УДК 519.642.4 MSC 80M15, 65E05
DOI 10.17223/19988621/65/3

Д.Ю. Иванов

УТОЧНЕНИЕ КОЛЛОКАЦИОННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С ПОМОЩЬЮ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

Исследуется решение первой краевой задачи для двумерного однородного уравнения теплопроводности при нулевом начальном условии с помощью коллокационного метода граничных элементов. Предлагается полуаналитическая аппроксимация потенциала двойного слоя, обеспечивающая равномерную кубическую сходимость приближенного решения в области. При некоторых упрощениях доказано, что использование квадратурных формул для аппроксимации потенциала приводит к нарушению равномерной сходимости вблизи границы области. Теоретические выводы подтверждены результатами численного решения задачи в круговой области.

Ключевые слова: *нестационарная теплопроводность, задача Дирихле, граничные интегральные уравнения, потенциал двойного слоя, граничный элемент, коллокация, равномерная сходимость, устойчивость.*

В настоящей работе рассматриваются внутренние и внешние первые краевые задачи для уравнения теплопроводности (ПКЗУТ) $\partial_t u = a^2\Delta_2 u - pu$ с постоянными $a, p > 0$ в открытой двумерной пространственной области Ω при нулевом начальном условии. Предлагается полностью обоснованный коллокационный метод граничных элементов (КМГЭ) [1, с. 21], позволяющий получить равномерно сходящиеся и равномерно устойчивые в пространственно-временнóй области $\Omega \times I_T$ ($I_T \equiv [0,T]$) приближенные решения двумерных ПКЗУТ. Решения ищутся в виде потенциала двойного слоя (ПДС) с неизвестной функцией плотности, определяемой из граничного интегрального уравнения (ГИУ) второго рода. Численные примеры решения двумерных ПКЗУТ с помощью КМГЭ на основе ГИУ второго рода рассматривались ранее в работах [2, с.269; 3; 4]. Доказательство равномерных сходимости и устойчивости такого решения в любой замкнутой области вида $\Omega' \times I_T$ ($\Omega' \subset \Omega$) приведено в работе автора [5]. Найти другие работы, посвященные теоретическому обоснованию решения ПКЗУТ с помощью КМГЭ на основе ГИУ второго рода, оказалось затруднительно. В то же время достаточно много работ, посвященных обоснованию решения аналогичных вторых краевых задач с помощью КМГЭ на основе ГИУ второго рода, а также обоснованию решения ПКЗУТ с помощью КМГЭ на основе ГИУ первого рода (см. работы [6–9] и [10–12] соответственно). Отметим, что в данном случае преимуществом использования ГИУ второго рода является устойчивая обратимость аппроксимаций оператора ГИУ (см. теорему 6 [5] или теорему 3 настоящей работы). Неустойчивая обратимость аппроксимаций оператора ГИУ первого рода, полученных на основе КМГЭ для ПКЗУТ, доказана в теореме 2 [13].

Как и в двух предыдущих работах [5, 14], в этой работе также существенная роль при обосновании метода отводится аппроксимации коэффициентов приближенного оператора. Такой оператор здесь получается из интегрального оператора ПДС в результате кусочно-квадратичной интерполяции (ККИ) временно́й C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}(\tau)$, через которую выражается ядро интегрального оператора, с равным шагом h_τ, а также ККИ функции плотности, точки коллокации которой разбивают границу $\partial\Omega$ на равные по длине граничные элементы (ГЭ). Коэффициенты имеют вид двукратных интегралов по параметру полугруппы τ и длине дуги s, причем интегрирование по τ осуществляется аналитически после ККИ множителя $e^{-p\tau}$, также входящего в ядро интегрального оператора. На этапе решения ГИУ интегралы по s вычисляются как в работе [5]. А именно, для вычисления интегралов по s на сингулярном ГЭ, а также на околосингулярных ГЭ в некоторой фиксированной по длине дуги области, прилегающей к сингулярному ГЭ, используется точное интегрирование после перехода к новой переменной интегрирования $\tilde{r}$ – расстоянию от точки коллокации до текущей точки интегрирования $\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$ (сингулярным называется ГЭ, в котором достигается значение $\tilde{r} = 0$). При этом в качестве весовой функции берется функция переменной $\tilde{r}$, порожденная фундаментальным решением уравнения теплопроводности (ФРУТ), а остальная часть подынтегральной функции аппроксимируется с помощью квадратичной интерполяции по $\tilde{r}$, и тогда интегрирование по $\tilde{r}$ осуществляется точно для любой аналитически заданной границы $\partial\Omega$. На других ГЭ интегралы по s вычисляются с помощью простых квадратурных формул Гаусса (ПКФГ) [1, с. 79]. Такая аппроксимация позволяет в работе [5] доказать сходимость и устойчивость приближенных решений ГИУ.

Аналогично аппроксимируются интегралы по s при вычислении ПДС в точках $\boldsymbol{x} \in \Omega$. А именно, если расстояние от точки $\boldsymbol{x}$ до точек некоторого ГЭ не превышает примерно трети радиуса Ляпунова, то для аппроксимации интеграла по s на этом ГЭ используется точное интегрирование по переменной $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$ (r и d – расстояния от точки $\boldsymbol{x}$ до текущей точки интегрирования $\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$ и границы $\partial\Omega$ соответственно). На остальных ГЭ интегралы по s вычисляются с помощью ПКФГ. Точное интегрирование по ρ уже использовалось в работе [14] для аппроксимации потенциала простого слоя. Для того чтобы обеспечить равномерные в области $\Omega \times I_T$ сходимость и устойчивость аппроксимаций ПДС, интеграл по s здесь представляется в виде суммы двух интегралов по ρ, в каждом из которых берется своя весовая функция переменной ρ, порожденная ФРУТ. Оставшиеся части подынтегральных функций аппроксимируются с помощью квадратичной интерполяции по ρ, после чего интегрирование по ρ осуществляется точно для любой аналитически заданной границы $\partial\Omega$.

Дискретный оператор, разрешающий ПКЗУТ, вычисляется в алгебре полиномов, образованных степенями полугруппового оператора $\boldsymbol{U}(h_\tau)$, с помощью приближенного оператора, разрешающего ГИУ, и приближенного оператора ПДС. С помощью дискретного оператора, разрешающего ПКЗУТ, и значений граничной функции, взятых в точках коллокации nh_τ C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}(\tau)$, вычисляются решения ПКЗУТ в тех же точках nh_τ, что позволяет осуществить ККИ решения по времени. Доказано, что полученные таким образом приближенные решения ПКЗУТ сходятся к точным с кубической относительно шагов по времени и длине дуги скоростью равномерно в области $\Omega\times I_T$. Доказана равномерная в $\Omega\times I_T$ устойчивость приближенных решений ПКЗУТ к возмущениям граничной функции. Полученные результаты справедливы для границы $\partial\Omega$ с гладкостью C^5.

Обычно интегралы по s при $\boldsymbol{x}\in\Omega$ рекомендуется вычислять с помощью ПКФГ, так как подынтегральная функция при $\boldsymbol{x}\in\Omega$, строго говоря, гладкая [1, с. 173]. В настоящей работе для более простого случая кусочно-постоянной интерполяции доказано, что использование для вычисления интеграла по s на ближайшем к точке $\boldsymbol{x}\in\Omega$ ГЭ целого ряда квадратурных формул, включая ПКФГ и квадратурные формулы Ньютона – Котеса (КФНК), влечет нарушение равномерной по d сходимости аппроксимаций ПДС вблизи границы $\partial\Omega$. Приведены результаты вычислительных экспериментов по решению ПКЗУТ в круговой пространственной области, которые подтверждают, что применение точного интегрирования по ρ обеспечивает равномерную в области $\Omega\times I_T$ сходимость, близкую к кубической, в то время как использование вместо этого квадратурных формул, ПКФГ или КФНК, приводит к серьезному нарушению точности вблизи границы $\partial\Omega$.

Отметим, что уточнение решений краевых задач, полученных в рамках КМГЭ для уравнений Лапласа и Гельмгольца вблизи границы области, рассматривается в работах [15, 16]. При этом уточнение основано на регуляризации решения с помощью сглаживания ядра интегрального оператора в области сингулярности.

Предварительные замечания

Пусть Ω^+ – двумерная открытая ограниченная односвязная область и $\Omega^-\equiv\mathbf{R}^2\setminus\overline{\Omega^+}$ ($\mathbf{R}\equiv(-\infty,+\infty)$). Кроме того, пусть $\partial\Omega$, граница области Ω^+, является кривой класса гладкости C^2, если не оговорено особо. Рассмотрим внутренние и внешние задачи Дирихле:

$$a^2\Delta_2\boldsymbol{u}_1^\pm-p\boldsymbol{u}_1^\pm=\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_1^\pm\ \ (\boldsymbol{x}\equiv(x_1,x_2)\in\Omega^\pm),\ \ \boldsymbol{u}_1^\pm=\boldsymbol{w}_1^\pm\ \ (\boldsymbol{x}\in\partial\Omega), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u}_1^\pm(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{w}_1^\pm(\boldsymbol{x})$ – векторные функции со значениями в гильбертовом пространстве $L_2\equiv L_2(I_T)$, заданные на множествах $\Omega^\pm$ и $\partial\Omega$ соответственно (все пространства функций здесь комплексные); $\Delta_2\equiv\partial^2_{x_1x_1}+\partial^2_{x_2x_2}$ (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений, в данном случае – L_2); $p>0$, $a>0$ (коэффициент температуропроводности) – постоянные; $\boldsymbol{B}$ – замкнутый оператор в L_2: $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{f})(t)=f'(t)$, заданный на множестве $D(\boldsymbol{B})$ классов функций $\boldsymbol{f}\in L_2$, эквивалентных абсолютно непрерывным на промежутке I_T функциям $f(t)$, таким, что $f(0)=0$.

Пусть $C(\Omega')$ и $C^k(\Omega')$ – пространства непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на некотором множестве $\Omega'\subset\mathbf{R}^2$ векторных функций со значениями в пространстве L_2. В работах [17, 18] доказана однозначная разрешимость задач (1) в классе $C(\overline{\Omega^{\pm}})\cap C^2(\Omega^{\pm})$ при любых $\boldsymbol{w}_1^{\pm}\in C(\partial\Omega)$. Решения имеют вид векторных потенциалов: $\boldsymbol{u}_1^{\pm}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_1^{\pm}$ ($\boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}$), где функции $\boldsymbol{v}_1^{\pm}\in C(\partial\Omega)$ находятся из соответствующих ГИУ:

$$\left(\boldsymbol{G}^{\pm}\boldsymbol{v}_1^{\pm}\right)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{w}_1^{\pm}(\boldsymbol{x})\ \ (\boldsymbol{x}\in\partial\Omega),\ \boldsymbol{G}^{\pm}\equiv\pm 2^{-1}+\boldsymbol{G},$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{G}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})\equiv\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds'\ \ (\boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega));\tag{2}$$

$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ ($\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}'$) – ограниченные операторы в пространстве L_2, определяемые равенствами:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f}\equiv\int_{I_T}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)e^{-p\tau}\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau\ \ (\boldsymbol{f}\in L_2),$$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)\equiv a_1(r,\tau)b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'),\ b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\equiv\partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')}\ln r^{-1}.$$

Здесь $a_1(r,\tau)\equiv -r\,\partial_r a_0(r,\tau)$, $a_0(r,\tau)\equiv(4\pi\tau)^{-1}\exp\left[-r^2/\left(4a^2\tau\right)\right]$, $r\equiv|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$; дифференцирование $\partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')}$ осуществляется по переменной $\boldsymbol{x}'$ в направлении $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')$ – нормали к кривой $\partial\Omega$, проходящей через точку $\boldsymbol{x}'$ и направленной внутрь области Ω^+. Операторы $\boldsymbol{U}(\tau)$ образуют C_0-полугруппу правых сдвигов, порождаемую оператором $\boldsymbol{B}$: $(\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f})(t)=f(t-\tau)$ при $\tau\le t$, $(\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f})(t)=0$ при $\tau>t$, $\boldsymbol{B}\mathbf{f}=\lim\limits_{\tau\to+0}\tau^{-1}(\mathbf{f}-\boldsymbol{U}(\tau)\mathbf{f})$ ($\mathbf{f}\in D(\boldsymbol{B})$). Заметим, что $\|\boldsymbol{U}(\tau)\|=1$ при $\tau<T$; $\boldsymbol{U}(\tau)=\boldsymbol{O}$ при $\tau\ge T$ ($\boldsymbol{O}$ – нулевой оператор). Имеют место равенства:

$$\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}=\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{f}\ \ (\boldsymbol{f}\in D(\boldsymbol{B}^n),\ n\in\mathbf{N}\equiv\{1,2,\ldots\}).\tag{3}$$

Зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1=\tilde{x}_1(s)$, $x_2=\tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\equiv(\tilde{x}_1(s),\tilde{x}_2(s))$, причем $s>0$, если дуга откладывается по часовой стрелке, и $s<0$, если против. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S – половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I'_S\equiv[-S,S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega\in C^k$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $\overline{I'_S}$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($i=1,2$, $l=\overline{0,k}$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0)=\tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$.

