели дополнительными условиями непротиворечивости

Что касается метасхемы модели, в ней в идеале должны быть указаны все ограничения на допустимые схемы, которые метамодель может отразить. Тот факт, что ERM-модель позиционируется как одна из наиболее богатых по описательным возможностям, позволяет предполагать, что использование ее в качестве метамодели позволит отразить все дополнительные условия непротиворечивости схем.

Полную метасхему ERM-модели невозможно представить в виде одной диаграммы, это колоссально усложнило бы процесс ее восприятия. Взаимосвязи основных структурных понятий представлены на каркасной диаграмме (см. рис. 1). Для каждого условия непротиворечивости используется отдельная диаграмма. На ней показаны структурные понятия каркасной диаграммы, составляющие контекст условия, и те особые взаимосвязи, которые, собственно, и отражают его суть.

Для иллюстрации декларативных принципов задания условий непротиворечивости приведем несколько «простейших» таких диаграмм.

4.1. Проверка наличия у множества связей не менее двух ролей, которые играют исключительно сущности

На каркасной диаграмме метасхемы зафиксирована обязательность наличия у множества связей не менее двух ролей (минимальное кардинальное число, равное двум, на ребре между множеством сущностей «Роль» и множеством связей «где»). Однако то, к каким именно типам классов они должны относиться, не уточняется. Между тем под множеством связей в ERM-модели понимается такая же структура, как и в ER-модели. И вступать в связи могут только сущности. Следовательно, играть роли множеств связей могут только элементы множеств сущностей. Данное условие задается схемой, показанной на рис. 2.

Реляционное отображение «роль множества связей» позволяет перейти к ролям, связанным с множеством связей. Реляционное отображение «класс роли» позволяет получить класс роли в связи «ООР». Соответственно, результатом композиции этих двух отображений будет отображение, позволяющее перейти от множества связей непосредственно к классам, элементы которых играют роли этого множества связей.

Отображение «тип класса» – частичное функциональное (так как класс может быть неспециализирован). Отсюда следует, что композиция отображения, являющегося результатом объединения отображений «операнд операции» и «результат операции», и отображения «тип класса» также должна быть частичной функциональной.

4.3. Проверка совпадения типов классов суперклассов и подкласса категоризаций

Данная проверка с точки зрения реализации схожа с предыдущей проверкой. Композиция отображения, являющегося результатом объединения отображений «суперкласс категоризации» и «подкласс категоризации», и отображения «тип класса» также должна быть частичной функциональной (рис. 4).

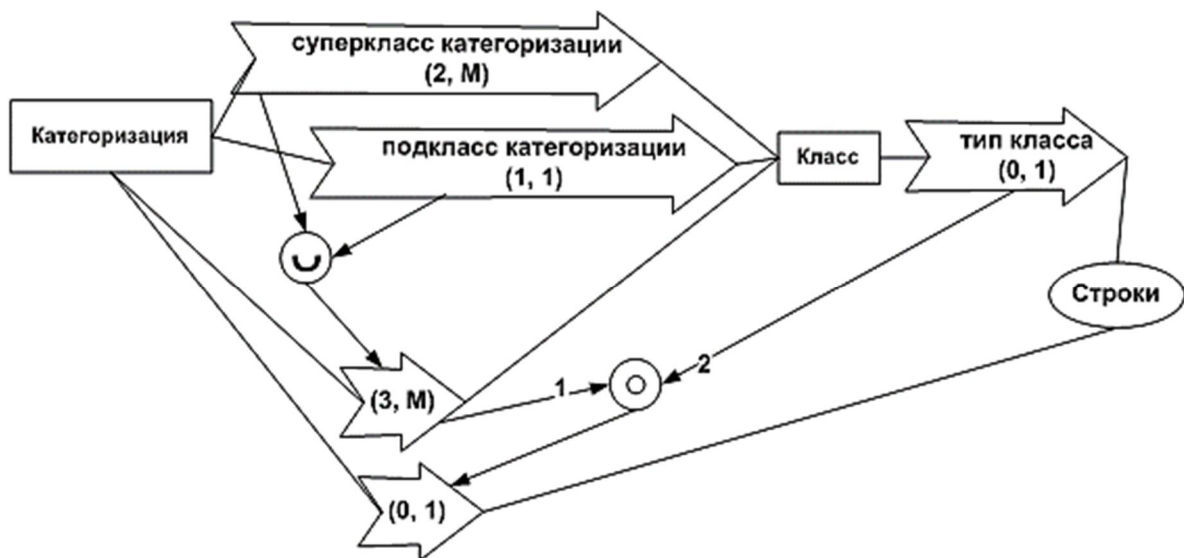


Рис. 4. Диаграмма условия непротиворечивости
Fig. 4. Diagram of the consistency condition

4.4. Проверка наличия связи с ролью проекции только у операций проекции

У операции проекции в качестве дополнительных параметров выступают роли, которые в схеме соединяются с кругом, обозначающим операцию, наряду с отображением-аргументом и отображением-результатом. На дугах указываются пометки In или Out. Пометка In означает, что данная роль является ролью прообразов, Out – образов. Пример проекции на роль приведен на рис. 5.

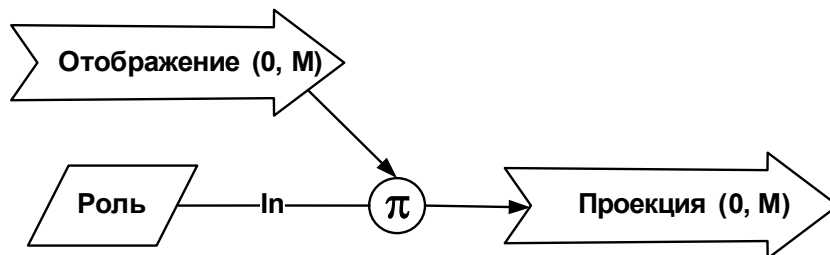


Рис. 5. Операция проекции на роль
Fig. 5. Operation of projection on the role

Каркасный вариант метасхемы ERM-модели не задает ограничения на тип операции, который может использоваться в рамках множества связей «Роль проекции», однако очевидно, что в этих связях могут участвовать только операции-проекции. Данное ограничение описывается схемой, показанной на рис. 6.

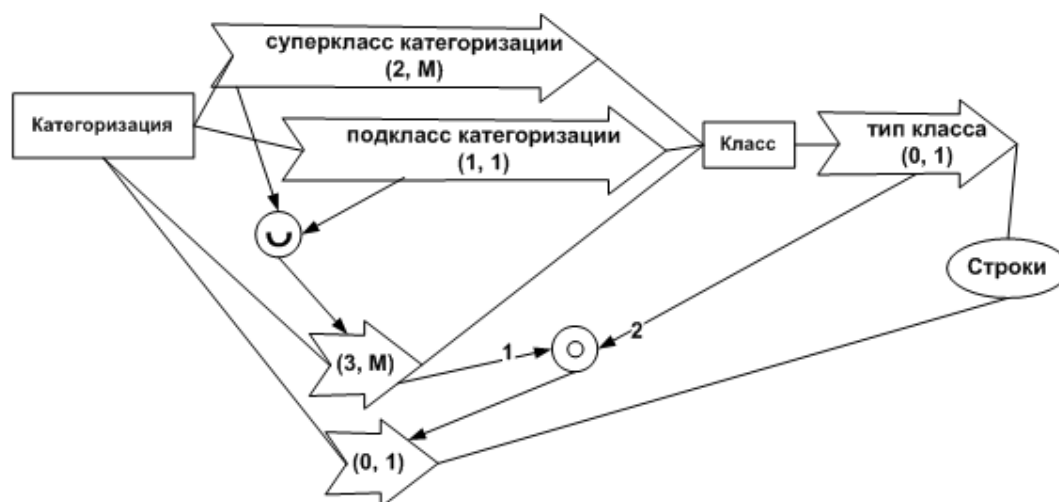


Рис. 6. Диаграмма условия непротиворечивости
Fig. 6. Diagram of the consistency condition

Идея заключается в том, чтобы показать, что все операции, участвующие в связи «Роль проекции», имеют тип «Проекция», и наоборот. Для того чтобы это показать, необходимо построить отображение из ролей в операции над отображением в контексте множества связей «Роль проекции», с другой стороны, отображение строки «Проекция» в операции этого типа. ОЗО обоих производных отображений должны совпадать, что и определяет требуемое условие.

Заключение

Приведенные в статье примеры представления условий непротиворечивости в метасхеме ERM-модели демонстрируют возможность ее использования в качестве метамодели. Это, в свою очередь, создает необходимые условия для применения MDD-подхода к реализации механизма верификации схем в ERM-репозитории.

При таком подходе в репозитории строится декларативная метасхема ERM-модели, описывающая условия непротиворечивости схем, а универсальная программа на ее основе осуществляет необходимые проверки схем. Изменения, вносимые в правила структуризации и задания ограничений целостности ERM-модели, влекут за собой лишь коррекцию метасхемы, в переписывании универсальных программ, реализующих проверки, нет необходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brambilla M., Cabot J., Wimmer M. Model-Driven Software Engineering in Practice. 2nd ed. Morgan & Claypool Publishers, 2017.
2. Stahl T., Völter M. Model-Driven Software Development: Technology, Engineering, Management. John Wiley & Sons Ltd., 2006.
3. Beydeda S., Book M., Gruhn V. Model-Driven Software Development. Springer, 2005.
4. Pastor O., Molina J. Model-Driven Architecture in Practice: a Software Production Environment Based on Conceptual Modeling. Springer, 2007.
5. Whittle J. Model-Driven Development: a Practical Approach. Chapman and Hall/CRC, 2012. (Chapman & Hall/CRC Innovations in Software Engineering and Software Development Series).
6. Бабанов А.М., Петров А.В. Реализация репозитория ERM-модели в CASE-системе Oracle Designer // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 41. С. 47–54.
7. Бабанов А.М., Петров А.В. Проблема непротиворечивости схем данных и ее решение в ERM-репозитории // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 43. С. 72–80.
8. Бабанов А.М. Семантическая модель «Сущность–Связь–Отображение» // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 77–91.
9. Welke R. The case repository: more than another database application. Meta Systems, Ltd., 1988.
10. Welke R. The case repository: more than another database application // Challenges and strategies for research in systems development. New York : John Wiley & Sons Inc., 1992. P. 181–218.

Поступила в редакцию 29 августа 2019 г.

Babanov A.M., Petrov A.V. (2020) DECLARATIVE DEFINITION OF CONSISTENCY CONDITIONS IN ERM METASHEMA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 94–101

DOI: 10.17223/19988605/51/11

A characteristic feature of most information systems is mainly a procedural, algorithmic way of satisfying the functional requirements of the customer. Solution based on the principles of Model Driven Development (MDD) is more elegant, and, most importantly, flexible. In this case, a declarative model is constructed that describes the required functionality, and a universal program carries out the necessary actions based on this model. Changing the requirements entails only a correction of the model; there is no need to rewrite universal programs that implement the model.

The first implementation of the research prototype of the ERM model repository was carried out mainly in the traditional way. The exception was, perhaps, the checks that are performed by the relational DBMS based on the integrity constraints of the repository declared in its schema.

The expressive power of the ERM model allows representing all the conditions for the consistency of elements of ERM schemas in the repository metaschema. This prompted researchers of the ERM model to try to implement a mechanism for checking consistency schemas in accordance with MDD.

The first step in this direction is to expand the ERM metaschema with appropriate descriptions of the consistency conditions. The second step will be the implementation of a universal verification program.

As for the model's metaschema, ideally, it should contain all the constraints on the permissible schemas that the metamodel can reflect. The fact that the ERM model is positioned as one of the richest in descriptive capabilities suggests that using of it as a metamodel will allow reflecting all the additional conditions for the consistency of schemas.

It is impossible to present the complete metaschema of the ERM model in the form of a single diagram; this would greatly complicate the process of its perception. The interconnections of the basic structural concepts are presented in a skeleton diagram. A separate diagram is used for each consistency condition. It shows the structural concepts of the skeleton diagram that make up the context of the condition, and those special relationships that, in fact, reflect its essence.

To illustrate the declarative principles of defining the consistency conditions, several "simple" such diagrams are given.

The examples of the presentation of the consistency conditions in the ERM model metaschema presented in the article demonstrate the possibility of its use as a metamodel. This creates the necessary conditions for applying the MDD approach to the implementation of the schema verification mechanism in the ERM repository. It remains to create a program for the interpretation of the metaschema elements reflecting these conditions.

Keywords: ERM model; repository consistency; data schema; data model metaschema; model driven development.

BABANOV Alexey Mikhailovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: babanov2000@mail.ru

PETROV Alexander Viktorovich (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: flamingcode@mail.ru

REFERENCES

1. Brambilla, M., Cabot, J. & Wimmer, M. (2017) *Model-driven software engineering in practice*. 2nd ed. Morgan & Claypool.
2. Stahl, T. & Völter, M. (2006) *Model-driven software development: technology, engineering, management*. John Wiley & Sons Ltd.
3. Beydeda, S., Book, M. & Gruhn, V. (2005) *Model-Driven Software Development*. Springer.
4. Pastor, O. & Molina, J. (2007) *Model-driven architecture in practice: a software production environment based on conceptual modeling*. Springer.
5. Whittle, J. (2012) *Model-Driven Development: A Practical Approach (Chapman & Hall/CRC Innovations in Software Engineering and Software Development Series)*. Chapman and Hall/CRC.
6. Babanov, A.M. & Petrov, A.V. (2017) Implementation of the ERM-model repository in CASE-system Oracle Designer. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 41. pp. 47–54. DOI: 10.17223/19988605/41/6
7. Babanov, A.M. & Petrov, A.V. (2018) Problem of data scheme consistency and its solution in the ERM repository. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 43. pp. 72–80. DOI: 10.17223/19988605/43/9
8. Babanov, A.M. (2007) Semantic model "Entity-Relationship-Mapping". *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1. pp. 77–91.
9. Welke, R. (1988) *The case repository: more than another database application*. Meta Systems, Ltd.
10. Welke, R. (1992) The case repository: more than another database application. In: Cotterman, W.W. & Senn, J.A. (eds) *Challenges and strategies for research in systems development*. New York: John Wiley & Sons Inc. pp. 181–218.

УДК 004.254

DOI: 10.17223/19988605/51/12

Е.А. Гончаренко, А.А. Пазников

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ АТОМАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ В МНОГОЯДЕРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

*Публикация выполнена при поддержке РФФИ в рамках проекта № 19-07-00784
и при поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект СП-4971.2018.5).*

Проводится анализ эффективности выполнения атомарных операций «сравнение с обменом» (compare-and-swap, CAS), «выборка и сложение» (fetch-and-add, FAA), «обмен» (swap, SWP), «чтение» (load) и «запись» (store) на современных многоядерных вычислительных системах с общей памятью. Данные операции реализованы в виде процессорных инструкций и применяются при разработке параллельных программ (средства блокировки потоков и неблокируемые структуры данных). Исследуется зависимость влияния механизма когерентности кэш-памяти (cache coherence), размера и локальности данных на время выполнения атомарных операций. Разработана тестовая программа, позволяющая анализировать зависимость пропускной способности и латентности выполнения операций. Приводятся результаты анализа эффективности атомарных операций для процессоров архитектуры x86-64 и рекомендации по оптимизации их выполнения. В частности, определены атомарные операции, характеризующиеся наименьшей (load), наибольшей («удачный CAS», store) и сопоставимой («неудачный CAS», FAA, SWP) латентностью. Показано, что при различном выборе процессорного ядра для выполнения операции и состояния кэш-линии время выполнения операций может различаться в среднем в 1,5 и 1,3 раза соответственно. Выбор субоптимальных параметров позволяет увеличить пропускную способность выполнения атомарных операций от 1,1 до 7,2 раза.

Ключевые слова: атомарные операции; протокол когерентности кэша; многопоточные программы.

