

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2020

№ 66

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Абу Салеем Ахмад, Рустанов А.Р., Харитонов С.В. Аксиома Ф-голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей для обобщенных многообразий Кенмоцу	5
Ажгалиев Ш.У., Абикинова Ш.К. Об оценке снизу в задаче приближенного восстановления функций по их значениям преобразований Радона	24
Старченко А.В., Барт А.А., Кижнер Л.И., Данилкин Е.А. Мезомасштабная метеорологическая модель TSUNM3 для исследования и прогнозирования состояния метеопараметров приземного слоя атмосферы над крупным населенным пунктом	35
Тимошенко Е.А. Тензорное произведение модулей над csp -кольцами	56
Шабловский О.Н. Нелинейные бегущие волны и «отрицательная теплоёмкость» в среде с конкурирующими источниками	64

МЕХАНИКА

Архипов В.А., Басалаев С.А., Золоторёв Н.Н., Перфильева К.Г. Осаждение бидисперсного кластера твердых сферических частиц	77
Дмитриев А.В., Зятиков П.Н. Закономерности изменений параметров процессов переноса многокомпонентных углеводородных газовых сред в условиях сепарации	86
Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении первой основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами	96
Кузнецов Ф.Ю. Электромагнитный способ частотного анализа поперечных колебаний стержня	112
Садин Д.В., Беляев Б.В., Давидчук В.А. Влияние релаксационных процессов на фокусировку ударной волны в облаке газовзвеси	121
Сумбатян М.А., Бердник Я.А., Бондарчук А.А. Итерационный метод для уравнений Навье – Стокса в задаче обтекания тонкой пластинки потоком вязкой несжимаемой жидкости	132
Юлдашев А., Пирматов Ш.Т. Алгоритмизация решения динамических краевых задач теории гибких прямоугольных пластин	143
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	158

CONTENTS

MATHEMATICS

Abu-Saleem Ahmad, Rustanov A.R., Kharitonova S.V. Axiom of Φ -holomorphic $(2r+1)$ -planes for generalized Kenmotsu manifolds	5
Azhgaliyev Sh., Abikenova Sh. On the lower bound in the problem of approximate reconstruction of functions by values of the Radon transform	24
Starchenko A.V., Bart A.A., Kizhner L.I., Danilkin E.A. Mesoscale meteorological model TSUNM3 for the study and forecast of meteorological parameters of the atmospheric surface layer over a major population center	35
Timoshenko E.A. Tensor product of modules over csp-rings	56
Shablovskii O.N. Nonlinear waves and "negative heat capacity" in a medium with competitive sources	64

MECHANICS

Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Zolotorev N.N., Perfilieva K.G. Sedimentation of a bidispersed cluster of solid spherical particles	77
Dmitriev A.V., Zyatikov P.N. Of the variation of parameters of transfer processes for multicomponent hydrocarbon gas media under separation	86
Ivanychev D.A. A method of boundary states in a solution to the first fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces	96
Kuznetsov F.Yu. An electromagnetic method for frequency analysis of transverse vibrations of a beam	112
Sadin D.V., Belyaev B.V., Davidchuk V.A. Effect of relaxation processes on the shock wave focusing in a gas suspension cloud	121
Sumbatyan M.A., Berdnik Ya.A., Bondarchuk A.A. An iterative method for the navier-stokes equations in the problem of a viscous incompressible fluid flow around a thin plate	132
Yuldashev A., Pirmatov Sh.T. Algorithmization of solving dynamic edge problems of the theory of flexible rectangular plates	143
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	158

МАТЕМАТИКА

УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/66/1

MSC 2020: 53C25, 53D15

Абу Салеем Ахмад, А.Р. Рустанов, С.В. Харитоновна

**АКСИОМА Φ -ГОЛОМОРФНЫХ $(2r+1)$ -ПЛОСКОСТЕЙ
ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ КЕНМОЦУ**

Изучаются обобщенные многообразия Кенмоцу, удовлетворяющие аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей, получена полная классификация таких многообразий. Приведено аналитическое выражение тензора Φ -голоморфной секционной кривизны обобщенных многообразий Кенмоцу точно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны. Выделены два класса обобщенных многообразий Кенмоцу, дана их локальная характеристика.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, структура Кенмоцу, обобщенное многообразие Кенмоцу, специальное обобщенное многообразие Кенмоцу, аксиома Φ -голоморфных плоскостей, Φ -голоморфное многообразие, Φ -параконтактное многообразие.

Почти контактные метрические многообразия на протяжении длительного периода являются предметом активного исследования во всем мире. Особый интерес представляет изучение почти контактных метрических многообразий, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей [1–9], а также исследование почти контактных метрических многообразий точно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны. Например, доказано, что выполнение аксиомы Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей для сасакиевых и косимплектических многообразий равносильно точечному постоянству их Φ -голоморфной секционной кривизны [1, 2].

Интересным классом почти контактных метрических многообразий, изучению геометрии которого посвящено большое число исследований, является класс многообразий Кенмоцу. Полученные результаты свидетельствуют о ключевой роли этих многообразий в геометрии почти контактных метрических многообразий. Значительно меньше информации имеется о многообразиях, являющихся обобщениями многообразий Кенмоцу.

В данной работе исследуются обобщенные многообразия Кенмоцу, удовлетворяющие аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей. Также выделены для изучения два класса обобщенных многообразий Кенмоцу, мы называем их Φ -голоморфными и Φ -параконтактными обобщенными многообразиями Кенмоцу.

Основной целью работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1.4. Φ -голоморфные обобщенные многообразия Кенмоцу совпадают с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из точнее косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием точнее косимплектической структуры.

Теорема 1.6. Φ -паракомпактное обобщенное многообразие Кенмоцу является специальным обобщенным многообразием Кенмоцу II рода.

Теорема 2.5. Односвязное обобщенное многообразие Кенмоцу удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно одному из следующих многообразий: 1) $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$; 2) $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$; 3) $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}$, снабженных канонической косимплектической структурой.

Работа организована следующим образом. В первом пункте даются необходимые сведения о геометрии почти контактных метрических многообразий, определяются обобщенные многообразия Кенмоцу, для последних приводится полная группа структурных уравнений. Для более подробных сведений мы отсылаем читателя к работам [10–15]. Далее получено аналитическое выражение тензора Φ -голоморфной секционной кривизны обобщенных многообразий Кенмоцу точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны. Затем определяются подклассы Φ -голоморфных и Φ -паракомпактных обобщенных многообразий Кенмоцу и исследуется их локальное строение. Во втором пункте изучается аксиома Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей для обобщенных многообразий Кенмоцу и рассматривается полная классификация односвязных обобщенных многообразий Кенмоцу, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей.

1. Φ -голоморфные и Φ -паракомпактные обобщенные многообразия Кенмоцу

Пусть M – гладкое многообразие, размерности $(2n+1)$, $X(M)$ – C^∞ -модуль гладких векторных полей на многообразии M . В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

Определение 1.1 [6]. *Почти контактной структурой* на многообразии M называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая *контактной формой структуры*, ξ – векторное поле, называемое *характеристическим*, Φ – эндоморфизм модуля $X(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом*. При этом

$$1) \eta(\xi) = 1; \quad 2) \eta \circ \Phi = 0; \quad 3) \Phi(\xi) = 0; \quad 4) \Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi. \quad (1.1)$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, такая, что

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in X(M), \quad (1.2)$$

то четверка $(\eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется *почти контактной метрической* (короче, *АС-) структурой* [6].

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная (метрическая) структура, называется *почти контактным (метрическим)* (короче, *АС-)) многообразием* [6].

Косимметричный тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$, $X, Y \in X(M)$, называется *фундаментальной формой АС-структуры* [6].

Пусть M – АС-многообразие, размерности $(2n+1)$, $X(M)$ – C^∞ -модуль гладких векторных полей на многообразии M .

В модуле $X(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m = \eta \otimes \xi$ и $l = \text{id} - m = -\Phi^2$ [6]; таким образом, $X(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, где $\mathcal{L} = \text{Im}(\Phi) = \ker(\eta)$ – контактное распределение или первое фундаментальное распределение, $\dim \mathcal{L} = 2n$; $\mathcal{M} = \text{Im}(m) = \ker(\Phi) = L(\xi)$ – линейная оболочка

структурного вектора или второе фундаментальное распределение, l и m – проекторы на подмодули $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ соответственно. Распределения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны, $\tilde{\Phi}^2 = -id$, $\langle \tilde{\Phi}X, \tilde{\Phi}Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathbf{X}(M)$, где $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\mathcal{L}}$, следовательно, $\{\tilde{\Phi}|_p, g_p|_{\mathcal{L}}\}$ – эрмитова структура на пространстве $\mathcal{L}|_p$, здесь $p \in M$.

Комплексификация $\mathbf{X}(M)^C$ модуля $\mathbf{X}(M)$ распадается в прямую сумму собственных подпространств структурного эндоморфизма Φ , данные подпространства отвечают собственным значениям $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ и 0 соответственно: $\mathbf{X}(M)^C = D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^0$. Причем проекторами на слагаемые $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ этой прямой суммы будут соответственно эндоморфизмы [6]: $\pi = \sigma \circ l = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ и $\bar{\pi} = \bar{\sigma} \circ l = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$, где $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}\Phi)$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}\Phi)$.

Отображения $\sigma_p: \mathcal{L}_p \rightarrow (D_{\Phi}^{\sqrt{-1}})_p$ и $\bar{\sigma}_p: \mathcal{L}_p \rightarrow (D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}})_p$ являются изоморфизмом и антиизоморфизмом соответственно эрмитовых пространств. Поэтому к каждой точке $p \in M^{2n+1}$ можно присоединить семейство реперов пространства $T_p(M)^C$ вида $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$, где $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma_p(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}_p(e_a)$, $\varepsilon_0 = \xi_p$; $\{e_a\}$ – ортонормированный базис эрмитова пространства $\mathcal{L}_p$. Такой репер называется ***A*-репером** [6]. Используемые здесь и далее индексы $i, j, k, \dots$ принимают значения от 0 до $2n$, индексы $a, b, c, d, \dots$ – значения от 1 до n , и будем считать $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$.

Матрицы компонент тензоров Φ_p и g_p в *A*-репере имеют вид

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где I_n – единичная матрица порядка n . Совокупность таких реперов определяет *G*-структуру на M со структурной группой $\{1\} \times U(n)$, представленной матрицами

$$\text{вида } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \text{ где } A \in U(n) \text{ [6].}$$

Эта *G*-структура называется ***присоединенной*** [6]. Еще раз заметим, что пространство присоединенной *G*-структуры состоит из комплексных реперов, т.е. реперов комплексификации соответствующих касательных пространств. Поэтому, даже имея дело с вещественными тензорами, мы, говоря об их компонентах на пространстве присоединенной *G*-структуры, подразумеваем компоненты комплексных расширений этих тензоров. Также комплексный тензор является комплексным расширением вещественного тензора тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно оператора комплексного сопряжения. Будем называть такой тензор вещественным.

Поскольку Φ и g – тензоры типов $(1,1)$ и $(2,0)$ соответственно, их компоненты на пространстве расслоения всех реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$d\Phi_j^i + \Phi_j^k \theta_k^i - \Phi_k^i \theta_j^k = \Phi_{j,k}^i \omega^k, \quad dg_{ij} - g_{kj} \theta_i^k - g_{ik} \theta_j^k = g_{ij,k} \omega^k, \quad (1.4)$$

где $\{\omega^i\}$, $\{\theta_j^i\}$ – компоненты форм смещения и форм римановой связности без кручения ∇ соответственно; $\{\Phi_{j,k}^i\}$, $\{g_{ij,k}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала Φ и g в этой связности соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит,

$$g_{ij,k} = 0. \quad (1.5)$$

С учетом (1.3) и (1.5) соотношения (1.4) на пространстве присоединенной G -структуры можно записать в форме [6]

$$\begin{aligned} \Phi_{b,k}^a = 0, \Phi_{b,k}^{\hat{a}} = 0, \Phi_{0,k}^0 = 0, \theta_b^a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,k}^a \omega^k, \theta_b^{\hat{a}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,k}^{\hat{a}} \omega^k, \\ \theta_0^a = \sqrt{-1} \Phi_{0,k}^a \omega^k, \theta_0^{\hat{a}} = -\sqrt{-1} \Phi_{0,k}^{\hat{a}} \omega^k, \theta_a^0 = -\sqrt{-1} \Phi_{a,k}^0 \omega^k, \theta_a^{\hat{0}} = \sqrt{-1} \Phi_{a,k}^{\hat{0}} \omega^k, \quad (1.6) \\ \theta_j^i + \theta_j^{\hat{i}} = 0, \theta_0^0 = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\overline{\omega^i} = \omega^{\hat{i}}$, $\overline{\theta_j^i} = \theta_j^{\hat{i}}$, $\overline{\Phi_{j,k}^i} = \Phi_{j,k}^{\hat{i}}$, где $t \rightarrow \bar{t}$ – оператор комплексного сопряжения.