Введем в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\partial\Omega)$ ($k\in\mathbf{Z}_+\equiv\{0,1,...\}$) функций $\boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве $\partial\Omega$ производные $\boldsymbol{f}^{(l)}$: $\boldsymbol{f}^{(l)}(s)\equiv d^l\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s))/ds^l$ ($s\in\overline{I'_S}$, $l=\overline{0,k}$), с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\partial\Omega)}=\max\limits_{l=\overline{0,k}}\sup\limits_{s\in I'_S}\left\|\boldsymbol{f}^{(l)}(s)\right\|_{L_2}$ ($C^0(\partial\Omega)\equiv C(\partial\Omega)$). Обозначим через H^n ($n\in\mathbf{N}$) гильбертовы пространства функций $\boldsymbol{f}\in L_2$: $\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\in L_2$ ($m=\overline{1,n}$), с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{H^n}\equiv\left[\sum_{m=0}^n\left\|\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\right\|_{L_2}^2\right]^{1/2}$ ($H^0\equiv L_2$). Определим банаховы пространства $C_n^k(\partial\Omega)$

($k \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{N}$) функций $\boldsymbol{f} \in C^k(\partial\Omega)$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in H^n$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$) и $\boldsymbol{B}^m \boldsymbol{f} \in C^k(\partial\Omega)$ ($m = \overline{1,n}$), с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C_n^k(\partial\Omega)} \equiv \max_{l=\overline{0,k}} \sup_{s \in \overline{I'_S}} \left\| \boldsymbol{f}^{(l)}(s) \right\|_{H^n}$ ($C_0^k(\partial\Omega) \equiv C^k(\partial\Omega)$). Зададим банаховы пространства $C_{n,m}^k(\partial\Omega) \equiv C_n^k(\partial\Omega) \cap C_{n+m}(\partial\Omega)$ ($C_n(\partial\Omega) \equiv C_n^0(\partial\Omega)$) с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C_{n,m}^k(\partial\Omega)} \equiv \|\boldsymbol{f}\|_{C_n^k(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{f}\|_{C_{n+m}(\partial\Omega)}$ ($k,n,m \in \mathbf{Z}_+$).

Условимся оператор $\boldsymbol{A}$, отображающий банахово пространство B в банахово пространство C, обозначать как $\boldsymbol{A}$ [$B \to C$], а если $C = B$, то $\boldsymbol{A}$ [B]. В силу следствия 3 [19] имеет место утверждение:

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $\boldsymbol{G}^{\pm}$ [$C_{n,m}^k(\partial\Omega)$] всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ($k,n,m \in \mathbf{Z}_+$).

Пусть $\sigma \equiv s' - s$, где s, s' – значения параметра, соответствующие точкам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$, и $\tilde{r} \equiv \left| \tilde{\boldsymbol{x}}(s') - \tilde{\boldsymbol{x}}(s) \right|$. На множестве $\Theta \equiv \left\{ (s,s') : \ \sigma \in \overline{I'_S} \ \ s \in \overline{I'_S} \right\}$ зададим функции $\psi_i(s,s')$ ($i = \overline{0,4}$): при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i / \sigma^2$ ($i = \overline{0,2}$) и $\psi_i \equiv \varphi_i / \sigma$ ($i = 3,4$), где

$$\varphi_0(s,s') \equiv \tilde{r}^2 = [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)]^2 + [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)]^2,$$

$$\varphi_1(s,s') \equiv 2^{-1} \partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')} \varphi_0 = \tilde{x}_2'(s') [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] - \tilde{x}_1'(s') [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

$$\varphi_2(s,s') \equiv 2^{-1} \partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})} \varphi_0 = -\tilde{x}_2'(s) [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}_1'(s) [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

$$\varphi_3(s,s') \equiv 2^{-1} \partial_{s'} \varphi_0 = \tilde{x}_1'(s') [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}_2'(s') [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

$$\varphi_4(s,s') \equiv \partial_{s'} \varphi_2 = -\tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1'(s') + \tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2'(s'),$$

а при $s' = s$ равенствами

$$\psi_0(s,s) = \psi_3(s,s) \equiv 1, \ \psi_1(s,s) = \psi_2(s,s) \equiv 2^{-1} [\tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2''(s) - \tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1''(s)],$$
$$\psi_4(s,s) \equiv -\tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1''(s) + \tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2''(s).$$

В силу леммы [19] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_{s'}^j \psi_i$ ($j = \overline{0,n}$, $i = \overline{0,4}$) (см. теорему 1 [19], теорему 2 [5], теорему 5 [14]).

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ и $\tilde{\Lambda}_m(z)$ ($z \in [a,b]$, $m = \overline{0,2}$) интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0\,(j \neq m)}^{2} \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \ z_j \equiv \overline{z} + q_j h_z \ \ (j = \overline{0,2});$$

$$\tilde{\Lambda}_m(z) \equiv \prod_{j=0\,(j \neq m)}^{2} \frac{z - \tilde{z}_j}{\tilde{z}_m - \tilde{z}_j}, \ \tilde{z}_j \equiv \overline{z} + \tilde{q}_j h_z \ \ (j = \overline{0,2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(b-a)$, $\overline{z} \equiv 2^{-1}(a+b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$; $\tilde{q}_0 \equiv -\sqrt{3}/2$, $\tilde{q}_1 \equiv 0$, $\tilde{q}_2 \equiv \sqrt{3}/2$ [20, с. 92]. Пусть $\boldsymbol{f}(z)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке $[a,b]$ функция со значениями в произвольном банаховом пространстве B. Тогда для функций $\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}(z_m)\Lambda_m(z)$, $\tilde{\boldsymbol{f}}_2(z) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}(\tilde{z}_m)\tilde{\Lambda}_m(z)$, а также первых и вторых производных функции $\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z)$ при $z \in [a,b]$ имеют место оценки:

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z) - \boldsymbol{f}(z)\right\|_B \le c_\omega \sup_{z\in[a,b]} \left\|\boldsymbol{f}^{(3)}(z)\right\|_B h_z^3, \ \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_2 - \boldsymbol{f}\right\|_B \le \tilde{c}_\omega \sup_{z\in[a,b]} \left\|\boldsymbol{f}^{(3)}(z)\right\|_B h_z^3,$$

$$c_\omega \equiv 2\sqrt{3}/9, \ \tilde{c}_\omega \equiv 4^{-1}; \tag{4}$$

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z)\right\|_B \le c_\Lambda \max_{m=0,2} \left\|\boldsymbol{f}(z_m)\right\|_B, \ \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_2(z)\right\|_B \le \tilde{c}_\Lambda \max_{m=0,2} \left\|\boldsymbol{f}(\tilde{z}_m)\right\|_B, \ c_\Lambda \equiv 3,$$

$$\tilde{c}_\Lambda \equiv 3^{-1}\left(7 + 2\sqrt{3}\right); \tag{5}$$

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_1^{(1)}(z)\right\|_B \le c'_\Lambda \sup_{z\in[a,b]} \left\|\boldsymbol{f}^{(1)}(z)\right\|_B, \ \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_1^{(2)}(z)\right\|_B \le c''_\Lambda \sup_{z\in[a,b]} \left\|\boldsymbol{f}^{(2)}(z)\right\|_B,$$

$$c'_\Lambda \equiv 3, \ c''_\Lambda = 2^{-1}. \tag{6}$$

Приближенное решение граничного интегрального уравнения

В настоящем разделе кратко опишем результаты работы [5], касающиеся операторов, позволяющих получить приближенное решение ГИУ (2) на сетке границы $\partial\Omega$.

На множестве Θ зададим функцию $\rho(s,s')$: $\rho = \tilde{r}$, если $\sigma \ge 0$; $\rho = -\tilde{r}$, если $\sigma < 0$.

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $\delta_0(s,s') \equiv \left(\partial_{s'}\rho\right)^{-1} = \sqrt{\psi_0}/\psi_3$, $\delta_1(s,s') \equiv b(\tilde{\boldsymbol{x}}(s), \tilde{\boldsymbol{x}}(s')) = -\psi_1/\psi_0$. Тогда на множестве Θ существуют непрерывные производные $\partial_{s'}^j \delta_1$ ($j = \overline{0,n}$). Кроме того, для любого $M > 1$ существует число Σ: $0 < \Sigma \le S$, такое, что при $(s,\sigma) \in \overline{I'_S} \times I'_\Sigma$ ($I'_\Sigma \equiv [-\Sigma, \Sigma]$) функция δ_0 ограничена: $1 \le \delta_0 \le M$, и существуют непрерывные производные $\partial_{s'}^j \delta_0$ ($j = \overline{0,n}$).

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда функция $\rho_s(\sigma) \equiv \rho(s, s+\sigma)$ при любых фиксированных $s \in I'_S$ и $M > 1$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображает множество I'_Σ на множество $\rho_s(I'_\Sigma) \equiv \left[\rho_s(-\Sigma), \rho_s(\Sigma)\right]$. Функции $\tilde{\delta}_0(s,\rho) \equiv \delta\left(s, s+\sigma_s(\rho)\right)$, $\tilde{\delta}_1(s,\rho) \equiv \tilde{\delta}_0\, \delta_1\left(s, s+\sigma_s(\rho)\right)$ ($\sigma_s(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_s(\sigma)$) имеют непрерывные на множестве $\overline{I'_S} \times \rho_s(I'_\Sigma)$ производные $\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i$ ($j = \overline{0,n}$, $i = 0,1$).

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$, $\tilde{N}/2 \in \mathbf{N}$; $\tau_n \equiv n h_\tau$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $h_\tau \equiv T/N$; $\tilde{\tau}_n \equiv n\tilde{h}_\tau$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $\tilde{h}_\tau \equiv h_\tau/\tilde{N}$.