К многоядерным вычислительным системам (ВС) с общей памятью относятся как автономные десктопные и серверные системы, так и вычислительные узлы в составе распределенных ВС (кластерные ВС, системы с массовым параллелизмом). Такие системы могут включать десятки и сотни процессорных ядер. Например, вычислительный узел суперкомпьютера Summit, занимающего первое место в рейтинге TOP-500 (более 2 млн процессорных ядер, 4 608 узлов), включает два 24-ядерных универсальных процессора IBM Power9 и шесть графических ускорителей NVIDIA Tesla V100 (640 ядер). Sunway TaihuLight (более 10 млн процессорных ядер, третье место в рейтинге TOP-500) укомплектован 40 960 процессорами Sunway SW26010, включающими 260 ядер. При реализации кэш-памяти в таких ВС применяются различные политики включения (инклюзивный и эксклюзивный кэш), протоколы когерентности (MESI, MOESI, MESIF, MOWESI, MERSI, Dragon) и топологии межпроцессорных шин в NUMA-системах (Intel QPI, AMD HyperTransport).

Одной из наиболее значимых задач при разработке параллельных программ является создание эффективных средств синхронизации параллельных потоков. Основными методами синхронизации являются средства блокировки потоков (locks, mutexes), неблокируемые (non-blocking, lock-free) потокобезопасные (concurrent, thread-safe) структуры данных и транзакционная память [1–5]. Атомарные операции (atomic operations, atomics) применяются при реализации всех методов синхронизации. Операция называется атомарной, если она завершается в один неделимый шаг относительно других потоков. Ни один из потоков не может наблюдать операцию «частично завершенной». Если два или

более потоков выполняют операции над разделяемой переменной и хотя бы один выполняет операцию записи, то потоки должны использовать атомарные операции для избежания гонки данных (data race).

К наиболее распространенным относятся атомарные операции «сравнение с обменом» (compare-and-swap, CAS), «выборка и сложение» (fetch-and-add, FAA), «обмен» (swap, SWP), «чтение» (load) и «запись» (store). Операция $\text{load}(m, r)$ реализует чтение значения переменной из ячейки памяти m в регистр r ; $\text{store}(m, r)$ – запись значения переменной в ячейку памяти m из регистра r . $\text{FAA}(m, r_1, r_2)$ увеличивает (уменьшает) на размещенное в регистре r_1 значение в ячейке памяти m и возвращает предыдущее значение в регистр r_2 . $\text{SWP}(m, r)$ – обмен значений между ячейкой памяти m и регистром r . $\text{CAS}(m, r_1, r_2)$ реализует сравнение значения ячейки памяти m с регистром r_1 ; если значения равны, то в m устанавливается r_2 . При разработке параллельных программ необходимо учитывать влияние на эффективность атомарных операций таких аспектов, как выполнение механизма когерентности кэш-памяти, размер буфера, числа потоков, удаленности данных от ядра.

Несмотря на широкое применение, эффективность атомарных операций не проанализирована в достаточной степени. Например, считается, что CAS медленнее FAA [6] и ее семантика позволяет ввести понятие «бесполезная работа» (wasted work) [7, 8], поскольку неудачные попытки сравнения данных в памяти и в регистре приводят к дополнительной нагрузке на ядро. В работе [8] анализируется производительность атомарных операций на графических процессорах, однако сегодня остро стоит задача оценки эффективности атомарных операций на универсальных процессорах. В [9] рассматривается эффективность выполнения операций CAS, FAA, SWP с целью анализа влияния динамических параметров программы на время выполнения атомарных операций. Результаты исследований демонстрируют недокументированные свойства тестируемых систем и оценки времени выполнения атомарных операций. Однако тесты проводились при фиксированной частоте процессорных ядер, использовании больших страниц памяти и с выключенной предварительной выборкой данных, что искажает результаты моделирования для реальных программ. Кроме того, не исследовались атомарные операции load и store.

В работе рассматриваются операции CAS, FAA, SWP, load, store, при этом условия проведения экспериментов максимально приближены к реальным условиям выполнения параллельных программ, в частности не проводятся фиксация частоты ядер, изменение размера страниц, отключение предварительной выборки данных. Проводится анализ эффективности атомарных операций для процессоров архитектуры x86-64. Кроме того, рассматриваются разные варианты выполнения CAS (удачный и неудачный), а также выполнение атомарных операций при использовании данных локальной и удаленной кэш-памяти (по отношению к ядру, выполняющему операции).

1. Методика проведения экспериментов

В качестве показателей эффективности используются латентность l выполнения атомарной операции и пропускная способность b . Пропускная способность $b = n/t$, где n – число выполненных операций за время t при реализации последовательного доступа к ячейкам буфера.

Для точного измерения времени применялся набор инструкций RDTSCP. Для предотвращения переупорядочивания инструкций использовались полные барьеры памяти.

Исследуется влияние состояния кэш-линии в рамках протоколов когерентности (M, E, S, O, I, F) на эффективность выполнения атомарных операций. Определим основные состояния кэш-линий. M (Modified) – кэш-линия модифицирована и содержит актуальные данные. O (Owned) – кэш-линия содержит актуальные данные и является их единственным владельцем. E (Exclusive) – кэш-линия содержит актуальные данные, которые соответствуют состоянию памяти. S (Shared) – кэш-линия содержит актуальные данные, при этом другие процессорные ядра имеют копии этих данных в разделяемом состоянии. F (Forwarded) – кэш-линия содержит наиболее свежие, корректные данные, при этом другие ядра в системе могут иметь копии данных в разделяемом состоянии. I (Invalid) – кэш-линия содержит некорректные данные.

Разработана тестовая программа. Перед началом выполнения организуется буфер q в виде целочисленного массива размера $s = 128$ Мб. Данные размещаются в кэш-памяти, кэш-линии переводятся в заданное состояние протокола когерентности. Подкачка страниц не применялась. Данные не выравнивались. Перевод кэш-линий в состояние М происходит при записи произвольных значений в ячейки буфера. Для перевода в состояние Е выполняется запись в ячейки буфера, затем – инструкция `clflush` для перевода кэш-линий в состояние I, после этого – чтение ячеек буфера. Переход в состояние S происходит после чтения ячеек буфера из кэш-памяти в состоянии Е одного ядра в кэш-память другого ядра. Перевод кэш-линий в состояние О достигается путем чтения из кэш-памяти в состоянии М одного ядра в кэш-память другого ядра, при этом кэш-линии ядра из М переключаются в состояние О.

Для операции CAS выполняется два эксперимента: для успешной и неудачной операции. Неудачным считается CAS, при выполнении которого $m \neq r_1$. Заведомо неудачное выполнение CAS достигается путем сравнения адреса указателя с данными по этому указателю. В успешном CAS $m = r_1$. Эксперименты проводились на процессорах AMD Athlon II X4 640 (микроархитектура K10), AMD A10-4600M (микроархитектура Piledriver) (протокол когерентности MOESI [10]), Intel Xeon X5670 (микроархитектура Westmere-EP) и Intel Xeon E5540 (микроархитектура Nehalem-EP) (MESIF [11]) (рис. 1). Размер кэш-линии 64 байта. В качестве компилятора использовался компилятор GCC 4.8.5, операционная система SUSE Linux Enterprise Server 12 SP3 (версия ядра 4.4.180).

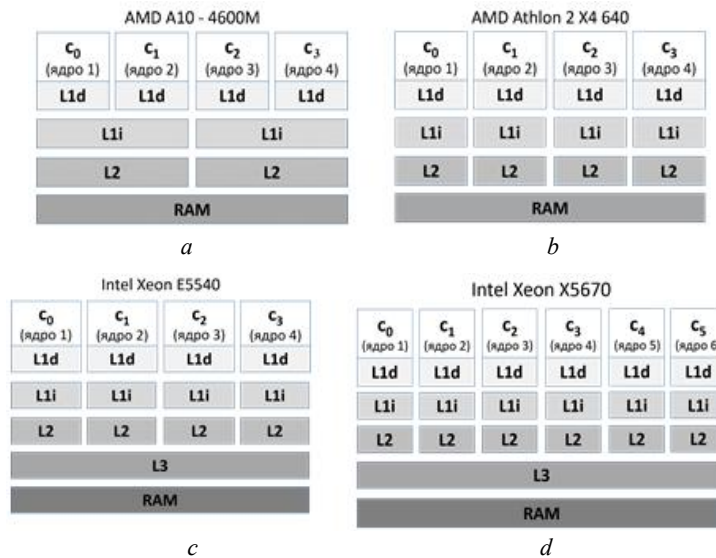


Рис. 1. Исследуемые микроархитектуры: а – Piledriver, б – K10, в – Nehalem-EP, д – Westmere-EP
Fig. 1. Target microarchitectures: а – Piledriver, б – K10, в – Nehalem-EP, д – Westmere-EP

Опишем основные шаги алгоритма измерения времени выполнения атомарных операций для состояния Е (рис. 2). Вспомогательная функция `DoOpег` реализует выполнение заданной атомарной операции для всех элементов буфера (строки 1–4). Основной алгоритм выполняется до тех пор, пока размер буфера не достигнет максимального (строка 5). Задействованный диапазон тестового массива `testSizeBuffer` в экспериментах варьирует от 6 Кб (минимальный размер кэша первого уровня) до 128 Мб. Каждый эксперимент запускается $nruns$ раз (строка 6). Выполняется запись произвольных данных в ячейки буфера для перевода кэш-линий ядра c_0 в состояние М (для остальных ядер состояние кэш-линий переводится в I) (строка 7). Далее выполняется инвалидация кэш-линий (строка 12) с последующим чтением, что переводит кэш-линий ядра c_0 в состояние Е (строка 9). На следующем шаге над каждой переменной выполняется атомарная операция (строка 11). Вычисляется время выполнения операции и суммарное время выполнения (строка 13). Рассчитываются латентность (строка 15), пропускная способность (строка 16) и увеличивается текущий размер буфера на $step = L_x / 8$ (где L_x – размер кэш-памяти уровня $x = 1, 2, 3$) (строка 17).

Алгоритмы выполнения атомарных операций для состояний М и I аналогичны описанному, при этом для М строки 8, 9 не выполняются, для I не выполняются строки 7, 9.

1	Function DOOPER(oper)	1	Первый поток на c_0 :
2	for $i = 0$ to d do	2	while $d \leq \text{testSizeBuffer}$ do
3	buffer.oper()	3	for $j = 0$ to nruns do
4	end for	4	DOOPER(STORE(1))
5	while $d \leq \text{testSizeBuffer}$ do	5	CLFLUSH(buffer, d);
6	for $j = 0$ to nruns do	6	DOOPER(LOAD)
7	DOOPER(STORE(1))	7	Второй поток на c_2 :
8	CLFLUSH(buffer, d);	8	DOOPER(LOAD)
9	DOOPER(LOAD)	9	Первый поток на c_0 :
10	start = GET_TIME();	10	start = GET_TIME();
11	DOOPER(ATOMICOP(buffer[i]))	11	DOOPER(ATOMICOP(buffer[i]))
12	end = GET_TIME();	12	end = GET_TIME();
13	sumTime = sumTime + (end - start);	13	sumTime = sumTime + (end - start);
14	end for	14	end for
15	latency = sumTime / nruns / d ;	15	latency = sumTime / nruns / d ;
16	bandwidth = (d / sumTime / nruns) $\times 10^9 / 2^{20}$;	16	bandwidth = (d / sumTime / nruns) $\times 10^9 / 2^{20}$;
17	$d = d + \text{step}$;	17	$d = d + \text{step}$;
18	end while	18	end while

a

b

Рис. 2. Алгоритм измерения латентности и пропускной способности выполнения атомарных операций

 SWP/FAA/CAS/Load/Store: a – Exclusive c_0 , b – Shared c_0

Fig. 2. Algorithm for measuring the latency and throughput of atomic operations

 SWP/FAA/CAS/Load/Store and throughput: a – Exclusive c_0 , b – Shared c_0

Основные шаги алгоритма измерения времени выполнения атомарных операций для c_0 в состоянии кэш-линий S (см. рис. 2, b). Алгоритм выполняется в двух потоках, привязанных к ядрам c_0 и c_2 . Синхронизация реализуется посредством атомарных флагов. В первом потоке на ядре c_0 выполняется запись произвольных данных в буфер, перевод кэш-линий в состояние M, при этом для остальных ядер состояние изменяется на I (строка 4). Далее выполняются очистка кэш-линий (сброс в I) (строка 5) и чтение данных для изменения состояния кэш-линий c_0 в состояние E (строка 6). Во втором потоке (ядро c_2) выполняется чтение данных, что изменяет состояние кэш-линий ядер c_0 и c_2 на S (строка 8). Далее первый поток на ядре c_0 реализует атомарную операцию над элементами тестового буфера (строка 11). Вычисляются время выполнения операции и показатели эффективности (строки 15–17).

На рис. 3, 4 приведены результаты экспериментов для операции SWP.

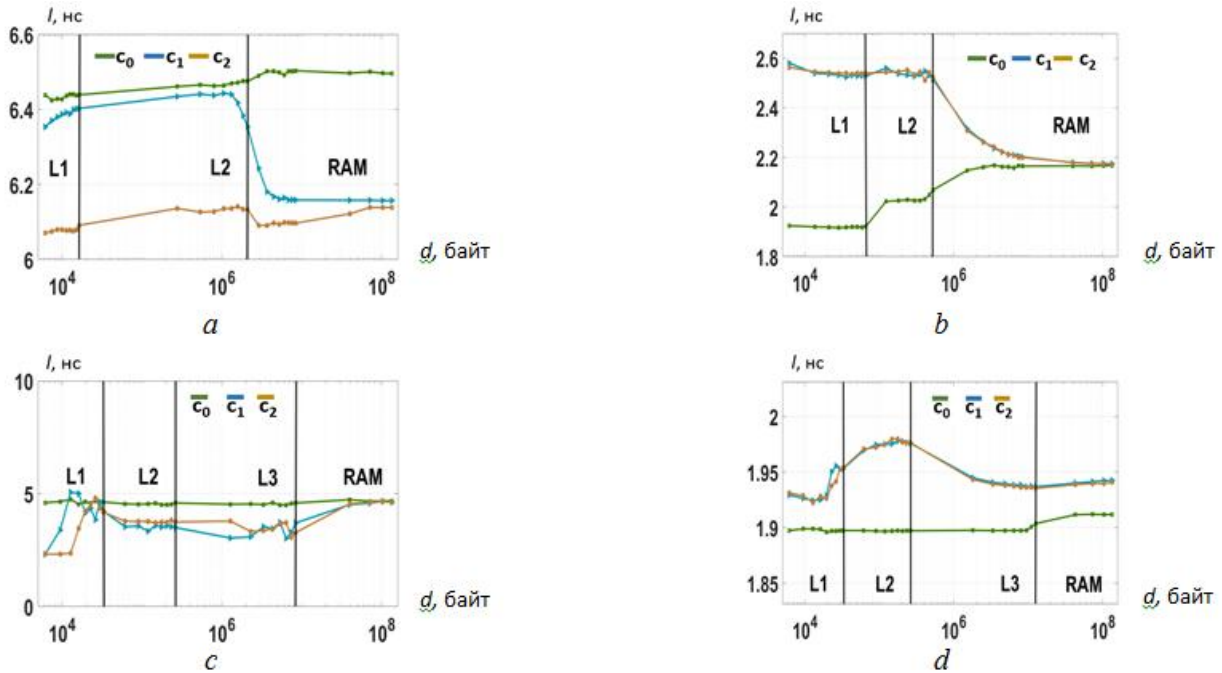

 Рис. 3. Латентность выполнения атомарной операции SWP для кэш-линий в состоянии Exclusive: a – Piledriver, b – K10, c – Nehalem-EP, d – Westmere-EP

