ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Управление, вычислительная техника и информатика № 51

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/51/9

К.С. Ким, В.И. Смагин

ФИЛЬТРАЦИЯ И ДИАГНОСТИКА В ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-31-90080.

Рассмотрен алгоритм диагностики состояния марковской цепи по косвенным наблюдениям за вектором состояния дискретной стохастической системы с мультипликативными возмущениями. Для построения оценок используется алгоритм фильтрации Калмана с неизвестным входом. Для иллюстрации предложенного подхода приводится пример.

Ключевые слова: фильтрация Калмана; диагностика марковской цепи; мультипликативные возмущения; неизвестный вход.

Задачи построения оценок и управлений для систем со случайными скачкообразными параметрами актуальны для различных реальных объектов. В качестве примера таких объектов можно рассмотреть, например, энергетические системы [1, 2], системы управления летательными аппаратами [3], системы связи [4, 5], задачи обнаружения неисправностей [6–8] и экономические системы [9, 10].

В работах [10–16] задачи фильтрации и управления рассматриваются для систем со случайными скачкообразными параметрами и аддитивными мультипликативными возмущениями. В настоящей работе рассмотрена задача фильтрации вектора состояния и идентификации состояния марковской цепи, которая входит в описание линейной стохастической системы с мультипликативными возмущениями. Решение получено с использованием принципа разделения, фильтрации Калмана и оценок неизвестного входного сигнала [17–22]. Предлагается выбрать матрицу коэффициентов передачи фильтра на основе минимизации суммы квадратичных форм ошибок оценивания. Приведен численный пример решения задачи фильтрации и идентификации для линейной стохастической системы с мультипликативными возмущениями и скачкообразными параметрами.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую линейную дискретную стохастическую систему с мультипликативными возмущениями и скачкообразным параметром:

$$x(k+1) = A_{\gamma(k)}x(k) + B_{\gamma(k)}u(k) + \sum_{s=1}^{m} A_{s,\gamma(k)}x(k)\,\theta_{s,\gamma(k)}(k) + q_{\gamma(k)}(k),\ \ x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k) \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояние системы, x_0 – случайный вектор с известным математическим ожиданием и ковариацией $\bar{x}_0 = \mathrm{M}\{x_0\}$, $N_{0,i} = \mathrm{M}\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}} / \gamma = \gamma_i\}$, $i = \overline{1,r}$; $A_{\gamma(k)}$, $B_{\gamma(k)}$, $A_{s,\gamma(k)}$ – известные матрицы; $u(k) \in \mathrm{R}^m$ – известный вектор; $\gamma = \gamma(k)$ – марковская цепь с *r* состояниями ($\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r$); $q_{\gamma(k)}(k)$, $\theta_{s,\gamma(k)}$ – гауссовские случайные векторы с характеристиками $\mathrm{M}\{q_{\gamma(k)}(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{\theta_{\gamma(k)}(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{q_{\gamma(k)}(k)q^{\mathrm{T}}_{\gamma(k)}(j) / \gamma(\xi) = \gamma(k), k \le \xi \le j\} = Q_{\gamma(k)}\delta_{kj}$, $\mathrm{M}\{\theta_{\gamma(k)}(k)\theta^{\mathrm{T}}_{\gamma(k)}(j) / \gamma(\xi) = \gamma(k), k \le \xi \le j\} = \Xi_{\gamma(k)}\delta_{kj}$ ($\mathrm{M}\{\}$ – математическое ожидание, $^{\mathrm{T}}$ – символ матричного транспонирования, δ_{kj} – символ Кронекера).

Вероятность состояний скачкообразного процесса $p_j(k) = P\{\gamma(k) = j\}$, $j = \overline{1,r}$, удовлетворяет уравнению

$$p_j(k+1) = \sum_{i=1}^{r} p_i(k) p_{i,j}\,,\; p_j(0) = \overline{p}_j\,,\; j = \overline{1,r}. \tag{2}$$

Здесь $p_{i,j}$ – вероятность перехода из состояния *i* в состояние *j* за один шаг, $\overline{p}_j$ – начальная вероятность *j*-го состояния.

Вектор наблюдения:

$$y(k) = S_{\gamma(k)} x(k) + v_{\gamma(k)}(k), \tag{3}$$

где $v_{\gamma(k)}(k)$ – гауссовская случайная последовательность, не зависящая от $q_{\gamma(k)}(k)$, с характеристиками: $\mathrm{M}\{v_{\gamma(k)}(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{v_{\gamma(k)}(k) v^{\mathrm{T}}_{\gamma(k)}(j) / \gamma(\xi) = \gamma(k), k \le \xi \le j\} = V_{\gamma(k)} \delta_{kj}$. Предполагается, что пара матриц $A_{\gamma_i}, S_{\gamma_i}$ детектируема.

По наблюдениям (3) требуется найти оценку параметра скачкообразного параметра $\hat{\gamma}(k)$ (проблема диагностики) и оценку вектора состояния $\hat{x}(k)$, которую определим из условия минимума следующего критерия:

$$J(0,T,i) = \mathrm{M}\left\{ \sum_{k=0}^{T} e^{\mathrm{T}}(k) H e(k) \,/\, \gamma(0) = \gamma_i \right\}, \tag{4}$$

где $H > 0$ – весовая матрица, $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, $k \in [0, T]$.