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение пространства H_L векторных сеточных функций $\boldsymbol{f}$ со значениями $\boldsymbol{f}_l \in L_2$, заданными в узлах $\boldsymbol{x}_l \equiv \tilde{\boldsymbol{x}}(s_l)$ ($s_l \equiv l h_s$,

$l=\overline{-L-1,L}$, $h_s\equiv S/(L+1)$), с нормой: $\|\boldsymbol{f}\|_{H_L}=\max\limits_{-L-1\le l\le L}\|\boldsymbol{f}_l\|_{L_2}$. Условимся считать, когда это будет необходимо, что $\boldsymbol{x}_{l+2L+2}=\boldsymbol{x}_l$. Зададим проекционные операторы $\boldsymbol{P}_L$ $[\,C(\partial\Omega)\to H_L\,]$: $(\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{f})_l=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_l)$ ($\|\boldsymbol{P}_L\|\le 1$). Зададим ограниченные операторы $\hat{\boldsymbol{G}}\equiv\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\boldsymbol{G}}_n\boldsymbol{U}(\tau_n)$ $[\,H_L\,]$:

$$\hat{\boldsymbol{G}}_0\equiv\int\limits_{\tau_0}^{\tau_2}\hat{\boldsymbol{A}}(\tau)e(\tau)\Lambda_0(\tau)\,d\tau\ ,\ \hat{\boldsymbol{G}}_{2n+1}\equiv\int\limits_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}}\hat{\boldsymbol{A}}(\tau)e(\tau)\Lambda_1(\tau)\,d\tau\ \ (n=\overline{0,N/2-1}),$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}_{2n}\equiv\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\hat{\boldsymbol{A}}(\tau)e(\tau)\Lambda_2(\tau)\,d\tau+\int\limits_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}}\hat{\boldsymbol{A}}(\tau)e(\tau)\Lambda_0(\tau)\,d\tau\ \ (n=\overline{1,N/2-1});$$

$$e(\tau)\equiv\sum_{m=0}^{2}\exp\!\left[-p\left(\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+1}+\tilde{q}_m\tilde{h}_\tau\right)\right]\tilde{\Lambda}_m(\tau)\ \ (\tau\in[\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}},\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+2}],$$

$$\tilde{n}=\overline{0,\tilde{N}/2-1}\ ,\ n=\overline{0,N-1}\ ).$$

Операторы $\hat{\boldsymbol{A}}(\tau)$ $[\,H_L\,]$ ($\tau>0$) подобно $\hat{\boldsymbol{G}}_n$ имеют вид скалярных квадратных матриц порядка $2L+2$:

$$\left(\hat{\boldsymbol{A}}(\tau)\boldsymbol{f}\right)_k=\sum_{l=-L-1}^{L}\hat{g}_{k,l}(\tau)\boldsymbol{f}_l\ \ (k=\overline{-L-1,L}\ ,\ \boldsymbol{f}\in H_L\,),$$

$$\hat{g}_{k,2l}(\tau)\equiv\tilde{J}_{1,k,2l-1}(\tau)+\tilde{J}_{1,k,2l}(\tau)\,,$$

$$\hat{g}_{k,2l-1}(\tau)\equiv\tilde{J}_{2,k,2l-3}(\tau)+\tilde{J}_{2,k,2l-2}(\tau)+\tilde{J}_{0,k,2l-1}(\tau)+\tilde{J}_{0,k,2l}(\tau)\ \ (l=\overline{-L/2,L/2}\,),$$

$$\tilde{J}_{m,k,l}(\tau)\equiv\tilde{J}'_{m,k,l}(\tau)+\tilde{J}''_{m,k,l}(\tau)\ \ (l=\overline{-L-1,L}\ ,\ m=\overline{0,2}\,).$$

В свою очередь, функции $\tilde{J}'_{m,k,l}(\tau)$ и $\tilde{J}''_{m,k,l}(\tau)$ ($\tau>0$) определяются равенствами:

$$\tilde{J}'_{m,k,l}(\tau)\equiv\int\limits_{\rho_k(s'_l)}^{\rho_k(s'_{l+1})}a_1(\rho,\tau)\hat{\delta}_{1,m,k}(\rho)\,d\rho\ \ \ (m=\overline{0,2}\ ,\ k,l=\overline{-L-1,L}\,),$$

$$\hat{\delta}_{1,m,k}(\rho)\equiv\sum_{m'=0}^{2}\breve{\delta}_{1,m,k}(\overline{\rho}_{k,l}+\tilde{q}_{m'}h'_{k,l})\tilde{\Lambda}_{m'}(\rho)\ \ (\rho\in[\rho_k(s'_l),\rho_k(s'_{l+1})]),$$

$$h'_{k,l}\equiv 2^{-1}[\rho_k(s'_{l+1})-\rho_k(s'_l)]\ ,\ \overline{\rho}_{k,l}\equiv 2^{-1}[\rho_k(s'_l)+\rho_k(s'_{l+1})]\,,$$

$$\breve{\delta}_{1,m,k}(\rho)\equiv\tilde{\delta}_1(s_k,\rho)\breve{\Lambda}_m\left(s_k+\sigma_k(\rho)\right);$$

$$\tilde{J}''_{m,k,l}(\tau)\equiv h''_l\sum_{j=1}^{\gamma}\hat{w}_j\,\breve{g}_{m,k}(\overline{s}_l+h''_l z_j,\tau)\ ,\ \overline{s}_l\equiv 2^{-1}\left(s''_l+s''_{l+1}\right)\ ,\ h''_l\equiv 2^{-1}\left(s''_{l+1}-s''_l\right)$$

$$(\ m=\overline{0,2}\ ,\ k,l=\overline{-L-1,L}\ ).$$

Здесь $\rho_k(\sigma)\equiv\rho(s_k,s_k+\sigma)$; $\sigma_k(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_k(\sigma)$; $\breve{\Lambda}_m(s)$ – кусочно-квадратичная функция, определенная на множестве $\overline{I'_S}$:

$\breve{\Lambda}_m(s) = \Lambda_m(s)$ $(s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}]$, $l = \overline{-L/2, L/2}$); z_j – корни многочлена $P_\gamma(z) \equiv [\gamma!/(2\gamma)!]\left(d^\gamma/dz^\gamma\right)\left(z^2-1\right)^\gamma$ на промежутке $[-1;1]$, $\hat{w}_j$ – весовые коэффициенты ПКФГ с γ узлами ($\sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j = 2$, $\hat{w}_j > 0$) [20, с. 255]; $\breve{g}_{m,k}(\sigma,\tau) \equiv$ $\equiv \tilde{g}(s_k, s_k+\sigma,\tau)\breve{\Lambda}_m(s_k+\sigma)$, $\tilde{g}(s,s',\tau) \equiv g(\tilde{x}(s),\tilde{x}(s'),\tau)$. Кроме того, здесь $s_l' \equiv \min\{s_l,\Sigma\}$, $s_l'' \equiv \max\{s_l,\Sigma\}$, если $s_l \ge 0$, и $s_l' \equiv \max\{s_l,-\Sigma\}$, $s_l'' \equiv \min\{s_l,-\Sigma\}$, если $s_l < 0$, при этом число $\Sigma > 0$ выбрано в соответствии с теоремой 2.

В пространстве H_L зададим операторы $\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}$ $[H_L]$: $\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm} \equiv \pm 2^{-1} + \hat{\boldsymbol{G}}$. Определено $N_{\min} \in \mathbf{N}$, такое, что при $N/2 \in \mathbf{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min}+1, \ldots\}$ операторы $\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}$ ограниченно обратимы в алгебре полиномов, образованных N степенями оператора $\boldsymbol{U}(h_\tau)$ (см. формулу (15) [5]).

Определение. Будем говорить, что ограниченные операторы $\boldsymbol{A}_n$ $[C \to D]$ ($n \in \mathbf{N}$) сходятся при $n \to \infty$ по операторной норме к соответствующим ограниченным операторам $\boldsymbol{B}_n$ $[C \to D]$, если $\|\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{f} - \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{f}\|_D \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно в шаре $\|\boldsymbol{f}\|_C \le 1$.

Доказаны следующие утверждения (см. теорему 6 и следствие 3 [5]):

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}\right)^{-1}$ $[H_L]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) совокупно ограничены.

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}\right)^{-1}\boldsymbol{P}_L$ $[C^3_{0,3}(\partial\Omega) \to H_L]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{P}_L\left(\boldsymbol{G}^{\pm}\right)^{-1}$ $[C^3_{0,3}(\partial\Omega) \to H_L]$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Сеточные аппроксимации решений краевых задач

Контур $\partial\Omega \in C^2$ не имеет точек самопересечения, поэтому существует постоянная $c_r \equiv \inf_{(s,s')\in\Theta} \sqrt{\psi_0} > 0$. Справедлива оценка: $\vartheta \le c_K|\sigma| \le c_K' c_r^{-1}\tilde{r}$, где ϑ – острый угол между нормалями, проходящими через точки $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}(s')$ ($s, s' \in I_S'$); $c_K' \equiv \sup_{(s,s')\in\Theta} K(s,s')$, $K(s,s') \equiv \left|\partial^2_{s'}\varphi_2\right|$; $c_K \equiv \sup_{s\in I_S'} K(s,s)$, $K(s,s)$ – кривизна кривой в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$. Отложим на нормали к кривой $\partial\Omega$ в каждой точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ ($s \in I_S'$) отрезок одной и той же длины $d \in I_D \equiv (0, D]$ ($D \equiv c_r/(3c_K')$) внутрь области $\Omega^{\pm}$. Величина $3D$ может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова, поэтому согласно [21, с. 313] концы таких отрезков $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s) \in \Omega^{\pm}$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d^{\pm} \in C^1$, параллельную кривой $\partial\Omega$, т.е. соответствие между точками $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ взаимно однозначное.

Введем в рассмотрение местную систему декартовых координат (ξ_s,η_s) с началом в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ и осью ординат, направленной по нормали внутрь области Ω^-. Координаты (ξ_s,η_s) точек $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}(s')$ равны соответственно $(0,\mp d)$ и $\left(-2^{-1}\partial_s\varphi_0, 2^{-1}\partial_{\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s))}\varphi_0\right)$, поэтому $r^2=\left|\tilde{\boldsymbol{x}}(s')-\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)\right|^2=\varphi_0^{\pm}+d^2$, где $\varphi_0^{\pm}\equiv\varphi_0\pm 2d\varphi_2$. Зададим на множестве $\Upsilon\equiv I_D\times\Theta$ функцию $\rho^{\pm}(d,s,s')$: $\rho^{\pm}=\sqrt{\varphi_0^{\pm}}$, если $\sigma\geq 0$; $\rho^{\pm}=-\sqrt{\varphi_0^{\pm}}$, если $\sigma<0$, а также функции $\psi_0^{\pm}(d,s,s')\equiv\psi_0\pm 2d\psi_2$ ($\psi_0^{\pm}>0$ на множестве Υ [14]) и $\psi_3^{\pm}\equiv\psi_3\pm d\psi_4$. Пусть E_s – связный участок кривой $\partial\Omega$ между двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$, причем $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\in\mathrm{E}_s$. Соответствующие значения σ обозначим через Ξ_s, левую и правую границу отрезка Ξ_s – через Σ_s' и Σ_s'' соответственно. Введем в рассмотрение множество $\Upsilon'\equiv\left\{(d,s,s'):\ \sigma\in\Xi_s,\ s\in\overline{I_S'},\ d\in\overline{I_D}\right\}$.

Теорема 5 [14]. Пусть $\partial\Omega\in C^{n+2}$ ($n\in\mathbf{Z}_+$). Тогда на множестве Υ' существует положительная, ограниченная сверху функция $\delta_0^{\pm}\equiv\left(\partial_{s'}\rho^{\pm}\right)^{-1}=\sqrt{\psi_0^{\pm}}\big/\psi_3^{\pm}$ и непрерывные производные $\partial_{s'}^{j}\delta_0^{\pm}$ ($j=\overline{0,n}$).

Следствие 2 [14]. Пусть $\partial\Omega\in C^{n+2}$ ($n\in\mathbf{Z}_+$). Тогда функция $\rho_{d,s}^{\pm}(\sigma)\equiv$ $\equiv\rho^{\pm}(d,s,s+\sigma)$ при любых фиксированных $s\in I_S'$, $d\in\overline{I_D}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображает множество Ξ_s на множество $\rho_{d,s}^{\pm}(\Xi_s)$. Функция $\tilde{\delta}_0^{\pm}(d,s,\rho)\equiv\delta_0^{\pm}\left(d,s,s+\sigma_{d,s}^{\pm}(\rho)\right)$ ($\sigma_{d,s}^{\pm}(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_{d,s}^{\pm}(\sigma)$) имеет непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}'\equiv\left\{(d,s,\rho):\ \rho\in\rho_{d,s}^{\pm}(\Xi_s),\ s\in\overline{I_S'},\ d\in\overline{I_D}\right\}$ производные $\partial_{\rho}^{j}\tilde{\delta}_0^{\pm}$ ($j=\overline{0,n}$).

