УДК 531.332.1
DOI 10.17223/19988621/65/6

С.О. Гладков, С.Б. Богданова

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Проведено аналитическое и численное решение задачи о движении тел с переменной массой $m(t)$ по брахистохроне. Задача решается в подвижном ортогональном единичном базисе $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}$, выбранному в произвольной точке траектории и являющемуся наиболее рациональным в плане удобства вычислений. Благодаря предложенному ранее методу получена полная замкнутая система уравнений, описывающая нелинейную динамику движения тела с учетом сил как сухого, так и вязкого трения. С помощью численных методов построены различные виды траекторий в зависимости от входящих в задачу параметров.

Ключевые слова: *брахистохрона, переменная масса, реакция желоба, нелинейные уравнения, мгновенный базис.*

В этой работе, так же, как и в предыдущих работах [1–5], благодаря предложенному в них методу, будут получены уравнения движения тел с переменной массой по брахистохроне.

Как было строго доказано, при выполнении равенства $\frac{\mathrm{v}^2}{R} = g\cos\alpha$, где v – скорость тела; R – радиус кривизны траектории (желоба) в данной точке; g – ускорение силы тяжести, а $\alpha -$ острый угол между касательной, проведенной в той же точке траектории и осью x, получается уравнение брахистохроны. При этом сила реакции, в общем случае определяемая как $N = m\left(\frac{\mathrm{v}^2}{R} + g\cos\alpha\right)$, будет равна просто $2mg\cos\alpha$. В том случае, если выполняется противоположное условие, а именно, $\frac{\mathrm{v}^2}{R} = -g\cos\alpha$, сила реакции N будет равна нулю. В результате получается, как и должно быть, траектория в виде обычной параболы, характерной для свободного движения тела в отсутствии сопротивлением со стороны внешней среды.

Подобное гипотетическое предположение было главной идеей упомянутых чуть выше работ, которое позволило нам чисто аналитически описывать любое динамическое движение тел, перемещающихся по произвольной в общем случае форме желоба, обойдясь при этом без так называемого управляющего параметра, который применялся и применяется до сих пор во множестве работ других авторов.

Следует отметить, что предложенный нами подход при решении определенного класса задач из области теоретической механики, относится к описанию динамики криволинейного движения и базируется на составлении соответствующих уравнений в единичном ортогональном подвижном базисе $\mathbf{n},\boldsymbol{\tau}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали, проведенный в данной точке траектории, а $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной, выбранный в направлении движения тела.

Уравнение брахистохроны для тела переменной массы

Задача, о которой пойдет сейчас речь, несмотря на ее, казалось бы, довольно абстрактное значение, тем не менее является важным примером из намеченного класса проблем, большим плюсом которого, на наш взгляд, является возможность ее точного чисто аналитического решения.

Как это следует из названия статьи, речь пойдет о решении задачи, связанной с описанием динамики движения тел переменной массы с заданным законом изменения $m(t)$.

Заметим, что задачи подобного типа не новы, и в качестве примера можно привести, например, работы [6–8], в которых приводится решение задачи при движении тел переменной массы, а соответствующее решение в них ищется благодаря методу управляющего параметра, впервые предложенного Понтрягиным и подробно описанного им в монографии [9].

Наше существенное отличие от всех предыдущих работ различных авторов заключается в том, что при решении этой задачи мы не будем использовать метод управляющего параметра, а воспользуемся вполне апробированным подходом, который уже был намечен нами в работах [1–5]. Геометрию задачи иллюстрирует рис. 1.

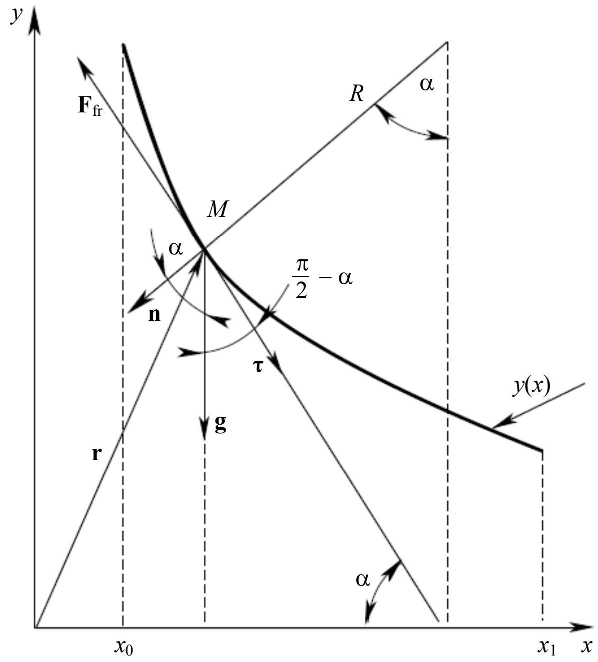

Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи. Комментарии в тексте

Fig. 1. Schematic representation of the problem geometry. The comments are in the paper