Fig. 3. Latency an atomic operation SWP for cache lines in the Exclusive state:

 a – Piledriver, b – K10, c – Nehalem-EP, d – Westmere-EP

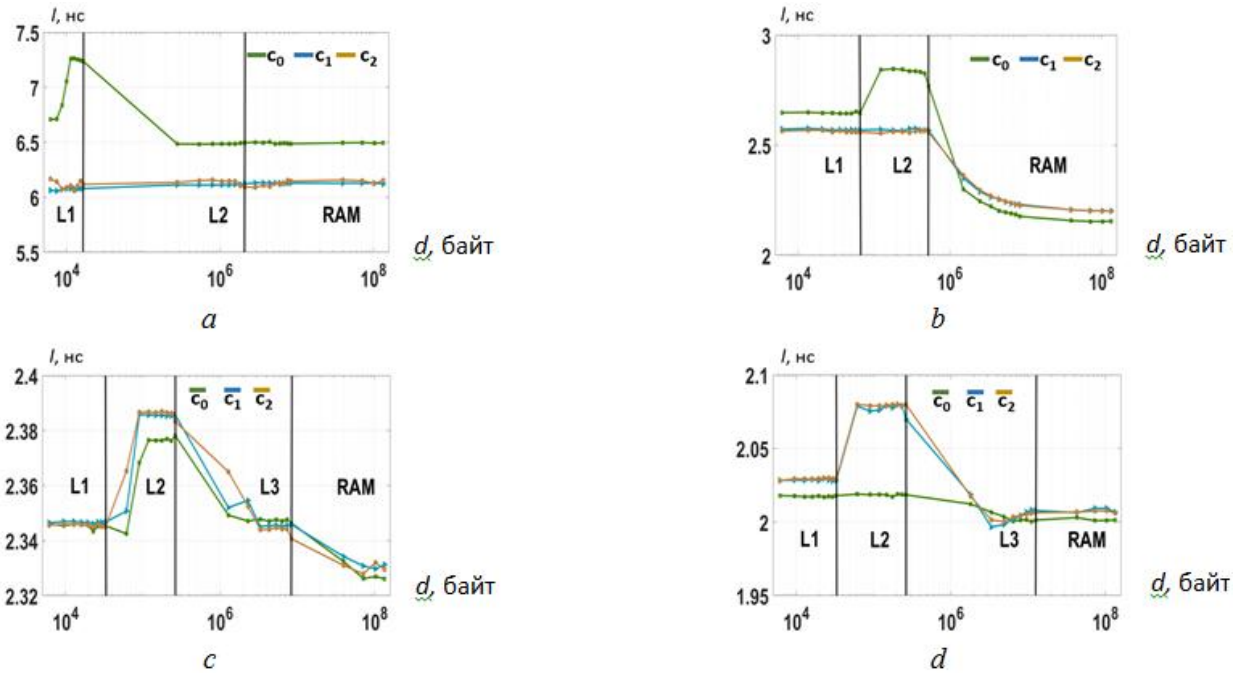


Рис. 4. Латентность выполнения атомарной операции SWP для кэш-линий в состоянии Shared: *a* – Piledriver, *b* – K10, *c* – Nehalem-EP, *d* – Westmere-EP
Fig. 4. Latency an atomic operation SWP for cache lines in the Shared state:
a – Piledriver, *b* – K10, *c* – Nehalem-EP, *d* – Westmere-EP

Опишем основные шаги алгоритма измерения времени выполнения атомарных операций для ядер c_1 и c_2 в состоянии S кэш-линий ядра c_0 (рис. 5). Алгоритм выполняется в трех потоках, привязанных к ядрам c_0 , c_1 , c_2 . Первый поток (ядро c_0) реализует запись в буфер, что переводит состояние кэш-линий c_0 в M (для остальных ядер состояние изменяется на I) (строка 4). Далее выполняются сброс состояния в I (строка 5) и чтение данных, что переводит кэш-линии c_0 в состояние E (строка 6). Во втором потоке (ядро c_1) выполняется чтение данных (состояние кэш-линии c_0 и c_1 изменяется на S) (строка 8). На следующем шаге в третьем потоке (ядро c_2) над каждым элементом буфера выполняется атомарная операция (строка 11). Вычисляются показатели эффективности (строки 15–17). Для измерения латентности выполнения атомарных операций на ядре c_1 используется аналогичный алгоритм, в котором шаги для ядер c_1 и c_2 меняются местами.

1	Первый поток на c_0 :	1	Первый поток на c_0 :
2	while $d \leq \text{testSizeBuffer}$ do	2	while $d \leq \text{testSizeBuffer}$ do
3	for $j = 0$ to nruns do	3	for $j = 0$ to nruns do
4	DoOPER(STORE(1))	4	DoOPER(STORE(1))
5	CLFLUSH(buffer, d);	5	Второй поток на c_2 :
6	DoOPER(Load)	6	DoOPER(Load)
7	Второй поток на c_1 :	7	Первый поток на c_0 :
8	DoOPER(Load)	8	start = GET_TIME();
9	Третий поток на c_2 :	9	DoOPER(AtomicOp(buffer[i]))
10	start = GET_TIME();	10	end = GET_TIME();
11	DoOPER(AtomicOp(buffer[i]))	11	sumTime = sumTime + (end – start);
12	end = GET_TIME();	12	end for
13	sumTime = sumTime + (end – start);	13	latency = sumTime / nruns / d ;
14	end for	14	bandwidth = (d / sumTime / nruns) $\times 10^9 / 2^{20}$;
15	latency = sumTime / nruns / d ;	15	$d = d + \text{step}$;
16	bandwidth = (d / sumTime / nruns) $\times 10^9 / 2^{20}$;	16	end while
17	$d = d + \text{step}$;		
18	end while		

Рис. 5. Алгоритм измерения латентности и пропускной способности выполнения атомарных операций:
a – кэш-линии ядра c_0 в состоянии Shared, измерения для ядер c_1 и c_2 , *b* – состояние Owned
Fig. 5. Algorithm for measuring the latency and throughput of atomic operations:
a – Shared c_0 , measurements for c_1 and c_2 , *b* – Owned state

Опишем основные шаги алгоритма измерения времени выполнения атомарных операций в состоянии кэш-линий О на ядре c_0 (см. рис. 5, *b*). Алгоритм выполняется в двух потоках, привязанных к ядрам c_0 и c_2 . В первом потоке (ядро c_0) произвольные данные записываются в буфер для изменения состояния кэш-линий ядра c_0 в М (для остальных ядер состояние изменяется I) (строка 4). Во втором потоке (ядро c_2) выполняется чтение данных, что изменяет состояние кэш-линий локального ядра c_0 на О, а ядра c_2 – на S (строка 8). На следующем шаге в первом потоке (ядро c_0) над каждой переменной буфера выполняется атомарная операция (строка 9). Вычисляются время выполнения операции и показатели эффективности (строки 13–15).

На рис. 6 приведены результаты для операции SWP, состояние О.

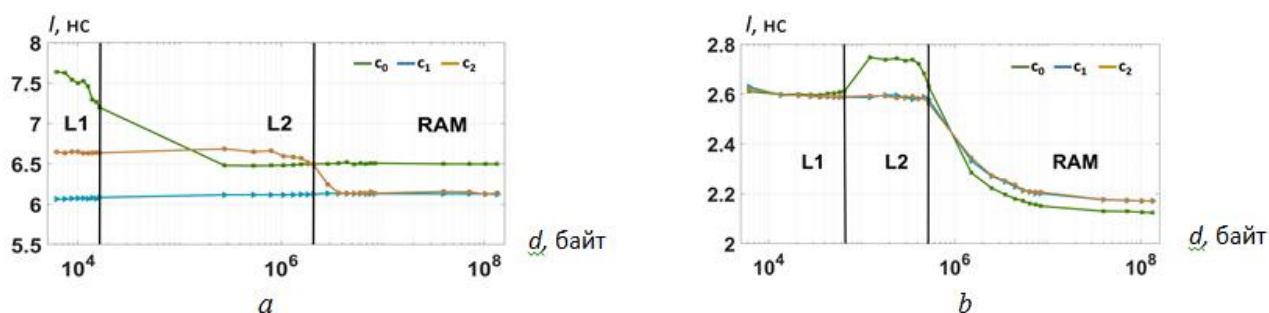


Рис. 6. Латентность выполнения атомарной операции SWP кэш-линий в состоянии Owned: *a* – архитектура Piledriver, *b* – архитектура K10

Fig. 6. Latency of atomic operation SWP for cache lines in the Owned state: *a* – Piledriver, *b* – K10

Таблица 1

Субоптимальные параметры для архитектуры Westmere-EP

Операция	Субоптимальные параметры			Общий уровень памяти	l , нс	b , Мб/с
	Состояние кэш-линий	Размер буфера	Ядро			
Load	Exclusive	L2	c_0, c_1, c_2	L3	1,1–1,15	823–866
Store	Modified	RAM	c_0, c_1, c_2	L3	4,1–4,21	226–230
FAA	Invalid	L1	c_0, c_1, c_2	L3	1,89–1,91	490–499
SWP	Invalid, Modified	RAM	c_0, c_1, c_2	L3	1,93	493
unCAS	Exclusive	L1, L2	c_0, c_1, c_2	L3	2,55–2,59	367–372
CAS	Invalid	L2, L3	c_0, c_1, c_2	L3	4,9–19,3	49–194

Таблица 2

Отношения максимальной и минимальной пропускной способности при выполнении атомарных операций

Операция	Piledriver $b_{\max}/b_{\min}$	K10 $b_{\max}/b_{\min}$	Nehalem-EP $b_{\max}/b_{\min}$	Westmere-EP $b_{\max}/b_{\min}$
Load	1,4	1,1	2,1	2
FAA	1,1	1,2	2,2	1,1
SWP	1,1	1,2	2,1	1,1
unCAS	1,1	1,2	2,4	2,0
Store	3,9	1,1	2,1	1,1
CAS	1,1	1,6	6,1	7,2

В табл. 1 представлены субоптимальные параметры выполнения атомарных операций на процессоре с микроархитектурой Westmere-EP. Аналогичные результаты получены и для других процессоров. Так, например, для процессоров микроархитектур K10, Nehalem-EP, Westmere-EP наименьшая латентность выполнения операции load получена в состоянии S на ядре c_0 (от 1,14 до 1,81 нс), в то время как для процессора с микроархитектурой Piledriver данная операция имеет наименьшую латентность на ядрах c_0 и c_2 (от 1,8 до 2,4 нс). В табл. 2 даны отношения максимальной и минимальной пропускной способности.

2. Анализ результатов экспериментов

Состояние кэш-линий М. Значения показателей эффективности для атомарных операций SWP, FAA, unCAS на ядре c_0 архитектуры Piledriver незначительно варьируют при изменении размера буфера, в то время как для ядер c_1 и c_2 увеличение размера буфера более L2 приводит к сокращению латентности до минимального значения для обоих ядер. Для K10 при размере буфера, превышающем L2, латентность операций SWP, FAA, unCAS различается в пределах погрешности для всех ядер. При выполнении load, SWP, CAS для Nehalem-EP латентность сопоставима для всех ядер при размере буфера более L3. При выполнении операций load, SWP для Westmere-EP наблюдается аналогичная ситуация, для остальных операций (store, CAS, FAA, unCAS) латентность является наименьшей для ядра c_0 и не зависит от размера буфера.

Состояние кэш-линий Е. При выполнении операций SWP, FAA, unCAS на архитектуре Piledriver и размере буфера более L2 для ядер c_1 и c_2 латентность сопоставима, при этом на ядре c_0 получены максимальные значения. Для архитектуры K10 латентность операций SWP, FAA, unCAS аналогична для всех ядер при размере буфера, превышающем L2. Для Nehalem-EP латентность SWP, load сопоставима на всех ядрах при размере буфера более L3. Для Westmere-EP минимальная латентность для load, SWP, FAA, CAS получена на ядре c_0 , для ядер c_1 и c_2 при размере буфера более L3 латентность различается незначительно.

Состояние кэш-линий S. При выполнении SWP, FAA на архитектуре Piledriver при размере буфера L1 латентность максимальна на ядре c_0 . Для K10 при размере буфера L2 наибольшая латентность получена на ядре c_0 для SWP, FAA, store. Для Nehalem-EP и Westmere-EP при размере буфера L2 латентность выполнения SWP, FAA максимальна на ядрах c_1 , c_2 .

Состояние кэш-линий I. При выполнении SWP, FAA, unCAS на архитектуре Piledriver размер буфера незначительно влияет на время выполнения для всех ядер, наименьшая латентность получена на ядрах c_1 и c_2 . При выполнении load, SWP на K10 при размере буфера не более L2 латентность выполнения минимальна для ядра c_0 . Для Nehalem-EP латентность SWP, load сопоставима на всех ядрах при размере буфера более L3. При выполнении load, SWP, FAA, CAS на Westmere-EP наименьшая латентность получена на ядре c_0 .

Состояние кэш-линий О. При выполнении атомарных операций SWP, FAA на архитектуре Piledriver при размере буфера L1 наибольшая латентность получена на ядре c_0 . Для ядра c_1 размер буфера не влияет на время выполнения операций. Наибольшая латентность операций SWP, FAA, store на архитектуре K10 получена при размере буфера L2 на ядре c_0 .

Наибольшей латентностью, по сравнению с другими операциями, характеризуется операция CAS (успешный). Операция load выполняется с наименьшей латентностью. Например, для процессоров K10, Westmere-EP минимальная латентность CAS получена для состояния S на ядре c_0 и составляет от 18 до 24 нс, для процессора Piledriver CAS имеет наименьшую латентность на ядрах c_0 и c_1 (от 42 до 44 нс), на процессоре Nehalem-EP в состоянии S CAS выполняется с наименьшей латентностью на ядре c_0 (от 22 до 46 нс), при этом наибольшая латентность (46 нс) получена при размере буфера L2. Для архитектуры Piledriver минимальная латентность операции load (1,76 нс) превышает минимальную латентность операции CAS (12,39 нс) в 7 раз. Для архитектуры K10 минимальная латентность load (1,72 нс) превышает минимальную латентность CAS (22,38 нс) в 13 раз. Для Nehalem-EP отношение минимальной латентности load (1,3 нс) к минимальной латентности CAS (9,86 нс) – 7,5. Для архитектуры Westmere-EP отношение минимальной латентности load (1,1 нс) к минимальной латентности CAS (4,9 нс) – 4,5. Сравнивая микроархитектуры, отметим, что в среднем наименьшая латентность получена на процессоре Westmere-EP (MESIF), наибольшая – на Piledriver (MOESI).

Заключение

Разработан инструментарий и проведен анализ эффективности выполнения атомарных операций в многоядерных вычислительных системах с общей памятью в зависимости от размера буфера,

состояния кэш-линий и локальности данных. Экспериментально показано, что операции «неудачный CAS», FAA и SWP характеризуются сопоставимой задержкой. Для операций load получена наименьшая латентность, для «удачный CAS» и store – наибольшая.

В результате анализа результатов экспериментов построены рекомендации по увеличению пропускной способности и минимизации латентности выполнения атомарных операций на протестированных процессорах. Так, применение данных рекомендаций позволит увеличить пропускную способность на процессоре с микроархитектурой Piledriver от 1,1 до 3,9 раз, для процессора K10 – от 1,1 до 1,6 раз, для процессора Nehalem-EP от 2,1 до 6,1 раз, для процессора Westmere-EP – от 1,1 до 7,2 раз. Таким образом, полученные результаты показывают, что время выполнения атомарных операций может варьировать в широких пределах в зависимости от условий их выполнения (состояние кэш-линии, локализация и размер буфера). Это необходимо учитывать при разработке разделяемых структур данных и примитивов синхронизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Herlihy M., Shavit N. The art of multiprocessor programming. Morgan Kaufmann, 2012. 537 p.
2. Пазников А.А. Оптимизация делегирования выполнения критических секций на выделенных процессорных ядрах // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 38. С. 52–58.
3. Аненков А.Д., Пазников А.А. Алгоритмы оптимизации масштабируемого потокобезопасного пула на основе распределяющих деревьев для многоядерных вычислительных систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 39. С. 73–84.
4. Кулагин И.И., Курносков М.Г. Оптимизация обнаружения конфликтов в параллельных программах с транзакционной памятью // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 4. С. 46–60.
5. Shavit N., Touitou D. Software transactional memory // Distributed Computing. 1997. V. 10, No. 2. P. 99–116.
6. Morrison A., Afek Y. Fast Concurrent Queues for x86 Processors // PPOPP'13. 2013. P. 103–112.
7. Harris T.L. A Pragmatic Implementation of Non-blocking Linked-Lists // DISC'01. 2001. P. 300–314.
8. Elteir M., Lin H., Feng W. Performance characterization and optimization of atomic operations on amd gpus // IEEE Int. Conf. on Cluster Computing. 2011. P. 234–243.
9. Schweizer H., Besta M., Hoefler T. Evaluating the cost of atomic operations on modern architectures // 2015 Int. Conf. on Parallel Architecture and Compilation (PACT). 2015. P. 445–456.
10. Dey S., Nair M.S. Design and Implementation of a Simple Cache Simulator in Java to Investigate MESI and MOESI Coherency Protocols // Int. J. of Computer Applications. 2014. V. 87, No. 11. P. 6–13.
11. Molka D., Hackenberg D., Schone R., Muller M.S. Memory performance and cache coherency effects on an intel nehalem multi-processor system // 18th Int. Conf. on Parallel Architectures and Compilation Techniques. 2009. P. 261–270.

