ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Управление, вычислительная техника и информатика № 51

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.93+519.87
DOI: 10.17223/19988605/51/1

Е.А. Перепелкин

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Решена задача синтеза системы управления в виде пропорционально-интегральной обратной связи для дискретной марковской системы массового обслуживания. Проведен анализ асимптотической устойчивости и робастности системы с управлением. Приведены результаты моделирования.
Ключевые слова: дискретная система массового обслуживания; перегрузка; робастное управление.

Управляемые системы массового обслуживания являются объектом исследования в течение нескольких десятилетий [1–4]. В последние годы появились новые задачи управления системами с очередями, связанные с предотвращением перегрузок в компьютерных сетях. При решении этих задач нашли применение методы теории автоматического управления. Например, в системах с активным управлением очередью TCP-пакетов применяется управление в виде ПИ и ПИД регуляторов [5–8], управление, оптимальное по критерию H_∞ [9].Управление в этих системах осуществляется отклонением поступающих пакетов. Пакеты отклоняются с некоторой вероятностью, значение которой определяется системой управления.

Данная работа является продолжением работы [10], в которой было предложено решение задачи управления состоянием непрерывной системы массового обслуживания с применением пропорционально-интегральной обратной связи. Описанный в ней подход распространяется на случай дискретных по времени марковских систем обслуживания.

Под состоянием системы понимается число заявок в системе в текущий момент времени. Задача управления заключается в поддержании заданного среднего значения числа заявок в системе. Управление, как и в компьютерных сетях с активным управлением очередью TCP-пакетов, осуществляется отклонением поступающих заявок. Вероятность отклонения заявок рассчитывается в процессе функционирования системы.

Предполагается, что вероятность поступления заявки, вероятность завершения обработки заявки неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы. Предполагается также, что система функционирует в условиях перегрузки, когда вероятность поступления заявки больше вероятности завершения обработки заявки.

В работе проведен анализ асимптотической устойчивости и робастности системы с управлением в виде обратной связи. Приведены результаты моделирования системы с управлением.

1. Математическая модель объекта управления

Введем обозначения: v – вероятность поступления заявки; w – вероятность завершения обработки заявки; $u(k)$ – вероятность отклонения заявки; n – допустимое число заявок в системе; $p_i(k)$ – вероятность нахождения системы в состоянии $i = 0,1,...,n$ в момент времени $k = 0,1,2,...$. Будем считать, что значения v и w неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы. Будем также считать, что система функционирует в условиях перегрузки: $v > w$.

Среднее значение числа заявок в системе в момент времени k равно

$$y(k)=\sum_{i=1}^{n} ip_i(k).$$

Задача управления заключается в обеспечении заданного среднего значения числа заявок

$$y(k)=\bar{y}, \quad 0<\bar{y}<n.$$

Объект управления является конечной цепью Маркова и может быть описан системой уравнений Колмогорова [11]:

$$p(k+1)=Ap(k)+Bp(k)u(k), \quad y(k)=cp(k), \quad ep(k)=1, \tag{1}$$

где

$$p(k)=\begin{bmatrix} p_0(k) \\ p_1(k) \\ \vdots \\ p_{n-1}(k) \\ p_n(k) \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} 1-v & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ v & a_0 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 & w \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 & 1-w \end{bmatrix},$$

$$a_0=(1-v)(1-w)+vw, \quad a_1=(1-v)w, \quad a_2=v(1-w),$$

$$B=\begin{bmatrix} v & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -v & b_0 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_0=v(1-w)-vw, \quad b_1=vw, \quad b_2=-v(1-w),$$

$$c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}, \quad e=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача синтеза управления в виде обратной связи по выходу для системы (1) является сложной математической задачей, поскольку это билинейная система высокого порядка с неизвестными параметрами. Покажем, что можно перейти к более простому описанию объекта управления в виде разностного уравнения первого порядка с неопределенным параметром и возмущением.

Справедливы равенства

$$cA=\begin{bmatrix} v & 1+v-w & 2+v-w & \dots & n-1+v-w & n-w \end{bmatrix},$$

$$cB=\begin{bmatrix} -v & -v & \dots & -v & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$y(k+1)=cAp(k)+c\big(Bp(k)\big)u(k)=$$

$$=y(k)-v\big(1-p_n(k)\big)u(k)+v\big(1-p_n(k)\big)-w\big(1-p_0(k)\big).$$

Таким образом, динамика среднего числа заявок в системе описывается уравнением

$$y(k+1)=y(k)+au(k)+b, \tag{2}$$

где

$$a=-v\big(1-p_n(k)\big), \quad b=v\big(1-p_n(k)\big)-w\big(1-p_0(k)\big).$$

Уравнение (2) будем рассматривать как уравнение системы с неопределенным параметром a и неконтролируемым внешним возмущением b.

2. Алгоритм управления

Управление для системы (2) будем строить в виде пропорционально-интегральной обратной связи

$$u(k)=k_p\tilde{y}(k)+k_i s(k), \quad s(k+1)=s(k)+\tilde{y}(k), \tag{3}$$

где $\tilde{y}(k)=\dfrac{y(k)-\overline{y}}{\overline{y}}$ – относительное отклонение среднего значения числа заявок в системе от заданного значения $\overline{y}$, k_p, k_i – коэффициенты обратной связи.

Замкнутая обратной связью система описывается уравнениями

$$\tilde{y}(k+1)=\left(1+\frac{a}{\overline{y}}k_p\right)\tilde{y}(k)+\frac{a}{\overline{y}}k_i s(k)+\frac{b}{\overline{y}}, \quad s(k+1)=s(k)+\tilde{y}(k). \tag{4}$$

Характеристический полином замкнутой системы равен

$$\Delta(z)=z^2+d_1 z+d_2, \quad d_1=-\frac{a}{\overline{y}}k_p-2, \quad d_2=\frac{a}{\overline{y}}(k_p-k_i)+1. \tag{5}$$

Система (4) является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда корни характеристического полинома (5) лежат внутри круга единичного радиуса $|z|<1$.

Заметим, что из асимптотической устойчивости системы (4) следует

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{y}(k)=0, \quad \lim_{k\to\infty}y(k)=\overline{y},$$

что и требуется для решения задачи управления состоянием системы (1).

Запишем условия асимптотической устойчивости в параметрическом виде. Известно [12], что корни полинома второго порядка лежат внутри круга единичного радиуса тогда и только тогда, когда

$$1+d_1+d_2>0, \quad 1-d_2>0, \quad 1-d_1+d_2>0. \tag{6}$$

Из неравенств (6) получим условия, накладываемые на коэффициенты обратной связи:

$$-\frac{a}{\overline{y}}k_i>0, \quad -\frac{a}{\overline{y}}(k_p-k_i)>0, \quad 4+2\frac{a}{\overline{y}}k_p-\frac{a}{\overline{y}}k_i>0. \tag{7}$$

Для параметра a справедливо неравенство $-1<a<0$. Следовательно, неравенства (7) выполняются тогда и только тогда, когда

$$k_p>k_i>0. \tag{8}$$

Условие (8) есть необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости системы (4). Заметим, что условие (8) не зависит от параметров объекта управления v, w, n. Следовательно, система с обратной связью обладает свойством робастности.

3. Пример

Расчеты и имитационное моделирование проводились для систем с параметрами

$$v=0{,}5;\ w=0{,}3;\ n=400,$$

$$v=0{,}7;\ w=0{,}5;\ n=300.$$

Пусть желаемое среднее значение числа заявок в системе $\overline{y}=200$. Зададим коэффициенты обратной связи равными $k_p=30$, $k_i=0{,}1$.

Сначала решим систему уравнений расширенной замкнутой системы. Эта система уравнений состоит из системы уравнений Колмогорова (1) и уравнений обратной связи (3). На рис. 1, 2 показаны график среднего значения числа заявок в системе и график управления. Расчеты проводились при начальных условиях: $p_i(0)=0$, $i=0,1,2,...,n$, $i\neq 221$, $p_{221}(0)=1$, $s(0)=0$.

Затем выполним имитационное моделирование. На рис. 3, 4 показаны результаты моделирования, полученные при начальном числе заявок в системе, равном 221.

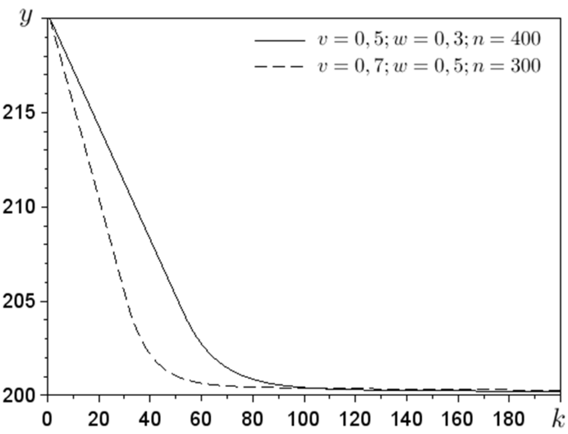


Рис. 1. Среднее значение числа заявок в системе (1), (3)
Fig. 1. Average value of the number of requests in the system (1), (3)

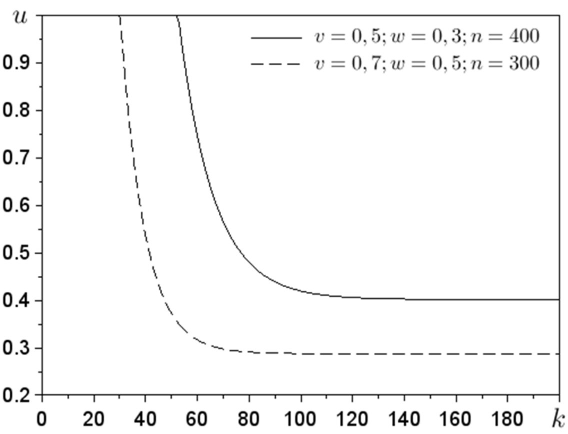
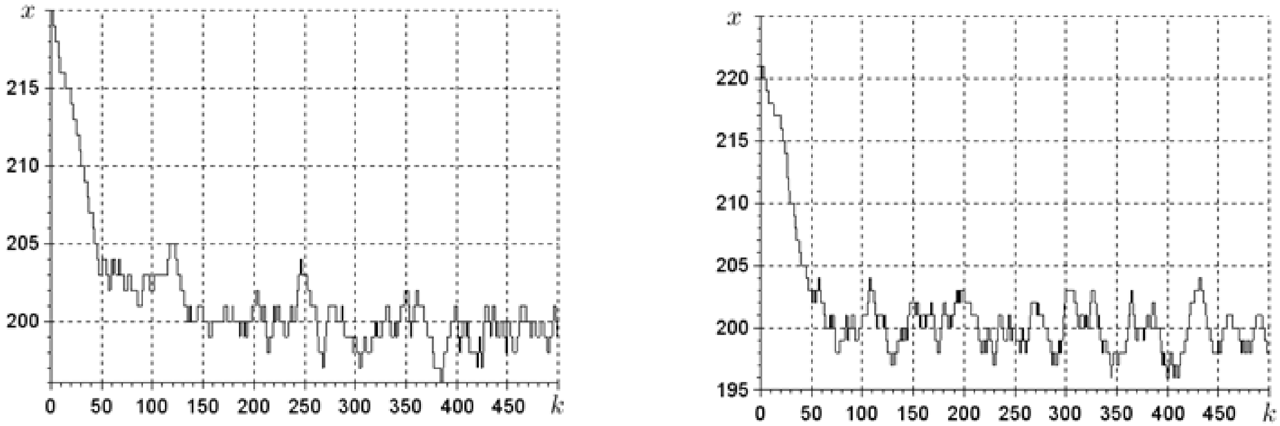


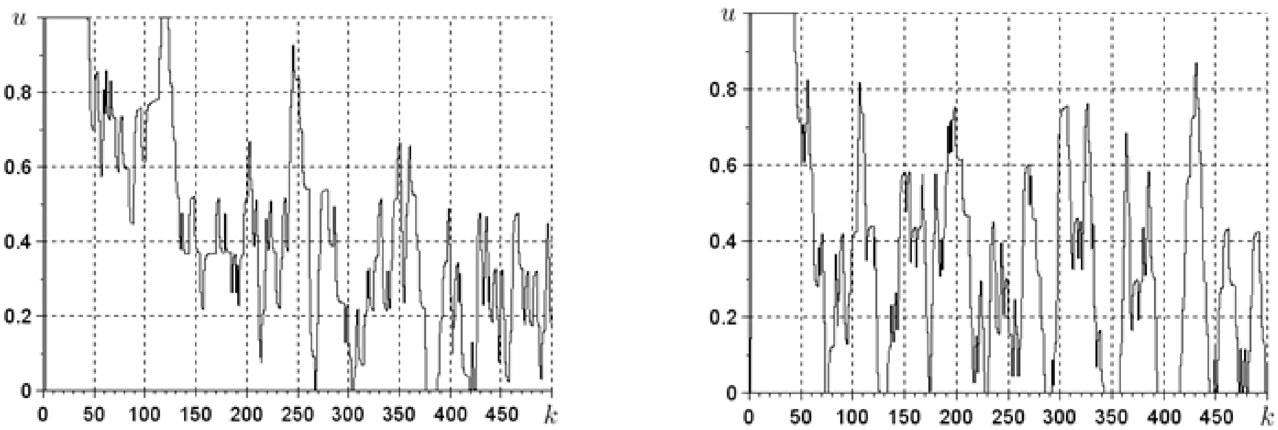
Рис. 2. Управление в системе (1), (3)
Fig. 2. Control in the system (1), (3)



a *b*

Рис. 3. Число заявок в системе: $a - \ v = 0,5; w = 0,3; n = 400$; $b - \ v = 0,7; w = 0,5; n = 300$

Fig. 3a. The quantity of requests in the system: $a - \ v = 0,5; w = 0,3; n = 400$; $b - \ v = 0,7; w = 0,5; n = 300$



a *b*

Рис. 4. Вероятность отклонения заявки в системе: $a - \ v = 0,5; w = 0,3; n = 400$; $b - \ v = 0,7; w = 0,5; n = 300$

Fig. 4. Probability of rejection of the request in the system: $a - \ v = 0,5; w = 0,3; n = 400$; $b - \ v = 0,7; w = 0,5; n = 300$

При моделировании для оценки среднего числа заявок в системе применялся экспоненциальный фильтр первого порядка

$$\hat{y}(k+1) = \alpha x(k) + (1-\alpha)\hat{y}(k),$$

где $x(k)$ – наблюдаемое число заявок в системе в момент времени k, $\hat{y}(k)$ – оценка среднего значения числа заявок в системе в момент времени k, α – параметр фильтра. Значение параметра фильтра было выбрано равным 0,7.

Результаты расчетов и моделирования подтверждают свойство робастности системы с обратной связью.

Заключение

В работе решена задача синтеза системы управления в виде пропорционально-интегральной обратной связи для дискретной марковской системы массового обслуживания. Проведен анализ асимптотической устойчивости и робастности системы с обратной связью. Представлены результаты расчетов и моделирования, которые подтверждают возможность применения предложенной системы управления в системах массового обслуживания, функционирующих в условиях перегрузки.

Предложенная в работе система управления может быть использована в системах передачи и обработки данных. Например, в компьютерных сетях с активным управлением очередью пакетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А. Управляемые системы массового обслуживания и их оптимизация. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1984. 234 с.
2. Sennott L.I. Stochastic dynamic programming and the control of queuing systems. John Wiley & Sons, 1999. 328 p.
3. Миллер А.Б. Предотвращение перегрузок в сетях передачи данных с помощью методов стохастического управления // Автоматика и телемеханика. 2010. № 9. С. 70–82.
4. Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В. Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 111–130.
5. Alvarez T., Heras H., Reguera J. Controller Design for Congestion Control: Some Comparative Studies // Proc. of the World Congress on Engineering, London, U.K. 2014. V. II. P. 756–772.
6. Bisoy S.K., Pattnaik P.K. Design of feedback controller for TCP/AQM networks // Engineering Science and Technology : an International Journal. 2017. V. 20. P. 116–132.
7. Hamidian H., Beheshti M. A robust fractional-order PID controller design based on active queue management for TCP network // International Journal of Systems Science. 2018. V. 49 (1). P. 211–216.
8. Перепелкин Е.А. Робастный регулятор системы управления длиной очереди пакетов в буфере маршрутизатора // Ползуновский альманах. 2019. № 4. С. 44–46.
9. Fezazi N.E., Haoussi F.E., Tissir E.H., Alvarez T. Design of robust H_∞ controllers for congestion control in data networks // J. of the Franklin Institute. 2017. V. 354, No. 17. P. 7828–7845.
10. Перепелкин Е.А. Робастное управление системой массового обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 49. С. 23–28.
11. Breuer L., Baum D. An Introduction to Queueing Theory and Matrix-Analytic Methods. Springer, 2005. 271 p.
12. Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М. : Мир, 1987. 480 с.

Поступила в редакцию 12 октября 2019 г.

Perepelkin E.A. (2020) ROBUST CONTROL OF DISCRETE-TIME QUEUING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika I informatika* [Tomsk State University Jorunal of Control and Computer Science]. 51. pp. 4–9

DOI: 10.17223/19988605/51/1

We consider the discrete-time queuing system as a control object. Control problem consists in providing a desired system state. The system state is defined as the number of requests in the system. The number of requests in the system is controlled by rejection of arriving requests with some probability.

It is assumed that, the probability of arrival and the probability of service completion of request are unknown and may change during the operation of the system. It is also assumed that the system operates under congestion conditions when the probability of arrival greater than the probability service completion of request.

The control system should have a type of feedback and should have property of robustness in relation to change of parameters of a control object and the entering flow of requests.

The control object as a finite Markov chain is described by the system of Kolmogorov equations

$$p(k + 1) = Ap(k) + (Bp(k))u(k), \quad y(k) = cp(k),$$

where A, B, c are system matrices, y is the average number of requirements in the system, u is control signal. This is a bilinear system with restrictions on the state and control variables. Analysis of this system has shown that it is possible to proceed to a simpler description of the control object in the form of a first-order difference equation with uncertain parameters

$$y(k + 1) = y(k) + au(k) + b.$$

It is proposed to apply the classical proportional-integral feedback to solve the problem of controlling the state of this system.

We have investigated the conditions of stability and robustness of the system with control. The results of numerical experiments and simulation confirm the possibility of using the proposed control in queuing systems operating under congestion conditions.

Keywords: discrete-time queuing system; congestion; robust control.

PEREPELKIN Evgenii Alexandrovich (Doctor of Technical Science, Professor, Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation).
E-mail: eap@list.ru

REFERENCES

1. Nazarov, A.A. (1984) *Upravlyaemye sistemy massovogo obsluzhivaniya i ikh optimizatsiya* [Controlled queuing systems and optimization]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Sennott, L.I. (1999) *Stochastic dynamic programming and the control of queuing systems*. John Wiley & Sons.
3. Miller, A.B. (2010) Using methods of stochastic control to prevent overloads in data transmission networks. *Automation and Remote Control*. 71(9). pp. 1804–1815. DOI: 10.1134/S0005117910090055
4. Miller, B.M., Miller, G.B. & Semenikhin, K.V. (2011) Methods to design optimal control of Markov process with finite state set in the presence of constraints. *Automation and Remote Control*. 72(2). pp. 323–341. DOI: 10.1134/S000511791102010X
5. Alvarez, T., Heras, H. & Reguera, J. (2014) Controller design for congestion control: some comparative studies. *Proc. of the World Congress on Engineering*. 2. pp. 756–772.
6. Bisoy, S.K. & Pattnaik, P.K. (2017) Design of feedback controller for TCP/AQM networks. *Engineering Science and Technology*. 20. pp. 116–132. DOI: 10.1016/j.jestch.2016.10.002
7. Hamidian, H. & Beheshti, M. (2018) A robust fractional-order PID controller design based on active queue management for TCP network. *International Journal of Systems Science*. 49(1). pp. 211–216. DOI: 10.1080/00207721.2017.1397801
8. Perepelkin, E.A. (2019) Robastnyy regulyator sistemy upravleniya dlinoy ocheredi paketov v bufere marshrutizatora [Robust controller of packet queue length in router buffer]. *Polzunovskiy al'manakh*. 4. pp. 44–46.
9. Fezazi, N.E., Haoussi, F.E., Tissir, E.H. & Alvarez, T. (2017) Design of robust H_∞ controllers for congestion control in data networks. *Journal of the Franklin Institute*. 354(17). pp. 7828–7845. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2017.09.026
10. Perepelkin, E.A. (2019) Robust controller of queuing system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 49. pp. 23–28. DOI: 10.17223/19988605/49/3
11. Breuer, L. & Baum, D. (2005) *An Introduction to Queuing Theory and Matrix-Analytic Methods*. Springer.
12. Astrem, K.J. & Wittenmark, B. (1987) *Sistemy upravleniya s EVM* [Computer Controlled Systems]. Translated from English. Moscow: Mir.