В процессе решения мы будем использовать мгновенный базис $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$, в котором запишем систему интересующих нас динамических уравнений, и чтобы их получить, воспользуемся уравнениями Гамильтона [10]. Имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla H\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс тела; $H = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r})$ – гамильтониан, $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия.

Из уравнения (1) следует, что

$$\dot{m}\,\mathrm{v}\,\boldsymbol{\tau} + m\left(\dot{\mathrm{v}}\,\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathrm{v}^2}{R}\mathbf{n}\right) = \mathbf{F}\,. \qquad (2)$$

Проекция уравнения (2) на ось $\mathbf{n}$ приведет в результате к первому соотношению

$$N = m\left(\frac{\mathrm{v}^2}{R} + g\cos\alpha\right). \qquad (3)$$

А проекция на ось $\boldsymbol{\tau}$ с учетом сил трения дает

$$m\,\dot{\mathrm{v}} + \dot{m}\,\mathrm{v} = mg\sin\alpha - \mu N - k\,\mathrm{v}\,, \qquad (4)$$

где μ – коэффициент сухого трения, а k – коэффициент вязкого трения, пропорциональный динамической вязкости среды η.

Условием того, что движение происходит по брахистохроне (см. пояснения, приведенные чуть выше, а также работы [1, 2]), служит равенство

$$\frac{\mathrm{v}^2}{R} = g\cos\alpha\,. \qquad (5)$$

Поскольку же, в свою очередь, должно выполняться соотношение

$$\mathrm{v} = -R\dot{\alpha}\,, \qquad (6)$$

уравнение (5) можно переписать в совсем простом виде как

$$\mathrm{v}\,\dot{\alpha} = -g\cos\alpha\,. \qquad (7)$$

Следовательно, полная система уравнений согласно (4) и (7) будет такой:

$$\begin{cases} m\,\dot{\mathrm{v}} + \dot{m}\,\mathrm{v} = mg\sin\alpha - \mu N - k\,\mathrm{v}, \\ \mathrm{v}\,\dot{\alpha} = -g\cos\alpha. \end{cases} \qquad (8)$$

Для начала проанализируем эту систему уравнений при условии отсутствия диссипации энергии как со стороны среды, так и со стороны желоба. Полагая с этой целью, что $\mu = k = 0$, найдем из (8)

$$\begin{cases} m\,\dot{\mathrm{v}} + \dot{m}\,\mathrm{v} = mg\sin\alpha, \\ \mathrm{v}\,\dot{\alpha} = -g\cos\alpha. \end{cases} \qquad (9)$$

Поделив верхнее уравнение на нижнее, будем иметь

$$\frac{1}{\mathrm{v}}\frac{d\mathrm{v}}{d\alpha} + \frac{d}{d\alpha}\ln m = -\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}_0\, m_0}{m}\cos\alpha\,, \tag{10}$$

где постоянную интегрирования мы выбрали в факторизованном виде как произведение $\mathrm{v}_0\, m_0$, в котором $m_0 = m(0)$, $\mathrm{v}_0 = \mathrm{v}(0)$.

Далее, поскольку $\dot{x} = \mathrm{v}\cos\alpha$, $\dot{y} = \mathrm{v}\sin\alpha$, с учетом решения (10), находим

$$\begin{cases} x = x_0 + \mathrm{v}_0\, m_0 \displaystyle\int_0^t \frac{\cos^2\alpha}{m(t)}dt, \\ y = y_0 + \mathrm{v}_0\, m_0 \displaystyle\int_0^t \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{m(t)}dt. \end{cases} \tag{11}$$

Чтобы система уравнений (11) была замкнутой, необходимо определить теперь зависимость $\alpha(t)$. С этой целью следует вернуться к уравнениям (9) и избавиться в них от переменной v. Эту простую операцию легко проделать, выразив скорость из нижнего уравнения и подставив ее в верхнее. В результате простых преобразований приходим к уравнению

