ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Математика и механика № 65

УДК.512.545 MSC 06F15, 08B15
DOI 10.17223/19988621/65/2

Н.В. Баянова, А.В. Зенков, Г.В. Прусакова

К ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ *O*-АППРОКСИМИРУЕМЫХ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

Изучаются свойства некоторых о-аппроксимируемых многообразий решеточно упорядоченных групп и уточняются ранее полученные результаты о строении решетки многообразий решеточно упорядоченных групп.

Ключевые слова: *решеточно упорядоченная группа, о-аппроксимируемое многообразие, накрытие.*

1. Введение

Напомним, что решеточно упорядоченная группа (ℓ -группа) – это алгебраическая система G сигнатуры $\ell = \left\langle e,^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \right\rangle$, совмещающая в себе структуру группы и решеточного порядка, связанные естественными соотношениями

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Если всякие два элемента решеточно упорядоченной группы сравнимы, то группу называют линейно упорядоченной. Решеточно упорядоченные группы, их многообразия и связанные с этим вопросы представлений ℓ-групп порядковыми автоморфизмами подходящих линейно упорядоченных множеств интенсивно исследовались различными авторами. Результаты этих исследований отражены в монографической литературе (см., например, [1, 2]).

Одним из важных классов решеточно упорядоченных групп является многообразие R всех o-аппроксимируемых ℓ-групп, т.е. ℓ-групп, которые аппроксимируются линейно упорядоченными группами. Хорошо известно (см., например, [1]), что R определяется тождеством

$$\left(x \wedge y^{-1}x^{-1}y\right) \vee e = e. \tag{1}$$

Любое многообразие ℓ-групп, содержащееся в R, называется o-аппроксимируемым многообразием ℓ-групп. Множество L_0 всех o-аппроксимируемых многообразий частично упорядочено относительно теоретико-множественного включения; более того, L_0 – решетка относительно стандартно определяемых операций пересечения и объединения многообразий. Отметим, что L_0 является полной подрешеткой решетки L многообразий всех ℓ-групп.

Целью работы является уточнение свойств o-аппроксимируемых многообразий, которые были введены и изучены в работах [3–5], и рассмотрение новых o-аппроксимируемых многообразий, которые представляются достаточно интересными.

Напомним некоторые стандартные обозначения и факты о решеточно упорядоченных и линейно упорядоченных группах, которые будут использоваться в дальнейшем. Пусть x – произвольный элемент ℓ-группы G. Тогда $|x| = x \vee x^{-1}$ – его модуль, $x^{+} = x \vee e$ – положительная часть. Для положительных элементов

$x, y \in G$ запись $x << y$ означает, что для любого $n \in \mathbf{N}$ верно $x^n < y$ (x много меньше y). Если существуют такие числа $m, n \in \mathbf{N}$, что $x^n \geq y$ и $y^m \geq x$, то элемент x архимедово эквивалентен элементу y, этот факт символически обозначается $x \sim y$. Всюду подгруппа H линейно упорядоченной группы G линейно упорядочена посредством индуцированного порядка, т.е. $x < y$ в H тогда и только тогда, когда $x < y$ в G.

Так как каждая ℓ-группа в R есть поддекартово произведение линейно упорядоченных групп, то любое o-аппроксимируемое многообразие X определяется линейно упорядоченными группами, содержащимися в нем. Чтобы проверить, будет ли любая ℓ-группа в X удовлетворять некоторому тождеству, достаточно показать, что линейно упорядоченные группы в X удовлетворяют ему.

