

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/65/8

**В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик****ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ И НАГРУЗКИ  
В ВЕРШИНЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ  
С РОМБИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ**

Для изучения параметров состояния в вершине четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием используется неклассический подход. Рассматриваются нагружение пирамиды вблизи вершины поверхностными усилиями и включение пирамиды в упругую среду. Устанавливаются ограничения, для которых возможна корректная постановка задачи механики, выявляются сочетания геометрических и материальных параметров, обуславливающих неограниченный рост напряжений. Частные решения согласуются с известными аналитическими результатами.

**Ключевые слова:** пирамида с ромбическим основанием, особые точки, сингулярность, элементарный объем, неклассические задачи.

Особые точки деформируемых тел (вершины клиньев, конусов, многогранников, точки края поверхностей соединения элементов и т.п.) интересуют исследователей, так как вблизи таких точек реализуется концентрация напряжений, зарождается разрушение. Изучение параметров состояния в окрестности особых точек в настоящее время развивается по двум направлениям. Первое направление классическое (или асимптотическое). Классический подход предложен в работе [1] и затем развивался исследователями в публикациях [2–14 и др.]. Характерной особенностью классического подхода является исключение особой точки из области поиска решения. Как правило, в особую точку авторы классического подхода помещают полюс криволинейной системы координат (полярной, цилиндрической, сферической и т.п.). В полюсе нет однозначного соответствия между криволинейными координатами и точкой тела. Поэтому здесь не определены тензорные характеристики состояния (напряжения, деформации). Они не могут быть заданы в виде граничных условий и не могут быть найдены в виде решения. По этой причине классический подход рассматривает параметры состояния в особой точке в асимптотическом смысле. При этом подходе нельзя указать элементарный объем, в котором реализуется асимптотическое решение, а именно элементарный объем является носителем напряженно деформированного состояния в точке. Обычно авторы, использующие классический подход, ограничиваются изучением собственных значений характеристических уравнений соответствующих однородных задач. На основании анализа собственных значений формулируется критерий, при выполнении которого асимптотическое решение с приближением к особой точке неограниченно возрастает. Формулируемый критерий не исследуется авторами на условие достаточности. Но имеются примеры, когда критерий выполняется, а неограниченного роста асимптотического решения не происходит.

Второе направление изучения параметров состояния в особой точке назовем неклассическим [15–20]. При этом подходе особая точка, как и любая другая точка деформируемого тела, рассматривается в виде точки континуума и связанного

с ней элементарного объема. Точка континуума указывает местоположение особой точки, а элементарный объем является носителем материальных характеристик и параметров напряженно деформированного состояния (НДС). Представление об элементарном объеме, связанном с особой точкой, позволяет сформулировать в ней задаваемые ограничения на напряжения, деформации и корректно поставить задачу механики деформируемого твердого тела (МДТТ) [15]. Как правило, количество задаваемых ограничений на параметры состояния в особой точке превышает количество ограничений, задаваемых в обычных (не особых) граничных точках деформируемого тела. По этой причине задача механики для тела, содержащего особую точку, оказывается неклассической. Для линейно упругого тела неклассическая задача имеет единственное решение (при условии его существования). Такое решение может быть построено, например, численно-аналитическим итерационным методом [15].

В настоящей статье неклассический подход используется для изучения напряженного состояния в вершине четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием. Рассматривается случай поверхностной нагрузки вблизи вершины и случай включения такой пирамиды в упругую среду. Приведенные в работе аналитические решения для параметров состояния в вершине пирамиды согласуются с решениями, получаемыми общепринятыми методами теории упругости. Результаты исследований могут использоваться, в частности, при анализе НДС в окрестности вершин инденторов Кнуппа.

## 1. Четырехугольная пирамида с ромбическим основанием, нагруженная поверхностными силами вблизи вершины

### 1.1. Постановка задачи

Рассматривается элемент конструкции, содержащий особенность в виде вершины четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием (рис. 1). Пирамида определяется двумя независимыми параметрами – углом  $2\alpha$  при вершине ромба и углом  $\psi$  между высотой пирамиды и высотой треугольника, являющегося ее боковой гранью.

