

Н.И. Попов, Е.Н. Шустова

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАНИЯ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Описан диагностико-технологический подход для выделения ключевых заданий систем математических задач и упражнений. Выявление ключевых примеров основано на определении тесноты связей между заданиями контрольной работы. Анализ результатов проведенного педагогического эксперимента подтвердил эффективность использования описываемого метода для повышения уровня математических знаний учащихся физико-математического лицея по теме «Применение производной для исследования функций».

Ключевые слова: педагогический эксперимент; изучение элементарных функций; применение производных функций; обучение школьников математике; ключевые задания.

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования устанавливает три вида требований к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы – личностные, метапредметные и предметные. Метапредметные цели предполагают формирование умений учащихся использовать и преобразовывать схемы и модели для решения различных познавательных и учебных задач [1]. Функциональная содержательная линия школьного курса математики лежит в основе формирования значимых умений и навыков: моделирование реальных процессов и явлений, их исследование и анализ. Следовательно, изучение функций, их свойств и различных приложений для решения прикладных задач являются важной составляющей не только математического образования школьников в целом, но и личностного развития обучаемых.

Научные труды многих авторов, например [2–7], посвящены различным аспектам изучения функциональных зависимостей в математике. Большинство исследователей сходятся во мнении, что их усвоение вызывает трудности у обучаемых. Для разрешения возникающих проблем преподавателями активно внедряются современные методы развивающего обучения и информационно-коммуникационные технологии [8, 9]. Одним из эффективных средств повышения уровня математических знаний школьников и студентов является диагностико-технологический подход для выделения ключевых заданий систем математических задач (см., например, [10, 11]). Указанный метод позволяет повысить качество знаний учащихся и при этом существенно сэкономить затрачиваемое учебное время.

В 7–9-х классах общеобразовательной школы в рамках учебного процесса изучаются общее понятие функции, способы её задания, графики функций, вводятся соответствующая символика, определяются свойства функций – как общесвойственные, так и свойства конкретно заданной функции. При этом в образовательном процессе применяются наглядно-геометрические (с использованием графиков) и аналитические (с применением формул) методы. В старшей школе к обычным средствам исследования функций добавляется аппарат математического анализа [3, 7]. Несмотря на трудности, возникающие при введе-

нии предела и производной функции в школе, использование указанных понятий значительно упрощает изучение свойств различных функций.

В настоящее время в России проблеме математического образования уделяется повышенное внимание. Тем не менее многие школьные учителя и преподаватели вузов отмечают низкий уровень знаний школьников и студентов [12]. В процессе экспериментальной работы с будущими учителями математики в ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (СГУ), мы пришли к выводу, что знания студентов по теме «Элементарные функции» зачастую носят формальный характер и не систематизированы. Аналогичные проблемы были выявлены у учащихся 10-го класса естественно-научного профиля ГОУ «Физико-математический лицей-интернат» Республики Коми (ФМЛИ) [13].

Для повышения математических знаний студентов и уровня предметной подготовки будущих учителей в СГУ использовалась авторская методическая система обучения по дисциплине «Элементарные функции в школьном курсе математики», предполагающая использование комплексного дидактического подхода. Для этого были разработаны учебно-методическое пособие, электронный курс по предмету, система компьютерных тестов и кейсов для организации занятий [4, 13]. Некоторые составляющие учебно-методического комплекса, предложенного одним из авторов статьи, были успешно внедрены в образовательный процесс ФМЛИ г. Сыктывкар.