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega\in C^{n+2}$ ($n\in\mathbf{Z}_+$). Тогда функции $\tilde{\delta}_1^{\pm}(d,s,\rho)\equiv$ $\equiv\tilde{\delta}_0^{\pm}\delta_1^{\pm}\left(d,s,s+\sigma_{d,s}^{\pm}(\rho)\right)$ и $\tilde{\delta}_2^{\pm}(d,s,\rho)\equiv\ \pm d\,\tilde{\delta}_0^{\pm}\varphi_5\left(s,s+\sigma_{d,s}^{\pm}(\rho)\right)$, где $\delta_1^{\pm}(d,s,s')\equiv$ $\equiv-\psi_1\big/\psi_0^{\pm}$ и $\varphi_5(s,s')\equiv-\partial_{\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s'))}\varphi_2=\tilde{x}_1'(s)\tilde{x}_1'(s')+\tilde{x}_2'(s)\tilde{x}_2'(s')$, имеют непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}'$ производные $\partial_{\rho}^{j}\tilde{\delta}_i^{\pm}$ ($j=\overline{0,n}$, $i=1,2$).

Операторы $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ $[C(\partial\Omega)\to L_2]$ ($\boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}$) представим в следующем виде: $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}=\int_{I_T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)e^{-p\tau}\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau$ ($\boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega)$). Здесь $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)$ $[C(\partial\Omega)\to L_2]$ ($\tau>0$) – ограниченные операторы: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv\int_{\partial\Omega}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')ds'$. Замкнутую область, ограниченную кривыми $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_D^{\pm}$, обозначим через $\Omega_D^{\pm}$. На основании следствия 2 и равенств $r^2 b(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s),\tilde{\boldsymbol{x}}(s'))=-\varphi_1\pm d\,\varphi_5$, вытекающих из равенств $r^2=\left|\tilde{\boldsymbol{x}}(s')-\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)\right|^2=\varphi_0\pm 2d\,\varphi_2+d^2$ ($d\in\overline{I_D}$, $s,s'\in I_S'$), представим операторы

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)$ ($\tau>0$) в виде суммы:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)=\sum\nolimits_{i=1}^{3}\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x},\tau)\,,$$

где

$$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv\int\limits_{\rho^{\pm}_{d,s}(\Sigma'_s)}^{\rho^{\pm}_{d,s}(\Sigma''_s)} a_i(d,\rho,\tau)\tilde{\delta}^{\pm}_i(d,s,\rho)\boldsymbol{f}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}\left(s+\sigma^{\pm}_{d,s}(\rho)\right)\right)d\rho\ \ (\ \boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}^{\pm}_d(s)\in\Omega^{\pm}_D\ ),$$

$$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv 0\ \ (\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}\setminus\Omega^{\pm}_D\ )\ (\ i=1,2\ );$$

$$\boldsymbol{A}_3(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv\int\limits_{\partial\Omega\setminus\mathrm{E}_s} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds'$$

$$(\ \boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}^{\pm}_d(s)\in\Omega^{\pm}_D\ ),\ \boldsymbol{A}_3(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv\int\limits_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds'\ \ (\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}\setminus\Omega^{\pm}_D\ ),$$

$$a_1(d,\rho,\tau)\equiv-\rho\,\partial_\rho a_0(\sqrt{\rho^2+d^2},\tau)\,,\ \ a_2(d,\rho,\tau)\equiv\rho^{-2}a_1(d,\rho,\tau)\,.$$

Заметим, что если $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\Omega^{\pm}\setminus\Omega^{\pm}_D\times\partial\Omega$ или $\boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}_D$, $\boldsymbol{x}'\in\partial\Omega\setminus\mathrm{E}_s$, то $r\geq D$ (см. доказательство формулы (9) [14]). Учитывая также следствие 3, получаем оценки:

$$\left\|\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x},\tau)\right\|\leq\breve{c}_{i,0}\,\tilde{c}_i\,y_i(d,\tau)\ \ (\ i=1,2\ ),\ \left\|\boldsymbol{A}_3(\boldsymbol{x},\tau)\right\|\leq 2S\breve{c}_{3,0}\ \ (\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}\ ,\ \tau>0\ );$$

$$y_1\equiv\tau^{-1/2}\,,\ \ y_2\equiv d\,\tau^{-3/2}\exp\!\left[-d^2\big/\!\left(4a^2\tau\right)\right],\tag{7}$$

$$\breve{c}_{i,0}\equiv\max_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'}\left|\tilde{\delta}^{\pm}_i\right|\ \ (\ i=1,2\ );\ \tilde{c}_1\equiv a\left(2\sqrt{\pi}\right)^{-1},$$

$$\tilde{c}_2\equiv\left(4a\sqrt{\pi}\right)^{-1};\ \breve{c}_{3,0}\equiv\sup_{|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}(s')|\geq D,\,\tau>0}\left|g(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}(s'),\tau)\right|.$$

В силу оценок (7) имеем равномерную на множестве $\Omega^{\pm}$ ограниченность операторов $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ [$C(\partial\Omega)\to L_2$]:

$$\left\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\right\|\leq c_G\equiv 2\sqrt{T}\,\breve{c}_{1,0}\,\tilde{c}_1+2a\sqrt{\pi}\,\breve{c}_{2,0}\,\tilde{c}_2+2ST\breve{c}_{3,0}\ \ \ (\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}\ ).\tag{8}$$

Пусть $N/2\in\mathbf{N}$, $\tilde{N}/2\in\mathbf{N}$. Зададим ограниченные операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ [$C(\partial\Omega)\to L_2$] ($\boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}$):

$$\tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}\equiv\int\limits_{I_T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)e(\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau\ \ (\ \boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega)\ ),$$

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\equiv\sum_{m=0}^{2}\boldsymbol{U}\left(\tau_{2n+1}+q_m h_\tau\right)\Lambda_m(\tau)\ \ (\ \tau\in\left[\tau_{2n},\tau_{2n+2}\right],\ n=\overline{0,N/2-1}\ ).$$

Так как $\left\|\boldsymbol{U}(\tau)\right\|\leq 1$, $\left|e^{-p\tau}\right|\leq 1$ ($\tau\geq 0$), то $\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\right\|\leq c_\Lambda$, $\left|e(\tau)\right|\leq\tilde{c}_\Lambda$ (см. оценки (5)). В силу оценок (4) имеем оценки

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\boldsymbol{f}-\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}\leq c_\omega\left\|\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}h_\tau^3\ \ \ (\ \boldsymbol{f}\in C_3(\partial\Omega)\ ),$$

$$\left|e(\tau)-e^{-p\tau}\right|\leq\left(p^3\big/\tilde{N}^3\right)\tilde{c}_\omega h_\tau^3\ \ (\ t\in I_T\ ).\tag{9}$$

На основании оценок (7) и (9) при любых $\boldsymbol{f} \in C_3(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$ получаем оценки

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} \right\|_{L_2} \le c_G \left[c_\omega \left\| \boldsymbol{B}^3 \boldsymbol{f} \right\|_{C(\partial\Omega)} + c_\Lambda \tilde{c}_\omega \left(p^3 / \tilde{N}^3 \right) \|\boldsymbol{f}\|_{C(\partial\Omega)} \right] h_\tau^3 ,$$

из которых вытекает следующее утверждение:

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ $[\, C_3(\partial\Omega) \to L_2 \,]$ ($N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ $[\, C_3(\partial\Omega) \to L_2 \,]$ равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3\right)$.

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение операторы $\breve{\boldsymbol{P}}_L$ $[\, H_L \to C(\partial\Omega) \,]$:

$$\left(\breve{\boldsymbol{P}}_L \boldsymbol{f}\right)(s) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}_{2l-1+m} \Lambda_m(s) \ \ (\, \boldsymbol{f} \in H_L \,,\ s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}] \,,\ l = \overline{-L/2, L/2}\,).$$

В силу оценки (5) операторы $\breve{\boldsymbol{P}}_L$ ограничены в совокупности: $\left\|\breve{\boldsymbol{P}}_L\right\| \le c_\Lambda$. На основании оценки (4) имеем оценки

$$\left\| \breve{\boldsymbol{P}}_L \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f} \right\|_{C(\partial\Omega)} \le c_\omega \left\| \boldsymbol{f}^{(3)} \right\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \ \ (\, \boldsymbol{f} \in C^3(\partial\Omega) \,). \tag{10}$$

С помощью равенств $\breve{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} \equiv \int_{I_T} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau) e(\tau) \tilde{\boldsymbol{U}}(\tau) \breve{\boldsymbol{P}}_L \boldsymbol{f} \, d\tau$ ($\boldsymbol{f} \in H_L$, $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$) зададим ограниченные операторы $\breve{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ $[\, H_L \to L_2 \,]$. Используя оценки (7), (10), $\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\right\| \le c_\Lambda$ и $|e(\tau)| \le \tilde{c}_\Lambda$, получаем неравенства

$$\left\| \breve{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} - \tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{f} \right\|_{L_2} \le c_G \, c_\Lambda \, \tilde{c}_\Lambda \, c_\omega \left\| \boldsymbol{f}^{(3)} \right\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \ \ (\, \boldsymbol{f} \in C^3(\partial\Omega) \,, \boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm} \,),$$

позволяющие сделать следующее утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\breve{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[\, C^3(\partial\Omega) \to L_2 \,]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ $[\, C^3(\partial\Omega) \to L_2 \,]$ равномерно по N и $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$ с порядком аппроксимации $O\left(h_s^3\right)$.

Операторы $\breve{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ могут быть представлены в виде конечных сумм: $\breve{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \breve{\boldsymbol{G}}_n(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{U}(\tau_n)$, где

$$\breve{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_2} \breve{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) \, d\tau \ ,\ \breve{\boldsymbol{G}}_{2n+1}(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \breve{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau) e(\tau) \Lambda_1(\tau) \, d\tau \ \ (\, n = \overline{0, N/2-1}\,),$$

$$\breve{\boldsymbol{G}}_{2n}(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \breve{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau) e(\tau) \Lambda_2(\tau) \, d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \breve{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) \, d\tau \ \ (\, n = \overline{1, N/2-1}\,).$$

Операторы $\breve{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau) \breve{\boldsymbol{P}}_L$ $[\, H_L \to L_2 \,]$ подобно $\breve{\boldsymbol{G}}_n(\boldsymbol{x})$ имеют вид скалярных матриц-строк длиной $2L+2$:

$$\breve{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f} = \sum_{l=-L-1}^{L} \hat{g}_l(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}_l \ \ (\boldsymbol{f} \in H_L\,,\ \tau > 0\,);\ \hat{g}_{2l}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \int\limits_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} \breve{g}_1(\boldsymbol{x},s',\tau)\,ds'\,,$$

$$\hat{g}_{2l-1}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \int\limits_{s_{2l-3}}^{s_{2l-1}} \breve{g}_2(\boldsymbol{x},s',\tau)\,ds' + \int\limits_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} \breve{g}_0(\boldsymbol{x},s',\tau)\,ds' \ \ (\,l = \overline{-L/2,L/2}\,),$$

$$\breve{g}_m(\boldsymbol{x},s',\tau) \equiv g(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}(s'),\tau)\breve{\Lambda}_m(s') \ \ (\,m = \overline{0,2}\,).$$

По аналогии с представлением $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau) = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x},\tau)$ представим интегралы $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \int_{s_l}^{s_{l+1}} \breve{g}_m(\boldsymbol{x},s',\tau)\,ds'$ $\ (\,l = \overline{-L-1,L}\,,\ \ m = \overline{0,2}\,,\ \ \tau > 0\,)$ в виде сумм: $J_{m,l} = \sum_{i=1}^{3} J_{i,m,l}$. Здесь, в случае $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s) \in \Omega_D^{\pm}$ $(\,s \in \overline{I_S'}\,)$

$$J_{i,m,l}(d,s,\tau) = \int\limits_{\rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l+1})} a_i(d,\rho,\tau)\breve{\delta}_{i.m}^{\pm}(d,s,\rho)\,d\rho \ \ (\,i = 1,2\,),$$

$$J_{3,m,l}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \int_{\beta_{s,l}}^{\beta_{s,l+1}} \breve{g}_m(\boldsymbol{x},s',\tau)\,ds'\,.$$

При этом $\breve{\delta}_{i,m}^{\pm} \equiv \tilde{\delta}_i^{\pm}(d,s,\rho)\,\breve{\Lambda}_m\left(s + \sigma_{d,s}^{\pm}(\rho)\right)$; $\alpha_{s,l} \equiv \min\{s_l - s, \Sigma_s''\}$, $\beta_{s,l} \equiv \max\{s_l, s + \Sigma_s''\}$, если $s_l \ge s$; $\alpha_{s,l} \equiv \max\{s_l - s, \Sigma_s'\}$, $\beta_{s,l} \equiv \min\{s_l, s + \Sigma_s'\}$, если $s_l < s$. В случае $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm} \setminus \Omega_D^{\pm}$ $J_{1,m,l} = J_{2,m,l} \equiv 0$, $J_{3,m,l} \equiv J_{m,l}$ $(\,\beta_{s,l} = s_l\,)$.