Рассмотрим первую группу структурных уравнений римановой связности

$$d\omega^i = -\theta_j^i \wedge \omega^j. \quad (1.7)$$

При $i = 0$ (1.7) на пространстве присоединенной G -структуры для почти контактного метрического многообразия с учетом (1.3) (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= -\theta_j^0 \wedge \omega^j = -\theta_0^0 \wedge \omega^0 - \theta_a^0 \wedge \omega^a - \theta_a^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{a}} = \\ &= \sqrt{-1} \Phi_{a,k}^0 \omega^k \wedge \omega^a - \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},k}^0 \omega^k \wedge \omega^{\hat{a}} = \\ &= \sqrt{-1} \Phi_{a,0}^0 \omega^0 \wedge \omega^a + \sqrt{-1} \Phi_{a,b}^0 \omega^b \wedge \omega^a + \sqrt{-1} \Phi_{a,\hat{b}}^0 \omega^{\hat{b}} \wedge \omega^a - \\ &- \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},0}^0 \omega^0 \wedge \omega^{\hat{a}} - \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},b}^0 \omega^b \wedge \omega^{\hat{a}} - \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 \omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{a}} = \\ &= \sqrt{-1} \Phi_{a,0}^0 \omega^0 \wedge \omega^a + \sqrt{-1} \Phi_{a,b}^0 \omega^b \wedge \omega^a + \sqrt{-1} (\Phi_{a,\hat{b}}^0 + \Phi_{b,\hat{a}}^0) \omega^{\hat{b}} \wedge \omega^a - \\ &- \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},0}^0 \omega^0 \wedge \omega^{\hat{a}} - \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},b}^0 \omega^b \wedge \omega^{\hat{a}}. \end{aligned}$$

Базис 2-форм образован формами вида

$$\begin{aligned} \{\theta_b^a \wedge \theta_d^c, \theta_b^a \wedge \omega^c, \theta_b^a \wedge \omega^{\hat{c}}, \theta_b^a \wedge \omega^0, \omega^a \wedge \omega^b (a < b), \\ \omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}} (\hat{a} < \hat{b}), \omega^a \wedge \omega^{\hat{b}}, \omega^0 \wedge \omega^a, \omega^0 \wedge \omega^{\hat{a}}\}, \end{aligned}$$

поэтому последнее можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 d\omega^0 &= \sqrt{-1}\Phi_{a,0}^0\omega^0 \wedge \omega^a - \sqrt{-1}\left(\Phi_{a,b}^0\omega^a \wedge \omega^b + \Phi_{a,b}^0\omega^a \wedge \omega^b\right) - \\
 &\quad - \sqrt{-1}\left(\Phi_{a,\hat{b}}^0 + \Phi_{b,a}^0\right)\omega^a \wedge \omega^{\hat{b}} - \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},0}^0\omega^0 \wedge \omega^{\hat{a}} - \\
 &= \sqrt{-1}\Phi_{a,0}^0\omega^0 \wedge \omega^a - \sqrt{-1}\left(\Phi_{a,b}^0\omega^a \wedge \omega^b - \Phi_{b,a}^0\omega^a \wedge \omega^b\right) - \\
 &\quad - \sqrt{-1}\left(\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0\omega^a \wedge \omega^b + \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0\omega^a \wedge \omega^b\right) = \sqrt{-1}\left(\Phi_{a,\hat{b}}^0 + \Phi_{b,a}^0\right)\omega^a \wedge \omega^{\hat{b}} - \\
 &\quad - \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},0}^0\omega^0 \wedge \omega^{\hat{a}} - \sqrt{-1}\left(\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0\omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}} - \Phi_{b,\hat{a}}^0\omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}}\right) = \\
 &\quad \sqrt{-1}\Phi_{a,0}^0\omega^0 \wedge \omega^a - \sqrt{-1}\Phi_{[a,b]}^0\omega^a \wedge \omega^b - \\
 &\quad - \sqrt{-1}\Phi_{(a,\hat{b})}^0\omega^a \wedge \omega^{\hat{b}} - \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},0}^0\omega^0 \wedge \omega^{\hat{a}} - \sqrt{-1}\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0\omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}},
 \end{aligned}$$

где $\Phi_{[j,k]}^i = \Phi_{j,k}^i - \Phi_{k,j}^i$, $\Phi_{(j,k)}^i = \Phi_{j,k}^i + \Phi_{k,j}^i$.

Расписывая аналогично (1.7) для $i = a$ и $i = \hat{a}$, получим первую группу структурных уравнений почти контактного метрического многообразия [6]:

- 1) $d\omega = C_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + C^{ab}\omega_a \wedge \omega_b + C_a^b\omega^a \wedge \omega_b + C_a\omega \wedge \omega^a + C^a\omega \wedge \omega_a$;
- 2) $d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}\omega \wedge \omega_b + B^a{}_b\omega \wedge \omega^b$;
- 3) $d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}\omega \wedge \omega^b + B_a{}^b\omega \wedge \omega_b$,

где $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$ – естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразие M , $\omega_i = g_{ij}\omega^j$ (в частности, $\omega_a = g_{aj}\omega^j = g_{ab}\omega^b + g_{a\hat{b}}\omega^{\hat{b}} + g_{a0}\omega^0 = \omega^{\hat{a}}$, аналогично $\omega_{\hat{a}} = \omega^a$), $\theta_b^a = g_{bi}\theta^{ai} = \theta^{ab}$, $\theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} = g^{\hat{a}i}\theta_{i\hat{b}} = \theta_{\hat{a}\hat{b}}$, где

$$\begin{aligned}
 B^{ab}{}_c &= B^a{}_{\hat{b}c} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},c}^a, \quad B^{abc} = B^a{}_{\hat{b}\hat{c}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^a, \\
 B^{ab} &= B^a{}_{\hat{b}} = \sqrt{-1}\left(\Phi_{0,\hat{b}}^a - \frac{1}{2}\Phi_{\hat{b},0}^a\right), \quad B^a{}_b = \sqrt{-1}\Phi_{0,b}^a, \quad B_{ab}{}^c = B^{\hat{a}}{}_{b\hat{c}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}, \\
 B_{abc} &= B^{\hat{a}}{}_{bc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,c}^{\hat{a}}, \quad B_{ab} = B^{\hat{a}}{}_b = -\sqrt{-1}\left(\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2}\Phi_{b,0}^{\hat{a}}\right), \\
 B_a{}^b &= B^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}, \quad C_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi_{[a,b]}^0, \quad C^{ab} = C_{\hat{a}\hat{b}}^0 = \sqrt{-1}\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0, \\
 C_a{}^b &= B^b{}_a - B_a{}^b, \quad C_a = \sqrt{-1}\Phi_{a,0}^0, \quad C^a = -\sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},0}^0.
 \end{aligned}$$

Определение 1.2 [11]. AC -структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi(X) + \eta(X)\Phi(Y), \quad X, Y \in \mathbf{X}(M),$$

называется **обобщенной структурой Кенмоцу**. AC -многообразие, снабженное обобщенной структурой Кенмоцу называется **обобщенным многообразием Кенмоцу** (коротко, GK -многообразием).

Полная группа структурных уравнений GK -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры имеет вид [12, 14]

$$\begin{aligned} 1) d\omega &= F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b; \\ 2) d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta_b^a\omega \wedge \omega^b; \\ 3) d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta_a^b\omega \wedge \omega_b; \\ 4) d\theta_b^a + \theta_c^a \wedge \theta_b^c &= \left(A_{bc}^{ad} - 2C^{adh}C_{hbc} - \frac{3}{2}F^{ad}F_{bc} \right) \omega^c \wedge \omega_d + \\ &+ \left(-\frac{1}{3}\delta_b^a F_{cd} + \frac{2}{3}\delta_c^a F_{bd} - \frac{2}{3}\delta_d^a F_{bc} \right) \omega^c \wedge \omega^d + \\ &+ \left(\frac{1}{3}\delta_b^a F^{cd} + \frac{2}{3}\delta_b^c F^{da} - \frac{2}{3}\delta_b^d F^{ac} \right) \omega_c \wedge \omega_d, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} C^{abc} &= C^a_{\hat{b}\hat{c}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a, \quad C_{abc} = C^{\hat{a}}_{bc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,c}^{\hat{a}}, \quad F^{ab} = F^a_{\hat{b}} = \sqrt{-1}\Phi_{0,\hat{b}}^a, \\ F_{ab} &= F^{\hat{a}}_b = -\sqrt{-1}\Phi_{a,b}^0, \quad C^{abc} = C^{[abc]}, \quad C_{abc} = C_{[abc]}, \quad \overline{C^{abc}} = C_{abc}, \quad F_{ab} + F_{ba} = 0, \\ F^{ab} + F^{ba} &= 0, \quad \overline{F^{ab}} = F_{ab}, \quad A_{bc}^{[ad]} = 0, \quad A_{[bc]}^{ad} = 0, \quad F_{ad}C^{dbc} = F^{ad}C_{dbc} = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} 1) dF_{ab} - F_{cb}\theta_a^c - F_{ac}\theta_b^c &= -2F_{ab}\omega; \\ 2) dF^{ab} + F^{cb}\theta_c^a + F^{ac}\theta_c^b &= -2F^{ab}\omega; \\ 3) dC_{abc} - C_{dbc}\theta_a^d - C_{adc}\theta_b^d - C_{abd}\theta_c^d &= C_{abcd}\omega^d - 2\delta_{[a}^d F_{bc]}\omega_d - C_{abc}\omega; \\ 4) dC^{abc} + C^{dbc}\theta_d^a + C^{adc}\theta_d^b + C^{abd}\theta_d^c &= C^{abcd}\omega_d - 2\delta_d^{[a} F^{bc]}\omega^d - C^{abc}\omega; \\ 5) dA_{bc}^{ad} + A_{bc}^{hd}\theta_h^a + A_{bc}^{ah}\theta_h^d - A_{hc}^{ad}\theta_b^h - A_{bh}^{ad}\theta_c^h &= A_{bch}^{ad}\omega^h + A_{bc}^{adh}\omega_h + A_{bc0}^{ad}\omega, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} C_{a[bcd]} &= \frac{3}{2}F_{a[b}F_{cd]}; \quad C^{a[bcd]} = \frac{3}{2}F^{a[b}F^{cd]}; \quad A_{bc}^{a[dh]} = 0; \quad A_{b[ch]}^{ad} = 0; \\ A_{b[c}^{ad}C_{gf]d} &= 2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}; \quad A_{bc}^{a[d}C^{gf]c} = 2C_{hbc}C^{ah[d}C^{gf]c}; \\ A_{b[c}^{ad}F_{d|g]} &= \frac{3}{2}F^{ad}F_{b[c}F_{d|g]}; \quad A_{bc}^{a[d}F^{c|g]} = \frac{3}{2}F_{bc}F^{a[d}F^{c|g]}. \end{aligned}$$

Тождество $F^{ad}C_{abc} = 0$ назовем **первым фундаментальным тождеством GK -многообразий**. Тождество $A_{b[c}^{ad}C_{gf]d} = 2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}$ назовем **вторым фундаментальным тождеством GK -многообразий**. Тождество $A_{b[c}^{ad}F_{d|g]} = \frac{3}{2}F^{ad}F_{b[c}F_{d|g]}$ назовем **третьим фундаментальным тождеством GK -многообразий**. Тождество $2F^{ab}F^{cd} = F^{ac}F^{db} + F^{ad}F^{bc}$ назовем **четвертым фундаментальным тождеством GK -многообразий**. Тождество $C_{abcg}C^{gdh} = 0$ назовем **пятым фундаментальным тождеством GK -многообразий**.

Из (1.10:5) следует, что функции $\{A_{ab}^{cd}\}$, определенные на пространстве присоединенной G -структуры, симметричные по верхним и нижним индексам, задают тензор на M^{2n+1} , называемый **тензором Φ -голоморфной секционной кривизны GK -многообразий** или **структурным тензором второго рода** [6]. Этот тензор определяет отображение $A: \mathbf{X}(M) \times \mathbf{X}(M) \times \mathbf{X}(M) \rightarrow \mathbf{X}(M)$, которое задается соотношением $A(X, Y, Z) = A_{ab}^{cd}X^aY^bZ_d\varepsilon_c + A_{ab}^{\hat{c}\hat{d}}X_aY_bZ^{\hat{d}}\varepsilon_{\hat{c}}$. Непосредственным подсчетом, таким же образом, как и в [9], можно проверить, что тензор Φ -голоморфной секционной кривизны GK -многообразий обладает следующими свойствами:

- 1) $A(\Phi X, Y, Z) = A(X, \Phi Y, Z) = -A(X, Y, \Phi Z) = \Phi \circ A(X, Y, Z)$;
- 2) $A(Z, X, \Phi^2 Y) = -A(Z, X, Y)$;
- 3) $\eta \circ A(X, Y, Z) = 0$;
- 4) $A(\xi, Y, Z) = A(X, \xi, Z) = A(X, Y, \xi) = 0$;
- 5) $A(X, Y, Z) = A(Y, X, Z)$;
- 6) $\langle A(X, Y, Z), W \rangle = \langle A(X, Y, W), Z \rangle$; $\forall X, Y, Z, W \in \mathbf{X}(M)$. (1.11)

Теорема 1.1. Тензор Φ -голоморфной секционной кривизны GK -многообразий точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c имеет вид

$$A(X, Y, Z) = \frac{c+1}{2} \left\{ \Phi^2 X \langle \Phi Y, \Phi Z \rangle + \Phi^2 X \langle \Phi Y, \Phi Z \rangle - \Phi X \Omega(Y, Z) - \Phi Y \Omega(X, Z) \right\}, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M). \quad (1.12)$$

Здесь $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ – фундаментальная форма GK -структуры.

Доказательство. Напомним [12], что компоненты тензора Φ -голоморфной секционной кривизны GK -многообразия точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c имеют вид $A_{bc}^{ad} = \frac{c+1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad}$, где $\tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_b^d \delta_c^a$.

Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} A_{bc}^{0d} &= \frac{c+1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{0d} = \frac{c+1}{2} (\delta_b^0 \delta_c^d + \delta_b^d \delta_c^0) = 0, \\ A_{bc}^{\hat{a}\hat{d}} &= \frac{c+1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{\hat{a}\hat{d}} = \frac{c+1}{2} (\delta_b^{\hat{a}} \delta_c^{\hat{d}} + \delta_b^{\hat{d}} \delta_c^{\hat{a}}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо $A_{bc}^{id} = \frac{c+1}{2}(\delta_b^i \delta_c^d + \delta_b^d \delta_c^i)$. Применим процедуру восстановления тождества, описанную в [6], к последнему равенству, которое можно записать так:

$$A(\varepsilon_b, \varepsilon_c, \varepsilon_d) = \frac{c+1}{2}(\langle \varepsilon_c, \varepsilon_d \rangle \varepsilon_b + \langle \varepsilon_b, \varepsilon_d \rangle \varepsilon_c). \quad (1.13)$$

Напомним, что векторы $\{\varepsilon_a\}$ образуют базис подпространства $(D_\Phi^{\sqrt{-1}})_p$, векторы $\{\varepsilon_{\hat{a}}\}$ образуют базис подпространства $(D_\Phi^{-\sqrt{-1}})_p$, а проекторами модуля $X(M)$ на подмодули $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$ являются эндоморфизмы $\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ и $\bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ соответственно, равенство (1.13) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & A(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, \Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y, -\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z) = \\ & = \frac{c+1}{2}(\langle \Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y, -\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z \rangle (\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X) + \\ & + \langle \Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, -\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z \rangle (\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y)), \quad \forall X, Y, Z \in X(M). \end{aligned}$$

Расписывая полученное равенство по линейности и выделяя действительную и мнимую части, получим эквивалентное тождество:

$$\begin{aligned} & A(\Phi^2 X, \Phi^2 Y, \Phi^2 Z) + A(\Phi^2 X, \Phi Y, \Phi Z) + A(\Phi X, \Phi^2 Y, \Phi Z) - \\ & - A(\Phi X, \Phi Y, \Phi^2 Z) = \frac{c+1}{2}(\Phi^2 X \langle \Phi^2 Y, \Phi^2 Z \rangle + \Phi^2 X \langle \Phi Y, \Phi Z \rangle + \\ & + \Phi X \langle \Phi^2 Y, \Phi Z \rangle - \Phi X \langle \Phi Y, \Phi^2 Z \rangle + \Phi^2 Y \langle \Phi^2 X, \Phi^2 Z \rangle + \\ & + \Phi^2 Y \langle \Phi X, \Phi Z \rangle + \Phi Y \langle \Phi^2 X, \Phi Z \rangle - \Phi Y \langle \Phi X, \Phi^2 Z \rangle), \quad \forall X, Y, Z \in X(M). \quad (1.14) \end{aligned}$$

С учетом (1.11), равенств (1.1:4) и (1.2), определения фундаментальной формы GK-структуры, тождество (1.14) примет вид (1.12). ■

Рассмотрим семейство функций $C = \{C_{jk}^i\}$; $C_{\hat{b}\hat{c}}^a = C^{abc}$; $C_{bc}^{\hat{a}} = C_{abc}$; все прочие компоненты семейства C – нулевые. Из (1.10) следует, что эта система функций, определенная на пространстве присоединенной G -структуры, задает глобально определенный тензор типа (2,1) на многообразии M , который называем **первым структурным тензором** GK-структуры. Аналогично, система функций $F = \{F_j^i\}$; $F_{\hat{b}}^a = F^{ab}$; $F_{ab}^{\hat{a}} = F_{ab}$, определенная на пространстве присоединенной G -структуры, задает глобально определенный тензор типа (1,1) на многообразии M , который называем **вторым структурным тензором** GK-структуры.

Первый структурный тензор GK -многообразий имеет следующий вид:

$$C(X, Y) = -\frac{1}{4} \{ \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi) \Phi X + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi) \Phi^2 X \}; \quad X, Y \in X(M).$$

Второй структурный тензор GK -многообразий имеет вид

$$F(X) = -\nabla_X \xi; \quad X \in X(M).$$

Легко проверить, что первый и второй структурные тензоры GK -многообразий обладают следующими свойствами:

- 1) $C(\xi, X) = C(X, \xi) = 0$;
- 2) $C(X, Y) = -C(Y, X)$;
- 3) $C(\Phi X, Y) = -C(X, \Phi Y) = -\Phi \circ C(X, Y)$;
- 4) $\eta \circ C(X, Y) = 0$;
- 5) $\langle \langle C(X, Y), Z \rangle \rangle + \overline{\langle \langle Y, C(X, Z) \rangle \rangle} = 0$;
- 6) $\Phi \circ F(X) = -F(\Phi X)$;
- 7) $F(\xi) = 0$; 8) $\eta \circ F(X) = 0$; $\forall X, Y, Z \in X(M)$.

Определение 1.3 [11]. GK -структура называется *специальной обобщенной структурой Кенмоцу I рода* (кратко, *SGK-структурой I рода*), если $C^{dbc} = 0$ и $C_{dbc} = 0$; *специальной обобщенной структурой Кенмоцу II рода* (кратко, *SGK-структурой II рода*), если $F^{ad} = 0$ и $F_{ad} = 0$. Если $C^{dbc} = 0$, $C_{dbc} = 0$, $F^{ad} = 0$ и $F_{ad} = 0$, то GK -структура является структурой Кенмоцу.

Напомним, что ненулевые компоненты тензора Римана – Кристоффеля GK -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры имеют вид [12, 14]:

$$\begin{aligned} 1) R_{00b}^a &= F^{ac} F_{cb} + \delta_b^a; \\ 2) R_{bcd}^a &= \frac{1}{3} (-2\delta_b^a F_{cd} + \delta_c^a F_{db} + \delta_d^a F_{bc}); \\ 3) R_{bcd}^a &= A_{bc}^{ad} - C^{adh} C_{hbc} - \frac{1}{2} F^{ad} F_{bc} - \delta_c^a \delta_b^d; \\ 4) R_{bcd}^a &= 2C^{abh} C_{hcd} + F^{ab} F_{cd} - 2\delta_{[c}^a \delta_{d]}^b; \\ 5) R_{bcd}^{\hat{a}} &= C_{acdb} - \frac{1}{2} (F_{ab} F_{cd} + F_{ac} F_{db} + F_{ad} F_{bc}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Плюс соотношения, полученные с учетом классических свойств симметрии тензора R .

Компоненты (1.15) являются основными инвариантами римановой кривизны. В данной работе исследуем геометрический смысл обращения в нуль инвариантов R_{bcd}^a и $R_{bcd}^{\hat{a}}$.

Применим к равенству $R_{bcd}^a = 0$ процедуру восстановления тождества. В фиксированной точке $p \in M$ соотношение $R_{bcd}^a = 0$ равносильно равенству $\{R(\varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{d}}) \varepsilon_b\}^a \varepsilon_a = 0$. Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 1.1, получим

$$\begin{aligned}
& \Phi^2 \circ R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) \Phi^2 Z + \Phi^2 \circ R(\Phi^2 X, \Phi Y) \Phi Z - \\
& - \Phi^2 \circ R(\Phi X, \Phi^2 Y) \Phi Z + \Phi^2 \circ R(\Phi X, \Phi Y) \Phi^2 Z - \\
& - \Phi \circ R(\Phi X, \Phi^2 Y) \Phi^2 Z + \Phi \circ R(\Phi^2 X, \Phi Y) \Phi^2 Z - \\
& - \Phi \circ R(\Phi^2 X, \Phi Y) \Phi Z - \Phi \circ R(\Phi X, \Phi Y) \Phi Z = 0, \quad X, Y, Z \in \mathbf{X}(M). \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Поскольку компонента R_{bcd}^a тензора римановой кривизны используется при исследовании почти контактных метрических многообразий точно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны (см. предложение 12 [6]), то введем следующее

Определение 1.4. Назовем *тензор римановой кривизны почти контактного многообразия Φ -голоморфным*, если он удовлетворяет (1.16).

Определение 1.5. Обобщенное многообразие Кенмоцу с Φ -голоморфным тензором римановой кривизны назовем *Φ -голоморфным*.

Теорема 1.2. Обобщенное многообразие Кенмоцу является Φ -голоморфным тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $R_{bcd}^a = 0$.

Доказательство. Обобщенное многообразие Кенмоцу, для которого справедливости тождества $R_{bcd}^a = 0$, как показано выше, является Φ -голоморфным. Расписав тождество (1.16) на пространстве присоединенной G -структуры, можно показать справедливость тождеств $R_{bcd}^a = 0$. Поскольку эти выкладки являются громоздкими и не имеют большого практического значения, мы их приводить не будем. ■

Теорема 1.3. Φ -голоморфное GK -многообразие является SGK -многообразием II рода.

Доказательство. Согласно теореме 1.2, для Φ -голоморфного GK -многообразия имеем $R_{bcd}^a = 0$. Последнее равенство с учетом (1.15:3) равносильно следующему:

$A_{bc}^{ad} - C^{adh} C_{hbc} - \frac{1}{2} F^{ad} F_{bc} - \delta_c^a \delta_b^d = 0$. Симметрируя данное тождество сначала по индексам a и d , а затем по индексам b и c , получим с учетом (1.9),

$A_{(bc)}^{(ad)} = \delta_{(b}^a \delta_{c)}^d$, т.е. $A_{bc}^{ad} = \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad}$, где $\tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_c^a \delta_b^d + \delta_c^d \delta_b^a$. Тогда третье фундамен-

тальное тождество запишется в виде $\left(\frac{1}{2} \tilde{\delta}_{b[c}^{ah} - \frac{3}{2} F^{ah} F_{b[c} \right) F_{|h|d]} = 0$, т.е.

$\delta_b^a F_{cd} + \delta_c^a F_{bd} - \delta_b^a F_{dc} - \delta_d^a F_{bc} = 3F^{ah} (F_{bc} F_{hd} - F_{bd} F_{hc})$. Свернем полученное равенство по индексам a и b , тогда получим $2(n+1)F_{cd} = 3F^{hg} (F_{hc} F_{gd} - F_{hd} F_{gc})$, т.е., с учетом (1.9), $F_{cd} = \frac{3}{2(n+1)} F^{hg} (F_{hc} F_{gd} + F_{dh} F_{gc})$. В силу четвертого фундамен-

тального тождества последнее тождество примет вид $F_{cd} = -\frac{3}{(n+1)} F^{hg} F_{cd} F_{hg}$,

т.е. $F_{cd} \left(1 + \frac{3}{(n+1)} F^{hg} F_{hg} \right) = 0$. Из полученного равенства имеем, что $F_{cd} = 0$.

И по определению 1.3 Φ -голоморфное GK -многообразие является SGK -многообразием II рода. ■

Определение 1.6 [16]. AC -структура называется *точнейше (closely) косимплектической*, если ее контактная форма замкнута и $\nabla_X(\Phi)X = 0$, $X \in \mathbf{X}(M)$.

Используя результаты о SGK -многообразиях II рода, полученные в [11, 12], теорему 1.3 можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 1.4. Φ -голоморфные GK -многообразия совпадают с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из точнейше косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием точнейше косимплектической структуры.

Рассмотрим на пространстве присоединенной G -структуры равенство $R_{bcd}^a = 0$. Как и выше, применив процедуру восстановления тождества к этому равенству, получим

$$\begin{aligned} & \Phi^2 \circ R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) \Phi^2 Z + \Phi^2 \circ R(\Phi^2 X, \Phi Y) \Phi Z + \\ & - \Phi^2 \circ R(\Phi X, \Phi^2 Y) \Phi Z - \Phi^2 \circ R(\Phi X, \Phi Y) \Phi^2 Z + \\ & - \Phi \circ R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) \Phi Z - \Phi \circ R(\Phi^2 X, \Phi Y) \Phi^2 Z - \\ & - \Phi \circ R(\Phi X, \Phi^2 Y) \Phi^2 Z - \Phi \circ R(\Phi X, \Phi Y) \Phi^2 Z - \\ & - \Phi \circ R(\Phi X, \Phi Y) \Phi Z = 0; \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{X}(M). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Поскольку равенство нулю R_{bcd}^a является одним из определяющих условий паракелеровых многообразий [17], то тензор римановой кривизны AC -многообразия, удовлетворяющий условию (1.17), назовем *Φ -параконтактным*.

Определение 1.7. Обобщенное многообразие Кенмоцу назовем *Φ -параконтактным*, если его тензор римановой кривизны является Φ -параконтактным.

Теорема 1.5. Обобщенное многообразие Кенмоцу является Φ -параконтактным тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $R_{bcd}^a = 0$.

Доказательство. Пусть M – Φ -параконтактное обобщенное многообразие Кенмоцу. Расписывая тождество (1.17) на пространстве присоединенной G -структуры, получим, что $R_{bcd}^a = 0$. В силу громоздкости вычислений мы приводить их не будем.

Обратно, если для обобщенного многообразия Кенмоцу выполнено $R_{bcd}^a = 0$, то как показано выше, применение процедуры восстановления тождества к этому равенству приводит нас к тождеству (1.17). ■

Замечание. В силу свойств тензора римановой кривизны, т.е. в силу $R_{bcd}^a + R_{cdb}^a + R_{abc}^a = 0$, из теорем 1.2 и 1.5 следует, что Φ -голоморфное обобщенное

многообразие Кенмоцу является Φ -параcontactным обобщенным многообразием Кенмоцу.

Теорема 1.6. Φ -параcontactное GK -многообразие является SGK -многообразием II рода.

Доказательство. Пусть M – Φ -параcontactное GK -многообразие. Тогда $R_{bcd}^a = 0$ и с учетом (1.15:4) $2C^{abh}C_{hcd} + F^{ab}F_{cd} = 2\delta_{[c}^a\delta_{d]}^b$. Проальтернируем последнее тождество по индексам a и b , тогда с учетом (1.10) имеем $2C^{abh}C_{hcd} + F^{ab}F_{cd} = 2\delta_{[c}^a\delta_{d]}^b$. Полученное тождество свернем с объектом F^{df} , тогда с учетом первого фундаментального тождества $F^{ab}F_{cd}F^{df} = \delta_c^a F^{bf} - \delta_c^b F^{af}$. Полученное равенство свернем по индексам c и f , тогда $F^{ab}\Sigma_{cd}|F_{cd}|^2 = 2F^{ab}$. Из последнего равенства следует:

1) $F^{ab} = 0$, т.е. многообразие M является SGK -многообразием II рода;

2) $\Sigma_{cd}|F_{cd}|^2 = 2$.