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}} = \frac{\dot{m}}{m},$$

откуда сразу же следует искомое соотношение

$$\alpha(t) = \frac{C}{m_0}\int_0^t m(t)\,dt\,, \tag{12}$$

где константу интегрирования следует выбрать в виде

$$C = \frac{g}{\mathrm{v}_0}.$$

Таким образом, зависимость угла наклона касательной от времени будет следующей

$$\alpha(t) = \frac{g}{m_0\,\mathrm{v}_0}\int_0^t m(t)\,dt\,. \tag{13}$$

Как видим, полученные решения (11) и (13) составляют полную замкнутую систему искомых соотношений, описывающих движение тел переменной массы по брахистохроне.

Полагая константы интегрирования x_0 и y_0, фигурирующие в (11), равными нулю, приходим к окончательному неявному решению задачи

$$\begin{cases} x = \mathrm{v}_0\, m_0 \displaystyle\int_0^t \frac{\cos^2\alpha}{m(t)}dt, \\ y = \mathrm{v}_0\, m_0 \displaystyle\int_0^t \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{m(t)}dt, \\ \alpha(t) = \dfrac{g}{m_0\,\mathrm{v}_0} \displaystyle\int_0^t m(t)\,dt. \end{cases} \tag{14}$$

Уравнение брахистохроны для тела с заданным законом изменения массы

Проанализировать общее решение (14) можно численно, если задать конкретные зависимости $m(t)$. Действительно, если положить, например, что

$$m(t) = m_0 e^{-\gamma t}, \tag{15}$$

где γ – некоторый коэффициент убывания массы, численное интегрирование системы уравнений (14) позволяет получить параметрические зависимости координат от времени, приводящие к неявной зависимости $y(x)$, показанной на рис. 2 для случая $\gamma = 0.2$ и $m_0 = 1$.

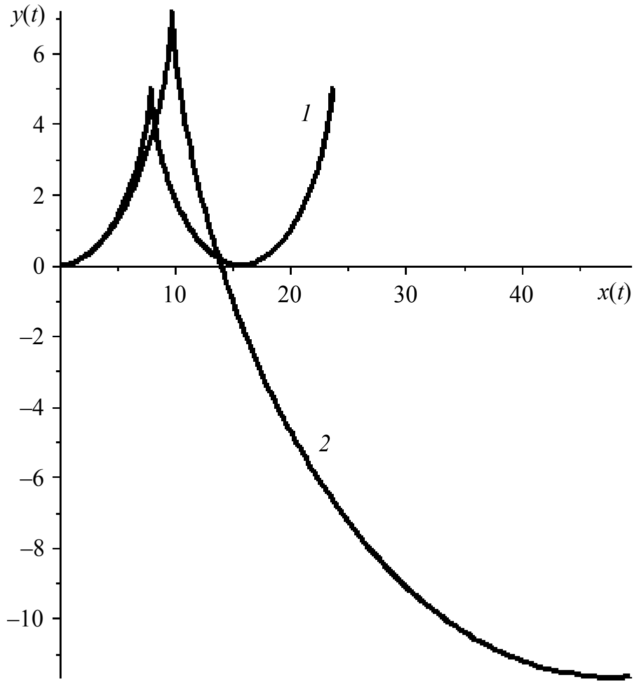

Рис. 2. Зависимость траектории движения от массы тела: кривая *1* – масса постоянная, кривая *2* построена для зависимости, меняющейся по закону (15)

Fig. 2. Dependency of a moving particle trajectory on the body mass: curve *1* corresponds to the constant mass; curve *2* corresponds to the mass varying in accordance with law (15)

В том случае, если зависимость массы от времени задана в виде растущей функции

$$m(t) = m_0 e^{\gamma t}, \tag{16}$$

результат численного решения уравнений (14) приводит к траектории $y(x)$, показанной на рис. 3 для случая $\gamma = 1$ и $m_0 = 1$.