Введем в рассмотрение интегралы $\tilde{J}_{i,m,l}$, аппроксимирующие интегралы $J_{i,m,l}$:

$$\tilde{J}_{i,m,l}(d,s,\tau) \equiv \int\limits_{\rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l+1})} a_i(d,\rho,\tau)\hat{\delta}_{i,m}^{\pm}(d,s,\rho)\,d\rho \ \ (\,i = 1,2\,),$$

$$\hat{\delta}_{i,m}^{\pm} \equiv \sum_{m'=0}^{2} \breve{\delta}_{i,m}^{\pm}(d,s,\overline{\rho}_{d,s,l}^{\pm} + \tilde{q}_{m'}h'_{d,s,l})\tilde{\Lambda}_{m'}(\rho) \ \ (\,\rho \in \left[\rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l}),\rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l+1})\right]),$$

$$h'_{d,s,l} \equiv 2^{-1}\left[\rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l+1}) - \rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l})\right],\ \overline{\rho}_{d,s,l}^{\pm} \equiv 2^{-1}\left[\rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l}) + \rho_{d,s}^{\pm}(\alpha_{s,l+1})\right];$$

$$\tilde{J}_{3,m,l}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv h''_{s,l}\sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j\,\breve{g}_m(\boldsymbol{x},\overline{\beta}_{s,l} + h''_{s,l}z_j,\tau)\,,\ \overline{\beta}_{s,l} \equiv 2^{-1}\left(\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1}\right),$$

$$h''_{s,l} \equiv 2^{-1}\left(\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}\right).$$

Операторы $\breve{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau)$, в которых интегралы $J_{m,l}$ заменены выражениями $J_{i,m,l}$ и $\tilde{J}_{i,m,l}$, обозначим через $\breve{\boldsymbol{A}}_i(\boldsymbol{x},\tau)$ и $\hat{\boldsymbol{A}}_i(\boldsymbol{x},\tau)$ соответственно, а операторы $\breve{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$, в которых интегралы $J_{m,l}$ заменены выражениями $\tilde{J}_{i,m,l}$, обозначим через $\hat{\boldsymbol{G}}_i(\boldsymbol{x})$ $(\,i = \overline{1,3}\,)$. Пусть $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{i=1}^{3}\hat{\boldsymbol{G}}_i(\boldsymbol{x})$. В силу оценок (5) справедливы соотношения

$$\left\|\hat{A}_i(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\right\|_{L_2} = \left\|\sum_{l=-L/2}^{l=L/2}\sum_{m=0}^{2}\sum_{l'=-1}^{0}\tilde{J}_{i,m,2l+l'}\boldsymbol{f}_{2l-1+m}\right\|_{L_2} \le \tilde{c}_\Lambda c_\Lambda \breve{c}_{i,0}\tilde{c}_i y_i(d,\tau)\|\boldsymbol{f}\|_{H_L}$$

$$(\ \boldsymbol{f}\in H_L\ ,\ d\in I_D\ ,\ s\in\overline{I'_S}\ ,\ \tau>0\ ,\ i=1,2\ );$$

$$\left\|\hat{A}_3(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\right\|_{L_2} = \left\|\sum_{l=-L/2}^{l=L/2}\sum_{m=0}^{2}\sum_{l'=-1}^{0}\tilde{J}_{3,m,2l+l'}(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}_{2l-1+m}\right\|_{L_2} \le 2S\,c_\Lambda\breve{c}_{3,0}\|\boldsymbol{f}\|_{H_L}$$

$$(\ \boldsymbol{f}\in H_L\ ,\ \boldsymbol{x}\in\Omega^\pm\ ,\ \tau>0\ ).$$

Следствием этих соотношений являются неравенства

$$\left\|\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}\right\|_{L_2} \le 2c_\Lambda^2\tilde{c}_\Lambda\left(\sqrt{T}\,\tilde{c}_\Lambda\breve{c}_{1,0}\tilde{c}_1 + a\sqrt{\pi}\,\tilde{c}_\Lambda\breve{c}_{2,0}\tilde{c}_2 + TS\,\breve{c}_{3,0}\right)\|\boldsymbol{f}\|_{H_L}\quad (\ \boldsymbol{f}\in H_L\ ),$$

на основании которых получаем утверждение:

Теорема 8. Пусть $\partial\Omega\in C^2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ $[\,H_L\to L_2\,]$ ($L/2\in\mathbf{N}$, $N/2\in\mathbf{N}$) ограничены в совокупности на множестве $\Omega^\pm$.

В силу следствия 3 и неравенства $r\ge D$, имеющего место, если $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\Omega^\pm\setminus\Omega_D^\pm\times\partial\Omega$ или $\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s)\in\Omega_D^\pm$, $\boldsymbol{x}'\in\partial\Omega\setminus\mathrm{E}(s)$, при указанной гладкости кривой $\partial\Omega$ могут быть определены константы:

$$\breve{c}_{i,j} \equiv \sup_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'}\left|\partial_\rho^j\tilde{\delta}_i^\pm\right|\ (\ i=\overline{0,2}\ ,\ \partial\Omega\in C^{n+2}\ ),$$

$$\breve{c}_{3,j} \equiv \sup_{|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}(s')|\ge D,\,\tau>0}\left|\partial_{s'}^j g(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}(s'),\tau)\right|\ (\ \partial\Omega\in C^{n+1}\ )\ (\ j=\overline{0,n}\ ,\ n\in\mathbf{Z}_+\ ).$$

Используя неравенства (4)–(6) и $h'_{d,s,l}\le 2^{-1}c_h h_s$ ($c_h \equiv \sup\limits_{(d,s,s')\in\Upsilon'}\left|\partial_{s'}\rho^\pm\right|$), при условиях $\partial\Omega\in C^5$, $\boldsymbol{f}\in C^2(\partial\Omega)$ для любых $d\in I_D$, $s\in\overline{I'_S}$, $\tau>0$ получаем оценки:

$$\left\|\hat{A}_i(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{f}} - \breve{A}_i(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{f}}\right\|_{L_2} \le$$

$$\le 8^{-1}h_s^3 c_h^3\tilde{c}_\omega \sup_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'}\left\|\partial_\rho^3\left[\tilde{\delta}_i^\pm\breve{\boldsymbol{f}}\left(s+\sigma_{d,s}^\pm(\rho)\right)\right]\right\|_{L_2}\sum_{l=-L/2}^{l=L/2}\int\limits_{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,2l-1})}^{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,2l+1})} a_i(d,\rho,\tau)\,d\rho \le$$

$$\le \hat{c}_i h_s^3 y_i(d,\tau)\|\boldsymbol{f}\|_{C^2(\partial\Omega)}\,, \tag{11a}$$

$$\hat{c}_i \equiv 8^{-1}\tilde{c}_i c_h^3\tilde{c}_\omega\left[\breve{c}_{i,3}c_\Lambda + \left(3\breve{c}_{i,2}\breve{c}_{0,0} + 3\breve{c}_{i,1}\breve{c}_{0,1} + \breve{c}_{i,0}\breve{c}_{0,2}\right)c'_\Lambda + 3\left(\breve{c}_{i,1}\breve{c}_{0,0}^2 + \breve{c}_{i,0}\breve{c}_{0,1}\breve{c}_{0,0}\right)c''_\Lambda\right]$$

$$(\ i=1,2\ ,\ \tilde{\boldsymbol{f}}\equiv\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{f}\ ,\ \breve{\boldsymbol{f}}\equiv\breve{\boldsymbol{P}}_L\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{f}\ ).$$

Если $\partial\Omega\in C^{2\gamma+1}$, $\boldsymbol{f}\in C^2(\partial\Omega)$, то для любых $\boldsymbol{x}\in\Omega^\pm$, $\tau>0$ имеем оценку:

$$\left\|\hat{A}_3(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{f}} - \breve{A}_3(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{f}}\right\|_{L_2} \le 2S\hat{c}_3\,h_s^{2\gamma+1}\|\boldsymbol{f}\|_{C^2(\partial\Omega)}\,,$$

$$\hat{c}_3 \equiv \frac{(\gamma!)^4\left[\breve{c}_{3,2\gamma}c_\Lambda + 2\gamma\breve{c}_{3,2\gamma-1}c'_\Lambda + \gamma(2\gamma-1)\breve{c}_{3,2\gamma-2}c''_\Lambda\right]}{[(2\gamma)!]^3(2\gamma+1)} \tag{11b}$$

[20, с. 259]. На основании оценок (5), (11) получаем при условиях $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \ge 2$ неравенства

$$\left\| \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} - \breve{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} \right\|_{L_2} \le 2c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \left[\left(\hat{c}_1 \sqrt{T} + \hat{c}_2 a \sqrt{\pi} \right) h_s^3 + \hat{c}_3 S T h_s^{2\gamma+1} \right] \|\boldsymbol{f}\|_{C^2(\partial\Omega)}$$
$$(\boldsymbol{x} \in \Omega^\pm, \ \boldsymbol{f} \in C^2(\partial\Omega)),$$

из которых вытекает утверждение:

Теорема 9. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[C^2(\partial\Omega) \to L_2]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\breve{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[C^2(\partial\Omega) \to L_2]$ равномерно по N и $\boldsymbol{x} \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O\left(h_s^3\right)$.

При вычислении операторов $\hat{\boldsymbol{G}}_i(\boldsymbol{x})$ ($i = \overline{1,2}$) интегрирование по τ осуществляется точно и интегралы выражаются через показательные функции $\exp(-z_n)$ и интегральные показательные функции $\mathrm{Ei}(-z_n)$ ($z_n \equiv \left(\rho^2 + d^2\right) / \left(4a^2 \tilde{\tau}_n\right)$, $n = \overline{1, N\tilde{N}}$). Затем вычисляются интегралы по ρ, но не все они вычисляются аналитически. В таких случаях для точного интегрирования функции $\exp(-z_n)$ и $\mathrm{Ei}(-z_n)$ заменяются многочленами, образованными первыми членами разложения этих функций в ряды Тейлора, а именно: $K+1$ членом со степенями $(z_n)^k$ ($k = \overline{0,K}$), а также логарифмическим членом $\ln(z_n)$ в случае $\mathrm{Ei}(-z_n)$.

На основании теорем 6, 7, 9 делаем следующий вывод:

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \to L_2]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \to L_2]$ равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Зададим операторы $\hat{\boldsymbol{R}}^\pm(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\left(\hat{\boldsymbol{G}}^\pm\right)^{-1}$, вычисляемые в алгебре полиномов, образованных N степенями оператора $\boldsymbol{U}(h_\tau)$. С учетом теорем 1, 4, 8 и следствия 4 получаем следующее утверждение:

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{R}}^\pm(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \to L_2]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{R}^\pm(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{G}^\pm\right)^{-1}$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \to L_2]$ равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Введем в рассмотрение банахово пространство $C(I_T)$ классов функций $\boldsymbol{f} \in L_2$, эквивалентных непрерывным на отрезке I_T функциям $f(t)$, с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C_T} \equiv \sup_{t \in I_T} |f(t)|$. Имеет место вложение $H^1 \subset C(I_T)$.