Подгруппа H линейно упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для любых $h_1, h_2 \in H$, $g \in G$ неравенство $h_1 \leq g \leq h_2$ влечет $g \in H$. Система $L(G)$ всех выпуклых подгрупп линейно упорядоченной группы G линейно упорядочена относительно теоретико-множественного включения, является полной относительно объединений и пересечений и инфраинвариантной, т.е. для любой $H \in L(G)$ подгруппа $g^{-1}Hg \in L(G)$ для любого $g \in G$. *Скачком* выпуклых подгрупп будем называть всякую пару $C, D \in L(G)$, что $C \subset D$ и между ними нет выпуклых подгрупп. Этот факт будем записывать в виде $C \prec D$. Так как между C и D нет выпуклых подгрупп, то $C \lhd D$ и фактор-группа D/C архимедова, что в силу теоремы Гельдера означает, что она изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbf{R}$ действительных чисел с естественным порядком. Отметим, что всякий неединичный элемент $g \in G$ определяет скачок $C \prec D$ выпуклых подгрупп, где C – наибольшая выпуклая подгруппа со свойством $g \notin C$, D – наименьшая выпуклая подгруппа со свойством $g \in D$. Для скачка $C \prec D$ и любого $x \in G$ пара подгрупп $C^x \subset D^x$ образует скачок, который называется *сопряженным* с исходным скачком. Если $D = D^x$, то будем говорить, что скачок $C \prec D$ *инвариантен* относительно сопряжения элементом x. Далее, будем считать, что элементы x, y группы G *лежат в одном скачке* (*определяют один скачок*), если найдется такой скачок $C \prec D$ выпуклых подгрупп, что $x, y \in D \setminus C$. Очевидно, что $x \sim y$ тогда и только тогда, когда эти элементы определяют один скачок выпуклых подгрупп, а $x << y$ тогда и только тогда, когда скачок выпуклых подгрупп, определяемый x, расположен в системе $L(G)$ ниже скачка, определяемого y. Поэтому в любой упорядоченной группе всегда выполнено $|[x, y]| << |x| \vee |y|$.

Пусть $V_1, V_2 \in L$, тогда V_1 накрывает V_2, если $V_1 \supseteq V_2$, $V_1 \neq V_2$ и из $V_1 \supset U \supset V_2$ следует $V_1 = U$ или $V_2 = U$. Отметим, что решетка L всех многообразий решеточно упорядоченных групп обладает свойством накрытия [2].

Через $\mathrm{var}_\ell(G)$ обозначаем многообразие ℓ-групп, порожденное ℓ-группой G.

2. Основной результат

В работе [6] Н.Я. Медведев построил первое o-аппроксимируемое многообразие V, которое не имеет накрытий в решетке L_0 и содержит все o-аппроксимируемые накрытия многообразия абелевых ℓ-групп A. Позднее в [5] были определены еще четыре o-аппроксимируемых многообразия с аналогичными свойствами. Покажем, что на самом деле этих многообразий в два раза меньше.

Далее, если не оговорено противное, рассматриваются только o-аппроксимируемые многообразия. Через H обозначим многообразие, задаваемое следующей бесконечной системой тождеств:

$$|(|[x,y]|^2 \vee (|x| \vee |y|)|[x,y]|\,(|x| \vee |y|)^{-1})|\,[x,y]|^{-2}| \wedge$$
$$|(|[x,y]|^m \wedge (|x| \vee |y|)|[x,y]|\,(|x| \vee |y|)^{-1})|\,[x,y]|^{-m}| = e, \qquad (2)$$

где $m \geq 3$ – натуральное число. Это многообразие было введено и изучалось в [5]. В частности, доказано, что H не имеет накрытий в решетке L_0 и строго содержит V (Теоремы 1, 3).

В работе [3] было введено многообразие C, определяемое при помощи следующей бесконечной системы тождественных неравенств: $([a, b] \vee e) \wedge a << a \vee b^{-1}ab$, где $e \leq a \leq b$. Очевидно, что указанную систему тождественных неравенств можно записать в виде

$$[a, b]^+ \wedge a << a[a\, b]^+. \qquad (3)$$

Основным результатом работы [3] стало доказательство того, что многообразие C содержит все o-аппроксимируемые накрытия многообразия абелевых ℓ-групп A. В работе [4] было доказано, что V строго содержится в C. Наконец в [5] (Теорема 2) показано, что C не имеет накрытий в решетке L_0.

В работе [7] M.E. Huss и N.R. Reilly на решетке L всех многообразий ℓ-групп определили нетождественный автоморфизм 2-го порядка Θ следующим образом. Пусть $U = \{G_i \mid i \in I\}$ – некоторое многообразие ℓ-групп. Тогда $\Theta(U) = U^* = \{G^*_i \mid i \in I\}$, где ℓ-группа G^*_i получена из G_i обращением порядка, т.е. $x \leq y$ в группе G^*_i тогда и только тогда, когда $x \geq y$ в группе G_i.