Использование элементов математического анализа для исследования свойств функций в образовательном процессе 10-х класса ФМЛИ предусмотрено во втором учебном полугодии. В классах естественно-научного профиля школьники обучаются по программе математики базового уровня с дополнительными занятиями в рамках практикума по решению задач. В 2017/18 учебном году с учащимися 10 «В» класса ФМЛИ после изучения темы «Применение производной для исследования функций» была проведена контрольная работа, один из вариантов которой приведён ниже (рис. 1). После анализа результатов оказалось, что средний балл учащихся составил 3,10 по пятибалльной шкале оценок. В дальнейшем

авторы проводили специальные исследования. Для выделения ключевых заданий контрольной работы была определена теснота связей между задачами с помощью *t*-критерия Стьюдента [10, 14]. В табл. 1 приведена матрица эмпирических значений *t*-критерия, вычисленных с использованием MS Excel. Поскольку указанная матрица является симметричной относительно главной диагонали, то табл. 1 заполнена ее

элементами лишь наполовину. При этом полученные значения, большие чем 1,96, обеспечивающие при исследовании достоверность результата на уровне 95%, выделены серой «заливкой» и выражают тесные связи между задачами. Следует отметить, что элементы матрицы (см. табл. 1) использованы для построения специальной круговой диаграммы сильных связей между заданиями проверочной работы (рис. 2).

Контрольная работа № 6
Вариант 1

Задания 1, 2: исследуйте функцию по предложенной схеме и постройте её график.
1) $y = 1,5x^4 + 8x^3 + 12x^2$; 2) $y = (3 - x^2)/(x + 2)$.

Схема исследования:

- а) найдите область определения функции и исследуйте её чётность / нечётность;
- б) найдите точки пересечения графика функции с координатными осями;
- в) найдите асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные);
- г) исследуйте функцию на монотонность и найдите точки экстремума;
- д) исследуйте функцию на выпуклость / вогнутость и найдите точки перегиба;
- е) вычислите дополнительные значения функции, постройте график и найдите область значений функции.

Задание 3: а) составьте математическую модель предложенной задачи;
б) решите задачу с использованием производной функции.

Задача. Необходимо изготовить **открытый** бак в форме прямоугольного параллелепипеда ёмкостью 486 м³. Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала, если стороны его основания соотносятся как 1:3?

Рис. 1. Вариант контрольной работы по теме «Применение производной для исследования функций»

Т а б л и ц а 1

Значения <i>t</i> -критерия Стьюдента														
	1а	1б	1в	1г	1д	1е	2а	2б	2в	2г	2д	2е	3а	3б
1а		1,31	1,31	3,80	0,00	3,80	5,05	1,26	3,80	0,00	4,04	7,81	10,11	11,45
1б			1,67	3,14	0,63	2,18	3,11	0,62	3,14	0,32	3,11	4,15	5,05	5,30
1в				0,59	2,97	0,29	0,59	2,94	0,29	2,94	1,50	0,66	2,38	2,50
1г					1,22	1,38	4,58	0,61	1,47	0,61	1,48	4,18	4,13	4,12
1д						0,59	1,18	4,60	0,61	1,51	0,64	1,31	2,24	3,13
1е							1,53	2,76	0,24	3,71	0,24	2,35	0,63	1,48
2а								1,55	2,26	0,53	0,44	3,20	4,11	5,12
2б									3,30	4,68	2,04	1,15	2,11	3,04
2в										0,80	1,11	2,21	4,75	4,73
2г											0,53	2,26	2,27	3,19
2д												1,39	0,41	0,53
2е													0,62	0,63
3а														7,61
3б														