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$. Зададим операторы $\hat{\boldsymbol{P}}_N$ $[\,H^1 \to C(I_T)\,]$:

$$\left(\hat{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{f}\right)(t) \equiv \sum_{m=0}^{2} f(\tau_{2n+m})\Lambda_m(t) \ \ (\,\boldsymbol{f} \in H^1,\ t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}],\ n = \overline{0, N/2-1}\,).$$

В работе [14] доказаны оценки:

$$\left\|\hat{\boldsymbol{P}}_N\right\| \le c_\Lambda \sqrt{T}\,,\ \left\|\hat{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\right\|_{C(I_T)} \le c_\omega \sqrt{T}\, \|\boldsymbol{f}\|_{H^4}\, h_\tau^3 \ \ (\,\boldsymbol{f} \in H^4\,). \tag{12}$$

На основании теорем 1, 3, 8, следствия 5, оценок (8), (12), $\|\boldsymbol{P}_L\| \le 1$ и равенств (3) с учетом замкнутости оператора $\boldsymbol{B}$ приходим к окончательным утверждениям:

Следствие 6. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{P}}_N \hat{\boldsymbol{R}}^{\pm}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L$ $[\,C^3_{1,3}(\partial\Omega) \to C(I_T)\,]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{R}^{\pm}(\boldsymbol{x})$ $[\,C^3_{1,3}(\partial\Omega) \to C(I_T)\,]$ равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Следствие 7. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда, если $\boldsymbol{w}_1^{\pm} \in C^3_{1,3}(\partial\Omega)$, то функции $\tilde{u}_1^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$: $\tilde{\boldsymbol{u}}_1^{\pm}(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{P}}_N \hat{\boldsymbol{R}}^{\pm}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{w}_1^{\pm}$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \to \infty$ к соответствующим решениям краевых задач (1) $u_1^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$ равномерно по $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega^{\pm} \times I_T$ (при почти всех t) с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$. Кроме того, $\left|\tilde{u}_1^{\pm[\delta]}(\boldsymbol{x},t) - u_1^{\pm}(\boldsymbol{x},t)\right| \to 0$ равномерно по $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega^{\pm} \times I_T$ (при почти всех t) при $L, N \to \infty$, $\delta \to 0$ ($\tilde{\boldsymbol{u}}_1^{\pm[\delta]}(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{P}}_N \hat{\boldsymbol{R}}^{\pm}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{w}_1^{\pm[\delta]}$, $\boldsymbol{w}_1^{\pm[\delta]} \in C_1(\partial\Omega)$: $\left\|\boldsymbol{w}_1^{\pm[\delta]} - \boldsymbol{w}_1^{\pm}\right\|_{C_1(\partial\Omega)} \le \delta$).

Приближенные решения $\tilde{u}_1^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$ вычисляются в произвольной точке $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega^{\pm} \times I_T$ с помощью значений $\breve{w}_1^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s_l), \tau_n)$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $n = \overline{0, N-1}$) по аналогии с решениями $\tilde{u}_2^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$ [14].

Квадратурные аппроксимации как причина отсутствия равномерной сходимости в области

Вычислительные эксперименты показали, что скорость сходимости приближенных решений существенно снижается вблизи границы $\partial\Omega$, если для аппроксимации всех интегралов $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$ использовать ПКФГ или КФНК. Покажем отсутствие равномерной по $d \in I_D$ сходимости аппроксимаций ПДС в случае, когда аппроксимируется (с помощью квадратурной формулы) только интеграл на ближайшем к точке $\boldsymbol{x}$ ГЭ при $\tau = 0$, а интегралы на остальных ГЭ вычисляются точно. Также с целью упрощения будем полагать $p = 0$ и вместо кусочно-квадратичной рассматривать кусочно-постоянную интерполяцию:

$$\ddot{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=-L-1}^{L} z_{n,l}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{U}(\tau_n) \boldsymbol{f}(s_l) \ \ (\,\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega)\,,\ L, N \in \mathbf{N}\,),$$

$$z_{n,l}(\boldsymbol{x}) \equiv \int\limits_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} q_n(\boldsymbol{x},s')\,ds'\,,\ q_n(\boldsymbol{x},s') \equiv \int\limits_{\tau_{n-1/2}}^{\tau_{n+1/2}} g(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}(s'),\tau)\,d\tau\,,$$

$$\tau_{n\pm1/2} \equiv \left(n \pm 2^{-1}\right)h_\tau \ (\ g \equiv 0 \ \text{при} \ \tau \le 0\ ),\ s_{l\pm1/2} \equiv \left(l \pm 2^{-1}\right)h_s\,.$$

Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{G}}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s))$ операторы $\ddot{\boldsymbol{G}}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s))$ ($s \in I'_S$, $d \in I_D$), в которых интеграл $z_{0,l'}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s))$ ($s \in \left(s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}\right]$) заменен квадратурной аппроксимацией $\widehat{z}_{0,l'}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s))$ достаточно высокого порядка. Можно убедиться, что для любого $d_0 \in I_D$ операторы $\widehat{\boldsymbol{G}}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s))$ $[\,C_{0,2}^2(\partial\Omega) \to L_2\,]$ сходятся при $L,N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s))$ $[\,C_{0,2}^2(\partial\Omega) \to L_2\,]$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^2 + h_s^2\right)$ равномерно по $(d,s) \in [d_0, D] \times I'_S$ (см. теоремы 6, 7 [22]).

Лемма. Пусть остаточный член квадратурной формулы, используемой для аппроксимации интегралов $z_{0,l'}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s))$ ($s \in \left(s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}\right]$, $d \in I_D$), имеет вид $R_m[f] = c_m\,(b-a)^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)$ ($\xi \in [a,b]$), где c_m зависит только от $m \in \mathbf{Z}_+$. Пусть $\partial\Omega \in C^{2m+2}$. Тогда существуют постоянные $K_m^\pm \in \mathbf{N}$, $d_m^\pm \in I_D$ и $c_m^\pm > 0$, такие, что для любого фиксированного $s \in I'_S$ последовательность чисел $R_{m,M}^\pm[q_0] \equiv z_{0,l'}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s)) - \widehat{z}_{0,l'}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s))$ ($M = M', M'+1, \ldots$), где $N = (M+1)^2$, $L+1 = K_m^\pm(M+1)$, $d = S/(M+1) \le d_m^\pm$ при $M \ge M'$, ограничена по модулю снизу числом $c_m^\pm$.

Доказательство. Пусть $\sigma_{-1/2} \equiv s_{l'-1/2} - s$, $\sigma_{1/2} \equiv s_{l'+1/2} - s$. Интеграл $z_{0,l'}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s))$ и подынтегральная функция $q_0(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s),s')$ ($d \in I_D$, $s,s' \in \left(s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}\right]$) могут быть записаны в виде

$$z_{0,l'}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s)) = \int\limits_{\sigma_{-1/2}}^{\sigma_{1/2}} q_0(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s), s+\sigma)\,d\sigma\,,$$

$$q_0(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s),s') = (2\pi)^{-1} \exp\left[-\left(\sigma^2\psi_0^\pm + d^2\right)\Big/\left(2a^2h_\tau\right)\right]\left(-\sigma^2\psi_1 \pm d\,\varphi_5\right)\Big/\left(\sigma^2\psi_0^\pm + d^2\right).$$

Пусть $\alpha \equiv \sigma/h_s$, $N = (M+1)^2$, $L+1 = (M+1)K$, $d = S/(M+1)$ ($K,M \in \mathbf{N}$). Будем рассматривать остаточные члены $R_{m,M}^\pm[q_0]$ ($M = 1,2,\ldots$) как значения некоторой функции $r_m^\pm(K,d,\alpha,s)$, определенной при $K \in \mathbf{N}$, $d \in I_D$, $\alpha \in I_\alpha$, $s \in I'_S$ ($I_\alpha \equiv \left(\alpha_{-1/2}, \alpha_{1/2}\right]$, $\alpha_{-1/2} \equiv h_s^{-1}\sigma_{-1/2}$, $\alpha_{1/2} \equiv h_s^{-1}\sigma_{1/2}$). Так как $\psi_0^\pm > 0$ на множестве Υ, $\left|\alpha_{\pm1/2}\right| \le 1$ и существуют непрерывные производные $\partial_{s'}^j\psi_0^\pm$ и $\partial_{s'}^j\psi_1$, $\partial_{s'}^j\varphi_5$ ($j = \overline{0,2m}$) на множествах Υ и Θ соответственно, то допустимо представление: $r_m^\pm = f_m^\pm + o_m^\pm$, где функция $f_m^\pm(K,d,\alpha,s)$ имеет вид

$$f_m^{\pm} \equiv \widehat{\varphi}_5 \exp\left[-c_\tau^{-1}\left(\alpha^2 K^{-2}\widehat{\psi}_0^{\pm}+1\right)\right]K^{-2m-1}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{m}(\alpha/K)^{2m-2k}\left(-2\widehat{\psi}_0^{\pm}\right)^{2m-k}\sum_{n=0}^{2m-k} c_{m.k.n}\Big/\left(\alpha^2 K^{-2}\widehat{\psi}_0^{\pm}+1\right)^{2m-k-n+1}. \quad (13)$$

Здесь $c_{m.k.n}^{\pm} \equiv \pm(2\pi)^{-1} c_m c_\tau^{-n} C_{2m}^k C_{2m-k}^n (2m-k-n)!$, $C_m^n = m!/((m-n)!n!)$, $c_\tau \equiv 2Ta^2/S^2$, $\widehat{\psi}_0^{\pm}(K,d,\alpha,s) \equiv \psi_0^{\pm}(d,s,s+\alpha d/K)$, $\widehat{\varphi}_5(K,d,\alpha,s) \equiv \varphi_5(s,s+\alpha d/K)$. Функция $o_m^{\pm}(K,d,\alpha,s) \to 0$ при $d \to +0$ и фиксированном $K \in \mathbf{N}$ равномерно по $\alpha \in I_\alpha$, $s \in \overline{I_S'}$. Слагаемые при $k<m$ во внешней сумме выражения (13) стремятся к нулю при $K \to \infty$ равномерно по $d \in I_D$, $\alpha \in I_\alpha$, $s \in I_S'$, а слагаемое при $k=m$ ограничено по модулю снизу положительной константой. Поэтому существуют постоянные $K_m^{\pm} \in \mathbf{N}$ и $d_m^{\pm} \in I_D$, такие, что при $K = K_m^{\pm}$ и $d \in \left(0, d_m^{\pm}\right]$, $\alpha \in I_\alpha$, $s \in \overline{I_S'}$ функция $\left|r_m^{\pm}\right|$ ограничена снизу некоторой константой $c_m^{\pm} > 0$. Лемма доказана.

Следствие 8. Пусть $R_m(f) = c_m (b-a)^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)$ ($\xi \in [a,b]$) и $\partial\Omega \in C^{2m+2}$ ($m \in \mathbf{Z}_+$). Тогда при $L,N \to \infty$ отсутствует равномерная по $d \in (0,d_0]$ сходимость в сильной операторной топологии операторов $\widehat{\boldsymbol{G}}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d(s))$ [$C_{0,J}^I(\partial\Omega) \to L_2$] к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{x}}_d(s))$ [$C_{0,J}^I(\partial\Omega) \to L_2$] для любых $I,J \in \mathbf{N}$, $s \in I_S'$, $d_0 \in I_D$.