В этой же работе был указан способ получения базиса тождеств U^*, если известен базис тождеств многообразия U. Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – набор переменных. Тогда всякое ℓ-групповое слово $w(\overline{x})$ от этих переменных представимо в виде $w(\overline{x}) = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} w_{ij}(\overline{x})$, где I, J – конечные множества индексов, $w_{ij}(\overline{x})$ –групповое слово. Отметим, что такое представление не является единственным. Определим $w^R(\overline{x}) = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} (w_{ij}(\overline{x})^{-1})$. Тогда $w(\overline{x}) = e$ – тождество U тогда и только тогда, когда $w^R(\overline{x}) = e$ – тождество U^*. Несложно проверить следующие соотношения:

1) если $w = w_1 \cdot w_2$, то $w^R = w_2{}^R \cdot w_1{}^R$;

2) если $w = w_1 \vee w_2$, то $w^R = w_1{}^R \vee w_2{}^R$;

3) если $w = w_1 \wedge w_2$, то $w^R = w_1{}^R \wedge w_2{}^R$;

4) $(w^{-1})^R = (w^R)^{-1}$;

5) $|w|^R = |w^R|$.

Используя эти факты, можно показать, что многообразие R всех o-аппроксимируемых ℓ-групп *реверсивно*, т.е. $R = R^*$. В [5] (Предложение 2) показано, что $V = V^*$. Следовательно, многообразия H^*, C^* o-аппроксимируемы, строго содержат V, не имеют накрытий в решетке L_0 и определяются соответственно тождествами:

$$H^* : |(|[x,y]|^2 \vee (|x| \vee |y|)^{-1}|[x,y]|\,(|x| \vee |y|))|\,[x,y]|^{-2}| \wedge$$
$$|(|[x,y]|^m \wedge (|x| \vee |y|)^{-1}|[x,y]|\,(|x| \vee |y|))|\,[x,y]|^{-m}| = e; \qquad (4)$$
$$C^* : [a, b]^+ \wedge a << [a\, b]^+ a. \qquad (5)$$

Пусть B_β – бесконечная циклическая подгруппа мультипликативной группы положительных действительных чисел, порожденная числом $\beta \neq 1$, и A – такая подгруппа аддитивной группы **R** действительных чисел с естественным порядком, что для любого $a \in A$ верно βa, $\beta^{-1}a \in A$. Полупрямое произведение A и B_β обозначим через $T_\beta = A \overline{\lambda} B_\beta$. Всякий элемент $g \in T_\beta$ единственным образом можно представить в виде $g = (\beta^k, a)$, где $a \in A$, $k \in \mathbf{Z}$. Операция умножения элементов определена по правилу

$$(\beta^k, a_1)(\beta^s, a_2) = (\beta^{k+s}, \beta^s a_1 + a_2).$$

Считаем, что $g = (\beta^k, a) \geq e$ тогда и только тогда, когда $k > 0$ или $k = 0$ и $a \geq 0$. Тогда T_β – линейно упорядоченная группа.

В работе [5] (Леммы 3 – 6) доказано, что многообразие H содержит T_β при $\beta > 1$ и не содержит T_β, если $\beta < 1$, а многообразие C не содержит T_β при $\beta > 1$ и содержит T_β при $\beta < 1$. Из сказанного выше, очевидно, следует, что $H \neq C$. Несложно показать, что $(T_\beta)^* \cong T_{\beta^{-1}}$ Следовательно, многообразие C^* содержит T_β при $\beta > 1$ и не содержит T_β, если $\beta < 1$.

Как обычно, лексикографическое произведение линейно упорядоченных групп G и H обозначаем $G \overleftarrow{\times} H$. Ясно, что $G \overleftarrow{\times} H$ является линейно упорядоченной группой. Предложение 2 работы [4] утверждает, что многообразие C (а следовательно, и C^*) замкнуто относительно лексикографических произведений. Следующее утверждение показывает, что это не так.

Предложение 1. При любых $\beta, \alpha \neq 1$ линейно упорядоченная группа $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha$ не принадлежит многообразию C.