Поступила в редакцию 8 июля 2019 г.

Goncharenko E.A., Paznikov A.A. (2020) ANALYSIS OF THE EFFICIENCY OF ATOMIC OPERATIONS IN MULTI-CORE SHARED-MEMORY COMPUTER SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 102–110

DOI: 10.17223/19988605/51/12

One of the most relevant problems of parallel programming, both for shared-memory and distributed-memory systems, is the development of effective thread synchronization tools. The main synchronization methods are locks (spinlocks, mutexes), non-blocking (lock-free, wait-free, obstruction-free) concurrent data structures and software transactional memory. Atomic operations (atomics), implemented in hardware as processor instructions, are used in all these synchronization techniques. An operation is called atomic if it completes in one indivisible step relative to other threads. None of the threads can see the modification of a variable partially completed. In other words, if two or more threads perform operations on a shared variable and at least one writes into it, then both threads should use atomics.

For efficient parallel programming with atomics, we should consider the caching algorithms. In particular, we have to study the influence of the cache coherence protocol on the efficiency of atomic operations, as well as the effect of buffer size, the number of threads, the distance of data from the processor core (shared cache level). In this work we analyze the efficiency of atomic operations compare-and-swap (CAS), fetch-and-add (FAA), swap (SWP), load and store on modern multi-core processors. These operations are the most widely used and implemented as atomic instructions at the hardware level on most microarchitectures. We study the impact of the cache coherence protocol, buffer size and data locality on the efficiency of atomic operations. In particular, we study the impact of the cache line state within the cache coherence protocol (M, E, S, O, I, F) on the efficiency of atomic operations. M (Modi-

fied) – a cache line is modified and contains actual data. O (Owned) – a cache line contains actual data and is their sole owner. E (Exclusive) – the cache line contains actual data that correspond to the state of the main memory. S (Shared) – cache line contains actual data and other processor cores have actual copies of this data in a shared state. F (Forwarded) – the cache line contains correct data, while other cores in the system may have copies of the data in a shared state. I (Invalid) – the cache line contains incorrect data.

At present, the efficiency of atomic operations has not been sufficiently analyzed. This paper discusses the CAS, FAA, SWP, load, store operations and experimental conditions are as close as possible to the actual parallel programs: the core frequency is not fixed, pages are not resized, and data prefetching is enabled. In addition, we consider different variants of CAS operation (successful and unsuccessful), as well as atomic operations using data from the local and remote caches (with respect to the core performing the operations).

We designed the algorithms and software toolkit for evaluation efficiency of atomic operations. We experimentally shown that the operations “unsuccessful CAS”, FAA and SWP have comparable latency. For operations load and CAS, the smallest and largest latencies are obtained, respectively. A “successful CAS” with any buffer size and cache line conditions runs faster on the local core. The unsuccessful CAS operation is performed faster on the local core in any states, if the buffer size does not exceed the sizes of L1 and L2 caches. SWP operation has the lowest execution latency on the local core for any size of a buffer in the Modified and Exclusive cache line states.

We analyze the experimental results and give the recommendations to increase the throughput and minimize latency of atomic operations on the given processor architectures. For example, based on these recommendations, we can increase the throughput of atomics on processors with Piledriver microarchitecture from 1.1 to 3.9 times, for K10 processors from 1.1 to 1.6 times, for Nehalem-EP processors from 2.1 to 6.1 time, for Westmere-EP processors from 1.1 to 7.2 times. Thus, the obtained results show that the latency of atomic operations can vary in wide range, depending on the conditions of their execution (cache line state, locality and buffer size). These evidences should be considered in designing concurrent data structures and synchronization primitives.

Keywords: atomic operations; cache coherence protocol; multithreaded programs.

GONCHARENKO Evgeniy Andreevich (Student, Department of Computer Science and Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University “LETI”, Saint-Petersburg, Russian Federation).

E-mail: kesvesna@rambler.ru

PAZNIKOV Alexey Alexandrovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, Department of Computer Science and Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University “LETI”, Saint-Petersburg, Russian Federation).

E-mail: apaznikov@gmail.com

REFERENCES

1. Herlihy, M. & Shavit, N. (2012) *The art of multiprocessor programming*. Morgan Kaufmann.
2. Paznikov, A.A. (2017) Optimization method of remote core locking. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 38. pp. 52–58. DOI: 10.17223/19988605/38/8
3. Anenkov, A.D. & Paznikov, A.A. (2017) Algorithms of optimization of scalable thread-safe pool based on diffracting trees for multicore computing systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 39. pp. 73–84. DOI: 10.17223/19988605/39/10
4. Kulagin, I.I. & Kurnosov, M.G. (2016) Optimization of conflict detection in parallel programs with transactional memory (2016). *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Vychislitel'naya matematika i informatika – Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 4. pp. 46–60. DOI: 10.14529/cmse160404
5. Shavit, N. & Touitou, D. (1997) Software transactional memory. *Distributed Computing*. 10(2). pp. 99–116. DOI: 10.1007/s004460050028
6. Morrison, A. & Afek, Y. (2013) Fast Concurrent Queues for x86 Processors. *PPoPP'13*. pp. 103–112. DOI: 10.1145/2442516.2442527
7. Harris, T.L. (2001) A Pragmatic Implementation of Non-blocking Linked-Lists. *DISC'01*. pp. 300–314. DOI: 10.1007/3-540-45414-4_21
8. Elteir, M., Lin, H., & Feng, W.C. (2011) Performance characterization and optimization of atomic operations on amd gpus. *IEEE Int. Conf. on Cluster Computing*. pp. 234–243. DOI: 10.1109/CLUSTER.2011.34
9. Schweizer, H., Besta, M. & Hoefler, T. (2015) Evaluating the cost of atomic operations on modern architectures. *2015 Int. Conf. on Parallel Architecture and Compilation (PACT)*. pp. 445–456. DOI: 10.1109/PACT.2015.24
10. Dey, S. & Nair, M. S. (2014) Design and Implementation of a Simple Cache Simulator in Java to Investigate MESI and MOESI Coherency Protocols. *International Journal of Computer Applications*. 87(11). pp. 6–13. DOI: 10.5120/15250-3757
11. Molka, D., Hackenberg, D., Schone, R. & Muller, M.S. (2009) Memory performance and cache coherency effects on an intel nehalem multiprocessor system. *18th Int. Conf. on Parallel Architectures and Compilation Techniques*. pp. 261–270. DOI: 10.1109/PACT.2009.22

УДК 519.6

DOI: 10.17223/19988605/51/13

Е.В. Семёнов, А.В. Старченко, Е.А. Данилкин, С.А. Проханов**ВЫБОР ТЕХНОЛОГИИ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
КОНВЕКТИВНО-ДИФфуЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ НА ГИБРИДНОЙ
МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ***Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-20042).*

Представлены результаты применения трех популярных технологий параллельного программирования – Message Passing Interface (MPI), Open Multi-Processing (OpenMP), Open Accelerators (OpenACC) – с целью определения наиболее производительной для параллельной версии метеорологической модели TSUNM3. Сравнение выполнено на примере численного решения неоднородного нестационарного трехмерного конвективно-диффузионного уравнения. Расчеты выполнялись на вычислительном кластере с многоядерными центральными процессорами и графическими видеокартами.

Ключевые слова: распараллеливание; параллельные вычисления; MPI; OpenMP; OpenACC; конвективно-диффузионное уравнение; явно-неявные разностные схемы.

В настоящее время при исследовании окружающей среды наряду с экспериментальными методами большое внимание уделяется применению методов математического моделирования. Именно математическое моделирование позволяет изучать и прогнозировать развитие атмосферных, гидрологических и геологических процессов на Земле без активного воздействия на них. Основу многих математических моделей механики сплошных сред, гидрометеорологии, экологии и других наук составляют неоднородные нестационарные трехмерные уравнения «конвекции–диффузии», которые описывают изменение таких параметров изучаемой среды, как плотность, компоненты скорости, температура, концентрация, турбулентность. Современные математические модели представляют собой систему из нескольких конвективно-диффузионных уравнений, дополненную замыкающими алгебраическими соотношениями, а также начальными и граничными условиями.

Для решения рассматриваемых систем дифференциальных уравнений применяются методы конечных разностей, конечного объема или конечных элементов. Приближенное решение ищется на весьма подробной сетке, состоящей из нескольких миллионов вычислительных узлов, или ячеек. Причем часто при оперативном моделировании атмосферных или гидрологических процессов необходимо в кратчайшие сроки вычислений на компьютере представить результаты прогностического моделирования.

Возможность ускорить процесс получения численного решения дает применение многопроцессорной и многоядерной вычислительной техники, снабженной графическими ускорителями [1, 2]. Разнообразие в архитектуре и компоновке высокопроизводительных вычислительных систем порождает разнообразие инструментов для построения параллельных программ. На сегодняшний день в области научных вычислений самыми популярными и узнаваемыми для написания параллельных программ являются технологии MPI, OpenMP и OpenACC. Это подталкивает исследователей к оценке перспективности использования разных подходов и их комбинаций для решения своих задач.

В работе [3] на примере модели атмосферы UM (Unified Model UK Met Office) рассматривается эффективность использования гибридного подхода MPI + OpenMP в сравнении с MPI. Также исследуется эффективность выполнения параллельной программы при фиксированном количестве процес-

сов, но при изменяющемся количестве задействованных ядер на каждом процессоре. Это обусловлено тем, что в вычислительных задачах особое внимание уделяется работе с памятью, и увеличение количества активных ядер в процессоре приводит к увеличению их конкуренции в борьбе за ресурсы процессора. Показано, что использование только технологии распараллеливания MPI оказывается эффективнее на всем диапазоне рассматриваемого количества процессов (до 1 536). В то же время использование только 12 из 16 ядер на каждом процессоре также позволяет повысить эффективность вычислений на 10–15%. Это происходит за счет увеличения пропускной способности памяти в расчете на одно активное ядро, сокращения издержек на коммуникации при уменьшении количества процессов MPI и активных ядер, увеличения частоты работы ядер в режиме turbo boost [3].

В работе [4] рассматривается реализация блока переноса примесей в моделях атмосферы и океана на основе гибридного программирования MPI + OpenMP. В работе показано, что при небольшом количестве задействованных MPI-процессов более целесообразно дальнейшее наращивание их количества. В этом случае дополнительное ускорение достигается за счет размещения данных локальных массивов в более быстрой кэш-памяти процессора. При достаточно большом числе задействованных MPI-процессов, наоборот, более эффективным методом ускорения расчетов становится увеличение числа нитей OpenMP. В работе делается акцент на то, что гибридный подход MPI + OpenMP является наиболее универсальным с точки зрения использования ресурсов современных суперкомпьютеров, позволяя оптимизировать число MPI-процессов и число нитей OpenMP с учетом задачи и архитектуры вычислительных элементов.

В работе [5] анализируются возможности повышения производительности вычислительных моделей горения на многоядерных компьютерах. Показано, что использование явного распределения данных по потокам оказывается более эффективным по сравнению с непосредственным применением директив OpenMP для автоматического распараллеливания циклов.

В работе [6] представлены результаты исследования параллельных реализаций схем расщепления на основе технологий MPI и OpenMP для решения трехмерной задачи теплопереноса. Проводится сравнение следующих параллельных реализаций: MPI, MPI + OpenMP и MPI + OpenMP с выделением потоков-«почтальонов». Под MPI + OpenMP реализацией понимается непосредственно применение автоматического распараллеливания циклов внутри MPI-процессов. Основная идея гибридной MPI + OpenMP реализации с «почтальонами» заключается в выделении на каждом из узлов с общей памятью одного OpenMP потока, отвечающего за выполнение обменов данными между процессами на фоне вычислений. Результаты показали, что использование подхода с выделением потоков-«почтальонов» значительно повышает эффективность простой гибридной реализации, но уступает простой MPI реализации.

Таким образом, проведенный анализ использования технологий распараллеливания MPI и OpenMP как отдельно, так и совместно показал, что наибольшей эффективности можно достичь при применении технологии MPI на большом количестве используемых процессов. При небольшом количестве многоядерных центральных процессоров на общей памяти разумнее использовать OpenMP технологию как более простую с точки зрения применения и не менее эффективную при небольшом числе задействованных вычислительных ядер. Постоянное развитие вычислительной техники (процессоров, сопроцессоров, графических процессоров), компиляторов и технологий параллельного программирования требует систематического проведения исследований по выбору наиболее эффективных технологий распараллеливания алгоритмов решения прикладных задач вычислительной математики.

Целью данной работы является проведение вычислительных экспериментов на гибридной кластерной вычислительной системе по определению наиболее перспективного использования параллельных вычислительных технологий (MPI, OpenMP, OpenACC) для получения эффективных параллельных программ для решения нестационарного трехмерного неоднородного уравнения «конвекции–диффузии». Полученные результаты будут использованы при создании параллельной версии развиваемой в Томском государственном университете мезомасштабной метеорологической модели высокого разрешения TSUNM3 для прогнозирования опасных погодных явлений и качества атмосферного воздуха над городом [7].

1. Математическая формулировка и численный метод

1.1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим обобщенное дифференциальное уравнение конвективно-диффузионного переноса:

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho V \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho W \Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S_\Phi. \quad (1)$$

Здесь t, x, y, z – время и координаты (ось Ox направлена на восток, Oy – на север, Oz – вертикально вверх); U, V, W – компоненты вектора скорости; ρ – плотность; K_{xy}, K_z – коэффициенты турбулентного обмена; S_Φ – источниковый член. В (1) могут рассматриваться в качестве $\Phi = 1$ ((1) принимает вид уравнения неразрывности), $\Phi = U, V, W, \Theta, q_v, q_{rain}$ (компоненты скорости, потенциальная температура воздуха, абсолютная влажность воздуха и концентрация дождевых капель). Для учета рельефа подстилающей поверхности $h(x, y)$ к уравнению (1) применяется преобразование вида:

$$x' = x; \quad y' = y; \quad z' = \frac{z - h(x, y)}{H - h(x, y)} H. \quad (2)$$

В качестве граничных условий для (1) на подстилающей поверхности используются граничные условия третьего рода:

$$z = h(x, y): K_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \alpha(\Phi - \Phi_w). \quad (3)$$

На верхней границе – граничные условия второго рода:

$$z = H: K_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \gamma_\Phi. \quad (4)$$

На боковых границах – граничные условия «радиационного» типа [8]:

$$x = -L; x = L: \frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_\Phi^x \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} + C_\Phi^x \frac{\partial \Phi_S}{\partial x}; \quad (5)$$

$$y = -L; y = L: \frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_\Phi^y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} + C_\Phi^y \frac{\partial \Phi_S}{\partial y}. \quad (6)$$

Здесь индекс S соответствует параметрам, определяемым из модели глобального масштаба [9]; C_Φ^x, C_Φ^y – фазовая скорость [8]; $2L$ – размер области по горизонтали.

Начальные условия для уравнения (1) определяются в результате интерполяции Φ_S , вычисляемой на более грубой сетке по модели глобального масштаба [9], на более подробную сетку мезомасштабной метеорологической модели.

1.2. Численный метод решения задачи

Для решения задачи (1)–(6) используются структурированные сетки с равномерным шагом по горизонтальным направлениям Ox и Oy и сгущающиеся к поверхности Земли по вертикальному. При аппроксимации дифференциальной постановки задачи (1)–(6) используется метод конечного объема со вторым порядком аппроксимации по пространственным переменным с применением оригинальной монотонизированной схемы для конвективных членов, построенной с использованием интерполяционных весовых сплайнов [10].