2. Синтез оптимального фильтра

Нетрудно убедиться, что при ошибочном определении значения скачкообразного параметра $\gamma(k)$ модель (1) можно представить в эквивалентном виде, но с дополнительным вектором входа. Действительно, когда система (1) находится в *j*-м состоянии $(\gamma = \gamma_j)$ и это состояние ошибочно идентифицировано как *i*-е $(j \ne i)$, уравнение (1) представляется как модель с дополнительным входом:

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + f_i(k) + \sum_{s=1}^{m} A_{s,i} x(k) \theta_{s,i}(k) + q_i(k),\; x(0) = x_0, \tag{5}$$

где вектор дополнительного входа определяется по формуле

$$f_i(k) = (A_j - A_i) x(k) + (B_j - B_i) u(k) + \sum_{s=1}^{m} A_{s,j} x(k) \theta_{s,j}(k) - \sum_{s=1}^{m} A_{s,i} x(k) \theta_{s,i}(k) + q_j(k) - q_i(k). \tag{6}$$

Здесь и далее введены обозначения для матриц $A_{\gamma(k)}$, $A_{s,\gamma(k)}$, $B_{\gamma(k)}$, $S_{\gamma(k)}$, $Q_{\gamma(k)}$, $\Xi_{\gamma(k)}$, $V_{\gamma(k)}$ при $\gamma(k) = \gamma_i$: $A_i, A_{s,i}, B_i, S_i, Q_i, \Xi_i, V_i$ $(i = \overline{1,r})$.

Заметим также, так как *j*-е состояние нам неизвестно, то дополнительный вход $f_i(k)$ также будет неизвестным. Поэтому для построения оценки вектора состояния воспользуемся рекуррентным оценивателем, совпадающим по структуре с фильтром Калмана и вычисляющим оценку состояния $\hat{x}(k)$ при наличии в модели объекта неизвестного входа [17–22]:

$$\hat{x}(k+1) = A_i \hat{x}(k) + \hat{f}_i(k) + K_i(k)(y(k+1) - S_i(A_i \hat{x}(k) + \hat{f}_i(k))),\; \hat{x}(0) = \overline{x}_0, \tag{6}$$

где $K_i(k)$ $(i = \overline{1,r})$ – матрица коэффициентов передачи фильтра. При этом мы воспользуемся принципом разделения, который означает, что сначала мы построим оценки вектора $\hat{x}(k)$ в предположении, что вектор $f_i(k)$ известен, затем строятся оценки вектора $\hat{f}_i(k)$ в предположении, что оценка вектора состояния $\hat{x}(k)$ известна.

Матрицы $K_i(k)$ определяются на основе минимизации критерия (4). Запишем критерий (4) в виде суммы:

$$J(0,T,i)=\sum_{k=0}^{T}\operatorname{tr}N_i(k)H, \tag{8}$$

где tr – след квадратичной матрицы, матрица $N_i(k)=\mathrm{M}\{e(k)e(k)^{\mathrm{T}}/\gamma=\gamma_i\}$ определяется из уравнения

$$N_i(k+1)=(A_i-K_i(k)S_iA_i)(\sum_{j=1}^{r}p_{i,j}N_j(k))(A_i-K_i(k)S_iA_i)^T+K_i(k)V_iK_i(k)^T+$$
$$+(E-K_i(k)S_i)[\sum_{s=1}^{m}A_{s,i}(\sum_{j=1}^{r}p_{i,j}N_j(k))A_{s,i}^{\mathrm{T}}+\sum_{s=1}^{m}A_{s,i}\hat{x}(k)\hat{x}^{\mathrm{T}}(k)A_{s,i}^{\mathrm{T}}+Q_i](E-K_i(k)S_i)^{\mathrm{T}},N_i(0)=N_0, \tag{9}$$

где E – единичная матрица соответствующей размерности.

Введем функцию Ляпунова следующего вида:

$$W(k,N_i(k))=\operatorname{tr}N_i(k)H+\operatorname{tr}\sum_{t=k}^{T}\bar{\Psi}_i(t)L_i(t), \tag{10}$$

где $\bar{\Psi}_i(t)=(E-K_i(k)S_i)\Xi_iE-K_i(k)S_i)^{\mathrm{T}}+K_i(t)V_iK_i(t)^{\mathrm{T}}+\Psi_i(t)$ ($\Psi_i(t)$ – некоторые положительно определенные матрицы, $\Xi_i=\sum_{s=1}^{m}A_{s,i}(\sum_{j=1}^{r}p_{i,j}N_j(k))A_{s,i}^{\mathrm{T}}+\sum_{s=1}^{m}A_{s,i}\hat{x}(k)\hat{x}^{\mathrm{T}}(k)A_{s,i}^{\mathrm{T}}+Q_i$). Здесь предполагается, что в (10) матрицы $L_i(t)$ положительно определены и удовлетворяют уравнению

$$L_i(t)=(A_i-K_i(t)S_iA_i)^{\mathrm{T}}(\sum_{j=1}^{r}p_{i,j}L_j(t+1))(A_i-K_i(t)S_iA_i)+H+$$
$$+(E-K_i(k)S_i)^{\mathrm{T}}(\sum_{s=1}^{m}A_{s,i}^{\mathrm{T}}(\sum_{j=1}^{r}p_{i,j}L_j(t+1))A_{s,i})(E-K_i(k)S_i),\ L_i(T)=L_T, \tag{11}$$

где L_T – некоторая положительно определенная матрица.