Доказательство. Согласно лемме, существуют постоянные $K_m^{\pm} \in \mathbf{N}$, $d_m^{\pm} \in I_D$, $c_m^{\pm} > 0$, такие, что при $s \in \left(s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}\right]$, $N = (M+1)^2$, $L+1 = K_m^{\pm}(M+1)$, $d = S/(M+1) \le d_m^{\pm}$ имеют место оценки $\left|R_{m,M}^{\pm}[q_0]\right| \ge c_m^{\pm}$ ($M = M', M'+1,\dots$; $S/(M'+1) \le d_m^{\pm}$). Обозначим через $\ddot{\boldsymbol{G}}_L(\boldsymbol{x})$, $\widehat{\boldsymbol{G}}_L(\boldsymbol{x})$ ($M = M', M'+1,\dots$) соответствующие последовательности операторов $\ddot{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$, $\widehat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ [$C_{0,J}^I(\partial\Omega) \to L_2$] ($I,J \in \mathbf{N}$). Для функции $\tilde{\boldsymbol{f}} \in C_{0,J}^I(\partial\Omega)$: $\tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s),t) \equiv \tilde{f}_1(s)\tilde{f}_2(t)$, где $\tilde{f}_1(s) \equiv 1$, $\tilde{\boldsymbol{f}}_2 \in H^J$ и $\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_2\right\|_{L_2} = 1$, имеем оценки: $\left\|\widehat{\boldsymbol{G}}_L(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{f}} - \ddot{\boldsymbol{G}}_L(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{f}}\right\|_{L_2} = \left|R_{m,M}^{\pm}[q_0]\right| \ge c_m^{\pm}$. В силу (7), $\left\|\boldsymbol{U}(\tau)\right\| \le 1$ справедливы оценки

$$\left\|\ddot{\boldsymbol{G}}_L(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{f}}\right\|_{L_2} \le c_G\left(\left\|\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{f}}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau + \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}^{(1)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_s\right) \le c_G \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_2\right\|_{H^1} T\left(K_m^{\pm}/S\right)^2 h_s^2.$$

При достаточно большом натуральном $M'' \ge M'$ получаем неравенство

$$c_G \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_2\right\|_{H^1} T\left(K_m^{\pm}/S\right)^2 h_s^2 \le 2^{-1} c_m^{\pm}.$$

В результате имеем оценки:

$$\left\|\widehat{\boldsymbol{G}}_L(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{f}}\right\|_{L_2} \ge 2^{-1} c_m^{\pm} \ (M = M'', M''+1,\dots).$$

Утверждение доказано.

Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение внутренней задачи Дирихле (1) в случае, когда граница $\partial\Omega$ представляет собой окружность радиуса $R=1$, граничная функция $w_1^+(R'=1,\varphi,t)=\ t^2(1-t)^2\cos\varphi$ (φ, R' – полярные угол и радиус), коэффициент температуропроводности $a=1$. Точное решение $\bar{\boldsymbol{u}}_1^+$ в этом случае имеет вид

$$\bar{u}_1^+(R',\varphi,t)=2\cos\varphi\left\{2^{-1}R'f(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_k R')}{J_2(\mu_k)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{pf(t)}{\mu_k\left(\mu_k^2+p\right)}+\mu_k\sum_{l=1}^{4}\frac{(-1)^{l+1}\left\{f^{(l)}(t)-f^{(l)}(0)\exp\left[-\left(\mu_k^2+p\right)t\right]\right\}}{\left(\mu_k^2+p\right)^{l+1}}\right]\right\},$$

где $f(t)\equiv t^2(1-t)^2$, $J_1(z)$ и $J_2(z)$ – функции Бесселя, μ_k – положительные корни уравнения $J_1(z)=0$.

Для данной геометрии имеем следующие значения: $D=2/(3\pi)$, $\Sigma_s''=-\Sigma_s'=\arcsin(2/(3\pi))$ ($s\in I_S'$). Приближенные решения $\tilde{\boldsymbol{u}}_1^+$ вычисляем согласно следствию 7, используя ПКФГ с $\gamma=12$ узлами. Кроме того, находим приближенные решения $\breve{\boldsymbol{u}}_1^+$ и $\hat{\boldsymbol{u}}_1^+$, отличающиеся от решений $\tilde{\boldsymbol{u}}_1^+$ только тем, что все интегралы $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$ ($m=\overline{0,2}$, $l=\overline{-L-1,L}$, $\tau>0$, $\boldsymbol{x}\in\Omega^+$) вычисляются с помощью квадратурных формул: для $\breve{\boldsymbol{u}}_1^+$ с помощью ПКФГ с $\gamma=12$ узлами, для $\hat{\boldsymbol{u}}_1^+$ с помощью КФНК открытого типа с $\gamma=9$ узлами. Решения получаем на окружностях $\partial\Omega'$ с радиусами $R'<1$, концентрических с окружностью $\partial\Omega$, в точках $(\boldsymbol{x}_l',\tau_{n+1})$, $(\boldsymbol{x}_l',\tau_{n+1/2})$ и $(\boldsymbol{x}_{l+1/2}',\tau_{n+1})$ ($l=\overline{-L-1,L}$, $\tau_n\equiv nh_\tau$, $n=\overline{0,N-1}$), где $\boldsymbol{x}_l'$ и $\boldsymbol{x}_{l+1/2}'$ – точки, получающиеся из граничных точек $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_l)$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_{l+1/2})$ соответственно в результате сжимающего отображения окружности $\partial\Omega$ на окружность $\partial\Omega'$.

Пусть $T=1$, $p=0$, $\tilde{N}=1$, $\Sigma=\arcsin(2/(3\pi))$ ($M=\breve{c}_{0,0}$), $K=10$. Вычислим δu – относительные среднеквадратичные отклонения приближенного решения от точного: $\delta\tilde{u}\equiv\left\|\tilde{\boldsymbol{u}}_1^+-\bar{\boldsymbol{u}}_1^+\right\|/\left\|\bar{\boldsymbol{u}}_1^+\right\|$, $\delta\breve{u}\equiv\ \left\|\breve{\boldsymbol{u}}_1^+-\bar{\boldsymbol{u}}_1^+\right\|/\left\|\bar{\boldsymbol{u}}_1^+\right\|$, $\delta\hat{u}\equiv\left\|\hat{\boldsymbol{u}}_1^+-\bar{\boldsymbol{u}}_1^+\right\|/\left\|\bar{\boldsymbol{u}}_1^+\right\|$ ($\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма). В следующей таблице в каждой основной ячейке представлены пять значений δu: $\delta\tilde{u}$ в точках $(\boldsymbol{x}_l',\tau_{n+1})$, $\delta\tilde{u}$ в точках $(\boldsymbol{x}_l',\tau_{n+1/2})$, $\delta\tilde{u}$ в точках $(\boldsymbol{x}_{l+1/2}',\tau_{n+1})$, $\delta\breve{u}$ в точках $(\boldsymbol{x}_l',\tau_{n+1})$ и $\delta\hat{u}$ в точках $(\boldsymbol{x}_l',\tau_{n+1})$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Практически та же точность приближенных решений наблюдается при $p=\pi^2$, $\tilde{N}=1$ и $p=4\pi^2$, $\tilde{N}=4$. Эксперименты показали, что применение исключительно квадратурных формул для вычисления интегралов $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$ влечет значительное уменьшение скорости сходимости численных решений при приближении точки $\boldsymbol{x}$ к границе $\partial\Omega$. При приближении точки $\boldsymbol{x}$ к узлам квадратурных аппроксимаций интегралов $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$, например точки $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s_{l+1/2})$ к точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_{l+1/2})$ в случае использования ПКФГ или КФНК с нечетным числом узлов, или точки $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s_l)$ к

Относительные среднеквадратичные отклонения δu

R'	$1-2/(3\pi)$	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
$h_\tau = 1/8$, $h_s = \pi/3$	$2.09\cdot10^{-2}$	$1.53\cdot10^{-2}$	$3.38\cdot10^{-3}$	$5.29\cdot10^{-4}$	$6.00\cdot10^{-5}$	$9.96\cdot10^{-6}$	$1.70\cdot10^{-5}$
	$2.72\cdot10^{-2}$	$2.53\cdot10^{-2}$	$2.11\cdot10^{-2}$	$2.06\cdot10^{-2}$	$2.06\cdot10^{-2}$	$2.06\cdot10^{-2}$	$2.06\cdot10^{-2}$
	$4.16\cdot10^{-2}$	$4.96\cdot10^{-2}$	$5.67\cdot10^{-2}$	$5.75\cdot10^{-2}$	$5.75\cdot10^{-2}$	$5.75\cdot10^{-2}$	$5.75\cdot10^{-2}$
	$2.09\cdot10^{-2}$	$1.53\cdot10^{-2}$	$1.86\cdot10^{-2}$	$6.78\cdot10^{-1}$	$8.18\cdot10^{-1}$	$8.32\cdot10^{-1}$	$8.36\cdot10^{-1}$
	$2.23\cdot10^{-2}$	$5.66\cdot10^{-2}$	$6.65\cdot10^{-1}$	$8.17\cdot10^{-1}$	$8.32\cdot10^{-1}$	$8.34\cdot10^{-1}$	$8.34\cdot10^{-1}$
$h_\tau = 1/16$, $h_s = \pi/7$	$1.42\cdot10^{-3}$	$1.31\cdot10^{-3}$	$2.88\cdot10^{-4}$	$4.17\cdot10^{-5}$	$8.02\cdot10^{-6}$	$9.27\cdot10^{-6}$	$9.84\cdot10^{-6}$
	$2.40\cdot10^{-3}$	$2.56\cdot10^{-3}$	$2.62\cdot10^{-3}$	$2.63\cdot10^{-3}$	$2.63\cdot10^{-3}$	$2.63\cdot10^{-3}$	$2.63\cdot10^{-3}$
	$1.83\cdot10^{-3}$	$2.85\cdot10^{-3}$	$4.41\cdot10^{-3}$	$4.62\cdot10^{-3}$	$4.65\cdot10^{-3}$	$4.65\cdot10^{-3}$	$4.65\cdot10^{-3}$
	$1.42\cdot10^{-3}$	$1.30\cdot10^{-3}$	$1.37\cdot10^{-2}$	$4.81\cdot10^{-1}$	$7.94\cdot10^{-1}$	$8.27\cdot10^{-1}$	$8.31\cdot10^{-1}$
	$1.39\cdot10^{-3}$	$3.62\cdot10^{-3}$	$4.40\cdot10^{-1}$	$7.90\cdot10^{-1}$	$8.30\cdot10^{-1}$	$8.31\cdot10^{-1}$	$8.31\cdot10^{-1}$
$h_\tau = 1/32$, $h_s = \pi/15$	$1.46\cdot10^{-4}$	$2.05\cdot10^{-4}$	$4.22\cdot10^{-5}$	$7.55\cdot10^{-6}$	$1.03\cdot10^{-5}$	$1.10\cdot10^{-5}$	$1.10\cdot10^{-5}$
	$3.50\cdot10^{-4}$	$3.35\cdot10^{-4}$	$3.25\cdot10^{-4}$	$3.30\cdot10^{-4}$	$3.31\cdot10^{-4}$	$3.31\cdot10^{-4}$	$3.31\cdot10^{-4}$
	$1.47\cdot10^{-4}$	$2.34\cdot10^{-4}$	$4.19\cdot10^{-4}$	$4.69\cdot10^{-4}$	$4.74\cdot10^{-4}$	$4.75\cdot10^{-4}$	$4.75\cdot10^{-4}$
	$1.46\cdot10^{-4}$	$2.05\cdot10^{-4}$	$1.31\cdot10^{-3}$	$1.89\cdot10^{-1}$	$7.52\cdot10^{-1}$	$8.23\cdot10^{-1}$	$8.30\cdot10^{-1}$
	$1.46\cdot10^{-4}$	$2.04\cdot10^{-4}$	$1.20\cdot10^{-1}$	$7.43\cdot10^{-1}$	$8.22\cdot10^{-1}$	$8.30\cdot10^{-1}$	$8.31\cdot10^{-1}$
$h_\tau = 1/64$, $h_s = \pi/31$	$8.80\cdot10^{-6}$	$3.31\cdot10^{-5}$	$9.96\cdot10^{-6}$	$3.92\cdot10^{-6}$	$4.15\cdot10^{-6}$	$4.21\cdot10^{-6}$	$4.29\cdot10^{-6}$
	$5.31\cdot10^{-5}$	$5.32\cdot10^{-5}$	$4.10\cdot10^{-5}$	$4.15\cdot10^{-5}$	$4.16\cdot10^{-5}$	$4.16\cdot10^{-5}$	$4.17\cdot10^{-5}$
	$8.80\cdot10^{-6}$	$3.32\cdot10^{-5}$	$4.16\cdot10^{-5}$	$5.24\cdot10^{-5}$	$5.37\cdot10^{-5}$	$5.39\cdot10^{-5}$	$5.39\cdot10^{-5}$
	$8.78\cdot10^{-6}$	$3.31\cdot10^{-5}$	$3.88\cdot10^{-5}$	$2.44\cdot10^{-2}$	$6.69\cdot10^{-1}$	$8.15\cdot10^{-1}$	$8.29\cdot10^{-1}$
	$9.39\cdot10^{-6}$	$3.32\cdot10^{-5}$	$5.94\cdot10^{-2}$	$6.49\cdot10^{-1}$	$8.13\cdot10^{-1}$	$8.29\cdot10^{-1}$	$8.31\cdot10^{-1}$

точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_l)$ в случае использования КФНК замкнутого типа, возникают проблемы вычислительного характера: $b(\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s),\tilde{\boldsymbol{x}}(s)) \sim d^{-1}$ при $d \to 0$, и ошибки приобретают катастрофический характер. В то же время применение точного интегрирования по компоненте ρ^+ межточечного расстояния r для вычисления интегралов $J_{i,m,l}(d,s,\tau)$ ($i=1,2$, $d \in I_D$) позволяет получить вблизи границы $\partial\Omega$ скорость сходимости не меньше, чем вдали от $\partial\Omega$, почти равномерную по φ, t и близкую к кубической (данные о точности метода для этой же задачи Дирихле при $R'=0.5$ и $R'=0.1$ приведены в работе [5]).

Аналогичные результаты, демонстрирующие преимущество использования точного интегрирования по ρ^+ вблизи $\partial\Omega$, были получены при нахождении решения рассмотренной здесь задачи Дирихле в виде разности потенциалов простого и двойного слоев с помощью ГИУ первого рода (см. уравнения (1.7), (1.8) [11]), при этом вычисление потенциала простого слоя с помощью точного интегрирования по ρ^+ осуществлялось как в работе [14]. В заключение отметим, что точное интегрирование по $\rho^{\pm}$ может быть сходным образом использовано для аппроксимации потенциалов двойного слоя двумерных стационарных уравнений $\Delta_2 u - pu = 0$ ($p \geq 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
3. *Tomlin G.R.* Numerical analysis of continuum problems in zoned anisotropic media. Ph. D. Thesis. Southampton University, 1972.
4. *Curran D.A.S., Lewis B.A.* A boundary element method for the solution of the transient diffusion equation in two dimensions // Appl. Math. Modelling. 1986. V. 10. April. P. 107–113.
5. *Иванов Д.Ю.* О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 9–29.
6. *Onishi K.* Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
7. *Costabel M., Onishi K., Wendland W.L.* A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation // Inverse and Ill-Posed Problems / H.W. Engl and C.W. Groetsch, eds. Boston: Academic Press, 1987. P. 369–384.
8. *Iso Y., Takahashi S., Onishi K.* Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems // Topics in Boundary Element Research / C.A. Brebbia, ed. V. 3. Berlin: Springer, 1987. P. l–24.
9. *Hongtao Y.* On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of Computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.
10. *Hamina M., Saranen J.* On the collocation approximation for the single layer heat operator equation // Z. Angew. Math. Mech. (Journal of applied mathematics and mechanics). 1991. V. 71. P. 629–631.
11. *Hamina M., Saranen J.* On the spline collocation method for the single layer heat operator equation // Mathematics of Computation. 1994. V. 62. No. 25. P. 41–64.
12. *Hämäläinen J., Saranen J.* A collocation method for the single layer heat equation of the first kind // Integral Methods in Science and Engineering / Constanda C., Saranen J., Seikkala S., eds. V. 2. Addison Wesley Longman, 1997. P. 93–98.
13. *Iso Y., Onishi K.* On the stability of the boundary element collocation method applied to the linear heat equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1991. V. 38. P. 201–209.
14. *Иванов Д.Ю.* Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25.
15. *Gu Y., Chen W., Zhang J.* Investigation on near-boundary solutions by singular boundary method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2012. V. 36. No. 8. P. 1173–1182.
16. *Fu Z.J., Chen W., Qu W.* Numerical investigation on three treatments for eliminating the singularities of acoustic fundamental solutions in the singular boundary method // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2014. V. 56. P. 15–26.
17. *Иванов Д.Ю.* Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
18. *Иванов Д.Ю., Дзержинский Р.И.* Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 15–17.
19. *Иванов Д.Ю.* Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6 (38). С. 33–45.
20. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1962. 464 с.
21. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 551 с.

22. *Иванов Д.Ю.* Экономичный метод вычисления операторов, разрешающих некоторые задачи теплопроводности в прямых цидиндрах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2014. № 9. С. 16–32.

Статья поступила 02.09.2019 г.

Ivanov D.Y. (2020) A REFINEMENT OF THE BOUNDARY ELEMENT COLLOCATION METHOD NEAR THE BOUNDARY OF A TWO-DIMENSIONAL DOMAIN USING SEMIANALYTIC APPROXIMATION OF THE DOUBLE LAYER HEAT POTENTIAL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 30–52

DOI 10.17223/19988621/65/3

Keywords: non-stationary heat conduction, Dirichlet problem, boundary integral equation, double-layer potential, boundary element, collocation, uniform convergence, stability.

In this paper, we consider internal and external initial Dirichlet problems for the heat equation (IDPHEs) $\partial_t u = a^2\Delta_2 u - p\,u$ ($\Delta_2 \equiv \partial^2_{x_1x_1} + \partial^2_{x_2x_2}$; $a, p>0$ are constant) in an open two-dimensional spatial domain Ω at a zero initial condition. A fully justified collocation boundary element method is proposed, which makes it possible to obtain uniformly convergent in the space-time domain $\Omega \times I_T$ approximate solutions of these IDPHEs. The solutions are found in the form of the double-layer potential (DLP) with an unknown density function determined from boundary integral equation of the second kind.

To ensure the uniform convergence of the approximation of the DLP operator, an integration on arc-length s is carried out in two ways. If the distance r from the point $\boldsymbol{x} \in \Omega$ at which the DLP is calculated to the integration point $\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$ does not exceed approximately one third of the radius of the Lyapunov circle R_L, then we use exact integration with respect to a certain component ρ of the distance r: $\rho \equiv (r^2-d^2)^{1/2}$ (d is the distance from the point $\boldsymbol{x} \in \Omega$ to the boundary $\partial\Omega$ of the domain Ω). Namely, the integral over s is represented here as a sum of two integrals with respect to ρ in each of which we take its own weight function of the variable ρ generated by the fundamental solution of the heat equation. The rest parts of the integrands are approximated using quadratic interpolation with respect to ρ, and thereafter integration with respect to ρ is performed exactly for any analytically defined boundary $\partial\Omega$. The integrals with respect to s for $r> R_L/3$ are calculated using Gaussian quadratures with γ points.

To approximate the density function and the time C_0-semigroup, we here use piecewise quadratic interpolation. Under the conditions $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ and $\gamma \geq 2$, it is proved that the approximate solutions converge to an exact one with a cubic velocity uniformly in the domain $\Omega \times I_T$. It is also proved that the approximate solutions are stable to perturbations of the boundary function uniformly in the domain $\Omega \times I_T$. For the simpler case of piecewise constant interpolation, it is proved that using a series of quadrature formulas for calculating the integral of s on the boundary element nearest to the point $\boldsymbol{x} \in \Omega$ leads to a violation of convergence uniform over d near the boundary $\partial\Omega$. The results of computational experiments on the solution of the IDPHEs in a circular spatial domain are presented. These results show that the use of exact integration over ρ ensures uniform convergence, which is close to cubic, whereas the use of Gauss quadrature formulas or Newton–Cotes formulas instead of it results in a significant reduction in the convergence rate near the boundary $\partial\Omega$.

AMS Mathematical Subject Classification: 80M15, 65E05

Dmitry Y. IVANOV (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engeneering (MIIT), Moscow, Russian Federation . E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary element techniques.* New York: Springer-Verlag.
2. Banerjee P.K., Butterfield R. (1981) *Boundary element methods in engineering science.* London: McGraw-Hill.
3. Tomlin G.R. (1972) *Numerical analysis of continuum problems in zoned anisotropic media. Ph. D. Thesis.* Southampton University.
4. Curran D.A.S., Lewis B.A. (1986) A boundary element method for the solution of the transient diffusion equation in two dimensions. *Applied Mathematical Modelling.* 10 (April). pp. 107–113.
5. Ivanov D.Yu. (2017) O reshenii ploskikh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti kollokatsionnym metodom granichnykh elementov [On the solution of plane problems of non-stationary heat conduction by the boundary element collocation method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
6. Onishi K. (1981) Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*. 17. pp. 213–225.
7. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. (1987) A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation. *Inverse and Ill-Posed Problems* (*H.W. Engl and C.W.Groetsch, eds.*). Boston: Academic Press. pp. 369–384.
8. Iso Y., Takahashi S., Onishi K. (1987) Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems. *Topics in Boundary Element Research* (*C.A. Brebbia, ed.*)*, Vol. 3*. Berlin: Springer. pp. l–24.
9. Hongtao Y. (1999) On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of Computation*. 68 (226). pp. 547–557.
10. Hamina M., Saranen J. (1991) On the collocation approximation for the single layer heat operator equation. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (*Journal of applied mathematics and mechanics*). 71. pp. 629–631.
11. Hamina M., Saranen J. (1994) On the spline collocation method for the single layer heat operator equation. *Mathematics of Computation*. 62 (25). pp. 41–64. DOI: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1994-1208222-2.
12. Hämäläinen J., Saranen J. (1997) A collocation method for the single layer heat equation of the first kind. *Integral Methods in Science and Engineering (Constanda C., Saranen J., Seikkala S., eds.), Vol. 2.* Addison Wesley Longman. pp. 93–98.
13. Iso Y., Onishi K. (1991) On the stability of the boundary element collocation method applied to the linear heat equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 38. pp. 201–209.
14. Ivanov D.Yu. (2019) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy oblasti v sluchae dvumernykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti s granichnymi usloviyami vtorogo i tret'yego roda [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of the domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 5–25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
15. Gu Y., Chen W., Zhang J. (2012) Investigation on near-boundary solutions by singular boundary method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 36(8). pp. 1173–1182. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.01.006.
16. Fu Z.J., Chen W., Qu W. (2014) Numerical investigation on three treatments for eliminating the singularities of acoustic fundamental solutions in the singular boundary method. *WIT Transactions on Modelling and Simulation.* 56. pp. 15–26. DOI: 10.2495/BEM360021.
17. Ivanov D.Y. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266110080045.

18. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Resheniye zadach Robena dlya dvumernykh differentsial'no-operatornykh uravneniy, opisyvayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region.* 1. pp. 15–17.
19. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
20. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1962) *Metody vychisleniy* [Methods of computations]. Vol. 1. Moscow: GIFML.
21. Smirnov V.I. (1964) *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4. Part II. Moscow: Nauka.
22. Ivanov D.Yu. (2014) Ekonomichnyy metod vychisleniya operatorov, razreshayushchikh nekotorye zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh [An economical method for calculating operators that solve some heat conduction problems in direct cylinders]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*. 9. pp. 16–32.

Received: September 2, 2019