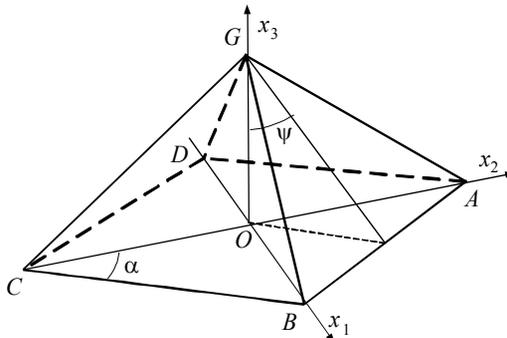


Рис. 1. Пирамида с ромбическим основанием  
Fig. 1. Rhombic pyramid

С пирамидой связывается ортонормированная декартова система координат  $Ox_1x_2x_3$  с базисом  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Оси  $x_1, x_2$  направлены по диагоналям ромба, ось  $x_3$  – по высоте пирамиды.

На боковых гранях пирамиды строятся тройки ортонормированных векторов. На грани  $GAB$ :

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_n &= \bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_n &= \bar{e}_1 \sin \alpha - \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (1)$$

На грани  $GBC$ :

$$\begin{aligned}\bar{m} &= \bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_m &= \bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_m &= -\bar{e}_1 \sin \alpha - \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (2)$$

На грани  $GCD$ :

$$\begin{aligned}\bar{l} &= -\bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_l &= -\bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_l &= -\bar{e}_1 \sin \alpha + \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (3)$$

На грани  $GDA$ :

$$\begin{aligned}\bar{k} &= -\bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_k &= -\bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_k &= \bar{e}_1 \sin \alpha + \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (4)$$

Первые векторы в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, два других принадлежат им. Векторы нагрузки вблизи вершины  $G$  на боковых гранях пирамиды, ориентированных ортами  $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}, \bar{k}$  представляются разложениями по базисам (1) – (4):

$$\begin{aligned}\bar{p}_n &= p_n \bar{n} + \tau_n \bar{\xi}_n + \vartheta_n \bar{\zeta}_n, \quad \bar{p}_m = p_m \bar{m} + \tau_m \bar{\xi}_m + \vartheta_m \bar{\zeta}_m, \\ \bar{p}_l &= p_l \bar{l} + \tau_l \bar{\xi}_l + \vartheta_l \bar{\zeta}_l, \quad \bar{p}_k = p_k \bar{k} + \tau_k \bar{\xi}_k + \vartheta_k \bar{\zeta}_k.\end{aligned}\quad (5)$$

В соответствии с принятой концепцией параметрами состояния в вершине пирамиды (в особой точке) являются параметры состояния, содержащего эту точку элементарного объема. Этот элементарный объем состоит из множества точек континуума, образующих окрестность вершины  $G$ . Линейный масштаб такой окрестности имеет порядок линейного масштаба представительного объема тела. Грани пирамиды являются касательными плоскостями к указанному объему. Поэтому в особой точке оказываются заданными следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= p_n, \quad \tau_{\xi_n} = \tau_n, \quad \tau_{\zeta_n} = \vartheta_n, \quad \sigma_m = p_m, \quad \tau_{\xi_m} = \tau_m, \quad \tau_{\zeta_m} = \vartheta_m, \\ \sigma_l &= p_l, \quad \tau_{\xi_l} = \tau_l, \quad \tau_{\zeta_l} = \vartheta_l, \quad \sigma_k = p_k, \quad \tau_{\xi_k} = \tau_k, \quad \tau_{\zeta_k} = \vartheta_k.\end{aligned}\quad (6)$$

В этих равенствах  $\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \sigma_k$  – нормальные напряжения на гранях пирамиды, ориентированных соответственно ортами  $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}, \bar{k}$ ;  $\tau_{\xi_n}, \tau_{\xi_m}, \tau_{\xi_l}, \tau_{\xi_k}$ ;  $\tau_{\zeta_n}, \tau_{\zeta_m}, \tau_{\zeta_l}, \tau_{\zeta_k}$  – касательные напряжения в направлении соответствующих ортов, определенных равенствами (1) – (4). Компоненты тензора напряжений в элементарном объеме, примыкающем к вершине пирамиды (в особой точке) в коор-

динатах  $x_1, x_2, x_3$  обозначаются через  $\sigma_{ij}$ . С использованием формулы Коши для вычисления векторов напряжений на поверхности тела условия (6) представляются системой двенадцати линейных неоднородных уравнений относительно шести компонент напряжений:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_n, \\
 & \sigma_{11} \cos \psi \sin \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos \psi \sin \psi \sin^2 \alpha - \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_n, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_n, \\
 & \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi - \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_m, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_m, \\
 & -\frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_m, \tag{7} \\
 & \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_l, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{33} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_l, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha + \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_l, \\
 & \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi - \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_k, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_k, \\
 & -\frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha + \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_k.
 \end{aligned}$$

Задача заключается в исследовании (в зависимости от геометрических параметров  $\psi, \alpha$  и параметров нагрузки) условий существования решений системы уравнений (7) и их нахождения. Условия существования решений уравнений (7) обеспечивают корректность постановки задачи механики для рассматриваемого деформируемого твердого тела. Решение этих уравнений формирует задаваемые условия в вершине пирамиды. Если количество таких условий оказывается большим трех (большим количества условий, задаваемых в обычной (не особой) точке поверхности тела), задача механики для рассматриваемого тела становится неклассической.