Рассматриваемые явно-неявные аппроксимации во времени (Адамса–Бэшфорда и Кранка–Никольсона) обеспечивали второй порядок точности при интегрировании уравнения (1) по времени. В итоге полученная разностная схема – аналог (1) – имела следующий вид:

$$\frac{\rho_P^{k+1} \Phi_P^{k+1} - \rho_P^k \Phi_P^k}{\tau} Vol_P + \frac{3}{2} \iiint_{Vol_P} \left[\frac{\partial \rho U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho V \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho W \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - S_\Phi \right] dx dy dz -$$

$$-\frac{1}{2} \iiint_{Vol_p} \left[\frac{\partial p U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial p V \Phi}{\partial y} + \frac{\partial p W \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - S_{\Phi} \right]^{k-1} dx dy dz -$$

$$-\frac{1}{2} \iiint_{Vol_p} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]^{k+1} dx dy dz - \frac{1}{2} \iiint_{Vol_p} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]^k dx dy dz = 0. \quad (7)$$

Здесь k – номер слоя по времени; (x_p, y_p, z_p) – координаты середины конечного объема; Vol_p – значение конечного объема; здесь и далее нижний индекс p (point) указывает, что переменная определяется в центре конечного объема. Величина шага интегрирования по времени τ выбиралась из условия устойчивости разностной схемы. Рассматриваемая разностная схема является экономичной и для вычисления значений сеточной функции $\{\Phi_p^{k+1}\}$ позволяет использовать метод прогонки. Следует отметить, что неявная аппроксимация для вертикального диффузионного переноса, который имеет важное значение в пограничном слое атмосферы, позволяет уйти от более жесткого ограничения на шаг интегрирования по времени.

Вычислительное ядро программы расчета значений сеточной функции $\{\Phi_p^{k+1}\}$ на новом $(k+1)$ -м слое по времени представлено на рис. 1. Пунктирными линиями выделен блок, который может быть преобразован в подпрограмму TDMA(I, J) для вычисления $\{\Phi_p^{k+1}\}$ на отдельной вертикальной сеточной линии с помощью метода прогонки.

Для оценки времени работы программной реализации (7) рассматривалась задача о переносе примеси от постоянно действующего источника в области с размерами $L = 25\,000$ м и $H = 600$ м. Источник примеси расположен в точке с координатами $(0,014L, 0,014L, 0,0101H)$. Компоненты скорости считались постоянными: $U = 1$ м/с, $V = 1$ м/с, $W = 0$ м/с. Коэффициенты диффузии также принимались постоянными $K_{xy} = K_z = 100$ м²/с. Шаг по времени выбирался равным 6 с, а время окончания моделирования $TimeFin = 500\tau$. Расчет проводился на сетке $256 \times 256 \times 32$ на узлах вычислительного кластера ТГУ Cyberia со следующими характеристиками: 48Gb RAM, 2xIntel® Xeon® CPU 5670, 2,93 ГГц. Использовался компилятор Intel Fortran. Время счета последовательной программы (см. рис. 1) составило 107 с. Точность проведения расчета контролировалась по известному аналитическому решению рассматриваемой задачи.

```

Time = 0
Do While (Time < TimeFin)
  Do I = 1,Nx
    Do J = 1,Ny
      !-----TDMA(I,J)-----
      P(0) = !из разностного аналога формулы (3)
      Q(0) = !из разностного аналога формулы (3)
      Do K = 1,Nz
        !расчет коэффициентов разностной схемы и
        !прогоночных коэффициентов P и Q из разностной схемы (7)
      End Do !цикл K
      F(Nz+1,I,J) = Q(Nz) / (1.0 - P(Nz))
      Do K = Nz,0,-1
        F(K,I,J) = P(K) * F(K+1,I,J) + Q(K)
      End Do !цикл K
      !задание боковых граничных условий из (5) и (6)
      !-----TDMA(I,J)-----
    End Do !цикл J
  End Do !цикл I
  F0(:, :, :) = F(:, :, :) !обмен значениями
  Time = Time + tau
End Do !While

```

Рис. 1. Вычислительное ядро численного метода (7) решения уравнения переноса
 Fig. 1. The computational kernel of the numerical method (7) of solving the transport equation

2. Параллельные алгоритмы для численного метода

2.1. Технология Message Passing Interface

При применении этой технологии в качестве основного подхода распараллеливания для вычислительной системы с распределенной памятью выбрана двумерная (по осям Ox и Oy) декомпозиция сеточной области на подобласти (рис. 2).

При такой декомпозиции каждому процессорному элементу (ПЭ), задействованному в вычислениях, распределяются значения сеточной функции $\{\Phi_P^k\}$, принадлежащие локальной подобласти, для вычисления значений на следующем слое по времени $\{\Phi_P^{k+1}\}$ с использованием метода прогонки.

Из-за используемого шаблона явно-неявной разностной схемы (7) (см. рис. 2, выделено в нижнем правом углу) для вычисления очередного приближения в приграничных узлах каждой локальной подобласти необходимо знать значения сеточной функции $\{\Phi_P^k\}$ соседней граничащей подобласти. Для этого создаются фиктивные ячейки (на рис. 2 светлые значки) для хранения данных с процессорного элемента, рассчитывающего $\{\Phi_P^{k+1}\}$ в соседней подобласти декомпозиции, и организуются пересылки этих граничных значений, необходимых для обеспечения однородности вычислений в каждой локальной подобласти [11]. Для передачи данных другим процессорным элементам и получения необходимых для продолжения вычислений данных от них в данной работе используется интерфейс передачи сообщений MPI.

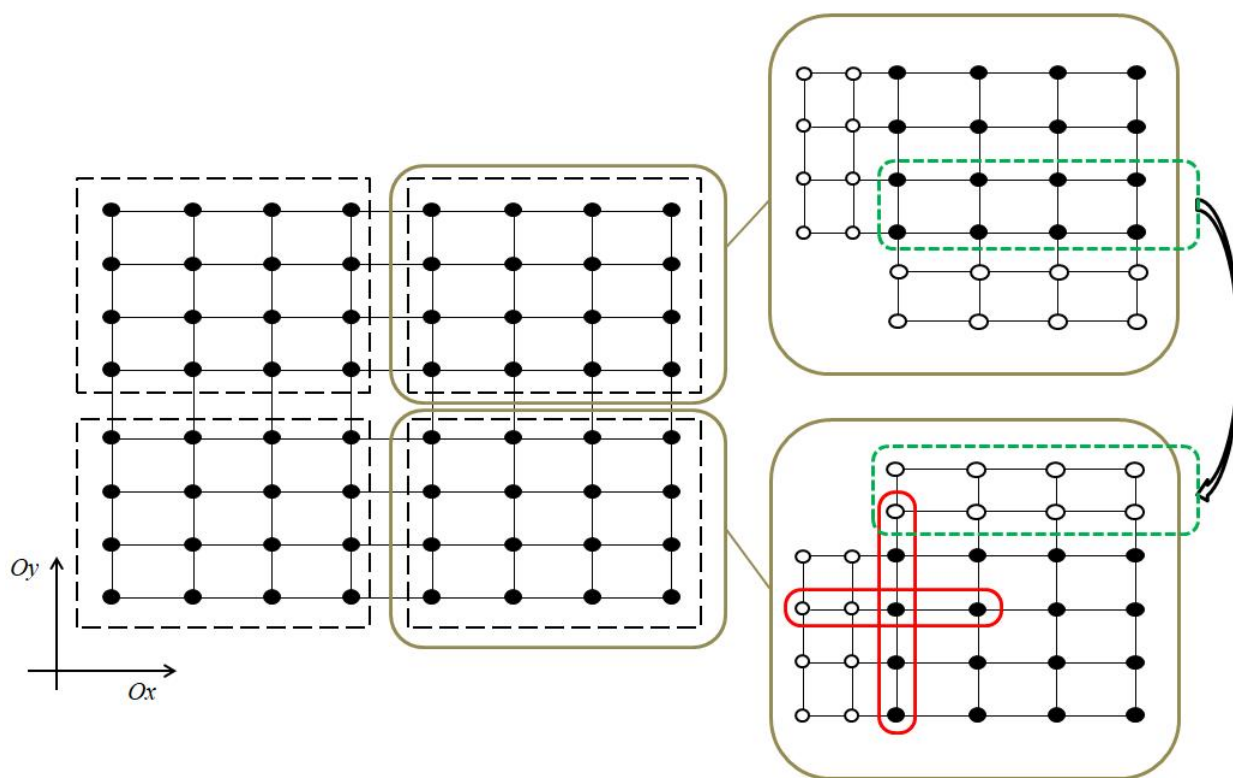


Рис. 2. Двумерная декомпозиция сеточной области вдоль направлений Ox и Oy и организация передачи данных между подобластями

Fig. 2. Two-dimensional decomposition of the grid area along the Ox and Oy directions and the organization of data transfer between the subdomains

При разработке параллельной программы дополнительно используется ряд функций MPI для создания и тестирования двумерной декартовой логической топологии, создания новых типов данных для обеспечения эффективной пересылки между процессорами, а также функция SENDRECV (в процедуре MPE_SEND_F) для проведения парных блокирующих пересылок значений сеточной функции в соседних подобластях декомпозиции (рис. 3).

```

Time = 0
Do While (Time < TimeFin)
  Do I = 2, Px-1 !- число узлов в подобласти по x (Рис.2)
    Do J = 2, Py-1 !- число узлов в подобласти по y (Рис.2)
      CALL TDMA(I,J)
    End Do !цикл J
  End Do !цикл I
  Call MPE_SEND_F !обмен значений между ПЭ
  F0(:, :, :) = F(:, :, :) !обмен значениями между слоями k и k+1
  Time = Time + tau
End Do !While
    
```

Рис. 3. Фрагмент параллельной части MPI-программы для решения уравнения переноса
 Fig. 3. Fragment of the parallel part of the MPI program for solving the transport equation

Проведенные на вычислительном кластере ТГУ Cyberia (использовались узлы с указанными выше характеристиками) расчеты показали достаточно высокую эффективность (не ниже 70% на 128 процессах) выбранного способа распараллеливания явно-неявного вычислительного алгоритма (рис. 4, светлые значки). Для сравнения на этом же рисунке приведены значения ускорения и эффективности, полученные с использованием технологии OpenMP (см. п. 2.2). Значения ускорения рассчитывались по формуле $S_p = T_1/T_p$, а эффективность параллельной программы вычислялась как $E_p = S_p/p$. Здесь T_1 , T_p – время счета параллельной программы на 1 и p процессах. Из рис. 4 также видно, что время счета MPI-программы снижается практически линейно. При количестве процессов параллельной программы $p = 128$ время счета снижается в 90 раз по сравнению с временем счета последовательной программы.

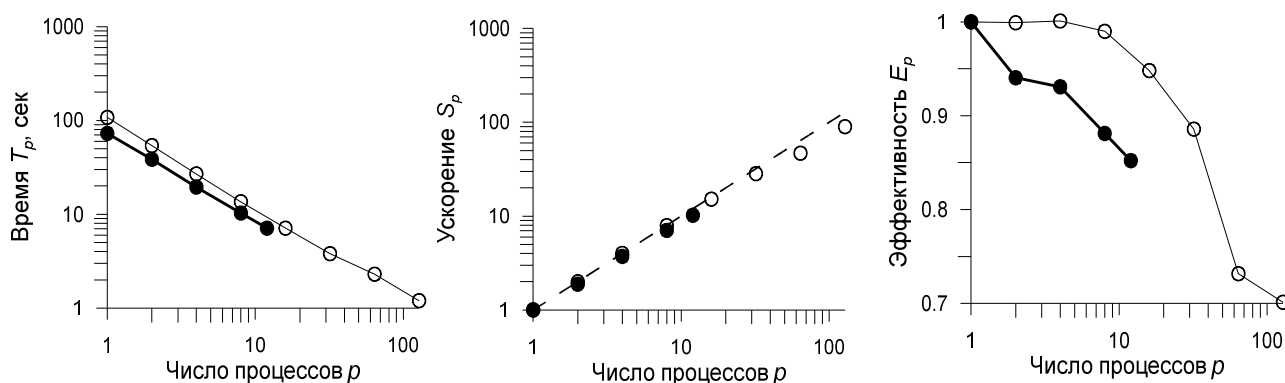


Рис. 4 Время счета, ускорение и эффективность MPI (○) и OpenMP (●) программ.
 Штриховая линия представляет график идеального ускорения параллельных программ
 Fig. 4 Time of calculation, acceleration and efficiency of MPI (○) and OpenMP (●) programs.
 The dashed line represents the graph of the ideal acceleration of parallel programs

Этот результат чрезвычайно важен при разработке программ для проведения прогностических расчетов, когда требуется за минимальное время выполнить прогноз опасного погодного явления (ливень, интенсивный снегопад, заморозки, град и т.п.), тем самым повышая уровень заблаговременной предупредительности и оставляя больше времени для подготовки и снижения последствий.

2.2. Технология Open Multi-Processing (OpenMP)

Данная технология распараллеливания применяется для многопроцессорных (многоядерных) вычислительных систем с общей оперативной памятью. Основная задача, которая стоит перед программистом, выбравшим эту технологию распараллеливания, заключается в распределении вычислений между параллельно выполняемыми потоками обработки общих разделяемых данных. Это реализуется с помощью специальных директив препроцессора используемого языка программирования, вызова библиотечных процедур и задания переменных окружения [12].

В рассматриваемом случае при создании параллельного многопоточного приложения особое внимание нужно уделить основному вычислительному блоку (см. рис. 1), в котором производится перевычисление значений сеточной функции $\{\Phi_P^{k+1}\}$ на каждом следующем слое по времени, а также распределению вычислений, выполняемых для каждого фиксированного значения переменных циклов (I, J) , между задействованными в расчетах многоядерными процессорами. Для этого в последовательную версию программы в соответствующих местах нужно разместить соответствующие директивы OpenMP (рис. 5). Заметим, что трудоемкость преобразования последовательной программы в параллельную с помощью технологии OpenMP значительно ниже, чем при разработке MPI параллельной программы. Более того, для того чтобы размещенные в OpenMP-программе директивы заработали, нужно при компиляции программы использовать некоторые дополнительные опции. Без них директивы OpenMP при компиляции будут игнорироваться.

```

Time = 0
Do While (Time < TimeFin)
$OMP PARALLEL PRIVATE(I,J)
$OMP DO
    Do I = 1,Nx
        Do J = 1,Ny
            CALL TDMA(I,J)
        End Do !цикл J
    End Do !цикл I
$OMP END DO
    !обмен значениями
$OMP DO
    Do I = 0,Nx+1
        Do J = 0,Ny+1
            Do K = 0,Nz+1
                F0(K,I,J) = F(K,I,J)
            End Do !цикл K
        End Do !цикл J
    End Do !цикл I
$OMP END DO
$OMP END PARALLEL
    Time = Time + tau
End Do !While

```

Рис. 5. Фрагмент параллельной части OpenMP-программы для решения уравнения переноса
Fig. 5. Fragment of the parallel part of the OpenMP program for solving the transport equation

При проведении расчетов на одном вычислительном узле кластера ТГУ Cyberia с двумя процессорами Intel Xeon 5670, каждый из которых имеет 6 ядер, были получены следующие результаты ускорения и эффективности разработанной OpenMP-программы (см. рис. 4). Из рисунка видно, что в относительных величинах ускорения S_p и эффективности E_p , а также по возможности привлечения других вычислительных узлов кластера OpenMP-программа уступает MPI-программе, однако в абсолютных значениях время работы OpenMP-программы для каждого параллельного запуска несколько меньше (различие уменьшается с ростом количества процессов). Тем не менее с использованием относительно простой технологии параллельного программирования OpenMP на одном вычислительном узле кластера Cyberia можно получить 10-кратное ускорение параллельной программы по сравнению с последовательной.

2.3. Технология Open Accelerators (OpenACC)

Данная технология параллельного программирования используется для создания параллельных программ на гетерогенных вычислительных системах с центральными и графическими процессорами. Эта технология параллельного программирования, как и технология OpenMP, с помощью директив компилятора позволяет отмечать участки программы, которые следует выполнять параллельно на

графическом процессоре, обозначает общие и локальные переменные [13]. Здесь также при параллельном программировании большое внимание уделяется распределению циклически выполняющихся вычислений графическому процессору (рис. 6).

```

Time = 0
!$ACC DATA COPYIN(F0) COPYOUT (F)
Do While (Time<TimeFin)
!$ACC KERNELS LOOP
  Do I = 1,Nx
    Do J = 1,Ny
      Do K = 1,Nz
        !расчет коэффициентов разностной схемы и
        !коэффициентов метода прогонки из разностного аналога (7)
      End Do !цикл K
    End Do !цикл J
  End Do !цикл I
!$ACC END KERNELS LOOP
!$ACC KERNELS LOOP
  Do I = 1,Nx
    Do J = 1,Ny
      Do K = 1,Nz
        !расчет прогоночных коэффициентов P и Q по формулам метода прогонки
      End Do !цикл K
      F(Nz+1,I,J) = Q(I,J,Nz)/(1.0 - P(I,J,Nz))
      Do K = Nz,0,-1
        F(K,I,J) = P(I,J,K) * F(K+1,I,J) + Q(I,J,K)
      End Do !цикл K
    End Do !цикл J
  End Do !цикл I
!$ACC END KERNELS LOOP
!$ACC KERNELS
  !задание боковых граничных условий (5) и (6). Обмен значениями
!$ACC END KERNELS
  Time = Time + tau
End Do !While
!$ACC END DATA

```

Рис. 6. Фрагмент параллельной части OpenACC-программы для решения уравнения переноса

Fig. 6. Fragment of the parallel part of the OpenACC program for solving the transport equation

Результаты счета параллельной программы, созданной с помощью технологии OpenACC и компилятора Portland Group Fortran, на одном вычислительном узле кластера ТГУ Cyberia с 14-ядерным процессором Intel Xeon E5-2695v3 и графическим процессором NVIDIA Tesla K80 показали время выполнения 3 с, что существенно меньше времени выполнения последовательной программы и в несколько раз меньше времени выполнения MPI- и OpenMP-программ на 16 процессах на узлах вычислительного кластера Cyberia.