Суммируя по $k=\overline{t,T-1}$ конечные разности функции $W(k,N_i(k))$ и учитывая формулу (11), получим

$$\sum_{k=t}^{T-1}\Delta W(k,N_i(k))=\sum_{k=t}^{T-1}[W(k+1,N_i(k+1))-W(k,N_i(k))]=$$
$$=\sum_{k=t}^{T-1}\operatorname{tr}[N_i(k+1)L_i(k+1)-N_i(k)L_i(k)-\bar{\Psi}_i(k)L_i(k)]. \tag{12}$$

С другой стороны, это выражение может быть представлено следующим образом:

$$\sum_{k=t}^{T-1}\Delta W(k,N_i(k))=W(t+1,N_i(t+1))-W(t,N_i(t))+...+W(T,N_i(T))-$$
$$-W(T-1,N_i(T-1))=\operatorname{tr}N_i(T)L_T-\operatorname{tr}N_i(t)L_i(t)-\operatorname{tr}\sum_{k=t}^{T-1}\bar{\Psi}_i(k)L_i(k). \tag{13}$$

Добавим к формуле (8) разность правых частей (12) и (13). В результате критерий (8) примет вид:

$$J(0,T,i)=\sum_{k=0}^{T-1}\operatorname{tr}N_i(k)H-\sum_{k=1}^{T-1}\operatorname{tr}N_i(k)L_i(k)+\sum_{k=0}^{T-1}\operatorname{tr}[(A_i-K_i(k)S_iA_i)(\sum_{j=1}^{r}p_{i,j}N_j(k))(A_i-K_i(k)S_iA_i)^{\mathrm{T}}+$$
$$+(E-K_i(k)S_i)\Xi_i(E-K_i(k)S_i)^{\mathrm{T}}{}_i+K_i(k)V_iK_i(k)^{\mathrm{T}}]L_i(k+1). \tag{14}$$

Применяя правила матричного дифференцирования функции tr [23], вычислим производные

$$\frac{\partial J(0,T,i)}{\partial K_i(k)}=\frac{\partial}{\partial K_i(k)}\{\sum_{k=0}^{T-1}\operatorname{tr}N_i(k)H-\sum_{k=1}^{T-1}\operatorname{tr}N_i(k)L_i(k)+$$
$$+\sum_{k=0}^{T-1}\operatorname{tr}[(A_i-K_i(k)S_iA_i)(\sum_{j=1}^{r}p_{i,j}N_j(k))(A_i-K_i(k)S_iA_i)^T+(E-K_i(k)S_i)\Xi_i(E-K_i(k)S_i)^{\mathrm{T}}+$$

$$+K_i(k)V_iK_i(k)^T]L_i(k+1)\} = \sum_{k=0}^{T-1} 2[-L_i(k+1)A_i(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j(k))A_i^T S_i^T + L_i(k+1)K_i(k)S_iA_i \times$$
$$\times(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j(k))A_i^T S_i^T - L_i(k+1)S_i\Xi_iS_i^T + L_i(k+1)K_i(k)S_i\Xi_iS_i^T + L_i(k+1)K_i(k)V_i]. \quad (15)$$

Приравнивая эту производную к нулю, получаем формулу для определения матриц $K_i(k)$ $(i=\overline{1,r})$:

$$K_i(k) = (A_i(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j(k))A_i^{\mathrm{T}} S_i^{\mathrm{T}} + \Xi_i S_i^{\mathrm{T}})[S_i\, A_i(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j(k))A_i^{\mathrm{T}} S_i^{\mathrm{T}} + S_i\,\Xi_i S_i^{\mathrm{T}} + V_i]^{-1}. \quad (16)$$

Учитывая (12) и (13), можно показать, что конечная разность функции Ляпунова (10) определяется по формуле

$$\Delta W(k, N_i(k)) = W(k+1, N_i(k+1)) - W(k, N_i(k)) =$$
$$= \mathrm{tr}\, N_i(k+1)H - \mathrm{tr}\, N_i(k)H - \mathrm{tr}[(E-K_i(k)S_i)\Xi_i(E-K_i(k)S_i)^{\mathrm{T}} + K_i(k)V_iK_i(k)^{\mathrm{T}} + \Psi_i(t)]L_i(k). \quad (17)$$

В силу того, что решения матричных разностных уравнений (9), (11) положительно определены, функция Ляпунова (10) будет положительной. Устойчивость по Ляпунову динамики фильтра гарантируется тем, что матрицу $\Psi_i(t)$ всегда можно задать так, чтобы выражение (17) стало отрицательным.