### 1.2. Исследование системы уравнений (7)

С использованием эквивалентных преобразований уравнения (7) преобразуются к двум автономным системам. Первая из них содержит шесть уравнений относительно четырех компонент напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ :

$$\begin{aligned} 2\sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi + 2\sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha &= p_n + p_l, \\ \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \sigma_{33} \sin 2\psi + \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha &= \tau_n + \tau_l, \\ \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - 2\sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha &= \vartheta_n + \vartheta_l, \\ 2\sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi - 2\sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha &= p_m + p_k, \\ \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \sigma_{33} \sin 2\psi - \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha &= \tau_m + \tau_k, \\ -\sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - 2\sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha &= \vartheta_m + \vartheta_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Вторая система включает шесть уравнений относительно двух компонент напряжений  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$ :

$$\begin{aligned} 2\sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + 2\sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha &= p_n - p_l, \\ -2\sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - 2\sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha &= \tau_n - \tau_l, \\ 2\sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - 2\sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha &= \vartheta_n - \vartheta_l, \\ 2\sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - 2\sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha &= p_m - p_k, \\ -2\sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + 2\sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha &= \tau_m - \tau_k, \\ -2\sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - 2\sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha &= \vartheta_m - \vartheta_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Определитель матрицы системы уравнений (8), соответствующий ее первым четырем строкам, записывается равенством

$$\Delta = 16 \cos^4 \psi \sin \psi \sin^2 2\alpha. \quad (10)$$

В пределах изменения параметров  $\psi, \alpha$

$$0 < \psi < \pi/2, \quad 0 < \alpha < \pi/2 \quad (11)$$

определитель (10) не обращается в нуль. Следовательно, ранг системы уравнений (8) равен четырем. Система уравнений (8) имеет единственное решение при условии, что ранг ее расширенной матрицы также равен четырем. Это требование

приводит к двум ограничениям на параметры  $\psi, \alpha$  пирамиды и компоненты векторов нагрузки в ее вершине:

$$(p_m + p_k - p_n - p_l) \sin \psi + (\tau_n + \tau_l - \tau_m - \tau_k) \cos \psi = 0, \quad (12)$$

$$(p_n + p_l - p_k - p_m) \cos 2\alpha + (\vartheta_n + \vartheta_l - \vartheta_m - \vartheta_k) \sin 2\alpha \cos \psi = 0.$$

Если условия (12) выполняются, уравнения (8) имеют решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{8 \cos^2 \psi \cos^2 \alpha} [p_m + p_k + (p_n + p_l)(\cos 2\alpha + \cos 2\psi + \cos 2\alpha \cos 2\psi) + \\ &\quad + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi (1 + \cos 2\alpha) + 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi \sin 2\alpha], \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{8 \cos^2 \psi \cos^2 \alpha} [-(p_m + p_k) + (p_n + p_l)(\cos 2\alpha - \cos 2\psi + \cos 2\alpha \cos 2\psi) + \\ &\quad + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi (\cos 2\alpha - 1) + 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi \sin 2\alpha], \\ \sigma_{33} &= -\frac{1}{2 \sin \psi} [(\tau_n + \tau_l) \cos \psi - (p_n + p_l) \sin \psi], \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{4 \cos^2 \psi \sin 2\alpha} (p_n + p_l - p_m - p_k). \end{aligned} \quad (13)$$