Доказательство. Возможны следующие случаи: 1) $\beta, \alpha < 1$, 2) $\beta > 1 > \alpha$, 3) $\beta, \alpha > 1$, 4) $\beta < 1 < \alpha$. Рассматривая первый случай, полагаем $a = ((1, r), (1, 0))$, где $r > 0$ и $b = ((\beta^{-2}, 0), (\alpha, 0))$. Из определения лексикографического порядка и порядка на группе T_β следует $e < a < b$. Непосредственные вычисления показывают, что $[a, b] = ((1, (\beta^{-2} - 1)r), (1, 0)) > e$. Следовательно, $a[a, b] = ((1, \beta^{-2}r), (1, 0)) > e$ и $a \wedge [a, b] = ((1, r_1), (1, 0))$, где $r_1 = \min(r, (\beta^{-2} - 1)r)$, что влечет $a \wedge [a, b] \sim a[a, b]$. Противоречие с системой неравенств (3); поэтому в рассматриваемом случае многообразие C не замкнуто относительно лексикографических произведений.

Во втором случае рассмотрим $a = ((1, r), (1, 0))$, $r > 0$ и $b = ((\beta^2, 0), (\alpha, 0))$. Очевидно, что $e < a < b$ и $[a, b] = ((1, (\beta^2 - 1)r), (1, 0)) > e$. Теперь, как и выше, получаем $a \wedge [a, b] = ((1, r_1), (1, 0))$, где $r_1 = \min(r, (\beta^{-2} - 1)r)$, $a[a, b] = ((1, \beta^2 r), (1, 0)) > e$, что противоречит системе неравенств (3).

В двух последних случаях берем $a = ((1, 0), (1, r))$, $r > 0$ и $b = ((1, 0), (\alpha, 0))$. Ясно, что $e<a<b$ и $[a,b]=((1,0),(1,(\alpha-1)r))>e$. Следовательно, $a \wedge [a,b] \sim a[a,b]$, что невозможно. #

В работе [5] было показано, что многообразие H не замкнуто относительно лексикографических произведений, что позволяло утверждать, с учетом Предложения 2 из работы [4], что $C \neq H^*$. На самом деле верно.

Предложение 2. Многообразие ℓ-групп C совпадает с многообразием ℓ-групп H^*.

Доказательство. Пусть $C \neq H^*$. Тогда найдется линейно упорядоченная группа, отличающая эти многообразия. Предположим сначала, что существует линейно упорядоченная группа $G \in H^* \setminus C.$ Тогда в ней найдутся такие $b > a > e,$ что для них не имеет места система неравенств (3).

Если $[a,b] \leq e,$ то $[a,b]^+ \wedge a = e$ и $a[a,b]^+ = a,$ следовательно, система неравенств (3) выполнена. Поэтому $[a,b] > e,$ что влечет $a^b > a.$ Если $a^b >> a,$ то $[a,b] >> a,$ и в этом случае, имеет место система неравенств (3). Следовательно, $a^b \sim a.$ Предположим, что $b \sim a.$ Тогда $[a,b] << a,$ что означает выполнимость системы неравенств (3). Значит, $a^b \sim a << b.$

Рассмотрим скачок $C \prec D$ выпуклых подгрупп, определяемый элементом $a.$ Из архимедовой эквивалентности элементов a и a^b следует, что они лежат в одном скачке. Поэтому указанный скачок инвариантен относительно сопряжения элементом $b.$ Обозначим через F подгруппу группы $G,$ порожденную элементом b и подгруппой $D.$ Ясно, что $C \lhd F.$ В силу условия $a^b \sim a << b$ получаем, что $b >> d,$ где $d \in D$ и поэтому индуцированный F порядок на фактор-группу F/C является лексикографическим. Используя теорему о гомоморфизмах, видим, что фактор-группа F/C порядково изоморфна полупрямому произведению $(D/C)\overline{\lambda}(\overline{b}),$ где $\overline{b}$ – образ элемента b при естественном гомоморфизме группы F на $F/C.$ Отождествив D/C с соответствующей подгруппой аддитивной группы $\mathbf{R}$ действительных чисел с естественным порядком, получаем, что автоморфизм сопряжения $\overline{b}$ элементов группы D/C есть умножение на некоторое положительное действительное число $\beta.$ Если $\beta = 1,$ то это влечет $[a,b] \in C,$ что означает $[a,b] << a,$ а это, как отмечено выше, влечет выполнимость системы неравенств (3). Поэтому, в силу условия $a^b > a,$ получаем, что $\beta > 1.$ Таким образом, H^* содержит группу T_β при $\beta > 1,$ что невозможно.