В стационарном случае матрицы переноса K_i будут постоянными и определяются из следующих матричных алгебраических уравнений:

$$N_i = (A_i - K_iS_iA_i)(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j)(A_i - K_iS_iA_i)^T +$$
$$+(E-K_iS_i)[\sum_{s=1}^{m} A_{s,i}(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j)A_{s,i}^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_{s,i}\hat{x}\hat{x}^{\mathrm{T}}A_{s,i}^{\mathrm{T}} + Q_i](E-K_iS_i)^{\mathrm{T}} + K_iV_iK_i^{\mathrm{T}}, \quad (18)$$

$$K_i = (A_i(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j)A_i^{\mathrm{T}}S_i^{\mathrm{T}} + [\sum_{s=1}^{m} A_{s,i}(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j)A_{s,i}^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_{s,i}\hat{x}\hat{x}^{\mathrm{T}}A_{s,i}^{\mathrm{T}} + Q_i]S_i^{\mathrm{T}}) \times$$
$$\times[S_i\, A_i(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j)A_i^{\mathrm{T}}S_i^{\mathrm{T}} + S_i\,[\sum_{s=1}^{m} A_{s,i}(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j)A_{s,i}^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_{s,i}\hat{x}\hat{x}^{\mathrm{T}}A_{s,i}^{\mathrm{T}} + Q_i]S_i^{\mathrm{T}} + V_i]^{-1}. \quad (19)$$

Отметим, что если существуют положительно определенные решения N_i $(i=\overline{1,r})$ матричного уравнения (18), то из условия $(E-K_iS_i)[\sum_{s=1}^{m} A_{s,i}(\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}N_j)A_{s,i}^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_{s,i}\hat{x}\hat{x}^{\mathrm{T}}A_{s,i}^{\mathrm{T}} + Q_i](E-K_iS_i)^{\mathrm{T}} + K_iV_iK_i^{\mathrm{T}} > 0$ следует справедливость теоремы 1.6 [24], а это означает устойчивость стационарного фильтра:

$$\hat{x}(k+1) = A_i\hat{x}(k) + \hat{f}_i(k) + K_i(y(k+1) - S_i(A_i\hat{x}(k) + \hat{f}_i(k)), \hat{x}(0) = \bar{x}_0. \quad (20)$$

В качестве алгоритма оценки неизвестного входа мы будем использовать МНК-оценки; в этом случае оценка может быть построена на основе минимизации дополнительного критерия [17] в предположении, что значение скачкообразного параметра известно (здесь предполагается, что $\gamma = \gamma_i$):

$$J^{<LMS>}(f_i(k)) = \sum_{t=1}^{k+1}\left\{\| y(t) - S_i(A_i\,\hat{x}(t-1) + B_i\,u(t-1) + f_i(t-1))\|_{\overline{W}}^2 + \| f_i(t-1)\|_{\overline{\overline{W}}}^2\right\}, \quad (21)$$

где $\overline{W}, \overline{\overline{W}}$ – положительно определенные весовые матрицы.

Минимизируя (21), мы получаем оценки неизвестного входа:

$$\hat{f}_i(k) = (S_i^{\mathrm{T}}\,\overline{W}S_i + \overline{\overline{W}})^{-1}\,S_i^{\mathrm{T}}\,\overline{W}[y(k+1) - S_i\,(A_i\,\hat{x}(k) + B_i\,u(k))]. \quad (22)$$

3. Оценка скачкообразного параметра

Из (6) видно, что дополнительный вход в модели (5) будет отсутствовать, если состояние скачкообразного параметра идентифицировано правильно, т.е. $j = i$. Поэтому предлагается алгоритм оценивания параметра $\gamma(k)$ строить на основе определения номера i по оценке (22), для которой евклидова норма минимальна. Отметим, что для повышения точности определения значения оценки скачкообразного параметра $\hat{\gamma}(k)$ предлагается использовать предварительное экспоненциальное сглаживание значения нормы $\left\|\hat{f}_i(k)\right\|$.

Значение параметра определяется по следующему алгоритму:

1) вычисляется норма оценки неизвестного вектора $\psi(i,k) = \| \hat{f}_i(k) \|$ для всех $\gamma = \gamma_i$ $(i = \overline{1,r})$;

2) выполняется экспоненциальное сглаживание для значений $\psi(i,k)$

$$\psi_s(i,k+1) = \alpha\, \psi(i,k) + (1-\alpha)\psi_s(i,k),\ i = \overline{1,r}, \tag{23}$$

где α – коэффициент сглаживания;

3) для каждого момента времени k определяется значение i, для которого сглаженное значение нормы $\psi_s(i,k)$ минимально ($i = \arg\min\{\psi_s(i,k)\}$).

В качестве оценки $\hat{\gamma}(k)$ выбирается γ_i, у которого значение индекса i определено в п. 3 алгоритма.