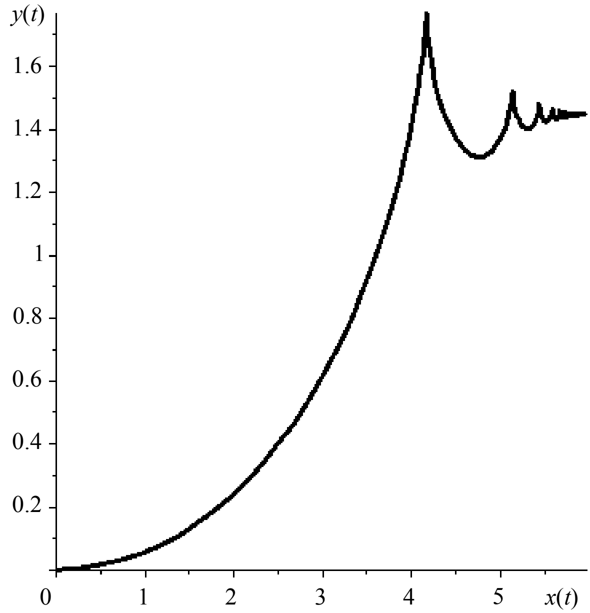

Рис. 3. Траектория движения частицы с массой, меняющейся по закону (16)
Fig. 3. Trajectory of the moving particle with the mass changing in accordance with law (16)

Наконец, если мы зададим изменение массы в виде

$$m(t)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{gt}{\mathrm{v}_0}\right)^2}}, \tag{17}$$

решения уравнений (14) легко находятся аналитически. В самом деле, в результате простого интегрирования получаем, что

$$\begin{cases} x=\frac{\mathrm{v}_0^2}{g}\left(\arcsin\left(\frac{gt}{\mathrm{v}_0}\right)+2\pi n+\frac{gt}{\mathrm{v}_0}\sqrt{1-\left(\frac{gt}{\mathrm{v}_0}\right)}\right), \\ y=\frac{gt^2}{2}. \end{cases} \tag{18}$$

Выражая отсюда x через y, приходим, следовательно, к искомой траектории, показанной на рис. 4:

$$x=\frac{\mathrm{v}_0^2}{g}\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2gy}}{\mathrm{v}_0}\right)+2\pi n+\frac{\sqrt{2gy}}{\mathrm{v}_0}\sqrt{1-\frac{2gy}{\mathrm{v}_0^2}}\right), \tag{19}$$

где $0\le y\le\frac{\mathrm{v}_0^2}{2g}$.

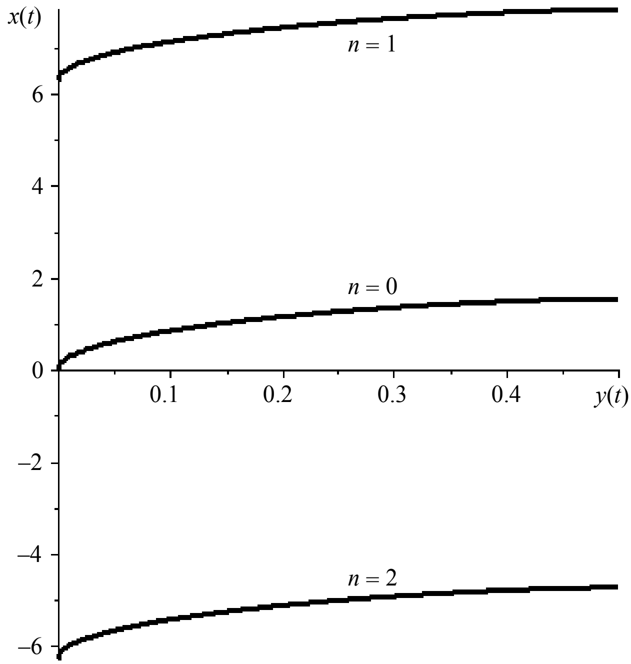

Рис. 4. Зависимость (19) при различных значениях *n*
Fig. 4. Functional dependence (19) at various values of *n*

Решение задачи при учете сил сопротивления также довольно просто находится, но при этом следует решать систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{v}} + \dfrac{\dot{m}}{m}\mathrm{v} = g\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) - \dfrac{\mathrm{v}}{\tau}, \\ \mathrm{v}\,\dot{\alpha} = -g\cos\alpha. \end{cases} \tag{20}$$

где учтено, что $N = 2mg\cos\alpha$, а введенное время $\tau = \dfrac{m}{k}$ – соответствует времени остановки тела в результате действия диссипативных сил со стороны континуума. В этом случае задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}_0\, m_0}{m}\exp\left(2\mu\alpha + \frac{1}{g\tau}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{v}}{\cos\alpha}\,d\alpha\right)\cos\alpha\,. \tag{21}$$

Заключение

Таким образом:

1. Дано описание движения тел переменной массы по брахистохроне.
2. Проведен анализ полученных уравнений, как при учете сил сопротивления, так и в пренебрежении ими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. С. 161101-1-5.
2. *Гладков С.О.* О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. С. 164002-1-5.
3. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. С. 171101-1-5.
4. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. С. 172101-1-6.
5. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* О классе двухмерных геодезических кривых в поле силы тяжести // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. №5 8. С. 5–13. DOI: 10.17223/19988621/58/1.
6. *Иванов А.И.* О брахистохроне частицы переменной массы с постоянным отношением количества присоединяемых и отделяемых частиц // Доклады АН УССР. Серия А. 1968. С. 683–686.
7. *Руссаловская А.В., Иванов Г.И., Иванов А.И.* О брахистохроне точки переменной массы с трением и экспоненциальным законом истечения массы // Доклады АН УССР. Серия А. 1973. С. 683–686.
8. *Jeremić O. et al.* On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields // Math. And Computer Modelling. 2011. V. 54. P. 2900–2912.
9. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Физматлит, 2004. 224 с.

Статья поступила 20.05.2019 г.

Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) TO THE THEORY OF MOTION OF BODIES WITH VARIABLE MASS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 83–91

DOI 10.17223/19988621/65/6

Keywords: brachistochrone, variable mass, trench response, nonlinear equations, instant basis.

In previous papers, a new approach has been proposed for describing the dynamics of nonlinear motion of material bodies with account for dry and viscous friction, which is based on the following steps: formulation of the corresponding dynamic equations in the single orthogonal moving basis formed by unit normal vectors and a tangent, which are drawn at a given trajectory point with the tangent vector directed along the body; and an assumption that in the framework of nonlinear motion along a brachistochrone, the reaction force can be specified analytically only.

Having applied this approach, the problem on the description of the dynamics of motion of variable-mass bodies at a given mass variation law is solved in this paper. A set of simultaneous dynamic equations is obtained to parametrically describe the point particle motion. Based on the numerical solution of these equations, three types of brachistochrone are plotted for desired mass variation laws, and their significant difference from the constant-mass case is shown.

Sergey O. GLADKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Sofiya B. BOGDANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

REFERENCES

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskiy fazovyy perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometrical phase transition in the problem on brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.* 1. pp. 161101-1-5.
2. Gladkov S.O. (2016) O traektorii dvizheniya tela, vkhodyashchego v zhidkost' pod proizvol'nym uglom [On the trajectory of the body immersing in a fluid at an arbitrary angle]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.* 4. pp. 164002-1-5.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) Obobshchennye dinamicheskie uravneniya ploskogo krivolineynogo dvizheniya material'nogo tela po zhelobu s uchetom sil treniya (ikh chislennyy analiz v nekotorykh chastnykh sluchayakh) [Generalized dynamic equations for a plane curvilinear motion of a material body in a trench with account for friction forces (their numerical analysis in some particular cases)]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.* 1. pp. 171101-1-5.
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheysya brakhistokhrone s uchetom sil treniya [On the theory of ball motion along a rotating brachistochrone with account for friction forces]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.* 2. pp. 172101-1-6.
5. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2019) O klasse dvukhmernykh geodezicheskikh krivykh v pole sily tyazhesti [On the class of two-dimensional geodesic curves in the field of the gravity force]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 58. pp. 5–13. DOI: 10.17223/19988621/58/1.
6. Ivanov A.I. (1968) O brakhistokhrone chastitsy peremennoy massy s postoyannym otnosheniem kolichestva prisoedinyaemykh i otdelyaemykh chastits [On the brachistochron of a variable-mass particle with a constant ratio of the number of attached and separated particles]. *Doklady AN USSR. Seriya A.* pp. 683–686.
7. Rusalovskaya A.V., Ivanov G.I., Ivanov A.I. (1973) O brakhistokhrone tochki peremennoy massy s treniem i eksponentsial'nym zakonom istecheniya massy [On the brachistochron of a variable-mass point with account for friction and exponential law of mass outflow]. *Doklady AN USSR. Seriya A.* pp. 1024–1026.
8. Jeremic O., Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z. (2011) On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields. *Mathematical and Computer Modelling.* 54(11-12). pp. 2900–2912. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.07.011.
9. Boltyanskiy V.G. (1969) *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* [Mathematical methods of optimal control]. Moscow: Nauka.
10. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics.* Oxford: Butterworth-Heinemann.

Received: May 20, 2019