Предположим теперь, что существует линейно упорядоченная группа $G \in C \setminus H^*.$ Тогда в ней найдутся такие x, y и натуральное $m \geq 3,$ что $|[x,y]|^2 < (|x| \vee |y|)^{-1} |[x,y]| \, (|x| \vee |y|) < |\,[x,y]|^m$. Последнее неравенство означает, что $|[x,y]| \sim \, |[x,y]|^{\,|x| \vee |y|}.$ Если, как и выше, рассмотреть скачок $C \prec D$ выпуклых подгрупп, определяемый элементом $|[x,y]|,$ то он будет инвариантен относительно сопряжения элементом $|\,x| \vee |\,y|.$ Теперь, повторяя рассуждения, приходим к выводу, что C содержит группу T_β при $\beta > 1,$ что невозможно. #

Таким образом, Теорема 4 работы [5] может быть переформулирована следующим образом: «Многообразия ℓ- групп V, C, C^* различны».

Пусть $U_{\beta,\alpha} = \mathrm{var}_\ell\,(T_\beta \overleftarrow{\times}\, T_\alpha).$ Рассмотрим многообразие $X = C \vee C^*.$ Хорошо известно (см., например, [6], Лемма 4), что всякая линейно упорядоченная группа из объединения двух многообразий принадлежит одному из них. Учитывая Предложение 1, получаем, что линейно упорядоченная группа $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha$ не принадлежит многообразию X при любых $\beta, \alpha \neq 1$. Следовательно, многообразие $U_{\beta,\alpha}$ не содержится в X и поэтому $X \subset R$.

Для произвольного положительного числа $\beta \neq 1$ и натурального n через T_{β^n} обозначим подгруппу группы T_β элементов вида $g = (\beta^{nk}, a)$, где $a \in A$, $k \in \mathbf{Z}$. Теперь в группе $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha$ для натуральных n, m можно рассмотреть подгруппу $T_{\beta^n} \overleftarrow{\times} T_{\alpha^m}$. Далее, $U_{\beta^n,\alpha^m} = \mathrm{var}_\ell (T_{\beta^n} \overleftarrow{\times} T_{\alpha^m})$.

Предложение 3. Для подходящих натуральных чисел n, m многообразие ℓ- групп U_{β^n,α^m} строго содержится в многообразии ℓ- групп $U_{\beta,\alpha}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\beta < 1 < \alpha$. Найдутся натуральные числа n, m, t, k, такие, что $\beta^{-1} < k < \beta^{-n}$, $\alpha < k, t < \alpha^m$.

Пусть $x, y \in T_{\beta^n} \overleftarrow{\times} T_{\alpha^m}$. Тогда $|x| \vee |y| = (g_1, g_2)$, где $g_1 = (\beta^{nk_1}, a_1)$, $g_2 = (\alpha^{mk_2}, a_2)$. Из определения лексикографического порядка на группе $T_{\beta^n} \overleftarrow{\times} T_{\alpha^m}$ следует, что $g_2 > e$ или $g_2 = e$ и $g_1 \geq e$. Модуль коммутатора $|[x, y]| = ((1, a_3), (1, a_4))$ и $a_4 > 0$ или $a_4 = 0$ и $a_3 \geq 0$.

Пусть $a_4 > 0$. Тогда $g_2 > e$ и, более того, $k_2 > 0$. Следовательно, $|[x, y]|^{|x| \vee |y|} = ((1, \beta^{nk_1} a_3), (1, \alpha^{mk_2} a_4))$. Так как $\alpha^{mk_2} \geq \alpha^m > t$, то $|[x, y]|^{|x| \vee |y|} > |[x, y]|^t$.