4. Результаты моделирования

Рассмотрим задачу моделирования алгоритма фильтрации и диагностики для дискретной системы с мультипликативными возмущениями и тремя состояниями цепи $\gamma(k)$ $(\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 2,\ \gamma_3 = 3)$ со следующей матрицей вероятностей перехода:

$$[p_{i,j}] = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Моделирование выполнено на интервале времени $k \in [0, 400]$ для следующих исходных данных:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 \\ -0,05 & 0,94 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,05 \\ -0,02 & 0,45 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,12 \\ -0,04 & 0,62 \end{pmatrix},\ B_1 = B_2 = B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u(k) = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix},\ Q_1 = \begin{pmatrix} 0,005 & 0 \\ 0 & 0,005 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{pmatrix},\ Q_3 = \begin{pmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,0005 \end{pmatrix},$$

$$W_1 = 1,\ W_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix},\ S_1 = S_2 = S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},\ V_1 = V_2 = V_3 = 0,01.$$

Оценки фильтрации рассчитываются по формулам (18)–(20), (22). Параметр $\gamma(k)$ оценивался с помощью алгоритма, описанного в разд. 3.

Результаты моделирования приведены на рис. 1–4, которые иллюстрируют качество оценивания и идентификации.

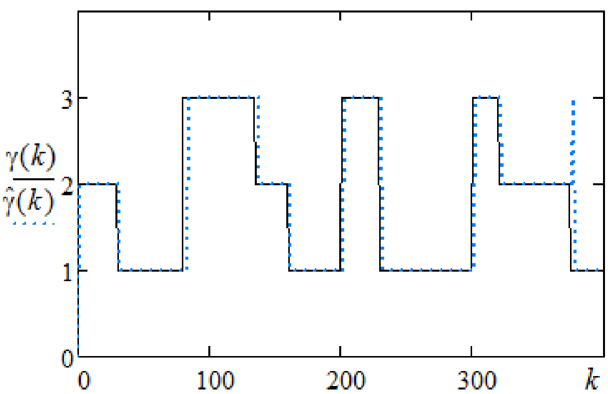

Рис. 1. Значения параметра $\gamma(k)$ и оценки $\hat{\gamma}(k)$

Fig. 1. Parameter value $\gamma(k)$ and estimate $\hat{\gamma}(k)$

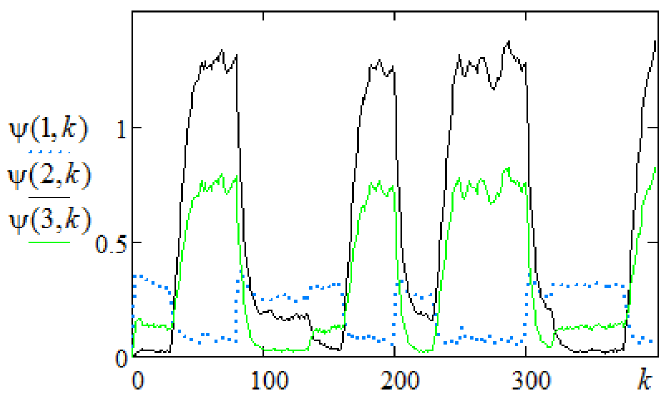

Рис. 2. Сглаженные величины норм $\psi(i,k)$ ($i = \overline{1,3}$)

Fig. 2. Smoothed values of norms $\psi(i,k)$ ($i = \overline{1,3}$)

На рис. 1 видно, что ошибки идентификации возникают в момент изменения значения параметра перехода. На рис. 2 показано, что минимальному значению нормы $\psi(i,k)$ соответствует номер i, который принимается за оценку скачкообразного параметра $\hat{\gamma}(k)$.

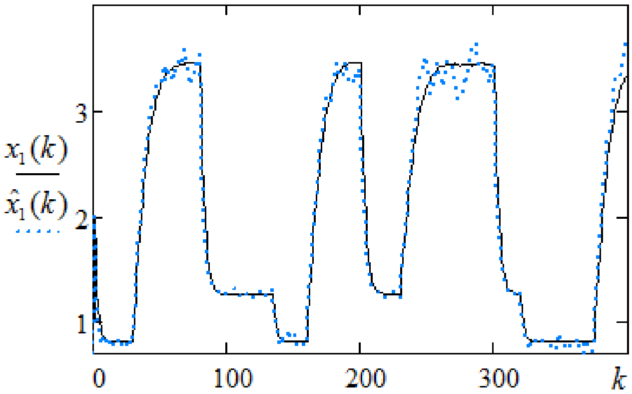

Рис. 3. Графики компоненты вектора состояния $x_1(k)$ и ее оценки $\hat{x}_1(k)$

Fig. 3. Graphs of the component of state vector $x_1(k)$ and its estimate $\hat{x}_1(k)$

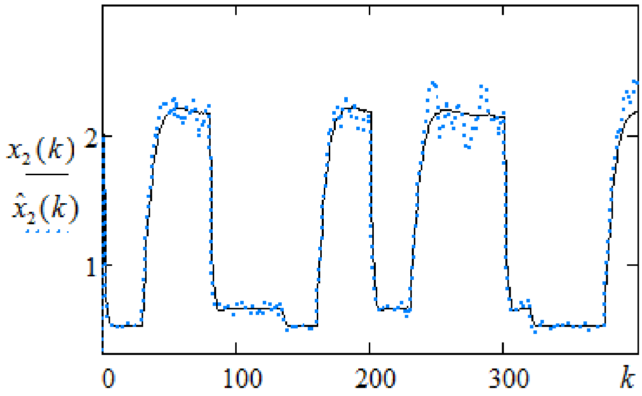

Рис. 4. Графики компоненты вектора состояния $x_2(k)$ и ее оценки $\hat{x}_2(k)$

Fig. 4. Graphs of the component of state vector $x_2(k)$ and its estimate $\hat{x}_2(k)$

С помощью метода статистического моделирования (для 100 реализаций) получили, что процент ошибочных оценок значений параметров $\gamma(k)$ составляет 5,75%.

Заключение

Получено решение задачи синтеза алгоритма фильтрации вектора состояния и идентификации значения скачкообразного параметра, входящего в описание линейной дискретной системы с аддитивными и мультипликативными возмущениями. Задача решена посредством интерпретации модели в виде модели системы с неизвестным входным вектором, который появляется при ошибке идентификации скачкообразного параметра. Значение оценки скачкообразного параметра предлагается определять из условия минимума сглаженной нормы оценки вектора неизвестного входа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ugrinovskii V.A., Pota H.R. Decentralized control of power systems via robust control of uncertain Markov jump parameter systems // Int. J. Control. 2005. V. 78. P. 662–677.
2. Sales-Setien E., Penarrocha-Alos I. Markovian jump system approach for the estimation and adaptive diagnosis of decreased power generation in wind farms // Iet Control Theory and Applications, 2019. V. 13, is. 18. P. 3006–3018.
3. Zhang H., Gray W.S., Gonzalez O.R. Performance analysis of recoverable flight control systems using hybrid dynamical models // Proc. American Control Conf. 2005 (ACC). Portland. Jun. 08–10. 2005. P. 2787–2792.
4. Zhu Y., Zhong Z., Zheng W.X. and etc. HMM-based H-infinity filtering for discrete-time Markov jump LPV systems over unreliable communication channels // IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-Systems. 2018. V. 48, is. 12. P. 2035–2046.
5. Wang J., Yao F., Shen H. Dissipativity-based state estimation for Markov jump discrete-time neural networks with unreliable communication links // Neurocomputing. 2014. V. 139/SI. P. 107–113.
6. Wang H., Wang C., Gao H., Wu L. An LMI approach to fault detection and isolation filter design for Markovian jump system with mode-dependent time-delays // Proc. of the American Control Conf., Minneapolis, USA. 2006. P. 5686–5691.
7. Yao X., Wu L., Zheng W.X. Fault detection filter design for Markovian jump singular systems with intermittent measurements // IEEE Transactions on Signal Processing. 2011. V. 59/7. P. 3099–3109.
8. Gagliardi G., Casavola A., Famularo D.A. Fault detection and isolation filter design method for Markov jump linear parameter-varying systems // Int. Journal of Adaptive Control and Signal. Processing. 2012. V. 26, is. 3/SI. P. 241–257.
9. Домбровский В.В., Пашинская Т.Ю. Прогнозирующее управление системами с марковскими скачками и авторегрессионным мультипликативным шумом с марковским переключением режимов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 44. С. 4–9.
10. Dombrovskij V.V., Pashinskaya T.Y. Design of model predictive control for constrained Markov jump linear systems with multiplicative noises and online portfolio selection // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2020. V. 30, No. 3. P. 1050–1070.
11. Costa O.L.V., Benites G.R.A.M. Linear minimum mean square filter for discrete-time linear systems with Markov jumps and multiplicative noises // Automatica. 2011. V. 47, No. 3. P. 466–476.

12. Liu W. On State Estimation of Discrete-Time Linear Systems with Multiplicative Noises and Markov Jumps // 32nd Chinese Control Conference. Xian, CHINA. JUL 26–28, 2013. P. 3744–3749.
13. Costa O.L.V., Benites G.R.A.M. Robust mode-independent filtering for discrete-time Markov jump linear systems with multiplicative noises // Int. J. of Control. 2013. V. 86, No. 5. P. 779–793.
14. Geng H., Wang Z., Liang Y. et al. State estimation for asynchronous sensor systems with Markov jumps and multiplicative noises // Information Sciences. 2017. V. 417. P. 1–19.
15. Смагин В.И., Поползухина Е.В. Синтез следящих систем управления для объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 271. С. 171–174.
16. Смагин В.И., Ломакина С.С. Робастные следящие регуляторы для непрерывных систем со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // Автоматика и вычислительная техника. 2004. № 4. С. 31–43.
17. Janczak D., Grishin Y. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cybernetics. 2006. V. 35/4. P. 851–862.
18. Gillijns S., Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // Automatica. 2007. V. 43. P. 111–116.
19. Смагин В.И., Смагин С.В. Фильтрация в линейных дискретных нестационарных системах с неизвестными возмущениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 3(16). С. 43–51.
20. Smagin V., Koshkin G., Udod V. State estimation for linear discrete-time systems with unknown input using nonparametric technique // ACSR-Advances in Computer Science Research. 2015. V. 18. P. 675–677.
21. Смагин В.И. Прогнозирование состояний дискретных систем при неизвестных входах с использованием компенсаций // Известия вузов. Физика. 2016. Т. 59, № 9. С. 162–167.
22. Kim K.S., Smagin V.I. Robust filtering for discrete systems with unknown inputs and jump parameters // Automatic Control and Computer Sciences. 2020. V. 54, No. 1. P. 1–9.
23. Athans M. The matrix minimum principle // Information and Control. 1968. V. 11. P. 592–606.
24. Li F., Shi P., Wu L. Control and filtering for semi-markovian jump systems. New York : Springer, 2016. 208 p.

Поступила в редакцию 8 ноября 2019 г.

Kim K.S., Smagin V.I. (2020) FILTRATION AND DIAGNOSTICS IN DISCRETE STOCHASTIC SYSTEMS WITH JUMP PARAMETERS AND MULTIPLICATIVE PERTURBATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 79–86

DOI: 10.17223/19988605/51/9

Let an model with multiplicative perturbations and jump parameters be described by the equation

$$x(k+1)=A_{\gamma(k)}x(k)+B_{\gamma(k)}u(k)+\sum_{s=1}^{m}A_{s,\gamma(k)}x(k)\theta_{s,\gamma(k)}(k)+q_{\gamma(k)}(k),\ x(0)=x_0,$$

where $x(k)\in \mathrm{R}^n$ is the state vector, $\gamma=\gamma(k)$ is the Markov chain with *r* states ($\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_r$); x_0 is a random vector (the variance $N_{0,i}=\mathrm{M}\{(x_0-\bar{x}_0)(x_0-\bar{x}_0)^{\mathrm{T}}/\gamma=\gamma_i\}$, and the expectation $\bar{x}_0=\mathrm{M}\{x_0\}$ are assumed to be known) $i=\overline{1,r}$; $A_{\gamma(k)}$, $B_{\gamma(k)}$, $A_{s,\gamma(k)}$ are the known matrices; $u(k)\in\mathrm{R}^m$ is the known vector; $q_{\gamma(k)}(k),\theta_{s,\gamma(k)}$ are the Gaussian random vector sequences with the following characteristics: $\mathrm{M}\{q_{\gamma(k)}(k)\}=0$, $\mathrm{M}\{\theta_{\gamma(k)}(k)\}=0$, $\mathrm{M}\{q_{\gamma(k)}(k)q^{\mathrm{T}}_{\gamma(k)}(j)/\gamma(\xi)=\gamma(k),k\le\xi\le j\}=Q_{\gamma(k)}\delta_{kj}$, $\mathrm{M}\{\theta_{\gamma(k)}(k)\theta^{\mathrm{T}}_{\gamma(k)}(j)/\gamma(\xi)=$ $=\gamma(k),k\le\xi\le j\}=\Theta_{\gamma(k)}\delta_{kj}$. The probabilities of states of a jump process $p_j(k)=P\{\gamma(k)=j\}$, $j=\overline{1,r}$ satisfy the equations

$$p_j(k+1)=\sum_{i=1}^{r}p_i(k)p_{i,j},\ p_j(0)=p_{j,0},\ j=\overline{1,r},$$

where $p_{i,j}$ is the probability of the transition from state *i* to state *j*.

The observation vector is determined by the formula

$$y(k)=S_{\gamma(k)}x(k)+v_{\gamma(k)}(k),$$

where $v_{\gamma(k)}(k)$ is the Gaussian random sequence ($\mathrm{M}\{v_{\gamma(k)}(k)\}=0$, $\mathrm{M}\{v_{\gamma(k)}(k)v^{\mathrm{T}}_{\gamma(k)}(j)/\gamma(\xi)=\gamma(k),k\le\xi\le j\}=V_{\gamma(k)}\delta_{kj}$).

The solution to the synthesis problem for filtering the state vector $\hat{x}(k)$ and identifying the value of the jump parameter $\hat{\gamma}(k)$ included in the description of a linear discrete system with additive and multiplicative perturbations is obtained. The problem is solved by introducing into the model of the system an unknown input vector that appears when the identification error of a jump parameter and the use of Kalman filtering with an unknown input.

Keywords: Kalman filtering; diagnostics of the Markov chain; multiplicative disturbances; unknown input.

KIM Konstantin Stanislavovich (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: kks93@rambler.ru

SMAGIN Valery Ivanovich (Doctor of Technical Science, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: vsm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Ugrinovskii, V.A. & Pota, H.R. (2005) Decentralized control of power systems via robust control of uncertain Markov jump parameter systems. *International Journal of Control*. 78. pp. 662–677. DOI: 10.1109/CDC.2004.1429255
2. Sales-Setien, E. & Penarrocha-Alos, I. (2019) Markovian jump system approach for the estimation and adaptive diagnosis of decreased power generation in wind farms. *Iet Control Theory and Applications*. 13(18). pp. 3006–3018. DOI: 10.1049/iet-cta.2018.6199
3. Zhang, H., Gray, W.S. & Gonzalez, O.R. (2005) Performance analysis of recoverable flight control systems using hybrid dynamical models. *Proc. American Control Conference 2005 (ACC)*. Portland. June 08-10. pp. 2787–2792. DOI: 10.1109/ACC.2005.1470391
4. Zhu, Y., Zhong, Z., Zheng, W.X. & et al. (2018) HMM-based H-infinity filtering for discrete-time Markov jump LPV systems over unreliable communication channels. *IEEE Trans. on Systems Man Cybernetics-Systems*. 48(12). pp. 2035–2046. DOI: 10.1109/TSMC.2017.2723038
5. Wang, J., Yao, F. & Shen, H. (2014) Dissipativity-based state estimation for Markov jump discrete-time neural networks with unreliable communication links. *Neurocomputing*. 139/SI. pp. 107–113. DOI: 10.1016/j.neucom.2014.02.055
6. Wang, H., Wang, C., Gao, H. & Wu, L. (2006) An LMI approach to fault detection and isolation filter design for Markovian jump system with mode-dependent time-delays. *Proc. of the American Control Conf.* Minneapolis, USA. pp. 5686–5691. DOI: 10.1109/ACC.2006.1657631
7. Yao, X., Wu, L. & Zheng, W.X. (2011) Fault detection filter design for Markovian jump singular systems with intermittent measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 59/7. pp. 3099–3109. DOI: 10.1109/TSP.2011.2141666
8. Gagliardi, G., Casavola, A. & Famularo, D.A. (2012) A fault detection and isolation filter design method for Markov jump linear parameter-varying systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 26(3/ SI). pp. 241–257. DOI: 10.1002/acs.1261
9. Dombrovskii, V.V. & Pashinskaya, T.Yu. (2018) Predictive control for markov jump systems with markov switching autoregressive multiplicative noise. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo univer-siteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 44. pp. 4–9. DOI: 10.17223/19988605/44/1
10. Dombrovskii, V.V. & Pashinskaya. T.Y. (2020) Design of model predictive control for constrained Markov jump linear systems with multiplicative noises and online portfolio selection. *International Journal of Robust Nonlinear Control*. 30(3). pp. 1050–1070. DOI: 10.1002/rnc.4807
11. Costa, O.L.V. & Benites, G.R.A.M. (2011) Linear minimum mean square filter for discrete-time linear systems with Markov jumps and multiplicative noises. *Automatica*. 47(3). pp. 466–476. DOI: 10.1016/j.automatica.2011.01.015
12. Liu, W. (2013) On State Estimation of Discrete-Time Linear Systems with Multiplicative Noises and Markov Jumps. *32nd Chinese Control Conference*. Xian, China. JUL 26-28. pp. 3744–3749.
13. Costa, O.L.V. & Benites, G.R.A.M. (2013) Robust mode-independent filtering for discrete-time Markov jump linear systems with multiplicative noises. *International Journal of Control*. 86(5). pp. 779–793. DOI: 10.1080/00207179.2012.760047
14. Geng, H., Wang, Z., Liang, Y. et al. (2017) State estimation for asynchronous sensor systems with Markov jumps and multiplicative noises. *Information Sciences*. 417. pp. 1–19. DOI: 10.1016/j.ins.2017.07.001
15. Smagin, V.I. & Popolzukhina, E.V. (2000) Synthesis of tracking control systems for objects with random jump parameters and multiplicative perturbations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 271. pp. 171–174.
16. Smagin, V.I. & Lomakina, S.S. (2004) Robastnye sledyashchie regulyatory dlya nepreryvnykh sistem so sluchaynymi skachkoobraznymi parametrami i mul'tiplikativnymi vozmushcheniyami [Robust tracking controllers for continuous systems with random jump parameters and multiplicative perturbations]. *Automatic Control and Computer Sciences*. 4. pp. 31–43.
17. Janczak, D. & Grishin, Y. (2006) State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 35/4 pp. 851–862.
18. Gillijns, S. & Moor, B. (2007) Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*. 43. pp. 111–116. DOI: 10.1016/j.automatica.2006.11.016
19. Smagin, V.I. & Smagin, S.V. (2011) Filtering for linear not stationary discrete system with unknown disturbances. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(16). pp. 43–51.
20. Smagin, V., Koshkin, G. & Udod, V. (2015) State estimation for linear discrete-time systems with unknown input using nonparametric technique. *ACSR-Advances in Computer Science Research*. 18. pp. 675–677. DOI: 10.2991/cisia-15.2015
21. Smagin, V.I. (2017) Prediction of states of discrete systems with unknown input of the model using compensation. *Russian Physics Journal*. 59(9). pp. 1507–1514. DOI: 10.1007/s11182-017-0937-6
22. Kim, K.S. & Smagin, V.I. (2020) Robust filtering for discrete systems with unknown inputs and jump parameters. *Automatic Control and Computer Sciences*. 54(1). pp. 1–9. DOI: 10.3103/S014641162001006X
23. Athans, M. (1968) The matrix minimum principle. *Information and Control*. 11. pp. 592–606. DOI: 10.1016/S0019-9958(67)90803-0
24. Li, F., Shi, P. & Wu, L. (2016) *Control and filtering for semi-markovian jump systems.* New York: Springer.