Заключение

Для выбора наиболее перспективной технологии параллельного программирования для разработки высокопроизводительного программного обеспечения для численного решения неоднородного нестационарного трехмерного конвективно-диффузионного уравнения с помощью метода конечного объема и явно-неявных разностных схем были проведены вычислительные эксперименты на вычислительном кластере ТГУ Cyberia. В качестве технологий параллельного программирования рассматривались международные стандарты программирования Message Passing Interface – для многопроцессорных систем с распределенной памятью, Open Multi-Processing – для многопроцессорных систем с общей памятью, и Open Accelerators – для гибридных вычислительных систем с графическими процессорами.

Расчеты, проведенные на структурированных разностных сетках с количеством узлов более 2 млн, показали, что наиболее высокопроизводительную программу для решения рассматриваемой задачи можно получить с помощью технологии MPI. На 128 процессах (10–20 CPUs, связанных компьютерной сетью) она дает ускорение вычислений почти в 90 раз по сравнению с расчетом последовательной программы. Более «бюджетные» варианты: использование технологии OpenACC для графических процессоров NVIDIA (1 CPU + 1 GPU на одном вычислительном узле) при тех же условиях дает ускорение вычислений почти в 30 раз; применение технологии OpenMP (2 CPUs на одном вычислительном узле) обеспечивает ускорение в 10 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Powers, J.G., Klemp J.B., Skamarock W.C., Davis C.A., Dudhia J., Gill D.O., Coen J.L., Gochis D.J., Ahmadov R., Peckham S.E., Grell G.A., Michalakes J., Trahan S., Benjamin S.G., Alexander C.R., Dimego G.J., Wang W., Schwartz C.S., Romine G.S., Liu Z., Snyder C., Chen F., Barlage M.J., Yu W., Duda M.G. The Weather Research and Forecasting Model: Overview, System Efforts and Future Directions // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 2017. V. 98. P. 1717–1737. DOI: 10.1175/BAMS-D-15-00308.1
2. Ridwan R., Kistijantoro A.I., Kudsy M., Gunawan D. Performance evaluation of hybrid parallel computing for WRF model with CUDA and OpenMP // 2015 3rd Int. Conf. on Information and Communication Technology (ICoICT), Nusa Dua. 2015. P. 425–430. DOI: 10.1109/ICoICT.2015.7231463
3. Bermous I., Steinle P. Efficient performance of the Met Office Unified Model v8.2 on Intel Xeon partially used nodes // *Geosci. Model Dev.* 2015. V. 8. P. 769–779.
4. Мортиков Е.В. Программная реализация блока переноса примесей в климатических моделях на основе гибридного программирования MPI-OpenMP // *Суперкомпьютерные дни в России* : тр. междунар. конф. 2016. С. 521–529.
5. Кандрюкова Т.А., Лаевский Ю.М. О численном моделировании фильтрационного горения газов на многоядерных вычислительных системах // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2014. Т 17, № 1. С. 55–64.
6. Воронин К.В. Численное исследование mpi/openmp реализации на основе асинхронной работы с потоками для трехмерной схемы расщепления в задачах теплопереноса // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2014. Т 17, № 2. С. 41–49.
7. Starchenko A.V., Bart A.A., Bogoslovskiy N.N., Danilkin E.A., Terenteva M.A. Mathematical modelling of atmospheric processes above an industrial centre // *Proc. of SPIE 9292, 20th Int. Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics*. 2014. V. 9292. P. 929249-1–929249-30.
8. Carpenter K. Note on the Paper «Radiation Condition for the Lateral Boundaries of Limited-Area Numerical Models» by Miller, M. and Thorpe, A. (vol. 107. pp. 615–628) // *J. of Royal Meteorology Society*. 1982. V. 108. P. 717–719.
9. Tolstykh M.A. Semi-Lagrangian high-resolution atmospheric model for numerical weather prediction // *Russian Meteorology and Hydrology*. 2001. № 4. P. 1–9.
10. Семёнова А.А., Старченко А.В. Разностная схема для нестационарного уравнения переноса, построенная с использованием локальных весовых интерполяционных кубических сплайнов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2017. № 49. С. 61–74. DOI: 10.17223/19988621/49/6
11. Старченко А.В., Берцун В.Н. Методы параллельных вычислений. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2013. 234 с.
12. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. М. : Изд-во МГУ, 2009. 77 с.
13. Романенко А.А. Особенности адаптации программ под GPU с использованием технологии OpenACC. Новосибирск : ИИЦ НГУ, 2016. 33 с.

Поступила в редакцию 15 июля 2019 г.

Semenov E.V., Starchenko A.V., Danilkin E.A., Prohanov S.A. (2020) THE CHOICE OF TECHNOLOGY FOR PARALLELIZATION OF NUMERICAL THE SOLUTION OF THE CONVECTIVE-DIFFUSION EQUATION ON HYBRID MULTIPROCESSOR COMPUTER SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 111–120

DOI: 10.17223/19988605/51/13

This work is devoted to comparison of three technologies for building parallel algorithms, by the example of numerical solution of the nonstationary 3D convection-diffusion equation. This equation is the basis of many models of continuum mechanics, hydrometeorology, ecology, and others. When doing operational modeling of atmospheric or hydrological processes, it is necessary to present the results of prognostic modeling in the shortest possible time computing (on a computer). The use of multiprocessor and multicore computing equipment gives a great opportunity to accelerate the process of obtaining a numerical solution.

This work is aimed to carry out computational experiments on a hybrid computing system in order to determine the most promising use of parallel computing technologies (MPI, OpenMP, OpenACC) to obtain efficient parallel programs for solving the nonstationary 3D convection-diffusion equation.

When applying MPI technology as the main approach of parallelization for a distributed-memory computer system, a two-dimensional grid domain decomposition into subdomains was chosen. The calculations done on TSU Cyberia computing cluster showed sufficiently high efficiency of the chosen method for parallelization of the explicit-implicit computational algorithm.

Open Multi-Processing technology is used for multiprocessor (multicore) computer systems with shared RAM. The results showed that OpenMP-program is inferior to MPI-program in terms of acceleration; however, in absolute values, operate time of OpenMP-program is slightly shorter for each parallel start (the difference decreases with the increase in the number of processes).

The calculation results of the parallel program created using OpenACC technology on one computing node of TSU Cyberia cluster showed about 3 seconds execution time, which is significantly shorter than the execution time of the sequential program, and several times shorter than that of MPI- and OpenMP-programs on 12 or 16 processes on computing nodes of Cyberia cluster.

The calculations done on structured difference grids with more than 2 million nodes showed that the most high-performance program for solving the task in question can be obtained using MPI technology. It accelerates calculations in almost 90 times in comparison with the calculation of the sequential program on 128 processes (10-20 CPUs connected with computer network). More “low-end” options include the use of OpenACC technology for NVIDIA graphic processors (1 CPU+1GPU on one computing node) which accelerates calculations in almost 30 times under the same conditions, and the use of OpenMP technology (2 CPUs on one computing node) accelerates calculations in 10 times.

Keywords: parallel computing; MPI; OpenMP; OpenACC; convective-diffusion equation; explicit-implicit differencing schemes.

SEMENOV Evgenii Vitalevich (Post-graduate Student, Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: semyonov@math.tsu.ru

STARCHENKO Alexander Vasilevich (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: starch@math.tsu.ru

DANILKIN Evgeniy Alexandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor of the Department of Computational Mathematics and Computer Modelling, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ugin@math.tsu.ru

PROHANOV Sergey Anatolevich (Programmer of the Interregional Supercomputer Center of the National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: viking@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Powers, J.G., Klemp, J.B., Skamarock, W.C., Davis, C.A. et al. (2017) The Weather Research and Forecasting Model: Overview, System Efforts and Future Directions. *Bulletin of American Meteorology Society*. 98. pp. 1717–1737. DOI 10.1175/BAMS-D-15-00308.1
2. Ridwan, R., Kistijantoro, A.I., Kudsy, M. & Gunawan, D. (2015) Performance evaluation of hybrid parallel computing for WRF model with CUDA and OpenMP. *3rd International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT)*. Nusa Dua. pp. 425–430. DOI: 10.1109/ICoICT.2015.7231463
3. Bermous, I. & Steinle, P. (2015) Efficient performance of the Met Office Unified Model v8.2 on Intel Xeon partially used nodes. *Geoscientific Model Development*. 8. pp. 769–779. DOI: 10.5194/gmd-8-769-2015
4. Mortikov, E.V. (2016) [Software implementation of impurity transfer unit in climate models based on hybrid programming MPI-OpenMP]. *Superkomp'yuternye dni v Rossii* [Russian Supercomputing Days]. Proc. of the International Conference. Moscow State University. pp. 521–529.
5. Kandryukova, T.A. & Laevskii, Yu.M. (2014) Simulating the filtration combustion of gases on multi-core computers. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 8(2). pp. 218–226. DOI: 10.1134/S1990478914020082
6. Voronin, K.V. (2014) A numerical study of an MPI/OpenMP implementation based on asynchronous threads for a three-dimensional splitting scheme in heat transfer problems. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 8(3). pp. 436–443. DOI: 10.1134/S199047891403017X
7. Starchenko, A.V., Bart, A.A., Bogoslovsky, N.N., Danilkin, E.A. & Terenteva, M.A. (2014) Mathematical modelling of atmospheric processes above an industrial centre. *Proc. of SPIE 9292, 20th Int. Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics*. 9292. pp. 929249-1–929249-30. DOI: 10.1117/12.2075164
8. Carpenter, K. (1982) Note on the Paper “Radiation Condition for the Lateral Boundaries of Limited-Area Numerical Models” by Miller, M. and Thorpe, A. (vol. 107. pp. 615–628). *Journal of Royal Meteorology Society*. 108. pp. 717–719.
9. Tolstykh, M.A. (2001) Semi-Lagrangian high-resolution atmospheric model for numerical weather prediction. *Russian Meteorology and Hydrology*. 4. pp. 1–9.
10. Semyonova, A.A. & Starchenko, A.V. (2017) The finite-difference scheme for the unsteady convection-diffusion equation based on weighted local cubic spline interpolation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 61–74. DOI: 10.17223/19988621/49/6.
11. Starchenko, A.V. & Bertsun, V.N. (2013) *Metody parallel'nykh vychisleniy* [Parallel Computing Methods]. Tomsk: Tomsk State University.
12. Antonov, A.S. (2009) *Parallel'noe programmirovaniye s ispol'zovaniem tekhnologii OpenMP* [Parallel programming using OpenMP technology]. Moscow: Moscow State University.
13. Romanenko, A.A. (2016) *Osobennosti adaptatsii programm pod GPU s ispol'zovaniem tekhnologii OpenACC* [Features of the adaptation programs under the GPU using technology OpenACC]. Novosibirsk: Novosibirsk State University.

УДК 004.02:332.142.2

DOI: 10.17223/19988605/51/14

А.А. Сидоров, П.В. Сенченко, В.Ф. Тарасенко**ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ТЕРРИТОРИАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ
РАЗВИТИЯ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ***Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект № FEWM-2020-0036.*

Предлагаются построенные на основе принципов иерархичности, модульности и сбалансированности модель и методика интегральной оценки уровня цифровизации территорий, разработанные с учетом доступности данных о соответствующих процессах. Выявлена дифференциация уровня цифровизации регионов России, сопоставлены европейская и российская практики. Построены модель определения интегральной меры, которая используется для оценки однотипных объектов по множеству критериев для выявления различий между ними, и оценка уровней цифровизации территорий, сложившихся к настоящему моменту. Полученные данные могут быть использованы для корректировки политики в области цифровой трансформации общественных отношений.

Ключевые слова: интегральная оценка; цифровизация; весовые коэффициенты.

С целью повышения конкурентоспособности страны, качества жизни, обеспечения экономического роста и национального суверенитета России в 2017 г. утверждена программа «Цифровая экономика Российской Федерации», преобразованная в 2018 г. в национальный проект. Сегодня вопросам развития цифровой экономики уделяется значительное внимание. Во многих работах [1–4] исследуется взаимосвязь между отдельными сферами общественных отношений и тенденциями цифровых трансформаций. Вместе с тем вопросы измерения последних отражены фрагментарно. Так, например, Московской школой управления СКОЛКОВО разработана методология расчета индекса «Цифровая Россия» субъектов Российской Федерации [5]. В качестве параметров формализованы и обоснованы 7 составляющих (нормативное регулирование и административные показатели; кадры и учебные программы; исследовательские компетенции и технологические заделы; информационная инфраструктура; информационная безопасность; экономические показатели; социальный эффект) и их веса, которые позволяют получить значение индекса цифровизации по каждому региону. Несмотря на общую прозрачность указанного подхода, он имеет ряд «узких» мест: чрезмерную опору на экспертные суждения; невозможность адаптации методологии для иных целей и территорий; отсутствие описания применения процедур многомерного статистического анализа. Также следует отметить, что его основу составляет квалиметрическая оценка уровня цифровизации экономики в России, предложенная А.В. Тебекиным, ориентированная, согласно [6], на оценку эффективности реализации Программы «Цифровая экономика Российской Федерации», а не цифровизации как таковой.

В работе В.Г. Халина и Г.В. Черновой [7] анализируются некоторые подходы, с помощью которых возможно прямо или косвенно оценить степень цифровизации на международном уровне: индекс сетевой готовности (Networked Readiness Index); глобальный инновационный индекс (Global Innovation Index); индекс цифровизации экономики и общества (Digital Economy and Society Index); индекс международной цифровизации экономики и общества (International Digital Economy and Society Index). Ю.Е. Хохловым и соавт. данный перечень дополняется посредством включения иных методик [8]: индекса развития информационно-коммуникационных технологий (ICT Development Index); индекса цифровой эволюции (Digital Evolution Index); глобального индекса кибербезопасности

(Global Cybersecurity Index); глобального индекса коннективности (Global Connectivity Index). Анализ этих подходов приводит к следующему выводу: оценка во многом основывается на экспертных суждениях, что может приводить к манипуляции результатами.

Предлагаемый подход ориентирован на повышение объективности получаемых результатов посредством определения весовых коэффициентов частных показателей при аддитивной свертке на основе оценки одной из мер вариации [9] в противовес использованию в методиках, применяемых для решения аналогичных задач (например, ICT Development Index, Networked Readiness Index, Digital Economy and Society Index и т.п.), экспертных оценок. Отказ от привлечения экспертов к определению значений весовых коэффициентов также позволяет снизить объем временных, финансовых и организационных ресурсов в рамках процедуры нахождения значения интегрального показателя, структура которого построена с использованием многослойной функциональной сети [10].

1. Модель и интегральная оценка уровня цифровизации территорий

Следует признать, что ни одна из существующих методик оценки уровня цифровизации территорий не может быть признана универсальной, что связано со многими обстоятельствами, в числе которых слабая адаптация тех или иных подходов к существующей системе информационного обеспечения рассматриваемой процедуры, выраженная в неполноте сведений по всем оцениваемым объектам, периодическом пересмотре критериев оценки, отсутствии достоверных исходных данных и т.п. Указанные ограничения оказывают существенное влияние на качество модели, которая может быть положена в основу расчета интегральной меры. В работе для оценки уровня цифровизации субъектов Российской Федерации в контексте его сопоставления с европейским опытом предлагается использовать модель, основывающуюся на пересекающемся наборе исходных показателей, собираемых Росстатом [11] и Евростатом [12] (табл. 1) для характеристики развития информационного общества.