Далее, пусть $a_4 = 0$ и $a_3 > 0$. Тогда $k_1 \neq 0$. Если $k_1 < 0$, то $\beta^{nk_1} = \beta^{-n(-k_1)} > k$. Следовательно, $\beta^{nk_1} a_3 > k a_3$, что влечет $|[x, y]|^{|x| \vee |y|} > |[x, y]|^k$. Если $k_1 > 0$, то $\beta^{nk_1} \leq \beta^n < \frac{1}{k}$. Поэтому $\beta^{nk_1} k a_3 < a_3$, что означает

$$(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]|^k (|x| \vee |y|) < |[x, y]|.$$

Разобранные случаи позволяют утверждать, что тождество

$$\begin{gathered} |(|[x, y]|^t \wedge |[x, y]|^{|x| \vee |y|}) | [x, y]|^t| \wedge \\ \wedge |(|[x, y]|^k \wedge |[x, y]|^{|x| \vee |y|}) | [x, y]|^k| \wedge \\ \wedge |(|[x, y]| \vee (|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]|^k (|x| \vee |y|)) | [x, y]|^{-1}| = e \end{gathered} \tag{6}$$

верно в группе $T_{\beta^n} \overleftarrow{\times} T_{\alpha^m}$, значит, и в любой группе из многообразия U_{β^n,α^m}.

Покажем, что (6) не выполнено в группе $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha$. Пусть $x = ((1, 0), (1, r))$, где $r > 0$ и $y = ((1, 0), (\alpha, 0))$. Ясно, что $y > x > e$. Поэтому $|x| \vee |y| = y$ и $[x, y] = ((1, 0), (1, r_1)) > e$, так как $r_1 = (\alpha - 1) r > 0$. Следовательно, выполнено $(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) = ((1, 0), (1, \alpha r_1))$. Так как $\alpha < t$, то $\alpha r_1 < t r_1$. Значит, имеет место следующее неравенство: $(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) < |[x, y]|^t$. Неравенство $(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) < |[x, y]|^k$ вытекает из неравенства $\alpha < k$. Очевидно, что $\alpha k > 1$ и поэтому $(|x| \vee |y|)^{-1} |[x,y]|^k (|x| \vee |y|) > |[x,y]|$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. #

Теперь можно показать, что многообразие R всех o-аппроксимируемых ℓ-групп не является накрытием X в решетке L_0. Действительно, предположив противное, получим, что верно $R = \mathsf{X} \vee U_{\beta,\alpha} = \mathsf{X} \vee U_{\beta^n,\alpha^m}$ для подходящих натуральных чисел n и m. Отсюда вытекает $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha \in \mathsf{X}$ или $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha \in U_{\beta^n,\alpha^m}$, что одинаково невозможно. Однако открытым остается вопрос о существовании накрытия X в решетке L_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копытов В.М.* Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984. 300 с.
2. *Kopytov V.M., Medvedev N.Ya.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1994. 374 p.
3. *Andersen M., Darnel M., Feil T.* A variety of lattice-ordered groups containing all representable covers of the abelian variety // Order. 1991. V. 7. P. 401–405. DOI: 10.1007/BF00383204.
4. *Молочко С.В., Морозова С.В.* К теории многообразий решеточно упорядоченных групп // Сибирский матем. журнал. 1997. Т. 38. № 1. С. 151–160.
5. *Medvedev N.Ya., Morozova S.V.* On covers in the lattice of representable ℓ-varieties // Czechoslovak Mathematical Journal. 1998. V. 48(123). P. 821–831.
6. *Медведев Н.Я.* О решетке o-аппроксимируемых ℓ-многообразий // Czechoslovak Mathematical Journal. 1984. V. 34(109). P. 6–17.
7. *Huss M.E., Reilly N.R.* On reversing the order of a lattice ordered group // J. Algebra. 1984. V. 91. P. 176–191. DOI: 10.1016/0021-8693(84)90133-9.

Статья поступила 12.11.2019 г.

Bayanova N.V., Zenkov A.V., Prusakova G.V. (2020) ON THE THEORY OF REPRESANTABLE VARIETIES OF LATTICE-ORDERED GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 22–29

DOI 10.17223/19988621/65/2

Keywords: lattice-ordered group, representable varieties, cover.

Recall that a lattice-ordered group (or ℓ-group, for short) is an algebraic system G of a signature $\ell = \langle e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \rangle$ combining the structure of a group and the structure of lattice that are naturally related via $x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy$. An ℓ-group G is totally ordered if every two elements of G are comparable.