Определитель, соответствующий первой и четвертой строкам матрицы системы уравнений (9)

$$\Delta = -4 \sin 2\alpha \sin^2 2\psi,$$

не обращается в нуль при изменении параметров в области допустимых значений (11). Следовательно, ранг матрицы системы уравнений (9) равен двум. Решение этих уравнений будет существовать, если ранг расширенной матрицы также будет равен двум. Это требование приводит к четырем независимым условиям, накладываемым на параметры  $\psi, \alpha$  и компоненты векторов нагрузки в особой точке:

$$\begin{aligned} (p_n - p_l) \cos 2\psi + (\tau_n - \tau_l) \sin 2\psi &= 0, \\ (p_m - p_k) \cos 2\psi + (\tau_m - \tau_k) \sin 2\psi &= 0, \\ (p_n - p_l) \cos 2\alpha + 2(\vartheta_n - \vartheta_l) \sin 2\alpha \cos \psi - (p_m - p_k) &= 0, \\ (p_m - p_k) \cos 2\alpha + 2(\vartheta_m - \vartheta_k) \sin 2\alpha \cos \psi + (p_n - p_l) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае, когда условия (14) выполняются, уравнения (9) имеют решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{1}{4 \cos \alpha \sin \psi} (p_n - p_l + p_m - p_k), \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{4 \cos \alpha \sin \psi} (p_n - p_l - p_m + p_k). \end{aligned} \quad (15)$$

Итак, при выполнении ограничений (12), (14) на геометрические параметры и компоненты нагрузки напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Известно значение всех шести напряжений. Они являются заданными параметрами в особой точке.

Если хотя бы одно из условий (12), (14) не выполняется, система уравнений (7) становится несовместной. В этом случае корректная постановка задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) невозможна.

### 1.3. Частные случаи

#### *Случай нормальной поверхностной нагрузки*

Пусть на гранях пирамиды вблизи ее вершины прикладывается нагрузка

$$\bar{p}_n = p_n \bar{n}, \quad \bar{p}_m = p_m \bar{m}, \quad \bar{p}_l = p_l \bar{l}, \quad \bar{p}_k = p_k \bar{k}.$$

Условия (12), (14) принимают вид

$$-p_n - p_l + p_m + p_k = 0, \quad p_n + p_l - p_m - p_k = 0,$$

$$(p_n - p_l) \cos 2\psi = 0, \quad (p_m - p_k) \cos 2\psi = 0,$$

$$(p_n - p_l) \cos 2\alpha - (p_m - p_k) = 0, \quad (p_n - p_l) - (p_m - p_k) \cos 2\alpha = 0.$$

Эти равенства совместны лишь в случае, когда

$$p_n = p_l = p_m = p_k = p. \quad (16)$$

Если условие (16) выполняется, напряжения в вершине пирамиды принимают значения

$$\sigma_{11} = p, \quad \sigma_{22} = p, \quad \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0.$$

Такое решение согласуется с известным аналитическим решением задачи о напряженном состоянии упругого тела, нагруженного по всей поверхности однородными нормальными распределенными усилиями.

#### *Случай касательной поверхностной нагрузки*

1) Примем, что поверхностная нагрузка вблизи вершины имеет вид

$$\bar{p}_n = \tau_n \bar{\xi}_n, \quad \bar{p}_m = \tau_m \bar{\xi}_m, \quad \bar{p}_l = \tau_l \bar{\xi}_l, \quad \bar{p}_k = \tau_k \bar{\xi}_k.$$

Условия (12), (14) образуют систему равенств:

$$\tau_n + \tau_l - \tau_m - \tau_k = 0, \quad \tau_n - \tau_l = 0, \quad \tau_n - \tau_m = 0.$$

Из этих равенств следует, что корректная постановка задачи МДТТ возможна, когда выполняются соотношения

$$\tau_n = \tau_l = \tau_m = \tau_k = \tau. \quad (17)$$

Если равенства (17) выполняются, напряжения в вершине пирамиды вычисляются по формулам

$$\sigma_{11} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{22} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{33} = -\tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

2) Пусть вблизи вершины на гранях пирамиды прикладывается нагрузка

$$\bar{p}_n = \vartheta_n \bar{\zeta}_n, \quad \bar{p}_m = \vartheta_m \bar{\zeta}_m, \quad \bar{p}_l = \vartheta_l \bar{\zeta}_l, \quad \bar{p}_k = \vartheta_k \bar{\zeta}_k.$$

Условия (12), (14) запишутся равенствами

$$\vartheta_n + \vartheta_l + \vartheta_m + \vartheta_k = 0, \quad \vartheta_n - \vartheta_l = 0, \quad \vartheta_m - \vartheta_k = 0.$$

Из этих равенств следует зависимость

$$\vartheta_n = \vartheta_l = \vartheta_m = \vartheta_k = \vartheta. \quad (18)$$

Если равенства (18) выполняются, напряжения в вершине пирамиды вычисляются по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\vartheta \operatorname{tg} \alpha}{\cos \psi}, \quad \sigma_{22} = -\frac{\vartheta \operatorname{tg} \alpha}{\cos \psi}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Построенные в этом пункте решения о напряженном состоянии в вершине пирамиды согласуются с решением, получаемым методом сечений.