Таблица 1

Исходные показатели для определения уровня цифровизации территориальных образований, %

Условное обозначение	Наименование показателя
g^1	Удельный вес домашних хозяйств, имеющих персональные компьютеры, в общем числе домашних хозяйств
g^2	Удельный вес домашних хозяйств, имеющих доступ к сети Интернет с мобильных устройств (мобильного телефона или смартфона, устройства для чтения электронных книг и др.), в общем числе домашних хозяйств
g^3	Удельный вес домашних хозяйств, имеющих широкополосный доступ к сети Интернет, в общем числе домашних хозяйств
g^4	Удельный вес населения, когда-либо использовавшего сеть Интернет, в общей численности населения в возрасте 15–74 лет
g^5	Удельный вес населения, использующего сеть Интернет практически каждый день, в общей численности населения в возрасте 15–74 лет
g^6	Удельный вес населения, использующего мобильные устройства для выхода в сеть Интернет, в общей численности населения в возрасте 15–74 лет
g^7	Удельный вес населения, использующего сеть Интернет для заказа товаров, услуг, в общей численности населения в возрасте 15–74 лет
g^8	Удельный вес населения, использующего сеть Интернет для получения публичных услуг в электронной форме, в общей численности населения в возрасте 15–72 лет, получающего публичные услуги
g^9	Удельный вес организаций, использующих сеть Интернет, в общем числе организаций
g^{10}	Удельный вес организаций, имеющих широкополосный доступ к сети Интернет, в общем числе организаций
g^{11}	Удельный вес организаций, имеющих веб-сайт, в общем числе организаций
g^{12}	Удельный вес организаций, использующих облачные сервисы, в общем числе организаций
g^{13}	Удельный вес организаций, использующих электронный обмен данными между своими и внешними информационными системами по форматам обмена, в общем числе организаций

Модель информационного общества, согласно [13], в рамках которого формируются и развиваются процессы цифровизации, представляется совокупностью подсистем, которые на макроуровне могут быть обозначены как «государство», «бизнес» и «население». «Государству» отведены функции интеграции коллективных интересов и создания совместных благоприятных условий для «бизнеса» и «населения». Его деятельность, направленная на повышение собственной эффективности, в том числе во взаимоотношениях с двумя другими элементами модели, находит отражение в функционировании и развитии социума, с одной стороны, и реального сектора экономики – с другой. Данный тезис позволяет исключить прямое рассмотрение государства в модели интегральной оценки уровня цифровизации территорий, трансформировав его роль в формирование потенциала для развития и населения, и бизнеса через создание (поддержание, содействие в реализации) необходимой инфраструктуры. Таким образом, в структуре интегрального показателя выделяется не три направления, соответствующих количеству подсистем рассматриваемой модели, а два (рис. 1), из которых формируется обобщенная мера: уровни цифровизации, отражающие соответствующие процессы в секторе населения и / или домашних хозяйств (b_k^1) и бизнеса / хозяйствующих субъектов (b_k^2). Каждый из них, в свою очередь, формируется за счет инфраструктурного потенциала (c_k^{11} – для населения, c_k^{21} – для бизнеса) и сложившегося к моменту проведения оценки уровня вовлеченности в характерные для информационного общества взаимодействия и трансформации (c_k^{12} – для населения, c_k^{22} – для бизнеса). Каждый из субинтегральных компонентов оценки, представленных на третьем и четвертом уровнях / слоях сети, а также интегральный показатель (см. рис. 1) рассчитываются посредством аддитивной свертки ($v = \sum_{j=1}^n \eta^j w^j$, где η^j – весовой коэффициент нормированного значения исходного или субинтегрального показателя; w^j – значение показателя) соответственно из нормированных значений исходных показателей (слой 2 на рис. 1) или субинтегральных величин нижестоящего иерархического уровня функциональной сети. Отображение для каждого k -го объекта из g_k^j в e_k^j (см. рис. 1) в рамках приведения в сопоставимый вид всех показателей осуществляется на основе линейного масштабирования, подробно рассмотренного в [10]. Модель интегрального показателя, сопряженная с содержательным обоснованием структуры, представляется впервые.

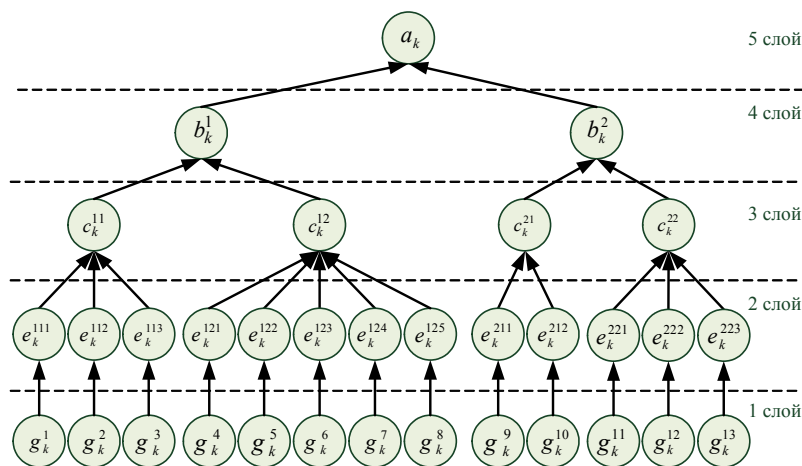


Рис. 1. Структура интегрального показателя уровня развития информационного общества: авторская модель

Fig. 1. The structure of the integral indicator of the level of development of the information society: author's model

В [14] представлен подробный обзор методов, используемых для расчета весовых коэффициентов: 1) методы, основанные на парном сравнении; 2) методы, использующие аналитические зависимости показателей важности; 3) формальные методы. При этом доказано и сделаны выводы, что при строгом ранжировании использование методов парного сравнения или методов, основанных на аналитической взаимосвязи весовых коэффициентов, приводит к тому, что весовые коэффициенты наиболее важного и наименее важного показателя отличаются друг от друга в строго фиксированное

количество раз, которое, в свою очередь, не учитывает суть оцениваемой категории и зависит исключительно от используемой вычислительной процедуры и числа рассматриваемых критериев. Формальные методы также не свободны от недостатков: они предусматривают задавание в качестве исходных данных численного значения коэффициента превосходства, являющегося также субъективной величиной, и на практике это может привести к «намеренным» искажениям обобщенной меры. Кроме того, установление значений весовых коэффициентов может быть поручено экспертам, каждый из которых вкладывает в понятие собственный смысл, что подразумевает замену строгих обоснований «разумными соображениями». Недостатки такого подхода очевидны: чрезмерный субъективизм, сложность организации экспертного опроса, трудность в подборе экспертов, затраты ресурсов и т.п.

В связи с изложенным более уместным способом нахождения значений весовых коэффициентов представляется подход, предложенный в [9], применение которого возможно без модификаций. Для определения искомого значения первоначально необходимо рассчитать оценку среднеквадратического отклонения (σ^j) по каждому нормированному частному критерию:

$$\sigma^j = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (e_i^j - \bar{e}^j)^2 \right) / (n-1)},$$

где e_i^j – нормированное значение j -го показателя для i -го объекта; $\bar{e}^j$ – среднее арифметическое значение j -го показателя по совокупности всех i -х объектов. В связи с тем, что значения первичных показателей нормированы в интервале $[0; 1]$, значение σ^j будет находиться в пределах $0 \leq \sigma^j \leq 0,5$. Для объяснения смыслового содержания этих значений целесообразно рассмотреть граничные величины. Равенство $\sigma^j = 0$ означает, что все значения j -го показателя равны между собой. Получается, что если значение какого-либо частного показателя для всех объектов одинаково, то в рамках сравнения им можно пренебречь. При $\sigma^j = 0,5$ получается, что разброс значений e_i^j по j -му показателю максимален. В связи с этим на него следует обратить особое внимание в случае сравнения однотипных объектов, что обусловлено следующим: необходимо добиваться от «худших» объектов достижения уровня передовых по данному показателю, а соответственно, его вес при расчете интегрального показателя должен быть максимальным. Получается, что чем больше значение σ^j , тем больше и значение η^j . Для выполнения требования $\sum_{j=1}^m \eta^j = 1$ необходимо произвести масштабирование: $\eta^j = \sigma^j / \sum_{j=1}^m \sigma^j$.

Представленная на рис. 1 новая модель не только построена с учетом доступности данных о процессах цифровизации, но и учитывает ряд важнейших принципов проведения оценки:

1) системности, предполагающей рассмотрение цифровизации на основе целостного понимания данной категории за счет полного перебора образующих элементов (табл. 2);

Таблица 2

Множество «элементов-состояний» информационного общества

Субъект \ Параметр	Потенциал / исходный уровень	Вовлеченность / активность
Население	c_k^{11}	c_k^{12}
Бизнес	c_k^{21}	c_k^{22}

2) комплексности, выражающейся в учете многоаспектности (многосторонности) цифровизации, позволяющей одновременно производить измерения различных ее проявлений;

3) иерархичности, проявляющейся в определенной упорядоченности и соподчиненности используемых показателей – от базовых до интегральных;

4) модульности, предполагающей такую агрегацию показателей, при которой отдельные компоненты, получаемые на том или ином уровне иерархии, могут иметь самостоятельный смысл;

5) сбалансированности, предполагающей учет при формировании интегрального показателя различных составляющих оцениваемой категории.

Универсальный характер модели, опирающейся на сформулированные принципы, позволяет осуществить оценку уровня развития цифровизации государства как в целом через сопоставление с иными подобными объектами (другими странами), так и в контексте составных частей (территорий).

2. Оценка уровня цифровизации: регионы России и страны Европы

На основе данных, содержащихся в [11] и уже представленных относительными величинами, а также предложенной структуры интегральной оценки уровня цифровизации, были найдены нормированные значения (интервал от 0 до 1) исходных показателей по 85 регионам за 2017 г., которые позволили рассчитать весовые коэффициенты для определения значений субинтегральных показателей третьего слоя модели (см. рис. 1). Данные по весовым коэффициентам, используемым для получения значений субинтегральных оценок каждого k -го объекта, представлены в табл. 3.

Таблица 3

Весовые коэффициенты для расчета субинтегральных показателей 3-го слоя

Обозначение показателя	Оценка среднеквадратического отклонения (σ^j)	Весовой коэффициент (η^j)	Обозначение показателя	Оценка среднеквадратического отклонения (σ^j)	Весовой коэффициент (η^j)
e_k^{111}	0,140	0,273	e_k^{125}	0,190	0,209
e_k^{112}	0,222	0,433	e_k^{211}	0,211	0,485
e_k^{113}	0,151	0,294	e_k^{212}	0,224	0,515
e_k^{121}	0,185	0,203	e_k^{221}	0,188	0,355
e_k^{122}	0,186	0,204	e_k^{222}	0,157	0,296
e_k^{123}	0,182	0,200	e_k^{223}	0,185	0,349
e_k^{124}	0,168	0,184			

Аналогичным образом определяются весовые коэффициенты субинтегральных показателей 4-го слоя (табл. 4) и интегрального показателя (табл. 5).

Таблица 4

Весовые коэффициенты для расчета субинтегральных показателей 4 слоя

Обозначение показателя	Оценка среднеквадратического отклонения (σ^j)	Весовой коэффициент (η^j)	Обозначение показателя	Оценка среднеквадратического отклонения (σ^j)	Весовой коэффициент (η^j)
c_k^{11}	0,146	0,527	c_k^{21}	0,212	0,599
c_k^{12}	0,131	0,473	c_k^{22}	0,142	0,401

Таблица 5

Весовые коэффициенты для расчета интегральной оценки

Обозначение показателя	Оценка среднеквадратического отклонения (σ^j)	Весовой коэффициент (η^j)	Обозначение показателя	Оценка среднеквадратического отклонения (σ^j)	Весовой коэффициент (η^j)
b_k^1	0,131	0,430	b_k^2	0,174	0,570

Итоги расчета интегральной оценки уровня цифровизации представлены в табл. 6. Кроме значения собственно интегральной оценки может быть определена группа, к которой относится та или иная территория (на основе равномерного разбиения размаха интегральной оценки на равные промежутки: менее 0,34 – «низкий» уровень; 0,35–0,48 – уровень «ниже среднего»; 0,49–0,60 – «средний» уровень; 0,61–0,73 – уровень «выше среднего»; более 0,74 – «высокий» уровень).

Как видно, самыми малочисленными оказались пограничные зоны: группы «лидеров» и «аутсайдеров» включают всего по три региона. Попадание Москвы и Санкт-Петербурга в авангард наиболее цифровизированных территорий очевидно и связано как с центральным социо-экономико-политическим положением в общероссийском пространстве, так и с сугубо физико-географическими особенностями (компактные территории с высокой степенью концентрации населения, не требующие формирования протяженной инфраструктуры).

Таблица 6

Результаты определения уровня цифровизации субъектов Российской Федерации в 2017 году

Субъект Российской Федерации	Интегральная оценка	Место	Субъект Российской Федерации	Интегральная оценка	Место
г. Москва	0,86	1	Вологодская область	0,56	42–45
г. Санкт-Петербург	0,83	2	Калужская область	0,56	
Республика Татарстан	0,77	3	Пермский край	0,54	46–48
Республика Ингушетия	0,73	4	Кабардино-Балкарская Республика	0,54	
Ямало-Ненецкий автономный округ	0,70	5–6	Брянская область	0,54	
Московская область	0,70		Рязанская область	0,53	49
Ханты-Мансийский автономный округ	0,69	7	Ростовская область	0,52	50
Ставропольский край	0,68	8–9	Республика Саха (Якутия)	0,51	51–54
Республика Крым	0,68		Республика Северная Осетия – Алания	0,51	
Оренбургская область	0,67	10–12	Псковская область	0,51	
Ленинградская область	0,67		Архангельская область	0,51	
Тамбовская область	0,67		Красноярский край	0,50	55–56
Мурманская область	0,66	14–17	Курская область	0,50	
Нижегородская область	0,64		Амурская область	0,49	57–59
Республика Башкортостан	0,64		Республика Тыва	0,49	
Астраханская область	0,64		Удмуртская Республика	0,49	
Белгородская область	0,64		Республика Марий Эл	0,48	60
Сахалинская область	0,63	18–26	Иркутская область	0,47	61–64
Хабаровский край	0,63		Забайкальский край	0,47	
Камчатский край	0,63		Кировская область	0,47	
Республика Алтай	0,63		Орловская область	0,47	
Тюменская область	0,63		Омская область	0,45	65–67
Карачаево-Черкесская Республика	0,63		Кемеровская область	0,45	
Калининградская область	0,63		Алтайский край	0,45	
Липецкая область	0,63		Чукотский автономный округ	0,44	68–70
Воронежская область	0,63		Чеченская Республика	0,44	
Республика Адыгея	0,62	27	Республика Калмыкия	0,44	71–72
Свердловская область	0,61	28–29	Республика Хакасия	0,43	
Республика Карелия	0,61		Тверская область	0,43	
Тульская область	0,60	30	Еврейская автономная область	0,42	73–75
Смоленская область	0,59	31	Волгоградская область	0,42	
Челябинская область	0,58	32–36	Костромская область	0,42	76–77
Чувашская Республика	0,58		Новосибирская область	0,38	
Краснодарский край	0,58		Ульяновская область	0,38	
Ненецкий автономный округ	0,58		Томская область	0,37	78–79
Владимирская область	0,58		Саратовская область	0,37	
Магаданская область	0,57	40–41	Самарская область	0,35	80–82
Приморский край	0,57		Республика Мордовия	0,35	
Республика Коми	0,57		г. Севастополь	0,35	
Ярославская область	0,57		Республика Бурятия	0,31	83
Ивановская область	0,57		Курганская область	0,30	84
Пензенская область	0,56	42–45	Республика Дагестан	0,22	85
Новгородская область	0,56				

Заслуживают внимания управленческие и технологические практики Татарстана, который также входит в лидирующую группу. Можно было бы предположить, что существенное влияние на достигнутый уровень цифровизации оказывают природные факторы (площадь территории, климатический пояс и т.п.), но среди пространств, близких к передовым, оказались Ямало-Ненецкий и Ханты-Мансийский автономные округа (5–6 и 7 места соответственно). Их никак нельзя отнести к «малога-

баритным» и привлекательным с климатической точки зрения. В связи с этим причины того или иного положения в рейтинге, скорее всего, объясняются политикой в области информатизации (объемами финансирования) того или иного региона.