The non-empty class M of ℓ-group is an ℓ-variety if and only if M is closed under the formation of ℓ-subgroup, the homomorphic images and the Cartesianproducts [1, 2]. The set L of all ℓ-varieties is a lattice under naturally defined operations of join and meet [1, 2]. Let U, V be ℓ-varieties and $U \subset V$. If there is no ℓ-variety S such that $U \subset S \subset V$, then V covers U in the lattice L. The ℓ-variety R defined by the identity $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ is called the ℓ-variety of representable ℓ-groups. Any ℓ-variety $V, V \subseteq R$ is called a representable ℓ-variety. Since each ℓ-group in R is a subdirect product of totally ordered groups, any representable ℓ-variety is uniquely determined by it's totally ordered groups. The set L_0 of all representable ℓ-varieties is a complete lattice under naturally defined operations of join and meet [2].

Let B_β be an infinite cyclic subgroup of the multiplicative group of positive real numbers generated by the number $\beta \neq 1$ and A is a subgroup of the additive group of real numbers such $a \in A$ implies $\beta a, \beta^{-1} a \in A$. Let $T_\beta = \left\{ \left(\beta^k, a\right) \mid a \in A, k \in Z \right\}$ be a splitting extension of A by B_β. The group T_β is a totally ordered group by the lexicographic order, i.e. $g = (\beta^k, a) \geq e$ if and only if $k > 0$ or $k = 0$ and $a \geq 0$. The set $T_{\beta^n} = \left\{ \left(\beta^{nk}, a\right) \right\}$ is a subgroup of the group T_β for any natural n. We denote by $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha$ the lexicographic product of the totally ordered groups T_β and T_α. It is clear that $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha$ is a totally ordered group. In the works [1–6] were introduced and studied the representable ℓ-varieties V, C, C^*, H, H^*. We prove

Proposition 1.The totally ordered group $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha \notin C$ for any $\alpha, \beta \neq 1$.

Proposition2.The ℓ-variety C is equal to the ℓ-variety H^*.

Hence, the set $\left\{V, C, C^*, H, H^*\right\}$ has three elements.

Denote by $U_{\beta,\alpha}$ and U_{β^n,α^m} varieties which are generated by the group $T_\beta \overleftarrow{\times} T_\alpha$ and her subgroup $T_{\beta^n} \overleftarrow{\times} T_{\alpha^m}$ respectively. There is the following

Proposition 3. For suitable natural numbers n, m a variety U_{β^n,α^m} is strictly contained in $U_{\beta,\alpha}$.

In the ending, using Proposition 3, it is proved that the ℓ-variety R is not a cover of an ℓ-variety $C \vee C^*$.

AMS Mathematical Subject Classification: 06F15, 08B15

Nadezhda V. BAYANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Altai State University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: bayanova@math.asu.ru

Alexey V. ZENKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Galina V. PRUSAKOVA (Senior Lecturer, Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: prusakova_galina@mail.ru

REFERENCES

1. Kopytov V.M. (1984) *Reshotochno uporyadochennye gruppy* [Lattice-ordered groups] Moscow: Nauka.
2. Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. (1994) *The Theory of Lattice-Ordered Groups*. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers.
3. Andersen M., Darnel M., Feil T. (1991) A variety of lattice-ordered groups containing all representable covers of the abelian variety. *Order*. 7. pp. 401–405. DOI: 10.1007/BF00383204.
4. Molochko S.V., Morozova S.V. (1997) On the theory of varieties of lattice-ordered groups. *Sib. Math. J.* V. 38(1). pp. 127–135.
5. Medvedev N.Ya., Morozova S.V. (1998) On covers in the lattice of representable ℓ-varieties. *Czech. Math. J.* V. 48(4). pp. 821–831.
6. Medvedev N.Ya. (1984) O reshetke *o*-approksimiruemykh ℓ-mnogoobraziy [On the lattice of *o*-approximable ℓ-varieties] *Czech. Math. J.* V. 34(1). pp. 6–17.
7. Huss M.E., Reilly N.R. (1984) On reversing the order of a lattice ordered group. *J. Algebra*. V. 91 pp. 176–191. DOI: 10.1016/0021-8693(84)90133-9.

Received: November 12, 2019