## 2. Четырехугольная пирамида с ромбическим основанием, погруженная в упругое тело

Особые точки в виде вершин многогранников внутри деформируемых тел возникают при их армировании кристаллическими частицами, короткими волокнами а также в случае исследования образцов посредством внедрения в них инденторов или кристаллических игл кантилеверов.

### 2.1. Постановка задачи

Рассматриваются непрерывным образом скрепленные изотропные упругие тела 1, 2 (рис. 2), одно из которых (тело 1) имеет особенность в виде вершины четырех угольной пирамиды с ромбическим основанием. Сохраняются принятые в п.1 обозначения, связанные с пирамидой. Материальные параметры и параметры состояния, относящиеся к телам 1, 2, снабжаются соответствующими верхними индексами в скобках. Для элементарных объемов тел 1, 2 в точках поверхностей соприкосновения выполняются:

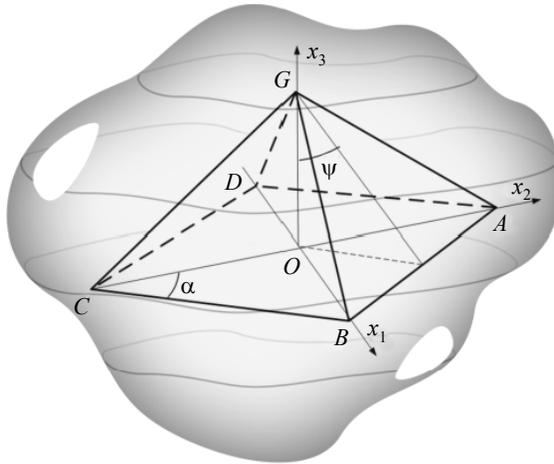


Рис. 2. Пирамида с ромбическим основанием, погруженная в упругое тело  
 Fig. 2. Rhombic pyramid immersed in an elastic body

1) Условия равенства нормальных и касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_{\xi_n}^{(1)} = \tau_{\xi_n}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_n}^{(1)} = \tau_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)}, \quad \tau_{\xi_m}^{(1)} = \tau_{\xi_m}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_m}^{(1)} = \tau_{\zeta_m}^{(2)}, \\ \sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(2)}, \quad \tau_{\xi_l}^{(1)} = \tau_{\xi_l}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_l}^{(1)} = \tau_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \sigma_k^{(1)} = \sigma_k^{(2)}, \quad \tau_{\xi_k}^{(1)} = \tau_{\xi_k}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_k}^{(1)} = \tau_{\zeta_k}^{(2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

2) Условия равенства относительных удлинений в направлении введенных на этих поверхностях направлений  $(\xi_n, \zeta_n, \dots, \xi_k, \zeta_k)$  и равенства сдвигов между такими направлениями.

$$\begin{aligned} \eta_{\xi_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(2)}, \\ \eta_{\xi_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_k}^{(1)} = \eta_{\zeta_k}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k \zeta_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k \zeta_k}^{(2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

В равенствах (19), (29) приняты обозначения:  $\sigma$  – нормальное напряжение;  $\tau$  – касательное напряжение;  $\eta$  (с одним индексом) – относительное удлинение;  $\eta$  (с двумя индексами) – сдвиг. Нижние индексы указывают направление действия напряжений, направления относительных удлинений, изменение угла между направлениями. Для разностей компонент напряжений и деформаций в элементарных объемах тел 1, 2 при вершине пирамиды вводятся обозначения

$$\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = \zeta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} = \xi_{ij}. \quad (21)$$

С использованием обозначений (21) условия (19), (20) запишутся двумя линейными однородными системами уравнений. Первая из них содержит двенадцать уравнений относительно параметров  $\zeta_{ij}$ :

$$\begin{aligned} & \zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi + \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\ & + \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \frac{1}{2} \zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha - \\ & - \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0, \\ & \zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi - \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\ & + \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & -\frac{1}{2} \zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha - \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0, \\ & \zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi + \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\ & + \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha + \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0, \\ & \zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi - \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \frac{1}{2}\zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}\zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\zeta_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2}\zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\ & + \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & -\frac{1}{2}\zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2}\zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \\ & + \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha + \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Вторая система содержит двенадцать уравнений относительно параметров  $\xi_{ij}$  :

$$\begin{aligned} & \xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi + \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha - \\ & - \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\ & \xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha - \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha - \\ & - 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha + 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \\ & \xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi - \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha - \\ & - \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\ & -\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha + \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha + \\ & + 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha + 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \tag{23} \\ & \xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi + \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha + \\ & + \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\ & \xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha - \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha + \\ & + 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha - 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \\ & \xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi - \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha + \\ & + \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\ & -\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha + \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha - \\ & - 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha - 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \end{aligned}$$

Задача состоит в исследовании условий существования решений систем уравнений (22), (23) и их нахождения. Такие решения являются ограничениями на параметры состояния в элементарных объемах тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды.

## 2.2. Исследование систем уравнений (22), (23)

Матрица системы уравнений (22) совпадает с матрицей системы уравнений (7). В п.1.2 выяснено, что эта матрица имеет шесть независимых строк, т.е. ее ранг равен шести. Вследствие однородности системы уравнений (22) она имеет лишь нулевое решение

$$\zeta_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = 0, \text{ т.е. } \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}. \quad (24)$$

Уравнения (23) элементарными преобразованиями приводятся к двум автономным системам. Первая из них состоит из шести уравнений относительно четырех параметров  $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{12}$ :

$$\begin{aligned} 2\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\xi_{33} \cos^2 \psi + 2\xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha &= 0, \\ \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ 2\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 4\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha &= 0, \\ 2\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\xi_{33} \cos^2 \psi - 2\xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha &= 0, \\ \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ -2\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha + 2\xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 4\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Вторая система состоит из четырех независимых уравнений относительно двух параметров  $\xi_{13}, \xi_{23}$ :

$$\begin{aligned} \xi_{13} \cos \alpha + \xi_{23} \sin \alpha &= 0, \quad \xi_{13} \cos \alpha - \xi_{23} \sin \alpha = 0, \\ \xi_{13} \sin \alpha + \xi_{23} \cos \alpha &= 0, \quad \xi_{13} \sin \alpha - \xi_{23} \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Определитель, отвечающий первым четырем строкам системы уравнений (25)

$$\Delta = 3 \cos^2 \psi \sin^2 2\alpha \sin^2 \psi$$

не обращается в нуль в области допустимых значений параметров  $\alpha, \psi$ . Следовательно, ранг матрицы системы уравнений (25) равен четырем, а ее решение имеет вид

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = \xi_{12} = 0, \text{ то есть } \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}, \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)}, \varepsilon_{33}^{(1)} = \varepsilon_{33}^{(2)}, \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{12}^{(2)}. \quad (27)$$

Ранг матрицы системы уравнений (26) равен двум, ее решение нулевое

$$\xi_{13} = \xi_{23} = 0, \text{ то есть } \varepsilon_{13}^{(1)} = \varepsilon_{13}^{(2)}, \varepsilon_{23}^{(1)} = \varepsilon_{23}^{(2)}. \quad (28)$$

## 2.3. Компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды

С использованием физических уравнений термоупругости равенства (27), (28) запишем через напряжения:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{11} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} &= Q, \\ - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} &= Q, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{33} = Q, \\
 & \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{12} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{13} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{23} = 0.
 \end{aligned} \tag{30}$$

В этих равенствах  $E_k, G_k, \nu_k, \omega_k$  – соответственно модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона, коэффициенты температурной деформации скрепляемых тел;  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}$  (так как  $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$ );  $Q = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T$ ,  $\Delta T$  – однородное приращение температуры.

Изучим решения систем уравнений (29), (30). Определитель матрицы системы уравнений (29) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left(\frac{1}{E_1 E_2}\right)^3 [E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2)]^2 [E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)]. \tag{31}$$

В зависимости от сочетания материальных параметров возможны варианты.

1,  $\Delta \neq 0$ . Из этого условия следует, что  $G_1 \neq G_2$ , поэтому уравнения (29), (30) имеют единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{Q E_1 E_2}{E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \tag{32}$$

Напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Оказываются известными все двенадцать компонент тензоров напряжений. Из решения (32) видно, что сочетание параметров, удовлетворяющее равенству

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0 \tag{33}$$

является критическим, так как при стремлении сочетания параметров к выполнению равенства (33) напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  в элементарных объемах, содержащих вершину  $G$ , стремятся к бесконечности.

2.  $\Delta = 0$ . Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) \neq 0. \tag{34}$$

Ранг системы уравнений (29) равен двум. Ранг расширенной матрицы равен двум, если  $Q = 0$ , и трем, если  $Q \neq 0$ , поэтому реализуются варианты:

а)  $Q = 0$ . Напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) подчинены ограничениям (так как в данном случае  $G_1 \neq G_2$ )

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \tag{35}$$

Общее количество ограничений на компоненты тензоров напряжений тел 1, 2 в вершине пирамиды равно одиннадцати.

б)  $Q \neq 0$ . Уравнения (29) несовместны. Задача МДГТ не может быть поставлена корректно.

3.  $\Delta = 0$ . Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) \neq 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0. \tag{36}$$

Ранг матрицы системы уравнений (29) равен рангу расширенной матрицы и равен единице. Уравнения совместны. Между напряжениями справедлива

зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -\frac{QE_1E_2}{E_2\nu_1 - E_1\nu_2}.$$

В данном случае  $G_1 = G_2$ , поэтому каких либо дополнительных ограничений на компоненты  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) не накладывается. Общее количество ограничений на компоненты напряжений элементарных объемов тел 1, 2, примыкающих к вершине пирамиды, равно семи.

4.  $\Delta = 0$ . Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0. \quad (37)$$

В этом случае модули Юнга и коэффициенты Пуассона тел 1, 2 совпадают. Ранг системы уравнений (29) равен нулю. Ранг расширенной матрицы зависит от значений коэффициентов температурной деформации. Если эти коэффициенты совпадают, скрепляемые материалы идентичны, особая точка отсутствует. Когда ранг расширенной матрицы равен единице ( $Q \neq 0$ ), уравнения (29) несовместны. Корректная постановка задачи МДГТ становится невозможной.

### Заключение

Представление о точке сплошной среды (включая и особую точку) в виде точки континуума и связанного с ней элементарного объема не оспаривается исследователями. В элементарном объеме, отвечающем особой точке, нарушаются условия непрерывности (наличие пересечений образующих поверхностей, разрывов параметров нагрузки и т.п.). В статье показано, что количество ограничений на параметры состояния такого элементарного объема оказывается избыточным. Это обстоятельство приводит к условиям на геометрические параметры и нагрузку, обеспечивающим корректность постановки задач МДГТ для элементов конструкций с особыми точками. Такие условия изучены в вершине четырехгранной пирамиды с ромбическим основанием при ее поверхностном нагружении и в случае погружения в упругое тело.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // *J. App. Mech.* 1952. No. 19. P. 526–528.
2. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
3. *Bogy D.B.* Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction // *Trans. ASME. Ser. E.* 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3408786>.
4. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
5. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
6. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
7. *Barut A., Guven I., Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // *Int. J. of Solid and Structures.* 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
8. *Шемакин Е.И.* О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) // *Докл. АН.* 1996. Т. 347. № 3. С. 342–345.

9. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Mech. Rev.* 2008. V. 61. P. 020801. DOI: 10.1115/1.2885134.
10. Luangarpa C., Koguchi H. Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral // *Europ. J. of Mechanics – A/Solids*. 2016. V. 60. P. 208–216. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.08.002.
11. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Тр. Моск. матем. об-ва*. 1967. Т. 16. С. 209–292.
12. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // *ДАН СССР*. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
13. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
14. Kozlov V.A., Mazyra V.G., Schwab C. On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1992. No. 119. P. 197–227.
15. Pestrenin V.M., Pestrenina I. V., Landik L.V. Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
16. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504.
17. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI: 10.1007/s11029-017-9644-1.
18. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Эйсмонт Е.Р. Напряженное состояние вблизи линии особых точек на свободной от нагрузки торцевой поверхности слоистого цилиндра // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 57. С. 84–98. DOI 10.17223/19988621/57/7.
19. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 56. С. 102–119.
20. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 52. С. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/56/9

Статья поступила 03.04.2019 г.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2020) RESTRICTIONS ON STRESS COMPONENTS AND LOADS AT THE TOP OF A FOUR-CORNER PYRAMID WITH A RHOMBIC BASE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. 98–113

DOI 10.17223/19988621/65/8

Keywords: rhombic pyramid, singular points, singularity, elementary volume, non-classical problems.

Differences between two existing approaches in the study of state parameters (stresses, strains) near singular points are discussed. In the classical (asymptotic) approach, the singular point is excluded from the solution region. Boundary conditions are not specified at this point, and, thus, the state parameters have only asymptotic values. The second, non-classical approach, considers the singular point as a point of the continuum and the elementary volume associated with this point.

The continuum point indicates a singular point location, and the elementary volume defines material characteristics and parameters of the stress-strain state. The number of specified

conditions at such a point is greater than that specified at a regular (non-singular) boundary point of a body. Therefore, the problem of solid mechanics with a singular point is non-classical.

In this paper, a non-classical approach is used to study state parameters at the vertex of a quadrangular pyramid with a rhombic base. The case of loading the pyramid near the top by surface forces and the case of the pyramid immersed in an elastic medium are considered. It is shown that the correct formulation of the mechanics problem for such cases is possible only with the implementation of the restrictions established in the work. Particular solutions are presented that are consistent with known analytical results.

For the case of the inclusion of a pyramid in an elastic body, combinations of geometrical and material parameters resulting in an unlimited increase in stresses within elementary volumes containing the top of the pyramid are revealed. The research results will be used in solid mechanics problems in the formulation of specified conditions at the vertices of polyhedra. In particular, they may be applied when analyzing the stress state near the vertices of Knoop indenters used for studying samples, as well as near crystalline inclusions in the mechanics of composites.

*Valeriy M. PESTRENIN* (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

*Irena V. PESTRENINA* (Candidate of Technical Sciences, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

*Lidiya V. LANDIK* (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

#### REFERENCES

1. Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension. *Journal of Applied Mechanics*. 19(4). pp. 526–528.
2. Uflyand Ya.S. (1967) *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transformations in problems of the theory of elasticity]. Moscow; Leningrad: Izdatel'stvo AN SSSR.
3. Bogy D.B. (1971) Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Journal of Applied Mechanics*. 38(2). pp. 87–96. DOI: 10.1115/1.3408786.
4. Chobanyan K.S. (1987) *Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh* [Stresses in compound elastic bodies]. Yerevan: Izdatel'stvo AN ArmSSR.
5. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis. *Applied Mechanics Reviews*. 57(4). pp. 251–297. DOI: 10.1115/1.1762503.
6. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification. *Applied Mechanics Reviews*. 57(5). pp. 385–439. DOI: 10.1115/1.1767846.
7. Barut A., Guven I., Madenci E. (2001) Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *International Journal of Solid and Structures*. 38(50-51). pp. 9077–9109. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00206-2.
8. Shemyakin E.I. (1966) O kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya oblastey s uglovymi tochkami (ploskaya deformatsiya) [On boundary value problems of the theory of elasticity for regions with corner points (plane strain)]. *Doklady Akademii nauk*. 347(3). pp. 342–345.
9. Paggi M., Carpintery A. (2008) On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Mechanics Reviews*. 61. pp. 020801. DOI: 10.1115/1.2885134.
10. Luangarpa C., Koguchi H. (2016) Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 60. pp. 208–216. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.08.002.
11. Kondrat'ev V.A. (1967) Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi ili uglovymi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in do-

- mains with conical or corner points]. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*. 16. pp. 209–292.
12. Maz'ya V.G., Plamenevskiy B.A. (1976) O koeffitsientakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach vblizi rebra [On coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary value problems near an edge]. *Doklady Akademii Nauk SSR*. 229(1). pp. 33–36.
  13. Parton V.Z., Perlin P.I. (1981) *Metody matematicheskoy teorii uprugosti* [Methods in the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka.
  14. Kozlov V.A., Maza V.G., Schwab C. (1992) On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 119. pp. 197–227. DOI: 10.1007/BF00381670.
  15. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
  16. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
  17. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007/s11029-017-9644-1.
  18. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Eismont E.R. (2019) Napryazhennoe sostoyaniye vblizi linii osobykh toчек na svobodnoy ot nagruzki tortsevoy poverkhnosti sloistogo tsilindra [Stress components near the singular points at a load-free end section of a layered cylinder]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 85–99. DOI: 10.17223/19988621/57/719.
  19. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Komponenty napryazheniy i ogranicheniya na nagruzku v vershinakh pravil'nykh treugol'noy i chetyrekhugol'noy piramid [Stress components and loading restrictions at the vertices of regular triangular and quadrangular pyramids]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 102–119. DOI: 10.17223/19988621/56/9.
  20. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Ogranicheniya na parametry napryazhennoy sostoyaniya v vershine krugovogo konusa [Restrictions on stress components in the top of round cone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/56/9.

Received: April 3, 2019