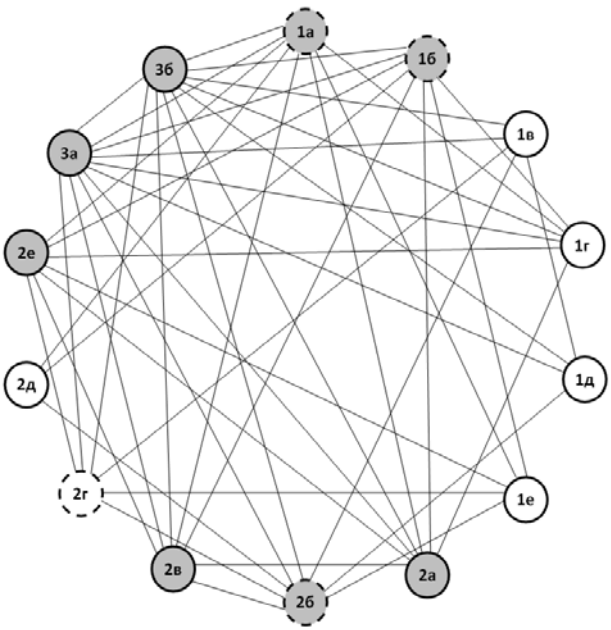


Рис. 2. Диаграмма сильных связей между заданиями контрольной работы

Построение и тщательный анализ диаграммы сильных связей – важные звенья педагогического эксперимента; пренебрежение такой работой в силу её трудоёмкости может приводить к ошибочным результатам [14]. На рис. 2 сильные связи между заданиями изображены сплошными линиями. Упражнения, имеющие наибольшее количество сильных связей (7 и более), выделены серыми кружочками. Кружочки с пунктирными границами соответствуют таким заданиям, при выполнении которых средний балл учащихся составил 4 и более (высокий уровень знаний). Ключевыми задачами приведенной контрольной работы являются упражнения, имеющие наибольшее число сильных связей и при этом невысокий средний балл при их выполнении [10, 11]. В нашем случае (см. рис. 2) это задачи 2а, 2в, 2е, 3а, 3б.

При анализе круговой диаграммы особое внимание следует обратить на примеры, имеющие наибольшее число связей с другими упражнениями и заданиями проверочной работы и низкий средний балл при выполнении учащимися. Такие задачи в определенном смысле являются «резервными»: если при проведении консультации или повторении учебного материала им уделить специальное внимание, то это, как показали многочисленные эксперименты (см., например [10, 11, 14]), позволит улучшить результаты выполнения не только выделенных заданий, но и тех задач, с которыми они имеют сильные связи. Как следствие, повысится качество выполнения учащимися всей контрольной работы в целом. Поэтому задачи 2а, 2в, 2е, 3а, 3б в указанном смысле можно назвать ключевыми (значимыми) в проверочной работе, именно они определяют потенциальные резервы и, при добросовестной подготовке, дальнейший успех в повышении результатов учащихся по теме «Применение производной для исследования функций».

В целях проверки значимости выявленных ключевых упражнений контрольной работы для школьников была проведена специальная консультация; предварительно авторы выделили элементарные составляющие заданий (см. табл. 2) и составили структурно-логическую схему контрольной работы, представленную на рис. 3. На данной схеме каждому заданию сопоставлены элементарные составляющие из табл. 2, стрелками соединены об-

щие компоненты упражнений, что позволяет выявить между ними внутрипредметные связи.

Известно, что процесс решения конкретной математической задачи состоит из некоторой последовательности операций. При этом порядок выполнения действий зависит от алгоритма, разбивающего математическое задание пошагово на элементарные составляющие. Указанное разбиение задач и упражнений на простейшие составляющие элементы при разработке контрольных и расчетных заданий, с одной стороны, позволяет учесть запланированные дидактические цели и обязательные требования рабочей программы, а с другой стороны, на промежуточных этапах образовательного процесса своевременно обнаруживать пробелы в знаниях обучаемых.

Структурно-логическая схема позволяет выявить внутрипредметные связи между заданиями контрольной работы. Исследователи подчеркивают значимую роль внутрипредметных связей [11, 12], в частности, оказывающих серьезное влияние на достижение развивающей и обучающей целей в учебном процессе и позволяющих сокращать временные затраты. В нашем случае нетрудно заметить (см. рис. 3), что в двух заданиях контрольной работы есть элементарная составляющая № 1 (область определения функции), а в четырех – № 2 (тождественные преобразования выражений). Следовательно, при анализе ошибок учащихся преподавателю необходимо не только подробно решить задачи, аналогичные ключевым примерам, но и уделить особое внимание проблемным моментам. Ключевые задачи способствуют выявлению конкретных пробелов в знаниях школьников. Наличие относительно небольшого количества ключевых заданий позволяет провести важную педагогическую работу с минимальными временными затратами.

Повторный срез знаний учащихся 10-го класса ФМЛИ, проведенный одним из авторов статьи после консультации, показал, что средний балл школьников вырос на 0,71 и составил 3,81 балла. На рис. 4 представлена диаграмма средних баллов учащихся по каждому из предложенных заданий первой и второй контрольных работ. Следует отметить улучшение результатов фактически по всем задачам, кроме того, существенно увеличилось количество выполненных заданий со средним баллом 4 и выше.

Т а б л и ц а 2

Элементарные составляющие заданий контрольной работы

№ п/п	Элементарные составляющие	Задания
1	Область определения функции	1а, 1б, 1г, 1д, 1е, 2а, 2б, 2г, 2д, 2е
2	Тождественные преобразования выражений	1а, 1б, 1г, 2а, 2в, 2г, 3а, 3б
3	Чётность / нечётность функции	1а, 2а
4	Вычисление значений выражений	1б, 1е, 2б, 2г, 2е
5	Решение квадратных уравнений	1б, 1г, 1д, 2б, 2г
6	Вычисление предела функции на бесконечности	1в, 2в
7	Асимптоты функции	1в, 2в
8	Нахождение производной по таблице производных элементарных функций и правилам дифференцирования	1г, 1д, 2г, 2д, 3б
9	Исследование монотонности функции с помощью производной	1г, 2г, 3б
10	Точки экстремума функции	1г, 2г, 3б
11	Исследование выпуклости функции с помощью производной второго порядка	1д, 2д
12	Точки перегиба функции	1д, 2д
13	Построение графика по точкам и свойствам функции	1е, 2е
14	Вычисление предела функции в точке	2в
15	Нахождение производной сложной функции	2д
16	Использование формул для нахождения объёма и площади поверхности прямоугольного параллелепипеда	3а
17	Составление математической модели задачи	3а

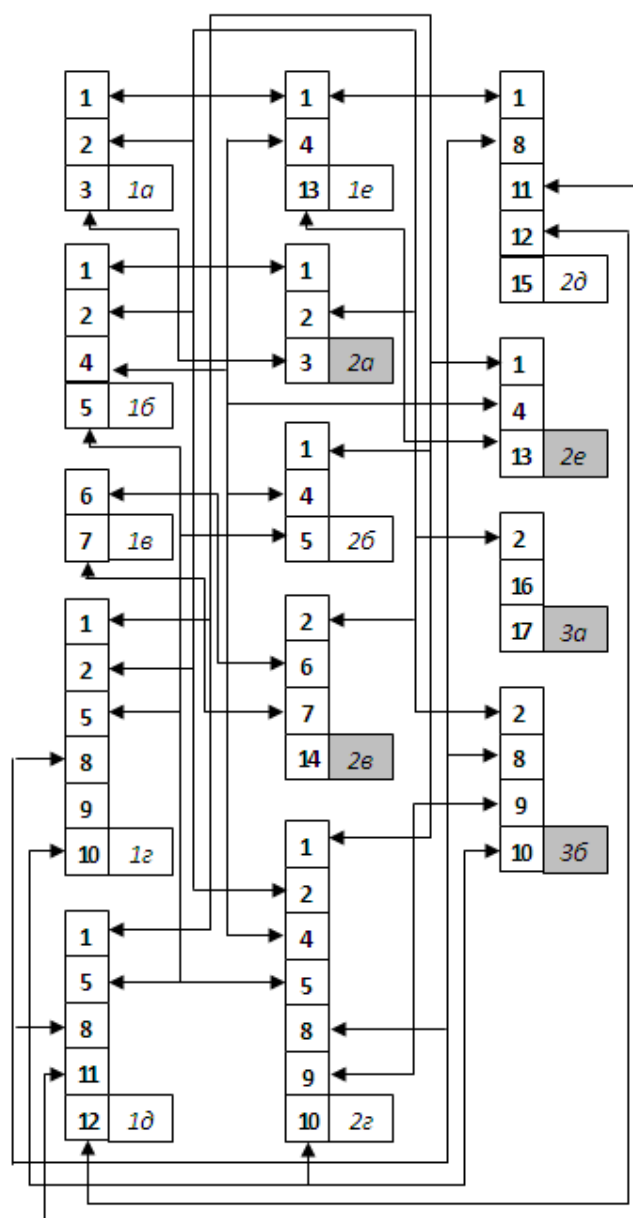


Рис. 3. Структурно-логическая схема контрольной работы

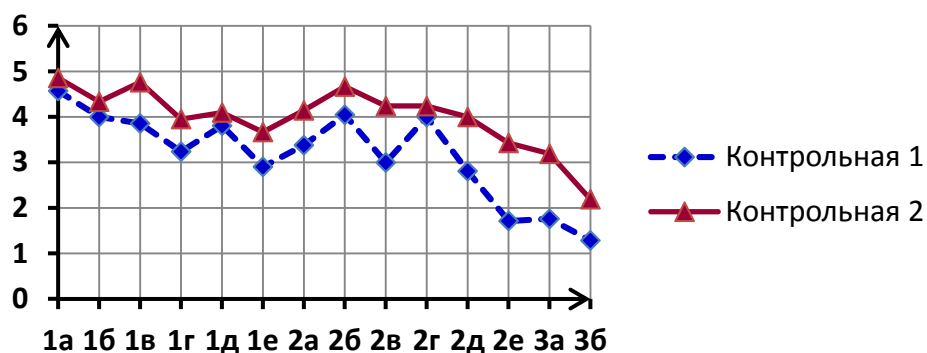


Рис. 4. Диаграмма средних баллов по выполненным заданиям контрольных работ

Для оценки значимости различий между результатами контрольных работ школьников был использован t -критерий Стьюдента для связанных выборок и выдвинута нулевая гипотеза о статистической незначимости различий в средних баллах выполненных зада-

ний контрольных срезов. По результатам исследования получено эмпирическое значение $t_{\text{эмп}} = 2,77$, а также критическое значение для уровня значимости $\alpha = 0,05$, равное $t_{\text{кр}} = 2,09$, при этом оказалось, что $t_{\text{эмп}} > t_{\text{кр}}$. Следовательно, выдвинутая нулевая гипотеза

отвергается и принимается альтернативная гипотеза о значимости различий в средних баллах учащихся. Таким образом, проведенное исследование подтвердило, что выявление ключевых заданий и упражнений контрольных работ по алгебре позволяет при минимальных временных затратах повысить уровень математических знаний и эффективность обучения школьников.

При проведении педагогического эксперимента мы существенным образом опирались на диагностико-технологический подход для выявления ключевых заданий в системах математических упражнений и задач. Экспериментальная работа в очередной раз подтвердила, что указанные задания имеют значимые связи с другими задачами различных проверочных

работ и тестов, следовательно, ключевым примерам и задачам необходимо уделять пристальное внимание в педагогической работе с учащимися. Следует также отметить, что специальные круговые диаграммы сильных связей между примерами и задачами позволяют наглядно проиллюстрировать: именно на какие конкретные задания педагог-предметник должен обратить особое внимание на математических консультациях и при повторении изученного материала с обучаемыми. Полагаем, что предложенный диагностико-технологический подход, реализованный при обучении математике школьников и студентов, в своей педагогической деятельности могут успешно использовать, в частности, преподаватели химии и физики в вузе и общеобразовательной школе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 г., № 1897 (с изменениями на 31.12.2015 года) // Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/902254916/>
2. Лихтарников Л.М., Поволоцкий А.И. Основы математического анализа. Книга для учителей математики старших классов средних школ. СПб.: Лань, 1997. 304 с.
3. Покровский В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия: учеб.-метод. пособие. Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. 143 с.
4. Шустова Е.Н. Методика изложения курса «Теория элементарных функций» // Вестник Коми государственного педагогического института. 2010. № 8. С. 268–270.
5. Гриншпон И.Э., Гриншпон Я.С. Элементарные функции и их графики: учеб. пособие. Томск: Изд-во Том. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, 2011. 52 с.
6. Зеель Э.О. Элементарные функции. Архангельск: ПГУ, 2005. 180 с.
7. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы (базовый уровень): метод. пособие для учителя. М.: Мнемозина, 2010. 202 с.
8. Григорьев С.Г., Подболотова М.И. Моделирование углубленной профессионально-ориентированной практики магистрантов в условиях модульного обучения и сетевого взаимодействия по направлению подготовки «Педагогическое образование» // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. 2015. № 2 (32). С. 8–25.
9. Монахов В.М. Введение в теорию педагогических технологий. Волгоград: Перемена; ВГПУ, 2006. 318 с.
10. Попов Н.И. Диагностико-технологический подход для выделения ключевых примеров в системах математических задач // Вестник Сургутского государственного педагогического университета. 2017. № 5 (50). С. 107–112.
11. Попов Н.И., Марасанов А.Н. О выявлении внутрипредметных связей при изучении тригонометрии // Наука и школа. 2009. № 5. С. 37–39.
12. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Реализация внутрипредметных связей при решении математических задач посредством когнитивно-визуальной деятельности: учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2013. 195 с.
13. Попов Н.И., Шустова Е.Н. Об эффективности использования методических подходов при изучении элементарных функций будущими учителями математики // Вестник Омского государственного педагогического университета. Гуманитарные исследования. 2018. № 1 (18). С. 139–144.
14. Попов Н.И. Фундаментализация университетского математического образования. Йошкар-Ола: МарГУ, 2012. 135 с.

Статья представлена научной редакцией «Педагогика» 3 марта 2020 г.

Key Tasks as a Means of Advancing Schoolchildren's Mathematical Knowledge When Learning Elementary Functions

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal, 2020, 454, 203–208.

DOI: 10.17223/15617793/454/24

Nikolay I. Popov, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University (Syktyvkar, Russian Federation). E-mail: popovnikolay@yandex.ru

Elena N. Shustova, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University (Syktyvkar, Russian Federation). E-mail: shustovaen@yandex.ru

Keywords: pedagogical experiment; study of elementary functions; application of derived functions; training of schoolchildren in mathematics; key tasks.

The article presents the results of a pedagogical experiment on the study of the effectiveness of a diagnostic and technological approach for identifying key tasks of mathematical problem systems. The authors focus on the functional substantive line of studying mathematics—one of the main lines in the school course, since it helps to achieve not only subject but also meta-subject learning goals, as well as to develop schoolchildren's personalities. The authors note that many professors of schools and higher education institutions draw attention to schoolchildren's insufficient knowledge on the topic "Elementary Functions". Undoubtedly, modern professors must master information and communication technologies, innovative methods of developmental teaching so as to overcome this drawback. The aim of this research was to test the effectiveness of the above-mentioned authorial approach in order to advance the knowledge of Grade 10 schoolchildren on the topic "Applying Derivatives to Analyze Functions". After studying the topic, the schoolchildren had a test on it. The performance was graded on a scale from 1 to 5. The average score was 3.10. The tightness of links between the exercises of the system of mathematical problems was determined using the t-criterion, and five key tasks out of the fourteen proposed were singled out. The key tasks determine the successfulness of schoolchildren's learning; practicing various skills of solving key tasks significantly improves the results of solving other tasks of the test. An important component of the proposed approach is working out a logical structural scheme of elementary components of mathematical problems, which makes it possible to identify problematic issues common to all schoolchildren. In order to verify the importance of key tasks and to increase

the level of schoolchildren's mathematical knowledge, a special tutorial on solving the singled-out key tasks was organized; it preceded the second test. As a result, in the second test, the schoolchildren's average score increased and reached 3.81. The use of the Student's criterion in the analysis of the results made it possible to draw the conclusion about the statistical significance of the differences in the average scores on the tasks of the test. The conducted pedagogical experiment showed the effectiveness of the suggested diagnostic and technological approach. Thus, the identification of key tasks and exercises in tests on algebra does not appear very time-consuming and makes it possible to significantly increase schoolchildren's mathematical knowledge.

REFERENCES

1. Docs.cntd.ru. (2015) *Federal State Educational Standard of Basic General Education: Order of the Ministry of Education and Science of Russia No. 1897 of December 17, 2010 (As Amended on December 31, 2015)*. [Online] Available from: <https://docs.cntd.ru/document/902254916/>
2. Likhtarnikov, L.M. & Povolotskiy, A.I. (1997) *Osnovy matematicheskogo analiza. Kniga dlya uchiteley matematiki starshikh klassov srednikh shkol* [Fundamentals of Mathematical Analysis. A Book for High School Math Teachers]. St. Petersburg: Lan'.
3. Pokrovskiy, V.P. (2014) *Metodika obucheniya matematike: funktsional'naya soderzhatel'no-metodicheskaya liniya* [Methods of Teaching Mathematics: Functional Content and Methodology]. Vladimir: Izd-vo VIGU.
4. Shustova, E.N. (2010) Metodika izlozheniya kursa "Teoriya elementarnykh funktsiy" [The Methodology of the Course "Theory of Elementary Functions"]. *Vestnik Komi gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta*. 8. pp. 268–270.
5. Grinshpon, I.E. & Grinshpon, Ya.S. (2011) *Elementarnye funktsii i ikh grafiki* [Elementary Functions and Their Graphs]. Tomsk: Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics.
6. Zeel', E.O. (2005) *Elementarnye funktsii* [Elementary Functions]. Arkhangelsk: Pomor State University.
7. Mordkovich, A.G. & Semenov, P.V. (2010) *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10–11 klassy (bazovyy uroven')* [Algebra and the Principles of Mathematical Analysis. Grades 10–11 (Basic Level)]. Moscow: Mnemozina.
8. Grigor'ev, S.G. & Podbolotova, M.I. (2015) Modeling Extended Profession-Oriented Practice of Master's Students in Conditions of Modular Training and Networking Interaction in Direction of Training "Pedagogical Education". *Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya: Informatika i informatizatsiya obrazovaniya – Vestnik of Moscow City Teacher Training University. Series: Informatics and Informatization of Education*. 2 (32). pp. 8–25. (In Russian).
9. Monakhov, V.M. (2006) *Vvedenie v teoriyu pedagogicheskikh tekhnologiy* [Introduction to the Theory of Educational Technologies]. Volgograd: Peremena; Volgograd State Pedagogical University.
10. Popov, N.I. (2017) Diagnostic and Technological Approach for Emphasizing Key Examples in Systems of Mathematical Problems. *Vestnik Surgutskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – Surgut State Pedagogical University Bulletin*. 5 (50). pp. 107–112. (In Russian).
11. Popov, N.I. & Marasanov, A.N. (2009) On the Identification of Intrasubject Relationships in the Study of Trigonometry. *Nauka i shkola*. 5. pp. 37–39. (In Russian).
12. Dalingier, V.A. & Simonzhenkov, S.D. (2013) *Realizatsiya vnutripredmetnykh svyazey pri reshenii matematicheskikh zadach posredstvom kognitivno-vizual'noy deyatel'nosti* [The Implementation of Intra-Subject Relationships in Solving Mathematical Problems Through Cognitive-Visual Activity]. Omsk: Omsk State Pedagogical University.
13. Popov, N.I. & Shustova, E.N. (2018) On the Efficiency of Using Methodological Approaches in Studying Elementary Functions by Future Teachers of Mathematics. *Vestnik Omskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Gumanitarnye issledovaniya – Review of Omsk State Pedagogical University. Humanitarian Research*. 1 (18). pp. 139–144. (In Russian).
14. Popov, N.I. (2012) *Fundamentalizatsiya universitetskogo matematicheskogo obrazovaniya* [Fundamentalization of University Mathematical Education]. Yoshkar-Ola: Mari State University.

Received: 03 March 2020