Очевидно, что Российская Федерация не может рассматриваться вне глобальных трендов. В этой связи были рассчитаны интегральные оценки для некоторых стран Европы (табл. 7). Весовые коэффициенты в формулах свертки брались из модели, применяемой для оценки территориальной дифференциации регионов России (см. табл. 3–5), а не определялись для рассматриваемой совокупности объектов. Данное допущение принимается на основе целей проведения оценки: определение места России в глобальных процессах цифровизации с позиции внутренней национальной приоритетизации. При отсутствии исходных данных за 2017 г. брались значения показателей по наиболее близким периодам (2016 или 2018 г.).

Таблица 7

Результаты определения уровня цифровизации стран Европы в 2017 году

Страна	Интегральная оценка	Место	Страна	Интегральная оценка	Место	Страна	Интегральная оценка	Место
Финляндия	0,96	1	Великобритания	0,66	12–14	Кипр	0,50	23
Дания	0,89	2	Франция	0,66		Венгрия	0,49	24–25
Нидерланды	0,86	3	Испания	0,66		Хорватия	0,49	
Швеция	0,85	4	Ирландия	0,63	15	Польша	0,48	26
Норвегия	0,81	5	Литва	0,63	16	Черногория	0,47	27
Австрия	0,74	6–7	Мальта	0,62	17	Россия	0,35	28–29
Люксембург	0,74		Латвия	0,60	18–19	Болгария	0,35	
Словения	0,72	8	Чехия	0,60		Греция	0,22	30
Бельгия	0,71	9	Словакия	0,59	20	Румыния	0,12	31
Германия	0,68	10	Португалия	0,58	21			
Эстония	0,67	11	Италия	0,53	22			

Территориальная дифференциация уровня цифровизации среди стран Европы еще более разительна, нежели внутри России. В связи с этим были скорректированы границы групп качественной оценки (менее 0,29 – «низкий» уровень; 0,30–0,46 – уровень «ниже среднего»; 0,47–0,62 – «средний» уровень; 0,63–0,79 – уровень «выше среднего»; более 0,80 – «высокий» уровень).

Согласно полученным данным лидерами европейского рейтинга являются Финляндия, Дания, Нидерланды, Швеция, Норвегия. Россия совместно с Болгарией входят в группу с уровнем «ниже среднего», существенно отставая от «середняков» рейтинга и оставляя на значительном расстоянии от себя аутсайдеров – группу с «низким» уровнем (Греция и Румыния).

Заключение

1. Предложена модель интегральной оценки уровня цифровизации территориальных образований, использующая экспертное мнение только на этапе построения структуры обобщенной меры. Отмечаются ее простота и прозрачность, ориентированные на облегчение процедур сбора и обработки данных, а также уменьшение возможностей манипулирования результатами.

2. Модель основывается на построении структурированной по слоям функциональной сети как разновидности ориентированного графа. Каждая составная часть сводного индекса (субинтегральный показатель) может рассматриваться как самостоятельная обобщенная мера, характеризующая отдельный аспект цифровизации. Основанием для определения весовых коэффициентов при аддитивной свертке частных критериев выступает значение среднего квадратического отклонения по совокупности оцениваемых объектов, что отличает предложенный подход от аналогичных, где, как правило, для этих целей используются экспертные опросы.

3. Проведены апробация предложенной модели для выявления внутрирегиональной дифференциации уровня цифровизации регионов России и также сопоставление европейской и российской практик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozite K., Balina S., Freimane R. Digital competence rating and economic development in the EU // 11th International Scientific Conference on New Challenges of Economic and Business Development – Incentives for Sustainable Economic Growth, may 16–18, 2019, Univ Latvia, Riga, Latvia, 2019. P. 701–708.
2. Gerpott T.J., Ahmadi N. Composite indices for the evaluation of a country's information technology development level: Extensions of the IDI of the ITU // Technological forecasting and social change. 2015. V. 98. P. 174–185.
3. Архипова М.Ю., Сиротин В.П. Региональные аспекты развития информационно-коммуникационных и цифровых технологий в России // Экономика региона. 2019. Т. 15, вып. 3. С. 670–683.
4. Sachs J.D. Some Brief Reflections on Digital Technologies and Economic Development // Ethics & International Affairs. 2019. Book 33, v. 2. P. 159–167.
5. Методология расчета индекса «Цифровая Россия» субъектов Российской Федерации // Московская школа управления СКОЛКОВО; Центр Финансовых инноваций и безналичной экономики. 2018. URL: https://finance.skolkovo.ru/downloads/documents/FinChair/Research_Reports/SKOLKOVO_Digital_Russia_Methodology_2019-04_ru.pdf (дата обращения: 10.05.2019).
6. Тебекин А.В. Квалиметрическая оценка уровня цифровизации экономики в Российской Федерации // Журнал технических исследований. 2018. Т. 4, № 3. С. 1–13.
7. Халин В.Г., Чернова Г.В. Цифровизация и ее влияние на российскую экономику и общество: преимущества, вызовы, угрозы и риски // Управленческое консультирование. 2018. № 10. С. 46–63.
8. Хохлов Ю.Е. Оценка уровня развития цифровой экономики в России // Институт развития информационного общества, М., 2018. URL: <https://www.econ.msu.ru/sys/raw.php?o=46780&p=attachment> (дата обращения: 10.05.2019).
9. Раев А.Г. Об одном способе определения весовых коэффициентов частных критериев при построении аддитивного интегрального критерия // Автоматика и телемеханика. 1984. № 5. С. 162–165.
10. Сидоров А.А. Методологический подход к интегральной оценке состояния и динамики многомерных объектов социально-экономической природы // Проблемы управления. 2016. № 3. С. 32–40.
11. Информационное общество: основные характеристики субъектов Российской Федерации : стат. сб. / сост. М.А. Сабельникова и др. М. : Росстат; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики», 2018.
12. Eurostat metadata // Eurostat, EU. URL: <https://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (accessed: 05.05.2019).
13. Chaffey D. E-Business and E-Commerce Management: Strategy, Implementation and Practice. 4th ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall Press, 2009.
14. Постников В.М., Спиридонов С.Б. Методы выбора весовых коэффициентов локальных критериев // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана : электрон. журнал. 2015. № 6. С. 267–287. URL: <http://engineering-science.ru/doc/780334.html> (дата обращения: 10.05.2019).

Поступила в редакцию 5 октября 2019 г.

Sidorov A.A., Senchenko P.V., Tarasenko V.F. (2020) APPROACH TO ASSESSING THE TERRITORIAL DIFFERENTIATION OF THE DIGITAL ECONOMY DEVELOPMENT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 121–129

DOI: 10.17223/19988605/51/14

An original model and methodology for the integral assessment of the territorial district's digitalization level is proposed. It is noted that modern studies in the subject area are mainly aimed at obtaining values of aggregated indicators (indices) based on expert judgments, which in some cases may be biased. The considered approach to the integral assessment of the territorial district's digitalization level uses expert opinion only at the stage of building a model. A generalized measure is formed on the basis of the model, which excludes subjectivity in the conduct of assessment studies.

The proposed model is based on a functional network as a kind of a directed graph. The graph is structured by levels, selected on the basis of the types of data which is initially used and obtained during the calculations. The problem of determining the values of weight coefficients, which are used in the calculations of the generalized measure, is emphasized. It was proposed to eliminate the influence of the subjective factor moving away from the expert definition of measures by weighting the particular indicators, which are included in the integral evaluation. Further, it is proposed to proceed to the definition of indicators based on the calculation one of the measures of variability – the standard deviation.

The proposed assessment model is based on the availability of data on digitalization processes. In addition, the basis of its construction is based on other principles that distinguish the described approach from the alternative ones: hierarchy, modularity and balance of evaluation. It is characterized by relative simplicity and transparency in terms of the original data's transformation, which reduces the possibility of manipulating the results.

Approbation of the proposed approach was carried out to identify the differentiation of the Russian regions digitalization's level, as well as a comparison of European and Russian practice. As a scientific result, a methodological approach to defining an integral measure is positioned, which, according to many criteria, can be used to evaluate objects of the same type, identifying differences between them. The current level of digitalization of territories, which can be used to adjust the relevant policy, is also being positioned.

Keywords: the integral assessment; digitalization; weighting coefficients.

SIDOROV Anatoly Anatolievich (Candidate of Economical Sciences, Tomsk State University of Control System and Radioelectronics, Russian Federation).

E-mail: astroasregion@gmail.com

SENCHENKO Pavel Vasilievich (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University of Control System and Radioelectronics, Russian Federation).

E-mail: pvs@tusur.ru

TARASENKO Vladimir Feliksovich (Doctor of Technical Sciences, National Research Tomsk State University, Russian Federation, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: vtara54@mail.ru

REFERENCES

1. Rozite, K., Balina, S. & Freimane, R. (2019) Digital competence rating and economic development in the EU. *11th International Scientific Conference on New Challenges of Economic and Business Development - Incentives for Sustainable Economic Growth*, may 16-18, 2019. Riga: Univeristy of Latvia. pp. 701–708.
2. Gerpott, T.J. & Ahmadi, N. (2015) Composite indices for the evaluation of a country's information technology development level: Extensions of the IDI of the ITU. *Technological Forecasting and Social Change*. 98. pp. 174–85. DOI: 10.1016/j.techfore.2015.03.012
3. Arkhipova, M. & Sirotin, V. (2019) Development of Digital Technologies in Russia: regional aspects. *Ekonomika regiona – Economy of Region*. 3. pp. 670–683.
4. Sachs, J.D. (2019) Some Brief Reflections on Digital Technologies and Economic Development. *Ethics & International Affairs*. 33(2). pp. 159–167. DOI: 10.1017/S0892679419000133
5. Moscow School of Management SKOLKOVO, Center for Financial Innovation and Cashless Economy. (2018) *Metodologiya rascheta indeksa "Tsifrovaya Rossiya" sub"yektov Rossiyskoy Federatsii* [The methodology for calculating the Digital Russia index of the constituent entities of the Russian Federation]. [Online] Available from: Available at: https://finance.skolkovo.ru/downloads/documents/FinChair/Research_Reports/SKOLKOVO_Digital_Russia_Methodology_2019-04_ru.pdf (Accessed: 10th May 2019).
6. Tebekin, A. (2018) Qualimetric assessment of the level of digitalization of the economy in the Russian Federation. *Zhurnal tekhnicheskikh issledovaniy – Journal of Technical Research*. 3(4). pp. 1–13.
7. Khalin, V. & Chernova, G. (2018) Digitalization and its impact on the Russian economy and society: advantages, challenges, threats and risks. *Upravlencheskoe konsul'tirovanie – Administrative Consulting*. 10. pp. 46–63. DOI: 10.22394/1726-1139-2018-10-46-63
8. Khokhlov, Yu. (2018) *Otsenka urovnya razvitiya tsifrovoy ekonomiki v Rossii* [Assessment of the level of development of the digital economy in Russia]. Moscow: Institute for the Development of the Information Society. [Online] Available from: <https://www.econ.msu.ru/sys/raw.php?o=46780&p=attachment> (Accessed: 10th May 2019).
9. Raev, A. (1984) Ob odnom sposobe opredeleniya vesovykh koeffitsientov chastnykh kriteriev pri postroenii additivnogo integral'nogo kriteriya [On one method for determining the weight coefficients of partial criteria when constructing an additive integral criterion]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 162–165.
10. Sidorov, A. (2016) Methodological approach to the integral assessment of the state and dynamics of multidimensional objects of socio-economic nature. *Problemy upravleniya – Control Science*. 3. pp. 32–40.
11. Sabelnikova, M., Abdrakhmanova, G., Gokhberg, L. & Dudorova, O. (eds) (2018) *Informatsionnoe obshchestvo: osnovnye kharakteristiki sub"ektov Rossiyskoy Federatsii* [Information society: the main characteristics of the constituent entities of the Russian Federation: a statistical compilation]. Moscow: Rosstat; HSE.
12. Eurostat (2019) *Eurostat metadata. EU*. [Online] Available from: <https://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (Accessed: 5th May 2019).
13. Chaffey, D. (2009) *E-Business and E-Commerce Management: Strategy, Implementation and Practice*. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Press.
14. Postnikov, V. & Spiridonov, S. (2015) Selecting Methods of the Weighting Factors of Local Criteria. *Nauka i Obrazovanie – Science and Education*. 6. pp. 267–287. [Online] Available from: <http://engineering-science.ru/doc/780334.html> (Accessed: 10th May 2019). DOI: 10.7463/0615.0780334

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛИЕВА Севиндж Гамзага кызы – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий и программирования Бакинского государственного университета (Азербайджан). E-mail: s@aliyeva.info

АРКАЛЫКОВ Ерболат Усенович – магистрант отделения информационных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: arkalykov@tpu.ru

БАБАНОВ Алексей Михайлович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: babanov2000@mail.ru

БАЛАШОВА Ольга Михайловна – магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: balashovajkz@mail.ru

ГОНЧАРЕНКО Евгений Андреевич – студент кафедры вычислительной техники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина). E-mail: kesvesna@rambler.ru

ДАНИЛКИН Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ugin@math.tsu.ru

ДМИТРЕНКО Анатолий Григорьевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: agdmtr.202@mail.ru

ДРУКИ Алексей Алексеевич – кандидат технических наук, доцент отделения информационных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: druki@tpu.ru

ЖУКОВ Дмитрий Олегович – профессор, доктор технических наук, профессор Российского технологического университета «МИРЭА» (г. Москва). E-mail: zhukovdm@yandex.ru

ИСТРАТОВ Леонид Андреевич – лаборант Российского технологического университета «МИРЭА» (г. Москва). E-mail: kuyahstibov@gmail.com

КИМ Константин Станиславович – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kks93@rambler.ru

КУЧАРОВ Олимжон Рузимутович – докторант Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий (г. Ташкент, Узбекистан). E-mail: k.r.olimjon@mail.ru

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

ПАЗНИКОВ Алексей Александрович – доцент, кандидат технических наук, старший научный сотрудник кафедры вычислительной техники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина). E-mail: apaznikov@gmail.com

ПЕРЕПЕЛКИН Евгений Александрович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова (г. Барнаул). E-mail: eap@list.ru

ПЕРШИНА Анна Александровна – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ann.shitina@gmail.com

ПЕТРОВ Александр Викторович – магистрант кафедры программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: flamingcode@mail.ru

ПРОХАНОВ Сергей Анатольевич – программист межрегионального супервычислительного центра Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: viking@mail.tsu.ru

ПШЕНИЧНЫЙ Кирилл Анатольевич – аспирант кафедры компьютерных технологий Донецкого национального университета (Украина). E-mail: kirill_pch@mail.ru

РАСУЛЗАДЕ Шахла Меджид кызы – аспирант Института систем управления (г. Баку, Азербайджан). E-mail: akja@rambler.ru

СЕМЁНОВ Евгений Витальевич – аспирант кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: semyonov@math.tsu.ru

СЕНЧЕНКО Павел Васильевич – доцент, кандидат технических наук, проректор по учебной работе Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: pvs@tusur.ru

СИДОРОВ Анатолий Анатольевич – доцент, кандидат экономических наук, заведующий кафедрой автоматизации обработки информации Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: astroasregion@gmail.com

СМАГИН Валерий Иванович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: vsm@mail.tsu.ru

СМЫЧКОВА Анна Гуламовна – аспирант Российского технологического университета «МИРЭА» (г. Москва). E-mail: nsmych@yandex.com

СПИЦЫН Владимир Григорьевич – профессор, доктор технических наук, профессор отделения информационных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: spvg@tpu.ru

СТАРЧЕНКО Александр Васильевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: starch@math.tsu.ru

ТАРАСЕНКО Владимир Феликсович – доктор технических наук, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: vtara54@mail.ru

ТОЛСТЫХ Виктор Константинович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры компьютерных технологий Донецкого национального университета (Украина). E-mail: mail@tolstykhh.com

ХУДАЯРОВ Бахтияр Алимович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой высшей математики Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства (Узбекистан). E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2020. № 51

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 16.06.2020 г. Формат 60х84^{1/8}.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 15,4.
Тираж 250 экз. Заказ № 4341. Цена свободная.

Дата выхода в свет 19.06.2020 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru