ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Управление, вычислительная техника и информатика № 51

УДК 517.977.52
DOI: 10.17223/19988605/51/2

Ш.М. Расулзаде

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И МНОГОТОЧЕЧНЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача оптимального управления с функционалом качества терминального типа. На основе одного варианта метода приращений в предположении выпуклости областей управления доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума. Отдельно изучен случай вырождения линеаризованного условия максимума и установлены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.
Ключевые слова: система с распределенными параметрами; метод приращений; линеаризованный принцип максимума; необходимое условие оптимальности; квазиособое управление; многоточечное необходимое условие оптимальности.

В работе [1] А.И. Москаленко рассмотрел одну задачу оптимального управления, которая может быть интерпретирована как задача оптимального управления системами с распределенными параметрами. Он доказал ряд необходимых условий оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. В предлагаемой работе аналогичная задача рассматривается в случае выпуклости областей управления. Доказан аналог линеаризованного условия максимума с помощью одного варианта метода приращений, предложенный в [2] и развитый в работах [3–6] и др. Довольно подробно исследуется также случай вырождения линеаризованного принципа максимума. Заметим, что случай вырождения необходимых условий оптимальности первого порядка встречается во многих задачах оптимального управления (см. напр.: [7–11]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u,v)=\varphi\left(y\left(x_1\right)\right)+\int_{t_0}^{t_1}G\left(x,z\left(t_1,x\right)\right)dx \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T=\left[t_0,t_1\right],\\ v(x)\in V\subset R^q,\quad x\in X=\left[x_0,x_1\right], \end{gathered} \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=f(t,x,z,u),\quad (t,x)\in D=T\times X\,, \tag{3}$$

$$z(t_0,x)=y(x),\quad x\in X\,, \tag{4}$$

$$\dot{y}=g(x,y,v),\quad x\in X\,, \tag{5}$$

$$y(x_0)=y_0\,. \tag{6}$$

Здесь $\varphi(y)$, $(G(x,z))$ – заданная непрерывная и дважды непрерывно дифференцируемая по y, (z) скалярная функция, U и V – заданные непустые ограниченные и выпуклые множества, $f(t,x,z,u)$ $(g(x,y,v))$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u) $((y,v))$ до второго порядка включительно, $u(t)$ $(v(x))$ – кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий, y_0 – заданный постоянный вектор. Пару $(u(t),v(x))$ с вышеперечисленными свойствами назовем допустимым управлением. Допустимое управление $(u(t),v(x))$, доставляющее минимальное значение функционалу (1), назовем оптимальным управлением.

2. Формула для приращения функционала качества

Пусть $(u^{\circ}(t),v^{\circ}(x))$ – фиксированное допустимое управление, а ($\bar{u}(t)=u^{\circ}(t)+\Delta u(t)$, $\bar{v}(x)=v^{\circ}(x)+\Delta v(x)$) – произвольное допустимое управление. Через $(z^{\circ}(t,x),y^{\circ}(x))$ $(\bar{z}(t,x)=$ $=z^{\circ}(t,x)+\Delta z(t,x),\bar{y}(x)=y^{\circ}(x)+\Delta y(x))$ обозначим соответствующие им решения задачи (3)–(6). Тогда ясно, что $(\Delta z(t,x),\Delta y(x))$ будет решением задачи

$$\frac{\partial \Delta z(t,x)}{\partial t}=f(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t))-f(t,x,z(t,x),u(t)),\quad (t,x)\in D, \tag{7}$$

$$\Delta z(t_0,x)=\Delta y(x), \tag{8}$$

$$\Delta\dot{y}(x)=g(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x))-g(x,y(x),v(x)),\quad x\in X, \tag{9}$$

$$\Delta y(x_0)=0. \tag{10}$$

Введем аналоги функции Гамильтона–Понтрягина

$$\begin{gathered} H(t,x,z,u,\psi^0)=\psi^{0'}f(t,x,z,u),\\ M(x,y,v,p^0)=p^{0'}g(x,y,v). \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $\psi^0(t,x),p^0(x)$ – произвольные n-мерные вектор функции. Учитывая (7), (9) получаем, что

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi^{0'}(t,x)\frac{\partial\Delta z(t,x)}{\partial t}dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi^{0'}(t,x,)\left(f(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t))-f(t,x,z(t,x),u(t))\right)dx\,dt,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}p^{0'}(x)\Delta\dot{y}(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}p^{0'}(x)\left(q(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x))-g(x,y(x),v(x))\right)dx. \tag{12}$$

Тогда соответствующие управлениям $(u^{\circ}(t),v^{\circ}(x))$, $(\bar{u}(t),\bar{v}(x))$ приращение функционала (1), принимая во внимание (10)–(12) можно записать в виде (используя формулу Тейлора):

$$\Delta I(u^{\circ},v^{\circ})=\varphi_y'(y^{\circ}(x_1))\Delta y(x_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(x_1)\varphi_{yy}(y^{\circ}(x_1))\Delta y(x_1)+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}G_z'(x,z^{\circ}(t_1,x))\Delta z(t_1,x)dx+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t_1,x)G_{zz}(x,z^{\circ}(t_1,x))\Delta z(t_1,x)dx+$$

$$+p'(x_1)\Delta y(x_1)-\int_{x_0}^{x_1}\dot{p}'(x)\Delta y(x)dx+\int_{x_0}^{x_1}\psi^{\circ}(t_1,x)\Delta z(t_1,x)dx-\int_{x_0}^{x_1}\psi^{\circ'}(t_0,x)\Delta z(t_0,x)dx-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\psi^{\mathrm{o}'}(t,x)}{\partial t}\Delta z(t,x)\,dx\,dt-\int_{x_0}^{x_1}M'_y\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta y(x)\,dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}M'_v\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta v(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta y'(x)M_{yy}\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta y(x)+$$

$$+2\Delta v'(x)M_{vy}\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta y(x)+\Delta v'(x)M_{vv}\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta v(x)\Big]-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_z\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_u\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta u(t)\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+2\,\Delta u'(t)H_{uz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta u'(t)H_{uu}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta u(t)\Big]dx\,dt+o_1\left(\left\|\Delta y(x_1)\right\|^2\right)+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}o_2\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)dx-\int_{x_0}^{x_1}o_5\left(\left[\left\|\Delta y(x)\right\|+\left\|\Delta v(x)\right\|\right]^2\right)dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_6\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right)dx\,dt. \qquad (13)$$

Здесь величины $o_5(\cdot)$, $o_6(\cdot)$ определяются соответственно из разложений

$$M\left(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)-M\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)=$$

$$=M'_y\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta y(x)+M'_v\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta v(x)+$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\Delta y'(x)M_{yy}\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta y(x)+\Delta v'(x)M_{vy}\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta y(x)+$$

$$+\Delta v'(x)M_{vv}\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta v(x)\Big]+o_5\left(\left[\left\|\Delta y(x)\right\|+\left\|\Delta v(x)\right\|\right]^2\right),$$

$$H\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)-H\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)=$$

$$=H'_z\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+H'_u\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta u(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+2\,\Delta u'(t)H_{uz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta u'(t)H_{uu}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta u(t)\Big]+o_6\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right).$$

Если предполагать, что вектор-функция $\left(\psi^{\mathrm{o}}(t,x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)$ является решением сопряженной системы

$$\frac{\partial\psi^{\mathrm{o}}(t,x)}{\partial t}=-H_z\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right),\ \psi^{\mathrm{o}}(t_1,x)=-\frac{\partial\left(z^{\mathrm{o}}(t,x)\right)}{\partial z},$$

$$\dot{p}^{\mathrm{o}}(x)=-M_y\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right),\ p^{\mathrm{o}}(x_1)=-\frac{\partial\varphi\left(y^{\mathrm{o}}(x_1)\right)}{\partial y},$$

то формула приращения функционала (13) качества (1) примет вид:

$$\Delta I\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=-\int_{x_0}^{x_1}M'_v\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta v(x)\,dx-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_u\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta u(t)\,dx\,dt+\frac{1}{2}\Delta y'(x_1)\varphi_{yy}\left(y^{\mathrm{o}}(x_1)\right)\Delta y(x_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta y'(x)M_{yy}\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),v^{\mathrm{o}}(x),p^{\mathrm{o}}(x)\right)\Delta y(x)+2\Delta v'(x)\times$$

$$\times M_{vy}\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x),p^{\circ}(x)\right)\Delta y(x)+\Delta v'(x)M_{vv}\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x),p^{\circ}(x)\right)\Delta v(x)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t_1,x)G_{zz}\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+$$

$$+2\,\Delta u'(t)H_{uz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta u'(t)H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t,x)\right)\Delta u(t)\Big]dx\,dt+\eta_1(\Delta u,\Delta v)\,, \tag{14}$$

где по определению

$$\eta_1(\Delta u,\Delta v)=o_1\left(\left\|\Delta y(x_1)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)-\int_{x_0}^{x_1}o_5\left(\left[\left\|\Delta y(x)\right\|+\left\|\Delta v(x)\right\|\right]^2\right)dx-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_6\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right)dx\,dt.$$

Далее из системы уравнений (7)–(10) следует, что $(\Delta z(t,x),\Delta y(x))$ является решением линеаризованной задачи

$$\frac{\partial \Delta z(t,x)}{\partial t}=f_z\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t)\right)\Delta z(t,x)+f_u\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t)\right)\Delta u(t)+o_7\left(\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t)\right\|\right), \tag{15}$$

$$\Delta z(t_0,x)=\Delta y(x), \tag{16}$$

$$\Delta\dot y(x)=g_y\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x)\right)\Delta y(x)+g_v\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x)\right)\Delta v(x)+o_8\left(\left\|\Delta y(x)\right\|+\left\|\Delta v(x)\right\|\right), \tag{17}$$

$$\Delta y(x_0)=0, \tag{18}$$

где величины $o_7(\cdot)$, $o_8(\cdot)$ определяются из разложений соответственно

$$f(t,x,\bar z,\bar u)-f(t,x,z^{\circ},u^{\circ})=f_z(t,x,z^{\circ},u^{\circ})\Delta z+f_u(t,x,z^{\circ},u^{\circ})\Delta u+o_7\left(\left\|\Delta z\right\|+\left\|\Delta u\right\|\right),$$

$$g(x,\bar y,\bar v)-g(x,y^{\circ},v^{\circ})=g_y(x,y^{\circ},v^{\circ})\Delta y+g_v(x,y^{\circ},v^{\circ})\Delta v+o_8\left(\left\|\Delta y\right\|+\left\|\Delta v\right\|\right).$$

3. Оценка нормы приращения состояния

Из системы уравнений переходя к соответствующим интегральным уравнениям, получаем

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\|\le\left\|\Delta y(x)\right\|+L_1\int_{t_0}^{t}\left[\left\|\Delta z(\tau)\right\|+\left\|\Delta u(\tau)\right\|\right]d\tau, \tag{19}$$

$$\left\|\Delta y(x)\right\|\le L_2\int_{x_0}^{x}\left[\left\|\Delta y(s)\right\|+\left\|\Delta v(s)\right\|\right]ds, \tag{20}$$

где L_1, $L_2=const>0$ – некоторые постоянные.

Применяя к неравенствам (19), (20) лемму Гроноулла–Беллмана, после некоторых преобразований будем иметь

$$\left\|\Delta y(x)\right\|\le L_3\int_{x_0}^{x_1}\left\|\Delta v(s)\right\|ds, \tag{21}$$

где $L_3=const>0$ некоторая постоянная.

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\|\le L_4\left(\int_{x_0}^{x_1}\left\|\Delta v(s)\right\|ds+\int_{t_0}^{t_1}\left\|\Delta u(\tau)\right\|d\tau\right),\quad (L_4=const>0). \tag{22}$$

4. Специальное приращение управления функционала качества

По предположению множества U и V являются выпуклыми. Поэтому специальное приращение допустимого управления $\left(u^{o}(t), v^{o}(x)\right)$ можно определить по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_{\mu}(t)=\mu\left[u(t)-u^{o}(t)\right], \\ \Delta v_{\mu}(x)=0, \end{cases} \tag{23}$$

где $\mu \in[0,1)$ – произвольное число, а $u(t) \in U$, $t \in T$ – произвольная допустимая управляющая функция.

Через $\left(\Delta z_{\mu}(t, x), \Delta y_{\mu}(x)\right)$ обозначим специальное приращение состояния $\left(z^{o}(t, x), y^{o}(x)\right)$, отвечающее приращению (23) управления $\left(u^{o}(t), v^{o}(x)\right)$.

Из оценок (21), (22) следует, что

$$\left\|\Delta z_{\mu}(t, x)\right\| \leq L_{5} \mu, \quad\left\|\Delta y_{\mu}(x)\right\|=0, \tag{24}$$

где $L_{5}=const>0$ – некоторая постоянная.

Далее, используя (23), (24), при помощи (15)–(17) доказывается, что

$$\Delta z_{\mu}(t, x)=\mu \ell(t, x)+o(\mu ; t, x), \tag{25}$$

где $\ell(t, x)$ – n-мерная вектор-функция являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial \ell(t, x)}{\partial t}=f_{z}\left(t, x, z^{o}(t, x), u^{o}(t)\right) \ell(t, x)+f_{u}\left(t, x, z^{o}(t, x), u^{o}(t)\right)\left(u(t)-u^{o}(t)\right), \tag{26}$$

$$\ell\left(t_{0}, x\right)=0. \tag{27}$$

С учетом (23), (26), (27) из формулы приращения следует справедливость разложения

$$\begin{gathered} I\left(u^{o}+\Delta u_{\mu}, v^{o}\right)-I\left(u^{o}, v^{o}\right)=-\mu \int_{t_{0}}^{t_{1}} \int_{x_{0}}^{x_{1}} H_{u}^{\prime}\left(t, x, z^{o}(t, x), u^{o}(t), \psi^{o}(t, x)\right)\left(u(t)-u^{o}(t)\right) dt\, dx+ \\ +\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left\{\sum_{x=x_{0}}^{x_{1}-1} \ell^{\prime}\left(t_{1}, x\right) \frac{\partial^{2} \phi_{2}\left(x, z^{o}\left(t_{1}, x\right)\right)}{\partial z^{2}} \ell\left(t_{1}, x\right)-\int_{t_{0}}^{t_{1}} \int_{x_{0}}^{x_{1}}\left[\ell^{\prime}(t, x) H_{zz}\left(t, x, z^{o}(t, x), u^{o}(t), \psi^{o}(t, x)\right) \times\right.\right. \\ \times \ell(t, x)+2\left(u(t)-u^{o}(t)\right)^{\prime} H_{uz}\left(t, x, z^{o}(t, x), u^{o}(t), \psi^{o}(t, x)\right) \ell(t, x)+ \\ \left.\left.+\left(u(t)-u^{o}(t)\right)^{\prime} H_{uu}\left(t, x, z^{o}(t, x), u^{o}(t), \psi^{o}(t, x)\right)\left(u(t)-u^{o}(t)\right)\right] dx\, dt\right\}+o_{1}\left(\mu^{2}\right). \end{gathered} \tag{28}$$

Теперь специальное приращение управления $\left(u^{o}(t), v^{o}(x)\right)$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_{v}(t)=0, \\ \Delta v_{v}(x)=v\left[v(x)-v^{o}(x)\right]. \end{cases} \tag{29}$$

Здесь $\nu \in[0,1]$ – произвольное число, а $v(x) \in U$, $x \in X$ – произвольная допустимая управляющая функция.

Через $\left(\Delta z_{v}(t, x), \Delta y_{v}(x)\right)$ обозначим специальное приращение вектора состояния $\left(z^{o}(t, x), y^{o}(x)\right)$. Из оценок (21), (22) следует, что

$$\left\|\Delta z_{v}(t, x)\right\| \leq L_{6} \nu, \quad(t, x) \in D, \quad\left\|\Delta y_{v}(x)\right\| \leq L_{7} \nu, \quad x \in X, \tag{30}$$

где $L_{6}, L_{7}=const>0$ – некоторые постоянные.

Учитывая (15)–(18), с помощью (29), (30) доказывается, что

$$\Delta z_\nu(t,x) = \nu q(t,x) + o(\nu; t,x), \tag{31}$$

$$\Delta y_\nu(x) = \nu m(x) + o(\nu; x), \tag{32}$$

где вектор-функции $q(t,x)$ и $m(x)$ являются соответственно решениями задач

$$\frac{\partial q(t,x)}{\partial t} = f_z\left(t,x,z^\circ(t,x),u^\circ(t)\right)q(t,x), \tag{33}$$

$$q(t_0,x) = m(x), \tag{34}$$

$$\dot m(x) = g_y\left(x,y^\circ(x),v^\circ(x)\right)m(x) + g_v\left(x,y^\circ(x),v^\circ(x)\right)\left(v(x)-v^\circ(x)\right), \tag{35}$$

$$m(x_0) = 0. \tag{36}$$

Поэтому из формулы приращения (28) будем иметь

$$\begin{aligned} I\left(u^\circ, v^\circ + \Delta v_\nu\right) - I\left(u^\circ, v^\circ\right) = -\nu \int_{x_0}^{x_1} M_v'\left(x,y^\circ(x),v^\circ(x),p^\circ(x)\right)\left(v(x)-v^\circ(x)\right)dx + \\ +\frac{\nu^2}{2}\Bigg\{ m'(x_1)\frac{\partial^2 \varphi_1\left(y^\circ(x_1)\right)}{\partial y^2}m(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} q'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2\left(x,z^\circ(t_1,x)\right)}{\partial z^2}q(t_1,x) - \\ -\int_{x_0}^{x_1}\Big[m'(x)M_{vv}\left(x,y^\circ(x),v^\circ(x),p^\circ(x)\right)m(x) + 2\left(v(x)-v^\circ(x)\right)' M_{vy}\left(x,y^\circ(x),v^\circ(x),p^\circ(x)\right)\times \\ \times m(x) + \left(v(x)-v^\circ(x)\right)' M_{vy}\left(x,y^\circ(x),v^\circ(x),p^\circ(x)\right)\left(v(x)-v^\circ(x)\right)\Big]dx + \\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} q'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^\circ(t,x),u^\circ(t),\psi^\circ(t,x)\right)q(t,x)\,dx\,dt\Bigg\} + o\left(\nu^2\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Полученные разложения позволяют получить как линеаризованные, так и квадратичные необходимые условия оптимальности.

Из разложений (28), (37) получаем, что вдоль процесса $\left(u^\circ(t), v^\circ(x), z^\circ(t,x), y^\circ(x)\right)$

$$I\left(u^\circ + \Delta u_\mu, v^\circ\right) - I\left(u^\circ, v^\circ\right) = -\mu\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'\left(t,x,z^\circ(t,x),u^\circ(t),\psi^\circ(t,x)\right)\left(u(t)-u^\circ(t)\right)dt\,dx + o_1(\mu) \ge 0, \tag{38}$$

$$I\left(u^\circ, v^\circ + \Delta v_\nu\right) - I\left(u^\circ, v^\circ\right) = -\nu\int_{x_0}^{x_1} M_v'\left(x,y^\circ(x),v^\circ(x),p^\circ(x)\right)\left(v(x)-v^\circ(x)\right)dx + o(\nu) \ge 0. \tag{39}$$

Из последних неравенств в силу произвольности μ и ν следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'\left(t,x,z^\circ(t,x),u^\circ(t),\psi^\circ(t,x)\right)\left(u(t)-u^\circ(t)\right)dt\,dx \le 0, \tag{40}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} M_v'\left(x,y^\circ(x),v^\circ(x),p^\circ(x)\right)\left(v(x)-v^\circ(x)\right)dx \le 0. \tag{41}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Если множества U и V выпуклые, то для оптимальности допустимого управления $\left(u^\circ(t), v^\circ(x)\right)$ необходимо, чтобы неравенства (40) и (41) выполнялись для всех $u(t)\in U$, $t\in T$, $v(x)\in V$, $x\in X$ соответственно.

Неравенства (40), (41) являются интегральными необходимыми условиями оптимальности. Из них, используя лемму из работы [10. С. 3], можно получить поточечные линеаризованные необходимые условия оптимальности вида

$$\int_{x_0}^{x_1} H_u'\left(\theta,x,z^{\circ}(\theta,x),u^{\circ}(\theta),\psi^{\circ}(\theta,x)\right)\left(u-u^{\circ}(\theta)\right)dx \le 0, \tag{42}$$

$$M_v'\left(\xi,y^{\circ}(\xi),v^{\circ}(\xi),p^{\circ}(\xi)\right)\left(v-v^{\circ}(\xi)\right)\le 0, \tag{43}$$

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(x)\right)$ в случае выпуклости множеств U и V в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы соотношения (42), (43) выполнялись для всех $\theta\in[t_0,t_1)$, $u\in U$ и $\xi\in[x_0,x_1)$, $v\in V$ соответственно.

Пара соотношений (42), (43) является поточечным необходимым условием оптимальности в задаче (1)–(6).

Следуя схеме работы [10], можно доказать, что необходимые условия оптимальности (40), (41) и (42), (43) эквивалентны.

5. Квадратичные многоточечные необходимые условия оптимальности

В этом разделе изучается случай вырождения линеаризованного условия максимума (особый случай). Заметим, что особые случаи возникают во многих прикладных задачах из техники и экономики (см. напр.: [7, 8, 11])

Определение 1. Допустимое управление $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(x)\right)$ назовем квазиособым управлением в задаче (1)–(6), если для всех $\theta\in[t_0,t_1)$, $u\in U$ и $\xi\in[x_0,x_1)$, $v\in V$ выполняются соответственно соотношения

$$\left(\int_{x_0}^{x_1} H_u'\left(\theta,x,z^{\circ}(\theta,x),u^{\circ}(\theta),\psi^{\circ}(\theta,x)\right)dx\right)\left(u-u^{\circ}(\theta)\right)\equiv 0, \tag{44}$$

$$M_v'\left(\xi,y^{\circ}(\xi),v^{\circ}(\xi),p^{\circ}(\xi)\right)\left(v-v^{\circ}(\xi)\right)\equiv 0. \tag{45}$$

Из разложений (28), (37) следует, что для оптимальности квазиособого управления $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(x)\right)$ необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1} \ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\ell(t_1,x)-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\ell'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t,x)\right)\ell(t,x)+\\&+2\left(u(t)-u^{\circ}(t)\right)'H_{uz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t,x)\right)\ell(t,x)+\\&+\left(u(t)-u^{\circ}(t)\right)'H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t,x)\right)\left(u(t)-u^{\circ}(t)\right)\Big]dx\,dt\ge 0,\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}&m'(x_1)\frac{\partial^2\varphi\left(y^{\circ}(x_1)\right)}{\partial y^2}m(x_1)+\int_{x_0}^{x_1}q'(t_1,x)\frac{\partial^2 G\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}q(t_1,x)dx-\\&-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}q'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t,x)\right)q(t,x)dx\,dt-\\&-\int_{x_0}^{x_1}\Big[m'(x)M_{vv}\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x),p^{\circ}(x)\right)m(x)+2\left(v(x)-v^{\circ}(x)\right)'M_{vy}\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x),p^{\circ}(x)\right)\times\\&\times m(x)+\left(v(x)-v^{\circ}(x)\right)'M_{yy}\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x),p^{\circ}(x)\right)\left(v(x)-v^{\circ}(x)\right)\Big]dx\ge 0.\end{aligned} \tag{47}$$

Неравенства (46), (47) являются неявными необходимыми условиями оптимальности квазиособых управлений. Однако они позволяют получить ряд более легко проверяемых необходимых условий оптимальности квазиособых управлений.

С этой целью напишем представления решений задач (26), (27), (33)–(36). Имеем

$$\ell(t,x)=\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)f_u\left(\tau,x,z^{\circ}(\tau,x),u^{\circ}(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^{\circ}(\tau)\right)d\tau, \tag{48}$$

$$m(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi(x,m)g_v\left(m,y^{\circ}(m),v^{\circ}(m)\right)\left(v(m)-v^{\circ}(m)\right)dm, \tag{49}$$

$$q(t,x)=\int_{x_0}^{x}F(t,t_0,x)\Phi(x,m)g_v\left(m,y^{\circ}(m),v^{\circ}(m)\right)\left(v(m)-v^{\circ}(m)\right)dm, \tag{50}$$

где $F(t,\tau,x)$ и $\Phi(x,s)$ являются решениями задач

$$F_t(t,\tau,x)=-F(t,\tau,x)f_z\left(\tau,x,z^{\circ}(\tau,x),u^{\circ}(\tau,x)\right),\ F(t,t,x)=E,$$

$$\Phi_x(x,s)=-\Phi(x,s)g_y\left(m,y^{\circ}(m),v^{\circ}(m)\right),\ \Phi(m,m)=E,$$

соответствующими квазиособому процессу $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(x),z^{\circ}(t,x),y^{\circ}(x)\right)$. Здесь E – единичная матрица. Введем обозначения:

$$K(x,\tau,s)=-F'(t_1,\tau,x)G_{zz}\left(z^0(t_1,x)\right)F(t_1,x,s)+$$
$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}F'(t,\tau,x)H_{zz}\left(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),\psi^0(t,x)\right)F(t,x,s)\,dt, \tag{51}$$

$$N(m,\ell)=-\Phi'(x_1,m)\varphi_{yy}\left(y^0(x_1)\right)\Phi(x_1,\ell)+$$
$$+\int_{\max(m,\ell)}\left[F'(t_1,t_0,x)\Phi'(x,m)G_{zz}\left(x,z^0(t_1,x)\right)\Phi(x,\ell)F(t_1,t_0,x)\right]dx+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\max(m,\ell)}^{x_1}F'(t,t_0,x)\Phi'(x,m)H_{zz}\left(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\right)\Phi(x,\ell)F(t,t_0,x)\right]dx+$$
$$+\int_{\max(m,\ell)}^{x_1}\Phi'(x,m)M_{yy}\left(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x)\right)\Phi(x,\ell)\,dx. \tag{52}$$

Принимая во внимание представления (48)–(50) и обозначения (51), (52) в неравенствах (46), (47), после некоторых преобразований приходим к соотношениям

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\left(u(\tau)-u^{\circ}(\tau)\right)' f_u'\left(\tau,x,z^{\circ}(\tau,x),u^{\circ}(\tau)\right)F'(t_1,\tau,x)K(x,\tau,s)f_u\left(s,x,z^{\circ}(s,x),u^{\circ}(s)\right)\times$$
$$\times F(t_1,s,x)\left(u(s)-u^{\circ}(s)\right)ds\,d\tau\,dx+2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\left(u(\tau)-u^{\circ}(\tau)\right)' H_{uz}\left(\tau,x,z^{\circ}(\tau,x),u^{\circ}(\tau),\psi^{\circ}(\tau,x)\right)\times\right.$$
$$\left.\times F(\tau,t,x)f_u\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t)\right)\left(u(t)-u^{\circ}(t)\right)d\tau\right]dx\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(u(t)-u^{\circ}(t)\right)' H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t,x)\right)\left(u(t)-u^{\circ}(t)\right)dx\,dt\le 0 \tag{53}$$

для всех $u(t)\in U\subset R^r$, $t\in[t_0,t_1]$,

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(v(m)-v^{\circ}(m)\right)' g_v\left(m,y^{\circ}(m),v^{\circ}(m)\right)N(m,\ell)g_v\left(\ell,y^{\circ}(\ell),v^{\circ}(\ell)\right)\left(v(\ell)-v^{\circ}(\ell)\right)d\ell\,dm+$$
$$+2\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x}^{x_1}\left(v(m)-v^{\circ}(m)\right)' M_{vy}\left(m,y^{\circ}(m),v^{\circ}(m),p^{\circ}(m)\right)\Phi(m,x)g_v\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x)\right)dm\right]\times$$

$$\times\left(v(x)-v^{\circ}(x)\right)dx+\int_{x_0}^{x_1}\left(v(x)-v^{\circ}(x)\right)' M_{vv}\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x),p^{\circ}(x)\right)\left(v(x)-v^{\circ}(x)\right)dx\le 0 \qquad (54)$$

для всех $v(x)\in V$, $x\in[x_0,x_1]$.

Следовательно, имеет место

Теорема 3. Для оптимальности квазиособого управления в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы выполнялись соотношения (53) и (54).

Неравенства (53), (54) являются интегральными необходимыми условиями оптимальности второго порядка. Из них можно получить ряд более конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности. В частности, имеет место

Следствие 2. Для оптимальности квазиособого управления $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(x)\right)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенства

$$\left(u-u^{\circ}(\theta)\right)'\left[\int_{x_0}^{x_1}H_{uu}\left(\theta,x,z^{\circ}(\theta,x),u^{\circ}(\theta),\psi^{\circ}(\theta,x)\right)dx\right]\left(u-u^{\circ}(\theta)\right)\le 0, \qquad (55)$$

$$\left(v-v^{\circ}(\xi)\right)' M_{vv}\left(\xi,y^{\circ}(\xi),v^{\circ}(\xi),p^{\circ}(\xi)\right)\left(v-v^{\circ}(\xi)\right)\le 0 \qquad (56)$$

выполнялись для всех $u\in U$, $\theta\in[t_0,t_1)$, $v\in V$, $\xi\in[x_0,x_1)$ соответственно.

Заметим, что условия оптимальности (53), (54) позволяют исследовать на оптимальность также те квазиособые управления, для которых необходимые условия оптимальности (55), (56) вырождаются.

Определение 2. Квазиособое управление $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(x)\right)$ назовем квазиособым второго порядка управлением, если для всех $\theta\in[t_0,t_1)$, $u\in U$ и $\xi\in[x_0,x_1)$, $v\in V$ выполняются соответственно соотношения

$$\left(u-u^{\circ}(\theta)\right)'\left[\int_{x_0}^{x_1}H_{uu}\left(\theta,x,z^{\circ}(\theta,x),u^{\circ}(\theta),\psi^{\circ}(\theta,x)\right)dx\right]\left(u-u^{\circ}(\theta)\right)=0, \qquad (57)$$

$$\left(v-v^{\circ}(\xi)\right)' M_{vv}\left(\xi,y^{\circ}(\xi),v^{\circ}(\xi),p^{\circ}(\xi)\right)\left(v-v^{\circ}(\xi)\right)=0. \qquad (58)$$

6. Многоточечные необходимые условия оптимальности квазиособых второго порядка управлений

Неравенства (53) и (54) позволяют получить многоточечные необходимые условия оптимальности квазиособых второго порядка управлений.

Пусть $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(x)\right)$ – квазиособое второго порядка управление. Специальные приращения управляющих функций $u^{\circ}(t)$, $v^{\circ}(x)$ определим по формулам

$$u_{\varepsilon}(t)=\sum_{i=1}^{m}\delta u\left(t,\varepsilon;\ \theta_i,\ell_i,u_i\right), \qquad (59)$$

$$v_{\mu}(x;\mu)=\sum_{i=1}^{m}\delta v\left(x,\mu;\ \xi_i,\ell_i,v_i\right). \qquad (60)$$

Здесь $\delta u\left(t,\varepsilon;\ \theta_j,\ell_j,u_j\right)$, $\delta v\left(x,\mu;\ \xi_j,\ell_j,v_j\right)$ – игольчатого типа вариации управлений $u^{\circ}(t)$, $v^{\circ}(x)$, определяемые формулами

$$\delta u\left(t;\varepsilon;\ \theta_i,\ell_i,u_i\right)=\begin{cases}u_i,\ \ t\in[\theta_i,\ \theta_i+\ell_i\,\varepsilon),\\ u^{\circ}(t),\ \ t\,\overline{\in}\,T\setminus[\theta_i,\ \theta_i+\ell_i\,\varepsilon),\end{cases} \qquad (61)$$

$$\delta v(x,\mu;\xi_i,\ell_i,v_i)=\begin{cases} v_i, & x\in[\xi_i,\xi_i+\ell_i\mu),\\ v^{\mathrm{o}}(x), & x\,\overline{\in}\,X\setminus[\xi_i,\xi_i+\ell_i\mu),\end{cases} \tag{62}$$

где $\ell\geq 0,\ i=\overline{1,m},$ – произвольные числа, $u_i\in U, v_i\in V, i=\overline{1,m},$ – произвольные векторы, $\varepsilon>0,\mu>0$ – произвольные достаточно малые числа, θ_i,ξ_i – произвольные точки.

Суммирование игольчатого типа вариаций понимается в смысле [12].

Учитывая определение квазиособого второго порядка управления, из (53), ((54)), а также (55), (56) после некоторых преобразований получим, что вдоль квазиособого второго порядка управления $\left(u^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(x)\right)$

$$\varepsilon^2\Bigg[\int\limits_{x_0}^{x_1}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{m}\ell_i\ell_j\left(u_i-u(\theta_i)\right)'f_u'\left(\theta_i,x,z^{\mathrm{o}}(\theta_i,x),u(\theta_i)\right)K\left(x,\xi_i,\xi_j\right)f_u\left(\theta_j,x,z^{\mathrm{o}}\left(\theta_j,x\right),u\left(\theta_j\right)\right)\times$$

$$\times\left(u_j-u^{\mathrm{o}}\left(\theta_j\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\ell_i\left(u_i-u(\theta_i)\right)'H_z'\left(\theta_i,x,z^{\mathrm{o}}(\theta_i,x),u^{\mathrm{o}}(\theta_i),\psi^{\mathrm{o}}(\theta_i,x)\right)\times$$

$$\times\Bigg[\ell_i\left(u_i-u(\theta_i)\right)'f_u\left(\theta_i,x,z^{\mathrm{o}}(\theta_i,x),u^{\mathrm{o}}(\theta_i)\right)\left(u_j-u\left(\theta_j\right)\right)+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j f_u\left(\theta_j,x,z^{\mathrm{o}}\left(\theta_j,x\right),u^{\mathrm{o}}\left(\theta_j\right)\right)\Bigg]\times$$

$$\times\left(u_j-u\left(\theta_j\right)\right)\Bigg]dx\Bigg]+\mathrm{o}\left(\varepsilon^2\right)\leq 0,$$

$$\mu^2\Bigg\{\sum_{i,j=1}^{m}\ell_i\ell_j\left(v_i-v(\xi_i)\right)'g_v'\left(\xi_i,y^{\mathrm{o}}(\xi_i),v_i\right)N\left(\xi_i,\xi_j\right)g_v\left(\xi_j,y^{\mathrm{o}}\left(\xi_j\right),v_j\right)\left(v_j-v\left(\xi_j\right)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\ell_i\left(v_i-v(\xi_i)\right)'M_{vy}\left(\xi_i,y^{\mathrm{o}}(\xi_i),v(\xi_i),p^{\mathrm{o}}(\xi_i)\right)\times$$

$$\times\Bigg[\ell_i g_v\left(\xi_i,y^{\mathrm{o}}(\xi_i),v^{\mathrm{o}}(\xi_i)\right)\left(v_i-v(\xi_i)\right)+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j g_v\left(\xi_j,y^{\mathrm{o}}\left(\xi_j\right),v\left(\xi_j\right)\right)\left(v_j-v\left(\xi_j\right)\right)\Bigg]\Bigg\}+\mathrm{o}\left(\mu^2\right)\leq 0.$$

Отсюда в силу произвольности ε и μ приходим к следующему утверждению:

Теорема 4. Для оптимальности квазиособого второго порядка управления $\left(u^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(x)\right)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы для любого натурального числа *m* неравенства

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{m}\ell_i\ell_j\left(u_i-u(\theta_i)\right)'f_u'\left(\theta_i,x,z^{\mathrm{o}}(\theta_i,x),u^{\mathrm{o}}(\theta_i)\right)K\left(x,\theta_i,\theta_j\right)f_u\left(\theta_j,x,z^{\mathrm{o}}\left(\theta_j,x\right),u\left(\theta_j\right)\right)\times$$

$$\times\left(u_j-u^{\mathrm{o}}\left(\theta_j\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\ell_i\left(u_i-u(\theta_i)\right)'H_{uz}\left(\theta_i,x,z^{\mathrm{o}}(\theta_i,x),u^{\mathrm{o}}(\theta_i),\psi^{\mathrm{o}}(\theta_i,x)\right)\times$$

$$\times\Bigg[\ell_i f_u\left(\theta_i,x,z^{\mathrm{o}}(\theta_i,x),u^{\mathrm{o}}(\theta_i)\right)\left(u_i-u(\theta_i)\right)+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j F\left(\theta_i,\theta_j,x\right)f_u\left(\theta_j,x,z^{\mathrm{o}}\left(\theta_j,x\right),u^{\mathrm{o}}\left(\theta_j\right)\right)\Bigg]\times \tag{63}$$

$$\times\left(u_j-u\left(\theta_j\right)\right)\Bigg]dx\leq 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{m}\ell_i\ell_j\left(v_i-v(\xi_i)\right)'g_v'\left(\xi_i,y^{\mathrm{o}}(\xi_i),v^{\mathrm{o}}(\xi_i)\right)N\left(\xi_i,\xi_j\right)g_v\left(\xi_j,y^{\mathrm{o}}\left(\xi_j\right),v^{\mathrm{o}}\left(\xi_j\right)\right)\times\left(v_j-v^{\mathrm{o}}\left(\xi_j\right)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\ell_i\left(v_i-v^{\mathrm{o}}(\xi_i)\right)'M_{vy}\left(\xi_i,y^{\mathrm{o}}(\xi_i),v^{\mathrm{o}}(\xi_i),p^{\mathrm{o}}(\xi_i)\right)\times\Big[\ell_i g_v\left(\xi_i,y^{\mathrm{o}}(\xi_i),v^{\mathrm{o}}(\xi_i)\right)\left(v_i-v(\xi_i)\right)+$$

$$+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j\,\Phi\left(\xi_i,\xi_j\right)g_v\left(\xi_j,y^{\mathrm{o}}\left(\xi_j\right),v^{\mathrm{o}}\left(\xi_j\right)\right)\left(v_j-v^{\mathrm{o}}\left(\xi_j\right)\right)\Big]\leq 0 \tag{64}$$

выполнялись для всех $\ell_i \geq 0$, $u_i \in U$, $\theta_i \in [t_0, t_1)$ $\left(\ell_i \geq 0,\ v_i \in V,\ \xi_i \in [x_0, x_1)\right)$, $i = \overline{1,m}$ $(t_0 \leq \theta_1 \leq \ldots \leq \theta_m < t_1)$ $\left((x_0 \leq \xi_1 \leq \ldots \leq \xi_m < x_1)\right)$ соответственно.

Следует отметить, что полученные многоточечные необходимые условия оптимальности (63), (64) более информативны и, более того, остаются в силе также в случае вырождения этих необходимых условий оптимальности при $m = 1, 2$ и т.д.

Заключение

В статье ставится и изучается одна задача оптимального управления типа А.И. Москаленко при предположении выпуклости области управления. Построена и исследована формула приращения критерия качества для игольчатых вариаций управления. Доказан аналог линеаризованного принципа максимума и исследован случай его вырождения. Установлено необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. Доказаны многоточечные необходимые условия оптимальности для квазиособых управлений второго порядка, позволяющие сузить множество квазиособых управлений, подозрительных на оптимальность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москаленко А.И. Об одной задаче оптимального регулирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. № 1. С. 68–95.
2. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика.1959. Т. 20, № 10. С. 1320–1334; № 11. С. 1441–1458; № 12. С. 1561–1578.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М. : Либроком, 2011. 472 с.
4. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М. : Факториал пресс, 2002. 824 с.
5. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и метод линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1989. 164 с.
6. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Баку : Элм, 2010. 360 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Либроком, 2011. 256 с.
8. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление. Вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 5–15.
9. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. : Физматлит, 2005. 525 с.
10. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1982. 110 с.
11. Параев Ю.И. Оптимальное управление двухсекторной экономикой // Вестник Томского государственного университета. Управление. Вычислительная техника и информатика. 2014. № 3 (28). С. 2–11.
12. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференциальные уравнения.1975. № 10. С. 1765–1773.

Поступила в редакцию 25 сентября 2019 г.

Rasulzade Sh.M. (2020) INTEGRAL AND MULTIPOINT NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS OF QUASI-SINGULAR CONTROLS IN ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 10–21

DOI: 10.17223/19988605/51/2

Consider the minimum functional problem

$$S(u,v) = \varphi(y(x_1)) + \int_{t_0}^{t_1} G(x, z(t_1, x))\,dx ,$$

under restrictions

$$u(t) \in U \subset R^r,\quad t \in T = [t_0, t_1],$$
$$v(x) \in V \subset R^q,\quad x \in X = [x_0, x_1],$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = f(t, x, z, u),\quad (t, x) \in D = T \times X ,$$

$$z(t_0,x) = y(x), \quad x \in X \ ,$$
$$\dot{y} = g(x,y,v) \ , \ x \in X \ , \ y(x_0) = y_0 \ .$$

Here $\varphi(y)$, $(G(x,z))$ are continuous and twice continuously differentiable with respect to y, (z) scalar functions, U and V are the given non-empty bounded and convex sets, $f(t,x,z,u)$, $(g(x,y,v))$ are n-dimensional vector-functions continuous in the aggregate of variables together with partial derivatives with respect to (z,u) $((y,v))$ up to second order inclusive, $u(t)$, $(v(x))$ are the piecewise continuous (with a finite number of break points of the first kind) vectors of control actions, y_0 is a constant vector.

The necessary optimality condition in the form of the linearized maximum principle is proved, and the necessary optimality conditions for quasi-singular controls are established.

Keywords: system with distributed parameters; increment method; linearized maximum principle; necessary optimality condition; quasi-singular control; multi-point necessary optimality condition.

RASULZADE Shahla Majid gyzy (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: akja@rambler.ru

REFERENCES

1. Moskalenko, A.I. (1969) Ob odnoy zadache optimal'nogo regulirovaniya [On one problem of optimal regulation]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 1. pp. 68–95.
2. Rozonoer, L.I. (1959) Pontryagin maximum principle in the theory of optimum systems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 20(10). pp. 1320–1334.
3. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2011) *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in the theory of optimal control]. Moscow: Librokom.
4. Vasilyev, F.P. (2002) *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Faktorial press.
5. Srochko, V.A. (1987) *Variatsionnyy printsip maksimuma i metod linearizazii v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [The variational maximum principle and the linearization method in optimal control problems]. Irkutsk: Irkutsk State University.
6. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.Dz. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Qualitative theory of optimal control of systems with distributed parameters]. Baku: ELM.
7. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2011) *Osobyye optimal'nyye upravleniya* [Special optimal controls] Moscow: Librocom.
8. Paraev, Yu.I., Grekova, T.I. & Danilyuk, E.Yu. (2011) Analytical solution to the problem of optimal control of a single-sector economy over a finite time interval. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17) pp. 5–115.
9. Alekseyev, V.M., Tikhomirov, V.M. & Fomin, S.V. (2005) *Optimal'noe upravlenie* [Optimal Control]. Moscow: Fizmatlit.
10. Srochko, V.A. (1982) *Vychislitel'nye metody optimal'nogo upravleniya* [Computational Optimal Control Methods]. Irkutsk: Irkutsk State University
11. Parayev, Yu.I. (2014) Optimal management of a two-sector economy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(28). pp. 2–11.
12. Gorokhovik, S.Ya. (1975) Necessary optimality conditions in a problem with a movable right hand endpoint of the trajectory. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 10. p. 765–1773.