Во втором случае рассмотрим третье фундаментальное тождество, т.е.

$A_{b[c}^{ah}F_{h|d]} = \frac{3}{2}F^{ah}F_{b[c}F_{h|d]}$. Свернем это равенство по индексам a и d , тогда

$A_{bc}^{ad}F_{da} - A_{ba}^{ad}F_{dc} = \frac{3}{2}F^{ad}(F_{bc}F_{da} - F_{ba}F_{dc})$. Альтерация последнего тождества по индексам b и c , в силу (1.9), дает

$$A_{a[b}^{ad}F_{d|c]} = -\frac{3}{2}F^{ad}F_{a[b}F_{d|c]}. \quad (1.18)$$

Свернем третье фундаментальное тождество по индексам a и b , тогда имеем

$A_{ac}^{ad}F_{dg} - A_{ag}^{ad}F_{dc} = \frac{3}{2}F^{ad}(F_{ac}F_{dg} - F_{ag}F_{dc})$. Переобозначая индексы в полученном

равенстве,

$$A_{a[b}^{ad}F_{d|c]} = \frac{3}{2}F^{ad}F_{a[b}F_{d|c]}. \quad (1.19)$$

Из (1.18) и (1.19) следует, что $F^{ad}F_{a[b}F_{d|c]} = 0$. Полученное равенство, в силу четвертого фундаментального тождества, можно записать в виде $F^{ad}F_{ad}F_{bc} = 0$, которое, в силу условия $\Sigma_{cd}|F_{cd}|^2 = 2$, запишется в виде $2F_{bc} = 0$. Таким образом, $F_{bc} = 0$, т.е. многообразие является специальным обобщенным многообразием Кенмоцу II рода. ■

Учитывая, что SGK -структура II рода получается каноническим конциркулярным преобразованием точнее косимплектической структуры, и используя локальное строение точнее косимплектического многообразия [18], теорему 1.6 можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 1.7. Односвязное Φ -параcontactное GK -многообразие канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.

2. Аксиома Ф-голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей

Определение 2.1 [4, 5]. $(2n+1)$ -мерное почти контактное метрическое многообразие удовлетворяет **аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей**, $1 \leq r \leq n$, если через каждую точку $p \in M$ для всякого $(2r+1)$ -мерного подпространства $L \subset T_p(M)$ инвариантного относительно действия структурного оператора Φ_p , проходит $(2r+1)$ -мерное вполне геодезическое Ф-инвариантное подмногообразие $N \subset M$, такое, что $T_p(N) = L$.

Теорема 2.1. GK-многообразие, удовлетворяющее аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей, является многообразием Кенмоцу.

Доказательство. Будем рассуждать так же, как и в [4–9].

Пусть M – $(2r+1)$ -мерное обобщенное многообразие Кенмоцу, удовлетворяющее аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей, для любой точки $p \in M$, $L \subset T_p(M)$ – $(2r+1)$ -мерное Ф-инвариантное подпространство, $N \subset M$ – соответствующее вполне геодезическое Ф-инвариантное подмногообразие. В силу нечетномерности N модуль $X(M)$ содержит ненулевой элемент ядра эндоморфизма $\Phi|_N$, а значит, и векторное поле $\xi|_N$, которое мы по-прежнему будем обозначать через ξ .

Фиксируем точку $p \in N$. Пусть $\beta = (p, \beta_0 = \xi_p, \beta_1, \dots, \beta_r, \beta^1, \dots, \beta^r)$ – A -репер комплексификации пространства $T_p(N)$. Если $j: N \rightarrow M$, $N \subset M$ – естественное вложение, то, отождествляя векторы с их образами при отображении $(j_*)_p$ – дифференциале отображения j в точке p , получаем в произвольном A -репере пространства $T_p(M)$ с учетом вещественности j $\beta^\alpha = C_\alpha^a \varepsilon^a, \beta_\alpha = C_\alpha^a \varepsilon_a, \overline{C_\alpha^a} = C_\alpha^a$.

Здесь и далее греческие индексы пробегает значения от 1 до r , латинские – от 1 до n .

Двойственные отношения задаются уравнениями

$$1) \omega^a = C_\alpha^a \theta^\alpha, \quad 2) \omega_a = C_\alpha^a \theta_\alpha, \quad 3) \omega = \theta, \quad (2.1)$$

где $\rho = (p, \theta, \theta^1, \dots, \theta^r, \theta_1, \dots, \theta_r)$ – корепер, дуальный реперу β .

Продифференцируем внешним образом (2.1:1) $d\omega^a = dC_\alpha^a \theta^\alpha + C_\alpha^a d\theta^\alpha$, с учетом (1.8:2) последнее равенство запишется в виде

$$-\theta_b^a \wedge \omega^b + C^{abc} \omega_b \wedge \omega_c - \frac{3}{2} F^{ab} \omega \wedge \omega_b + \delta_b^a \omega \wedge \omega^b = dC_\alpha^a \theta^\alpha + C_\alpha^a d\theta^\alpha.$$

С учетом (2.1) полученное равенство примет вид

$$\begin{aligned} -\theta_b^a \wedge (C_\alpha^b \theta^\alpha) + C^{abc} (C_\alpha^b \theta_\alpha) \wedge (C_\beta^c \theta_\beta) - \frac{3}{2} F^{ab} \theta \wedge (C_\alpha^b \theta_\alpha) + \delta_b^a \theta \wedge (C_\alpha^b \theta^\alpha) = \\ = dC_\alpha^a \theta^\alpha + C_\alpha^a d\theta^\alpha \end{aligned}$$

или

$$C_\alpha^a d\theta^\alpha = -\left(dC_\alpha^a + C_\alpha^b \theta_b^a - C_\alpha^a \theta\right) \wedge \theta^\alpha + C^{abc} C_\alpha^b C_\gamma^c \theta_\beta \wedge \theta_\gamma - \frac{3}{2} F^{ab} C_\alpha^b \theta \wedge \theta_\beta. \quad (2.2)$$

Поскольку $C_\alpha^a C_\gamma^a = \langle C_\alpha^a \varepsilon_a, C_\gamma^b \varepsilon^b \rangle = \langle j(\beta_\alpha), j(\beta^\gamma) \rangle = \langle \beta_\alpha, \beta^\gamma \rangle = \delta_\alpha^\gamma$. Поэтому свертывая (2.2) с C_α^γ , получим

$$d\theta^\gamma = -\left(C_\alpha^\gamma dC_\alpha^a + C_\alpha^\gamma C_\alpha^b \theta_b^a - C_\alpha^\gamma C_\alpha^a \theta\right) \wedge \theta^\alpha + C^{abc} C_\alpha^\gamma C_\alpha^a C_\beta^c \theta_\alpha \wedge \theta_\beta - \frac{3}{2} F^{ab} C_\alpha^\gamma C_\alpha^b \theta \wedge \theta_\beta$$

или

$$d\theta^\alpha = -\theta_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta + C^{abc} C_a^\alpha C_b^\beta C_c^\gamma \theta_\beta \wedge \theta_\gamma - \frac{3}{2} F^{ab} C_a^\alpha C_b^\beta \theta \wedge \theta_\beta, \quad (2.3)$$

где $\theta_\beta^\alpha = C_a^\alpha dC_\beta^a + C_a^\alpha C_\beta^b \theta_b^a - \delta_\beta^\alpha \theta$.

Продифференцируем внешним образом (2.1:2): $d\omega_a = dC_a^\alpha \theta_\alpha + C_a^\alpha d\theta_\alpha$. В полученное равенство подставим (1.3:3):

$$dC_a^\alpha \theta_\alpha + C_a^\alpha d\theta_\alpha = \theta_a^b \wedge \omega_b + C_{abc} \omega^b \wedge \omega^c - \frac{3}{2} F_{ab} \omega \wedge \omega^b + \delta_a^b \omega \wedge \omega_b.$$

Последнее равенство с учетом (2.1) перепишем в виде

$$dC_a^\alpha \theta_\alpha + C_a^\alpha d\theta_\alpha = C_\beta^\gamma \theta_a^b \wedge \theta_\gamma + C_{abc} C_\beta^b C_\gamma^c \theta^\beta \wedge \theta^\gamma - \frac{3}{2} F_{ab} C_\beta^b \theta \wedge \theta^\beta + C_a^\alpha \theta \wedge \theta_\alpha$$

или

$$C_a^\alpha d\theta_\alpha = -\left(dC_a^\alpha - C_\beta^b \theta_a^b - C_a^\alpha \theta\right) \wedge \theta_\alpha + C_{abc} C_\beta^b C_\gamma^c \theta^\beta \wedge \theta^\gamma - \frac{3}{2} F_{ab} C_\beta^b \theta \wedge \theta^\beta.$$

Свертывая последнее равенство с C_γ^a получим

$$\begin{aligned} d\theta_\gamma = & \left(-C_\gamma^a dC_a^\alpha - C_\gamma^a C_\beta^b \theta_a^b - \delta_\gamma^\alpha \theta\right) \wedge \theta_\alpha + \\ & + C_{abc} C_\gamma^a C_\beta^b C_\alpha^c \theta^\beta \wedge \theta^\alpha - \frac{3}{2} F_{ab} C_\gamma^a C_\beta^b \theta \wedge \theta^\beta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Дифференцируя внешним образом соотношение $C_\gamma^a C_a^\alpha = \delta_\gamma^\alpha$, получим $C_\gamma^a dC_a^\alpha + C_a^\alpha dC_\gamma^a = 0$, поэтому (2.4) можно переписать как

$$d\theta_\alpha = -\left(C_\alpha^a dC_a^\gamma + C_\alpha^a C_\beta^b \theta_a^b + \delta_\alpha^\gamma \theta\right) \wedge \theta_\gamma + C_{abc} C_\alpha^a C_\beta^b C_\gamma^c \theta^\beta \wedge \theta^\gamma - \frac{3}{2} F_{ab} C_\alpha^a C_\beta^b \theta \wedge \theta^\beta$$

или
$$d\theta_\alpha = -\theta_\alpha^\gamma \wedge \theta_\gamma + C_{abc} C_\alpha^a C_\beta^b C_\gamma^c \theta^\beta \wedge \theta^\gamma - \frac{3}{2} F_{ab} C_\alpha^a C_\beta^b \theta \wedge \theta^\beta, \quad (2.5)$$

где $\theta_\alpha^\gamma = C_\alpha^a dC_a^\gamma + C_\alpha^a C_\beta^b \theta_a^b + \delta_\alpha^\gamma \theta$.

Далее, с учетом (2.3) соотношение (2.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} C_\alpha^a \left(-\theta_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta + C^{dbc} C_d^\alpha C_b^\beta C_c^\gamma \theta_\beta \wedge \theta_\gamma - \frac{3}{2} F^{cb} C_c^\alpha C_b^\beta \theta \wedge \theta_\beta \right) = \\ = -\left(dC_\alpha^a + C_\alpha^b \theta_b^a - C_\alpha^a \theta\right) \wedge \theta^\alpha + C^{abc} C_b^\beta C_c^\gamma \theta_\beta \wedge \theta_\gamma - \frac{3}{2} F^{ab} C_b^\beta \theta \wedge \theta_\beta \end{aligned}$$

или
$$\begin{aligned} \left(dC_\alpha^a + C_\alpha^b \theta_b^a - C_\alpha^a \theta_\beta^\beta - C_\alpha^a \theta \right) \wedge \theta^\alpha + \left(C^{dbc} C_\alpha^a C_d^\alpha C_b^\beta C_c^\gamma - \right. \\ \left. - C^{abc} C_b^\beta C_c^\gamma \right) \theta_\beta \wedge \theta_\gamma - \frac{3}{2} \left(F^{cb} C_\alpha^a C_c^\alpha C_b^\beta - F^{ab} C_b^\beta \right) \theta \wedge \theta_\beta = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом линейной независимости базисных форм $\{\theta, \theta^\beta, \theta_\beta\}$ и леммы Картана существует набор функций $\{C_{\alpha\beta}^a\}$, таких, что

$$\begin{aligned}
1) \quad & C^{dbc} C_\alpha^a C_d^\alpha C_b^\beta C_c^\gamma - C^{abc} C_b^\beta C_c^\gamma = 0; \\
2) \quad & F^{cb} C_\alpha^a C_c^\alpha C_b^\beta - F^{ab} C_b^\beta = 0; \\
3) \quad & dC_\alpha^a + C_\alpha^b \theta_b^a - C_\beta^a \theta_\alpha^\beta - C_\alpha^a \theta = C_{\alpha\beta}^a \theta^\beta,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $C_{\alpha\beta}^a = C_{\beta\alpha}^a$ – компоненты второй квадратичной формы вложения $N \subset M$. Так как N вполне геодезично, $C_{\alpha\beta}^a = 0$ и, значит,

$$dC_\alpha^a + C_\alpha^b \theta_b^a - C_\beta^a \theta_\alpha^\beta - C_\alpha^a \theta = 0. \tag{2.7}$$

Рассмотрим уравнение (2.6:1). Перепишем его в виде

$$(C^{dbc} C_\alpha^a C_d^\alpha - C^{abc}) C_b^\beta C_c^\gamma = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно относительно $\{C_a^\alpha\}$, то получаем, что $C^{dbc} C_\alpha^a C_d^\alpha - C^{abc} = 0$. Продифференцируем полученное равенство по переменным C_a^α : $C^{dbc} C_d^\alpha = 0$. Откуда следует, что $C^{abc} = 0$. Из уравнения (2.6:2) следует, что $F^{ab} = 0$. И, с учетом определения 1.3, многообразие является многообразием Кенмоцу. ■

В частности, имеем следующие следствия этой теоремы.

Следствие 1. SGK -многообразие I рода, удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей, является многообразием Кенмоцу.

Следствие 2. SGK -многообразие II рода, удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей, является многообразием Кенмоцу.

Теорема 2.2. GK -многообразие удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры компоненты тензора Φ -голоморфной кривизны удовлетворяют со-

отношениям $A_{bc}^{ad} = \frac{1}{(n+1)n} A \tilde{\delta}_{bc}^{ad}$, где $A = A_{bc}^{bc}$.

Доказательство. Пусть M^{2n+1} – GK -многообразие, удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей. Продифференцируем соотношение (2.7) внешним образом: $dC_\alpha^b \wedge \theta_b^a + C_\alpha^b \wedge d\theta_b^a - dC_\gamma^a \wedge \theta_\alpha^\gamma - C_\gamma^a d\theta_\alpha^\gamma - dC_\alpha^a \wedge \theta - C_\alpha^a d\theta = 0$. Подставим сюда значения из (2.1), (2.7), (1.8:1) и (1.8:4), тогда, принимая во внимание теорему 2.1, получим

$$C_\beta^a d\theta_\alpha^\beta + C_\beta^b \theta_\gamma^\beta \wedge \theta_\alpha^\gamma = A_{bc}^{ad} C_\alpha^b C_\gamma^c C_d^\delta \theta^\gamma \wedge \theta_\delta. \tag{2.8}$$

С учетом теоремы 2.1. уравнения (2.3) и (2.5) примут вид

$$d\theta^\alpha = -\theta_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta; \quad d\theta_\alpha = \theta_\alpha^\gamma \wedge \theta_\gamma. \tag{2.9}$$

Дифференцируя внешним образом (2.9) получим

$$d\theta_\beta^\alpha + \theta_\gamma^\alpha \wedge \theta_\beta^\gamma = \lambda_{\beta\gamma}^{\alpha\phi} \theta^\gamma \wedge \theta_\phi. \tag{2.10}$$

Подставим (2.10) в (2.8), тогда $C_\beta^a \lambda_{\alpha\gamma}^{\beta\phi} \theta^\gamma \wedge \theta_\phi = A_{bc}^{ad} C_\alpha^b C_\gamma^c C_d^\delta \theta^\gamma \wedge \theta_\delta$, т.е.

$$C_\beta^a \lambda_{\alpha\gamma}^{\beta\phi} = A_{bc}^{ad} C_\alpha^b C_\gamma^c C_d^\phi. \tag{2.11}$$

Из единственности определения вполне геодезического подмногообразия по его начальным данным в какой-либо точке следует, что из выполнимости аксиомы Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей ($r \geq 1$) на данном многообразии вытекает выполнимость на нем аксиомы 3-плоскостей. Но тогда (2.11) примет вид

$$C^a \lambda = A_{bc}^{ad} C^b C^c C_d. \quad (2.12)$$

Из последнего равенства следует, что λ является однородной функцией первой степени по переменным C^h . Продифференцируем (2.12) по этим переменным:

$\lambda \delta_h^a + C^a \frac{\partial \lambda}{\partial C^h} = A_{bc}^{ad} \delta_h^b C^c C_d + A_{bc}^{ad} \delta_h^c C^b C_d$. Свернем полученное соотношение по индексам a и h . С учетом теоремы Эйлера об однородных функциях и соотношений $A_{[bc]}^{ad} = A_{bc}^{[ad]} = 0$, получим: $\lambda = \frac{2}{n+1} A_c^d C^c C_d$, где $A_c^d = A_{hc}^{hd}$. Подставим это со-

отношение в (2.12): $\left(A_{bc}^{ad} - \frac{2}{n+1} A_c^d \delta_b^a \right) C^b C^c C_d = 0$. В силу произвола в выборе

C^b, C_d , находим отсюда, что $A_{bc}^{ad} = \frac{1}{n+1} (A_b^a \delta_c^d + A_c^a \delta_b^d)$. Свернем полученное соотношение по индексам a и b : $A_c^d = \frac{1}{n} A \delta_c^d$, где $A = A_a^a$, а значит,

$$A_{bc}^{ad} = \frac{A}{n(n+1)} \tilde{\delta}_{bc}^{ad}, \quad (2.13)$$

где $\tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_b^d \delta_c^a$.

Обратное очевидно: система Пфаффа, задающая Φ -голоморфную $(2r+1)$ -плоскость, при выполнении (2.13), вполне интегрируема, а ее интегральные многообразия являются вполне геодезическими подмногообразиями. ■

Согласно теореме 3.5 [12], GK -многообразие M является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры тензор A_{bc}^{ad} имеет вид

$$A_{bc}^{ad} = \frac{c+1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad}.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2.3. GK -многообразие удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей тогда и только тогда, когда оно является многообразием точеч-

но постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны $c = \frac{2}{(n+1)n} A - 1$.

Из теорем 2.1, 2.2 и 2.3 следует

Теорема 2.4. GK -многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны, удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей, является многообразием Кенмоцу.

Используя классификацию полных односвязных многообразий Кенмоцу постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны [13] приходим к основному результату.

Теорема 2.5. Односвязное GK -многообразие удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно одному из следующих многообразий 1) $CP^n \times R$; 2) $C^n \times R$; 3) $CH^n \times R$, снабженных канонической косимплектической структурой.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту, чьи замечания качественно улучшили данную статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ishihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form // Kodai Math. J. 1979. V. 2. No. 2. P. 171–186. DOI:10.2996/kmj/1138036014.
2. Tanno S. Sasakian manifolds with constant Φ -holomorphic sectional curvature // Tohoku Math. J. 1969. V. 21. No. 3. P. 501–507. DOI:10.2748/tmj/1178242960.
3. Ogiue K. On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility // Kodai Math. Semin. Repts. 1964. V. 16. No. 4. P. 223–232. DOI: 10.2996/kmj/1138844949.
4. Кириченко В.Ф. Аксиома Φ -голоморфных плоскостей в контактной геометрии // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1984. Т. 48. № 4. С. 711–734.
5. Кириченко В.Ф. Почти косимплектические многообразия, удовлетворяющие аксиоме Φ -голоморфных плоскостей. // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273. № 2. С. 280–284.
6. Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р. Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий. // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 8. С. 71–100. DOI: 10.4213/sm675.
7. Волкова Е.С. Аксиома Φ -голоморфных плоскостей для нормальных многообразий киллингова типа // Матем. заметки. 2002. Т. 71. Вып. 3. С. 364–372. DOI: 10.4213/mzm352.
8. Рустанов А.Р., Салахов А.З., Хаиров Р.А. Аксиома Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей для почти контактных метрических многообразий класса NC_{10} // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия «Естественно-математические и технические науки». 2017. № 1. С. 19–24.
9. Рустанов А.Р., Харитонова С.В., Казакова О.Н. Аксиома Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей для нормальных $LcACs$ -многообразий // Вестник ОГУ. 2015. № 4 (179). С. 224–238.
10. Abu-Saleem A., Rustanov A.R. Curvature Identities Special Generalized Manifolds Kenmotsu Second Kind // Malaysian J. Mathematical Sciences. 2015. V. 9. No. 2. P. 187–207.
11. Umnova S. V. On conformal invariant of Kenmotsu manifolds // Webs and Quasigroups, Tver State Univ. 2002. P. 155–156.
12. Abu-Saleem Ahmad, Rustanov A.R. Some aspects of the geometry of generalized manifolds Kenmotsu // Far East J. Mathematical Sciences (FJMS). 2018. V. 103. No. 9. P. 1407–1432. DOI: 10.17654/MS103091407.
13. Кириченко В.Ф. О геометрии многообразий Кенмоцу // Доклады Академии наук. 2001. Т. 380(5). С. 585–587.
14. Abu-Saleem Ahmad, Rustanov A.R. Analogs of Gray identities for the Riemannian curvature tensor of generalized Kenmotsu manifolds // International Mathematical Forum. 2017. V. 12. No. 2. P. 87–95. DOI: 10.12988/imf.2017.611149.
15. Абу-Салеем Ахмад, Рустанов А.Р., Харитонова С.В. Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу // Владикавказский математический журнал. 2018. Т. 20(3). С. 4–20. DOI: 10.23671/VNC.2018.3.17829.
16. Blair D.E., Showers D.K. Almost contact manifolds with Killing structure tensors II // J. Diff. Geom. 1974. V. 9. No. 4. P. 577–582. DOI: 10.4310/jdg/1214432556.
17. Rizza G.B. Varieta parakahleriane // Ann. Mat. Pure et Appl. 1974. V. 98. No.4. P. 47–61.
18. Kirichenko V.F. Sur le geometrie des varieties approximativement cosymplectiques // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. 1982. V. 295. No. 1. P. 673–676.

Abu-Saleem Ahmad, Rustanov A.R., Kharitonova S.V. (2020) AXIOM OF Φ -HOLOMORPHIC $(2r+1)$ -PLANES FOR GENERALIZED KENMOTSU MANIFOLDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 5–23

DOI 10.17223/19988621/66/1

Keywords: almost contact metric structure, Kentmotsu structure, generalized Kentmotsu manifold, special generalized Kentmotsu manifold, axiom of Φ -holomorphic planes, Φ -quasi-invariant manifold, Φ -paracontact manifold.

In this paper we study generalized Kenmotsu manifolds (shortly, a GK-manifold) that satisfy the axiom of Φ -holomorphic $(2r+1)$ -planes. After the preliminaries we give the definition of generalized Kenmotsu manifolds and the full structural equation group. Next, we define Φ -holomorphic generalized Kenmotsu manifolds and Φ -paracontact generalized Kenmotsu manifold give a local characteristic of this subclasses. The Φ -holomorphic generalized Kenmotsu manifold coincides with the class of almost contact metric manifolds obtained from closely cosymplectic manifolds by a canonical concircular transformation of nearly cosymplectic structure. A Φ -paracontact generalized Kenmotsu manifold is a special generalized Kenmotsu manifold of the second kind. An analytical expression is obtained for the tensor of Φ -holomorphic sectional curvature of generalized Kenmotsu manifolds of the pointwise constant Φ -holomorphic sectional curvature.

Then we study the axiom of Φ -holomorphic $(2r+1)$ -planes for generalized Kenmotsu manifolds and propose a complete classification of simply connected generalized Kenmotsu manifolds satisfying the axiom of Φ -holomorphic $(2r+1)$ -planes. The main results are as follows. A simply connected GK-manifold of pointwise constant Φ -holomorphic sectional curvature satisfying the axiom of Φ -holomorphic $(2r+1)$ -planes is a Kenmotsu manifold. A GK-manifold satisfies the axiom of Φ -holomorphic $(2r+1)$ -planes if and only if it is canonically concircular to one of the following manifolds: (1) $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$; (2) $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$; and (3) $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}$ having the canonical cosymplectic structure.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 53C25, 53D15

Ahmad ABU-SALEEM (PhD, Ass. Prof., Al al-Bayt University, Mafrqa, Jordan). E-mail: abusaleem2@yahoo.com

Aligadzhi R. RUSTANOV (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Moscow State University of civil engineering, Institute of fundamental education, Russia). E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Svetlana V. KHARITONOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Orenburg State University, Russia) E-mail: hcb@yandex.ru

REFERENCE

1. Ishihara I. (1979) Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form. *Kodai Mathematical Journal*. 2(2). pp. 171–186. DOI: 10.2996/kmj/1138036014.
2. Tanno S. (1969) Sasakian manifolds with constant Φ -holomorphic sectional curvature. *Tohoku Mathematical Journal*. 21(3). pp. 501–507. DOI: 10.2748/tmj/1178242960.
3. Ogiue K. (1964) On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility. *Kodai Mathematical Seminar Reports*. 16(4). pp. 223–232. DOI: 10.2996/kmj/1138844949.
4. Kirichenko V.F. (1985) The axiom of Φ -holomorphic planes in contact geometry. *Mathematics of the USSR – Izvestiya*. 25(1). pp. 51–73. DOI: 10.1070/IM1985v025n01ABEH001265.
5. Kirichenko V.F. (1983) Almost cosymplectic manifolds satisfying the axiom of Φ -holomorphic planes. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 273(2). pp. 280–284.

6. Kirichenko V.F., Rustanov A.R. (2002) Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds. *Sbornik: Mathematics*. 193(8). pp. 1173–1201. DOI: 10.1070/SM2002v193n08ABEH000675.
7. Volkova E.S. (2002) The Axiom of $\Phi\Phi$ -holomorphic planes for normal killing type manifolds. *Mathematical Notes*. 71. pp. 330–338. DOI: 10.1023/A:1014842707103.
8. Rustanov A.R., Salakhov A.Z., Khairov R.A. (2017) Aksioma Φ -golomorfnykh $(2r+1)$ -ploskostey dlya pochti kontaktnykh metricheskikh mnogoobraziy klassa NC_{10} [The Axiom of Φ -holomorphic $(2r+1)$ -planes for almost contact metric manifolds of class NC_{10}]. *Vestnik Adygeyskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Estestvenno-matematicheskiye i tekhnicheskiye nauki» – The Bulletin of the Adyghe State University, Series “Natural-Mathematical and Technical Sciences”*. 1. pp. 19–24.
9. Rustanov A.R., Kazakova O.N., Kharitonova S.V. (2015) Aksioma Φ -golomorfnykh $(2r+1)$ -ploskostey dlya normal'nykh $LcACs$ -mnogoobraziy [The axiom of Φ -holomorphic $(2r+1)$ -planes for normal $LcACs$ -manifolds] *Vestnik OGU – Vestnik of the Orenburg State University*. 179(4). pp. 224–238.
10. Abu-Saleem A., Rustanov A.R. (2015) Curvature identities special generalized manifolds Kenmotsu second kind. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 9(2). pp. 187–207.
11. Umnova S.V. (2002) On conformal invariant of Kenmotsu manifolds. *Webs and Quasi-groups, Tver State University*. pp. 155–156.
12. Abu-Saleem Ahmad, Rustanov A.R. (2018) Some aspects of the geometry of generalized manifolds Kenmotsu. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 103(9). pp. 1407–1432. DOI: 10.17654/MS103091407.
13. Kirichenko V.F. (2001) On the geometry of Kenmotsu manifolds. *Doklady Mathematics*. 64(2). pp. 230–232.
14. Abu-Saleem Ahmad, Rustanov A.R. (2017) Analogs of Gray identities for the Riemannian curvature tensor of generalized Kenmotsu manifolds. *International Mathematical Forum*. 12(2). pp. 87–95. DOI: 10.12988/imf.2017.611149.
15. Abu-Saleem A., Rustanov A.R., Kharitonova S.V. (2018) Svoystva integriruyemosti obobshchennykh mnogoobraziy Kenmotsu [Integrability properties of generalized Kenmotsu manifolds]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal – Vladikavkazian Mathematical Journal*. 20(3). pp. 4–20. DOI: 10.23671/VNC.2018.3.17829.
16. Blair D.E., Showers D.K. (1974) Almost contact manifolds with Killing structure tensors II. *Journal of Differential Geometry*. 9(4). pp. 577–582. DOI: 10.4310/jdg/1214432556.
17. Rizza G.B. (1974) Varieta parakahleriane. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 98(4). pp. 47–61.
18. Kirichenko V.F. (1982) Sur le geometrie des varieties approximativement cosymplectiques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Series I – Mathematics*. 295(1). pp. 673–676.

Received: October 04, 2019

УДК 519.651
DOI 10.17223/19988621/66/2

MSC 2020: 65R10

Ш.У. Ажгалиев, Ш.К. Абикенова

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ В ЗАДАЧЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНА¹

Изучается задача приближенного восстановления функций по значениям их преобразований Радона. В контексте компьютерного (вычислительного) перечника на данном этапе научного исследования получены оценки снизу для погрешности восстановления функций из пространств Соболева и Коробова по значениям их преобразований Радона.

Ключевые слова: функция, восстановление, преобразование Радона, класс Соболева, класс Коробова, оценки снизу.

Важную роль при проведении экспериментов (физических, химических, технических и т.п.), требуют выяснения вопросы типа: «Где разместить измерительные приборы (в каких точках снимать информацию)?; как по полученным данным приближенно описать весь процесс (построение интерполяционной формулы)?; какими приборами и в каком количестве пользоваться?; где эти приборы расставить и как переработать полученные экспериментальные данные?» и т.д.

Математическую основу подобного рода проблем составляет постановка задачи, впервые предложенная в 1996 году в работе [1] и окончательно сформулированная в течение 1996–2003 гг. в работах [2–8] под названием «Компьютерный (вычислительный) перечник» (далее, К(В)П), с применением на отдельных конкретизациях. Например, в случае $Tf = f$ общая задача в определении Компьютерного (вычислительного) перечника есть задача восстановления функций. Конкретизация числовой информации в виде функционалов и алгоритмов их переработки порождает многочисленные постановки задач, исследованию которых посвящен ряд работ (см. например, [1–10] и имеющуюся в них литературу). Наиболее изученной является случай функционалов – значений функций в точках. Здесь основная проблема заключается в построении сеток, оптимальных в том или ином смысле. К таковым относятся сетки, предложенные Коробовым [11], Фроловым [12], Смоляком [13] и Шерниязовым [14]. Разумеется, помимо значений в точках, можно привлекать и другие функционалы. И здесь наиболее изученными являются тригонометрические коэффициенты Фурье (см. также работу авторов [10], где использовались коэффициенты Фурье по системе Хаара). В данной работе, в продолжение уже известных точных порядковых оценок погрешности восстановления функции, исследуются аппроксимативные возможности других конкретных вычислительных агрегатов – значений преобразований Радона. Обзор основных сведений о преобразовании Радона может быть найден в монографиях [15–20]. Одной из первых работ по приближению функций на основе значений их некоторых преобразований Радона является работа Марра [21]. В ней найдено

¹ Данное исследование финансируется Комитетом по науке Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05132938)

значение наилучшего приближения преобразования Радона алгебраическими многочленами. В работе [22] решается задача нахождения «интерполяционного» многочлена (т.е. имеющего те же преобразования Радона, что и интерполируемая функция) с минимальной L^2 -нормой. В работе [23] решается задача о возможности построения интерполяционных многочленов, в том же смысле что и в [22], для гармонических функций и получена оценка сверху их погрешностей на некотором классе гармонических функций. Отметим также серию работ [24–30, и имеющуюся в ней литературу] об аппроксимации функций, которая близка к данной тематике. Здесь представлены результаты в виде оценки снизу для погрешности восстановления функций из пространств Соболева и Коробова по значениям их преобразований Радона, полученные в ходе реализации грантового проекта МОН РК №AP05132938 «Преобразование Радона в задачах дискретизации».

Постановка задачи и необходимые определения

Сформулируем конкретизированную постановку задачи, в рамках которой получены соответствующие результаты. Пусть даны нормированные пространства X и Y числовых функций, определенных на множествах Ω_X и Ω_Y соответственно. Пусть $F \subset X$ и $Tf: F \rightarrow Y$. Для каждого целого положительного N выбирается набор функционалов $l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N)$, $l_j(\cdot): F \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, \dots, N$) и функция $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y): \mathbb{C}^N \times \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$.

Каждую функцию $Tf \in Y$ будем приближать в метрике Y функцией

$$\varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); y),$$

построенной по числовой информации объема N , полученной о функции $f(x)$ посредством функционалов $l_1, \dots, l_N$ и переработанной по правилу φ_N .

Пусть $\{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ есть множество всевозможных пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$, состоящих из набора N функционалов $l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N)$ и функции $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)$, и пусть $D_N \subset \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$.

Положим

$$\delta_N(D_N; f, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \sup_{f \in F} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_Y. \quad (1)$$

Задача К(В)П-1 заключается в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно совпадающих с точностью до констант) для величины (1) (условия предполагаются такими, что имеют смысл все формулируемые определения) – Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной информации и в указании вычислительного агрегата, реализующего оценку сверху.

Тем самым, имеем две самостоятельные задачи, одна из которых заключается в получении оценок снизу погрешности восстановления всех вычислительных агрегатов из заданного множества D_N , другая – в нахождении оценок сверху для конкретных вычислительных агрегатов из D_N (построение которых, разумеется, можно продолжить с точки зрения улучшения вычислительных характеристик).

Далее будут использоваться понятия оценки снизу и сверху, поэтому приведем здесь необходимые сведения об используемых знаках.

Через $c(\alpha, \beta, \dots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в разных формулах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Если $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел и $\{b_N\}_{N=1}^{\infty}$ – произвольная числовая последовательность, то запись $b_N \ll_{\alpha, \beta, \dots} a_N$ означает, что найдется постоянная $c(\alpha, \beta, \dots)$, для которой при каждом целом положительном N выполнено неравенство $|b_N| \leq c(\alpha, \beta, \dots) a_N$.

Если же $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ и $\{b_N\}_{N=1}^{\infty}$ – две последовательности положительных чисел, то запись $b_N \succ_{\alpha, \beta, \dots} a_N$ означает, что одновременно выполняются соотношения $b_N \ll_{\alpha, \beta, \dots} a_N$ и $b_N \gg_{\alpha, \beta, \dots} a_N$.

В более подробном изложении искомая задача $K(B)П-1$, заключаемая в доказательстве соотношения

$$\delta_N(D_N; Tf, F)_Y \succ \theta_N,$$

состоит из двух задач, а именно, требуется найти такую положительную числовую последовательность $\{\theta_N\}$, что выполнена

• Оценка снизу $\delta_N(D_N; f, F)_Y \geq C_1 \theta_N$: для некоторого числа $C_1 > 0$, для последовательности целых положительных N и для всякого вычислительного агрегата $(l^{(N)}, \varphi_N)$ из D_N найдется функция $\bar{f} \in F$, для которой

$$\|\bar{T}\bar{f}(y) - \varphi_N(l_1(\bar{f}), \dots, l_N(\bar{f}); y)\|_Y \geq C_1 \theta_N,$$

и одновременно

• Оценка сверху $\delta_N(D_N; f, F)_Y \leq C_2 \theta_N$: для некоторого $C_2 > 0$ и для всякого N из достаточно плотной (в связи с необходимостью указания конкретного вычислительного агрегата) возрастающей последовательности целых положительных чисел найдутся вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N) = \bar{\varphi}_N(\bar{l}_1(f), \dots, \bar{l}_N(f); \cdot)$ из D_N , такой, что для всякой функции $f \in F$ выполнено неравенство

$$\|Tf(y) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_1(f), \dots, \bar{l}_N(f); y)\|_Y \leq C_2 \theta_N.$$

Конкретизация в D_N наборов функционалов $l_1, \dots, l_N$ и алгоритмов переработки числовой информации φ_N порождает многочисленные постановки задач.

В данной работе изучается следующая конкретизация задачи (1):

Через $U = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : [x] = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\}$ обозначим единичный круг с центром в начале координат, множества определены C и Z соответственно следующим образом:

$$C = \{(p, \theta) : -1 \leq p \leq 1, \theta = (\theta_1, \theta_2) : \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1\},$$

$$Z = \{(p, \theta) : -1 \leq p \leq 1, \theta = (\theta_1, \theta_2) : \frac{1}{4} \leq \theta_1^2 + \theta_2^2 \leq 1\}.$$

Для функции f , определенной на U , и $(t, \theta) \in C$ преобразованием Радона $R(f; t, \theta)$ называется интеграл от f вдоль отрезка

$$I : I(t, \theta) = \{x = (x_1, x_2) : x_1\theta_1 + x_2\theta_2 = t\} \cap U,$$

а именно,

$$R(f; t, \theta) = \int_{I(t, \theta)} f(x_1, x_2) ds = \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t\theta_1 - s\theta_2, t\theta_1 + s\theta_2) ds.$$

Заметим, что для случаев, рассматриваемых в данной работе, пределы интегрирования будут конечны, так как функции имеют ограниченный носитель.

Пусть $\Omega_X = \Omega_Y = U, X = Y = L^q(U) (1 \leq q \leq \infty)$, при $q = \infty$ под $L^q(U)$ будем иметь ввиду пространство $C(U)$ всех непрерывных на U функций.

В качестве оператора будем рассматривать единичный оператор $Tf = f$.

D_N есть множество R_N всех пар $(I^{(N)}, \varphi_N)$, состоящих из набора N функционалов $I^{(N)} = (I_1, \dots, I_N)$ вида $I_j(f) = R(f; t_j, \theta_j)$ и функции $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x)$,

$$R_N = \left(\left(R(f; t_1, \theta^{(1)}), \dots, R(f; t_N, \theta^{(N)}) \right), \varphi_N(z_1, \dots, z_N; x) \right).$$

Таким образом, основной целью нашей работы является нахождение оценок снизу для погрешности восстановления, т.е. для данной пары $\left\{ \left((t_1, \theta^{(1)}), \dots, (t_N, \theta^{(N)}) \right), \varphi_N(z_1, \dots, z_N; x) \right\}$ — исходного вычислительного агрегата, величины

$$\begin{aligned} \delta_N(f; F; R_N)_{L^\infty(U)} = \\ = \inf_{\left\{ \left((t_1, \theta^{(1)}), \dots, (t_N, \theta^{(N)}) \right), \varphi_N(z_1, \dots, z_N; x) \right\}} \sup_{f \in F} \|f - \varphi_N(R(f; t_1, \theta^{(1)}), \dots, R(f; t_N, \theta^{(N)}); x)\|_{L^\infty(U)}. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве функциональных классов рассматриваются классы Соболева $W_2^r(U)$ и Коробова $Q_2^r(U)$.

Класс Соболева $W_2^r(U) (r > 0)$ есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, x_2)$, которые вместе со своими частными производными до порядка r включительно принадлежат $L^2(U)$ и для которых выполнено неравенство

$$\|f\|_{W_2^r(U)} \equiv \|f\|_{L^2(U)} + \left\| \frac{\partial^r f}{\partial x_1^r} \right\|_{L^2(U)} + \left\| \frac{\partial^r f}{\partial x_2^r} \right\|_{L^2(U)} \leq 1.$$

Также мы будем использовать пространство $W_2^r[0, 1]^2$, состоящее из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, x_2)$, которые вместе со своими частными производными до порядка r включительно принадлежат $L^2[0, 1]^2$ и для которых выполнено неравенство

$$\|f\|_{W_2^r[0,1]^2} \equiv \|f\|_{L^2[0,1]^2} + \left\| \frac{\partial^r f}{\partial x_1^r} \right\|_{L^2[0,1]^2} + \left\| \frac{\partial^r f}{\partial x_2^r} \right\|_{L^2[0,1]^2} \leq 1.$$

Класс Коробова $Q_2^r(U)$ есть сужение на круг U функций из классов Коробова $E_2^r(0,1)^2$, под которыми понимается множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, x_2)$, таких, что ее тригонометрические коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(m) = \hat{f}(m_1, m_2) = \int_{[0,1]^2} f(x_1, x_2) \cdot e^{-2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2, (m = (m_1, m_2) \in Z^2)$$

удовлетворяют неравенству

$$|\hat{f}(m_1, m_2)| \leq \frac{1}{(m_1 \cdot m_2)^r},$$

где используется обозначение $\bar{u} = \max(1, |u|)$.

Основной результат и его доказательство

Нами доказана следующая

Теорема 1. Пусть дано число $r > 1$ и $2 \leq q < \infty$. Тогда справедливы соотношения

$$\delta_N(R_N; f; W_2^r(U))_{L^\infty(U)} \gg N^{\left(\frac{r+1}{2}\right)}; \quad (3)$$

$$\delta_N(R_N; f; W_2^r(U))_{L^q(U)} \gg N^{\frac{r}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)}; \quad (4)$$

$$\delta_N(R_N; f; Q_2^r(U))_{L^\infty(U)} \gg N^{\left(-r + \frac{1}{2}\right)}, \quad (5)$$

где константы в неравенствах (3) и (5) зависят только от r , а в (4) от r и q .

Данная теорема для $W_2^r(U)$ при $q = 2$ была доказана Ф. Натеррером в [20].

Доказательство. Для доказательства оценок снизу (3) и (4), достаточно показать, что для любых N прямых $p_1, \dots, p_N$ найдется функция $g \in W_2^r(U)$, у которой преобразования Радона вдоль этих прямых равны 0 и соответственно

$$\frac{\|g\|_{L^\infty(U)}}{\|g\|_{W_2^r(U)}} \gg N^{\frac{r+1}{2}}; \quad (6)$$

$$\frac{\|g\|_{L^q(U)}}{\|g\|_{W_2^r(U)}} \gg N^{\frac{r}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}. \quad (7)$$

Существование такой функции следует из оценки снизу в теореме 1 из [10]. Действительно, там было показано, что для любых линейных функционалов $l_1, \dots, l_2$ найдется функция $f \in W_2^r [0, 1]^2$, такая, что

$$\|f\|_{W_2^r [0, 1]^2} \leq 1,$$

при некотором $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in [0, 1]^2$

$$|f(\zeta)| = \|f\|_{L^\infty [0, 1]^2} \gg N^{\frac{r+1}{2}},$$

$$\|f\|_{L^q [0, 1]^2} \geq \|f\|_{L^q (U)} \gg N^{\frac{r+1}{2} - \frac{1}{q}}.$$

Здесь, мы в качестве функционалов $l_1, \dots, l_2$ возьмем значения интегралов вдоль заданных N прямых:

$$l_k(f) = \int_{p_k \cap U} f ds, (k=1, \dots, N).$$

Пусть функция g есть сужение f на область U . Стало быть, первое условие

$$\int_{p_k \cap D} g ds = 0$$

выполняется тривиальным образом. Также легко проверить и другие условия.

Действительно, $g \in W_2^r(U)$ и для некоторого числа $c = c(r)$ выполнено неравенство

$$\|g\|_{W_2^r(U)} \leq c, \quad (8)$$

так как область U можно покрыть конечным числом единичных квадратов.

Далее отметим, что можно считать, что $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in U$, так как если $\zeta \notin U$, то $(\zeta_1 - 1, \zeta_2 - 1) \in U$, это следует из несложных вычислений.

Имеем $0 \leq \zeta_1 \leq 1, 0 \leq \zeta_2 \leq 1$ и $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 > 1$, стало быть

$$(\zeta_1 - 1)^2 + (\zeta_2 - 1)^2 = 2 - (2\zeta_1 - \zeta_1^2) - (2\zeta_2 - \zeta_2^2) \leq 2 - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \leq 1.$$

Следовательно, при необходимости, учитывая 1- периодичность функции f , получаем неравенство

$$\|g\|_{L^\infty(U)} = \|f\|_{L^\infty [0, 1]^2} \gg N^{\frac{r+1}{2}},$$

что в совокупности с (8) дает нам выполнение неравенства (6).

Аналогично, в силу того, что $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \subset U$,

$$\|g\|_{L^q(U)} \geq \|f\|_{L^q \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2} = \|f\|_{L^q [0, 1]^2} \gg N^{\frac{r+1}{2} - \frac{1}{q}},$$

что в совокупности с (8) дает нам выполнение неравенства (7).

Таким образом, оценка снизу для классов Соболева доказана.

Для доказательства оценки снизу погрешности восстановления функций из класса Коробова $Q_2^r(U)$ покажем, что имеет место вложение $W_2^{2r}[0,1]^2 \subset E_2^r$.

Действительно, пусть $f \in W_2^{2r}[0,1]^2$. Тогда, используя соотношения между коэффициентами Фурье функций и ее производных, получаем

$$\sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} |f(m_1, m_2)|^2 \cdot (\overline{m_1} + \overline{m_2})^{4r} \leq c,$$

отсюда следует, что

$$|\hat{f}(m_1, m_2)| \leq \frac{c}{(\overline{m_1} + \overline{m_2})^{2r}}.$$

Далее, используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, имеем

$$(\overline{m_1} + \overline{m_2})^{2r} \geq 2^r \cdot (\overline{m_1} \cdot \overline{m_2})^r.$$

Таким образом,

$$|\hat{f}(m_1, m_2)| \leq \frac{c_2(r)}{(\overline{m_1} \cdot \overline{m_2})^r},$$

что означает справедливость вложения $W_2^{2r}[0,1]^2 \subset E_2^r$.

Теперь воспользуемся оценкой снизу, полученной нами для случая восстановления из пространств Соболева. А именно, нами была построена функция $g \in W_2^{2r}(U)$, которая есть сужение некоторой $f \in W_2^{2r}[0,1]^2$ на область U , что в силу определения означает $g \in Q_2^r(U)$, и такая, что преобразования Радона вдоль этих прямых равны 0 и

$$\|g\|_{L^\infty} \gg N^{-r+\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, получены оценки снизу для погрешности восстановления функций из классов Соболева $W_2^r(U)$ и Коробова $Q_2^r(U)$ и теорема доказана.

Заключение

В Казахстане была поставлена задача К(В)П о нахождении оптимальных порядков восстановления функций. Для многих конкретных случаев поставленная задача была решена на основе оригинальных методов построения агрегатов приближения вкупе с методами доказательств их неулучшаемости. Планируется нахождение оптимальных порядков задач восстановления функций по значениям преобразования Радона функций из различных классов. Последующая вычислительная реализация имеет весьма широкую сферу применения в науке и технике, в частности в компьютерной томографии. Основные результаты Проекта (промежуточные) периодически обсуждались на научных семинарах Института теоретической математики и научных вычислений ЕНУ им. Л.Н. Гумилева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Темирғалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник Евразийского ун-та им. Л.Н. Гумилева. 1997. № 3. С. 90–144.
2. Темирғалиев Н. О задаче восстановления по неточной информации // Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева. 2004. № 1. С. 202–209.
3. Темирғалиев Н. Математика: Избранное. Наука. Астана: Изд-во ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2009.
4. Темирғалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте-Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вестник Евразийского нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева. 2010. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. С. 1–194.
5. Темирғалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований. Астана: ИТМиНВ, 2012.
6. Темирғалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. 2018. Т. 124. № 3. С. 8–88.
7. Темирғалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления // Изв. вузов. Математика. 2019. № 1. С. 89–97.
8. Темирғалиев Н., Жубанышева А.Ж. Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения // Изв. вузов. Матем. 2017. № 3. С. 89–95.
9. Ажғалиев Ш.У., Темирғалиев Н. Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 1. С. 3–20.
10. Ажғалиев Ш.У., Темирғалиев Н. Об информативной мощности линейных функционалов // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 6. С. 803–812.
11. Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.
12. Фролов К.К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
13. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
14. Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы: КазГУ им. аль-Фараби, 1998.
15. Deans S.R. The Radon Transform and some of its Applications. Wiley, 1983. DOI: 10.5281/ZENODO.1060231.
16. Naterr F. The Mathematics of Computerized Tomography. Classics in Applied Mathematics 32. SIAM, 2001.
17. Хаммерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: пер с англ. М.: Мир, 1990. 288 с.
18. Хелгасон С. Преобразование Радона: пер. с англ. М.: Мир, 1983. 152 с.
19. Herman G.T. Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projection. 2nd ed. Springer, 2009. 85 с.
20. Naterr F. A Sobolev Space Analysis of Picture Reconstruction // SIAM J. Applied Mathematics. 1980. V. 39. No. 3. P. 402–411.
21. Marr R. On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals // J. Math. Anal. Appl. 1974. V. 45. No. 2. P. 357–374.
22. Logan B. and Shepp L. Optimal reconstruction of a function from its projections // Duke Math. J. 1975. V. 42. No. 4. P. 645–659.
23. Georgieva I., Hofreither C., Koutschan C., Pillwein V., Thanatipanonda T. Harmonic interpolation based on Radon projections along the sides of regular polygons // Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11(4). P. 609–620. DOI: 10.2478/s11533-012-0160-1.

24. Осколков К.И. Рельефная аппроксимация, анализ Фурье – Чебышева и оптимальные квадратурные формулы // Труды МИАН. 1997. Т. 219. Р. 269–285. URL: mi.mathnet.ru/rus/tm/v219/p269.
25. Maiorov V.E. On best approximation by ridge functions // J. Approximation Theory. 1999. V. 99. No. 1. P. 68–94. DOI: 10.1006/jath.1998.3304.
26. Maiorov V.E., Oskolkov K.I., Temlyakov V.N. Gridge approximation and Radon compass // Approximation Theory: A volume dedicated to B. Sendov. B. Bojanov (Ed.). Sofia: DARBA. 2002. P. 284–309. DOI: 10.21236/ADA638384
27. Kononov V.N., Leviatan D., Maiorov V.E. Approximation of Sobolev classes by polynomials and ridge functions // J. Approximation Theory. 2009. V. 159. P. 97–108. DOI: 10.1016/j.jat.2008.10.009
28. Temlyakov V.N. On approximate recovery of functions with bounded mixed derivative // J. Complexity. 1993. No. 9. P. 41–59.
29. Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. ... канд. физ.- мат. наук. М.: Орг. п/я 2325, 1965. С. 118–119.
30. Кудрявцев С.Н. Наилучшая точность восстановления функций конечной гладкости по их значениям в конечном числе точек // Изв. РАН. Сер. Матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 21–58.

Статья поступила 03.04.2019 г.

Azhgaliyev Sh., Abikenova Sh. (2020) ON THE LOWER BOUND IN THE PROBLEM OF APPROXIMATE RECONSTRUCTION OF FUNCTIONS BY VALUES OF THE RADON TRANSFORM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 24–34

DOI 10.17223/19988621/66/2

Keywords: function, reconstruction, Radon transforms, Sobolev class, Korobov class, lower bounds.

In this paper, we study the problem of function reconstruction by values of Radon transforms within the framework of the Computational (Numerical) Diameter (C(N)D) approach. The meaning of C(N)D is to solve two independent problems: obtaining lower bounds of the reconstruction error by exact information and specifying the computing tool that implements the upper bounds (preferably coinciding with the lower bound up to constants).

The C(N)D approach is a mathematical model of experiments for describing various processes (physical, chemical, technical, etc.). An important role in setting up such experiments is played by types of measuring instruments, which is reflected in C(N)D as types of functionals. The next important point is the choice of location and balancing of instruments, i.e. selection of functionals' parameters. The final step is to build an optimal computing tool using the obtained data.

The most studied types of functionals are function values at points and Fourier coefficients. An important difference of this work from previously obtained results is the study of the approximation capabilities of another type of functionals – Radon transforms, i.e. mathematical model of the use of tomography and similar technologies.

This paper is devoted to obtaining lower bounds for the error in reconstructing functions from Sobolev and Korobov spaces.

Financial support. This research is supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132938).

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 65R10

Sholpan K. ABIKENOVA (Candidate of Physics and Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan). E-mail: abikesh29@gmail.com

Shapen U. AZHGALIYEV (Candidate of Physics and Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan). E-mail: nepash@mail.ru

REFERENCES

1. Temirgaliyev N. (1997) Teoretiko-chislovyye metody i teoretiko-veroyatnostnyy podkhod k zadacham analiza. Teoriya vlozheniy i priblizheniy, absolyutnaya skhodimost' i preobrazovaniya ryadov Fur'ye [Number-theoretical methods and probability-theoretical approach to problems of analysis. Theory of immersions and approximations, absolute convergence, and transformations of Fourier series]. *Vestnik Evraziyskogo universiteta im. L.N. Gumileva – Eurasian Mathematical Journal*. 3. pp. 90–144.
2. Temirgaliyev N. (2004) O zadache vosstanovleniya po netochnoy informatsii [On the problem of recovery by inexact information]. *Vestnik Evraziyskogo universiteta im. L.N. Gumileva – Eurasian Mathematical Journal*. 1. pp. 202–209.
3. Temirgaliyev N. (2009) *Matematika: Izbrannoye. Nauka*. Astana: Gumilev Eurasian National University.
4. Temirgaliyev N. (2010) Komp'yuternyy (vychislitel'nyy) poperechnik. Algebraicheskaya teoriya chisel i garmonicheskyy analiz v zadachakh vosstanovleniya (metod kvazi-Monte-Karlo). Teoriya vlozheniy i priblizheniy. Ryady Fur'ye [Computer (numerical) diameter. Algebraic theory of numbers and harmonic analysis in problems of recovery (quasi-Monte Carlo method). Theory of immersions and approximations. Fourier series] *Vestnik Evraziyskogo universiteta im. L.N. Gumileva – Eurasian Mathematical Journal*. Special issue. pp. 1–194.
5. Temirgaliyev N. (2012) Nepreryvnaya i diskretnaya matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravleniy issledovaniy [Continuous and discrete mathematics in the harmonious integrity in the context of investigation directions]. Astana: Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations.
6. Temirgaliyev N. Zhubanysheva A. Zh. (2018) Teoriya priblizheniy, vychislitel'naya matematika i chislennyy analiz v novoy kontseptsii v svete komp'yuternogo (vychislitel'nogo) poperechnika [Theory of approximations, computational mathematics, and numerical analysis in a new conception in the light of computer (computational) diameter]. *Vestnik Evraziyskogo universiteta im. L.N. Gumileva – Eurasian Mathematical Journal*. 124(3). pp. 8–88.
7. Temirgaliyev N., Zhubanysheva A. Zh. (2019) Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery. *Russian Mathematics*. 63(1). pp. 79–86.
8. Temirgaliyev N., Zhubanysheva A. Zh. (2017) Order estimates of the norms of derivatives of functions with zero values on linear functionals and their applications. *Russian Mathematics*. 61(3). pp. 77–82.
9. Azhgaliyev Sh.U., Temirgaliyev N. (2007) Informativeness of all the linear functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω . *Sbornik: Mathematics*. 198(11). pp. 1535–1551.
10. Azhgaliyev Sh.U., Temirgaliyev N. (2003) Informativeness of linear functionals. *Mathematical Notes*. 73(6). pp. 759–768.
11. Korobov N.M. (1989) Trigonometricheskiye summy i ikh prilozheniya [Trigonometric sums and their applications]. Moscow: Nauka.
12. Frolov K.K. (1976) Upper error bounds for quadrature formulas on function classes. *Soviet Mathematics Doklady*. 17. pp. 1665–1669.
13. Smolyak S.A. (1963) Quadrature and Interpolation Formulas for Tensor Products of Certain Classes of Functions. *Soviet Mathematics Doklady*. 4. Pp. 240–243.
14. Sherniyazov K. (1998) *Priblizhennoye vosstanovleniye funktsiy i resheniy uravneniya teploprovodnosti s funktsiyami raspredeleniya nachal'nykh temperatur iz klassov E, SW i B* [Approximate reconstruction of functions and solutions of the thermal conductivity equation with initial temperature distribution functions from classes E, SW, and B]. Dissertation. Al-Farabi Kazakh National University.
15. Deans S.R. (1983) *The Radon Transform and Some of Its Applications*. Wiley. DOI: 10.5281/ZENODO.1060231.
16. Natterer F. (2001) *The Mathematics of Computerized Tomography. Classics in Applied Mathematics 32*. SIAM.

17. Natterer F. (1980) The Identification Problem in Emission Computed Tomography. *Mathematical Aspects of Computerized Tomography. Proceedings, Oberwolfach, February 10–16, 1980*. pp. 45–56. Springer.
18. Helgason S. (1980) *The Radon Transform*. Birkhäuser.
19. Herman G.T. (2009) *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projection*. 2nd edition. Springer.
20. Natterer F. (1980) A Sobolev Space Analysis of Picture Reconstruction. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 39(3). pp. 402–411.
21. Marr R. (1974) On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 45(2). pp. 357–374.
22. Logan B., Shepp L. (1975) Optimal reconstruction of a function from its projections. *Duke Mathematical Journal*. 42(4). pp. 645–659.
23. Georgieva I., Hofreither C., Koutschan C., Pillwein V., Thanatipanonda T. (2013) Harmonic interpolation based on Radon projections along the sides of regular polygons. *Central European Journal of Mathematics*. 11(4). pp. 609–620. DOI: 10.2478/s11533-012-0160-1.
24. Oskolkov K.I. (1997) Ridge approximation, Chebyshev–Fourier analysis and optimal quadrature formulas. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 219. pp. 265–280.
25. Maiorov V.E. (1999) On best approximation by ridge functions, *Journal of Approximation Theory*. 99. pp. 68–94. DOI: 10.1006/jath.1998.3304.
26. Maiorov V.E., Oskolkov K.I., Temlyakov V.N. (2002) Gridge approximation and Radon compass. *Approximation Theory: A volume dedicated to B. Sendov*. B. Bojanov (Ed.). Sofia: DARBA. pp. 284–309. DOI: 10.21236/ADA638384.
27. Konovalov V.N., Leviatan D., Maiorov V.E. (2009) Approximation of Sobolev classes by polynomials and ridge functions. *Journal of Approximation Theory*. 159. pp. 97–108. DOI: 10.1016/j.jat.2008.10.009.
28. Temlyakov V.N. (1993) On approximate recovery of functions with bounded mixed derivative. *Journal of Complexity*. 9(1). pp. 41–59.
29. Smolyak S.A. (1965) *Ob optimal'nom vosstanovlenii funktsiy i funktsionalov ot nikh* [On the optimal recovery of functions and functionals of them]. Dissertation. Moscow: Post office box 2325.
30. Kudryavtsev S.N. (1998) The best accuracy of reconstruction of finitely smooth functions from their values at a given number of points. *Izvestiya: Mathematics*. 62(1). pp. 19–53.

Received: April 3, 2019

УДК 519.6, 551.509.3
DOI 10.17223/19988621/66/3

MSC 2020: 65M08, 86A10

А.В. Старченко, А.А. Барт, Л.И. Кижнер, Е.А. Данилкин

МЕЗОМАСШТАБНАЯ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ TSUNM3 ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ МЕТЕОПАРАМЕТРОВ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ НАД КРУПНЫМ НАСЕЛЕННЫМ ПУНКТОМ¹

Для исследования и прогнозирования поведения метеопараметров атмосферы предлагается метеорологическая модель TSUNM3, которая является негидростатической и включает трехмерные нестационарные уравнения гидротермодинамики атмосферного пограничного слоя с параметризацией турбулентности, микрофизики влаги, длинноволновой и коротковолновой (солнечной) радиации, адвективного и скрытого потоков тепла в атмосфере и на границе ее взаимодействия с подстилающей поверхностью. Апробация модели TSUNM3 произведена на данных измерений, выполненных с помощью приборов ЦКП «Атмосфера» ИОА СО РАН им. В.Е. Зуева

Ключевые слова: математическое моделирование атмосферных процессов с высоким разрешением, сравнение расчетов с измерениями ЦКП «Атмосфера».

В настоящее время для краткосрочного и сверхкраткосрочного прогнозирования и исследования погоды создаются и совершенствуются численные модели высокого пространственного разрешения (с горизонтальным разрешением от нескольких сотен метров до нескольких километров), позволяющие предсказывать локальные мезомасштабные атмосферные явления для разных районов Земного шара [1].

Во многих странах наиболее широкое распространение получила мезомасштабная модель WRF (Weather Research and Forecasting, США [2]), которая активно применяется для решения многих практических задач. В частности, в работе [3] представлены результаты успешного использования модели для прогноза интенсивных осадков над горной территорией Анды (Чили) с разрешением 6 км. Для территории РФ одной из основных региональных моделей, использующихся в настоящее время в Гидрометцентре России для прогноза элементов погоды, является модель COSMO-Ru, созданная в рамках международного сотрудничества стран Европы и России. Для Европейской территории РФ реализованы версии модели COSMO с шагом сетки от 1.1 до 13.2 км, а для Сибирского региона функционирует технология COSMO-Ru14-Sib, численные прогнозы по которой проводятся параллельно прогнозам по модели ICON в Немецкой метеослужбе [4].

Целью данной работы является описание математической постановки и численного метода развиваемой в ТГУ мезомасштабной метеорологической модели высокого разрешения TSUNM3 (Tomsk State University Nonhydrostatical Mesoscale Meteorological Model) [5], а также сравнительного анализа результатов расчетов с данными наблюдений, полученными с помощью метеоприборов, установленных в

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-71-20042).

аэропорту Томска Богашево и в г. Томске (ЦКП «Атмосфера» ИОА СО РАН им. В.Е. Зуева).

Постановка задачи

Основные уравнения модели атмосферного пограничного слоя TSUNM3 получаются для осредненных по Рейнольдсу дифференциальных уравнений гидротермодинамики [6] в системе координат, связанной с поверхностью Земли, при следующих допущениях:

1. Мезомасштабные вариации плотности квазистационарные. При представлении силы плавучести в уравнении для вертикальной компоненты скорости используется приближение Буссинеска.

2. Молекулярная диффузия полагается пренебрежимо малой по отношению к турбулентному обмену.

3. Учитываются фазовые переходы влаги в атмосферном пограничном слое, коротковолновый и длинноволновый радиационный теплообмен с явным представлением в атмосфере.

Математическая модель TSUNM3 включает следующие уравнения:

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Уравнения движения

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f v + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^m \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho f u + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^m \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^m \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Здесь t – время, u , v , w – продольная, поперечная и вертикальная компоненты вектора осредненной скорости ветра в направлении декартовых координат x , y , z соответственно, ρ – плотность, f – параметр Кориолиса, K_H – коэффициент горизонтальной диффузии, K_z^m – коэффициент вертикальной диффузии количества движения, g – ускорение свободного падения, p – давление.

Уравнение баланса энергии

$$\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\theta}{c_p T} (Q_{rad} - \rho L_w \Phi). \quad (5)$$

Здесь T – абсолютная температура, θ – потенциальная температура, $\theta = T(p_0/p)^{R_0/c_p}$, c_p – теплоемкость воздуха при постоянном давлении, $p_0 = 101300$ Н/м², R_0 – газовая постоянная, Q_{rad} – нагрев (охлаждение) атмосферы за счет радиационных длинноволновых и коротковолновых потоков тепла, распространяющихся во влажной атмосфере, $\rho L_w \Phi$ – изменение температуры за счет фазовых переходов влаги в атмосфере, K_z^h – коэффициент вертикальной диффузии тепла и влаги, L_w – теплота парообразования.

Уравнение состояния

$$p = \rho RT, \quad R = R_0 \left[\frac{1 - q_v}{M_{air}} + \frac{q_v}{M_{H_2O}} \right]. \quad (6)$$

Здесь R – универсальная газовая постоянная, M_{air} – молярная масса воздуха, M_{H_2O} – молярная масса водяного пара, q_v – удельная плотность водяного пара в атмосфере.

Схема микрофизики влаги

Для моделирования процессов фазовых превращений водяной влаги в атмосфере в данной работе используется 6-классовая схема микрофизики влаги WSM6 [7], разработанная корейскими учеными Хонгом и Лимом для известной мезомасштабной метеорологической модели WRF [2]. Она рассматривает шесть состояний атмосферной влаги (водяной пар, облачная влага, дождевая влага, ледяные частицы, снег, крупа (град)). Для каждого из параметров состояния влаги в атмосфере используется уравнение переноса, в котором наряду с адвективным переносом включены различные параметризации физических процессов, приводящих к изменению фазового состояния рассматриваемых форм состояния влаги.

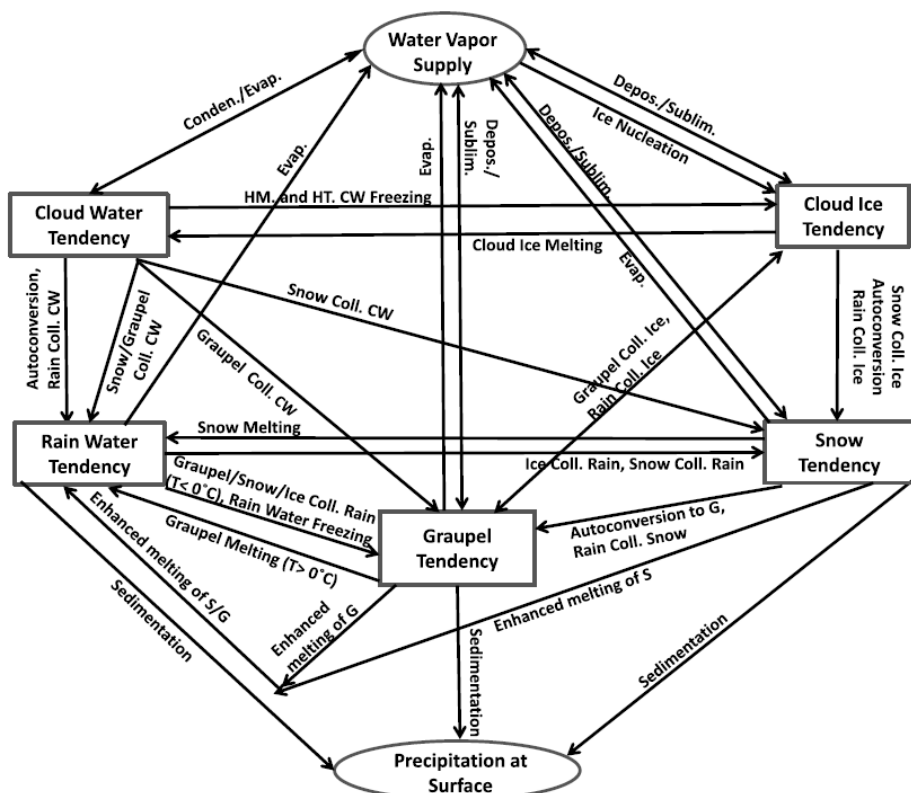


Рис. 1. Диаграмма микрофизических процессов влаги в схеме WSM6 (взята из статьи [8])
Fig. 1. Diagram of moisture microphysical processes in the WSM6 scheme (taken from [8])

Основные уравнения схемы WSM6 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial q_j}{\partial t} + u \frac{\partial q_j}{\partial x} + v \frac{\partial q_j}{\partial y} + w \frac{\partial q_j}{\partial z} \right) + \frac{\partial (\rho V_j q_j)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial q_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial q_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^h \frac{\partial q_j}{\partial z} \right) + \rho \Phi_j; \end{aligned} \quad (7)$$

$j = V, C, R, S, I, G.$

Здесь $q_V, q_C, q_R, q_S, q_I, q_G$ – массовые концентрации водяного пара (Vapor), облачной влаги (Cloud), дождевой влаги (Rain), снега (Snow), ледяных кристаллов (Ice) и крупы (Graupel) в атмосфере. V_j – скорость осаднения j -й компоненты ($V_V = V_C = 0$) [7]. Для негазообразных составляющих диффузионные процессы не учитываются.

Источниковые члены уравнений Φ_j для j -го класса представляют собой математическую запись параметризации переходов атмосферной влаги из одного состояния в другое в соответствии с рис. 1. Часть переходов осуществляется при положительной температуре воздуха, часть – при отрицательной. В схеме WSM6 [7] рассматриваются такие процессы, как захват одних компонентов другими (аккреция), плавление ледяных кристаллов, снега, крупы, испарение/конденсация дождевых капель или облачной влаги, осаднение/сублимация крупы или снега, автоконверсия облачной влаги в дождевые капли (ледяных кристаллов в снег или снега в крупу), испарение/плавление снега, замерзание дождевых капель с образованием крупы и т.д.

Модель турбулентности

Для замыкания системы уравнений (1) – (7) используется модель турбулентности, состоящая из уравнения для кинетической энергии [9], а также алгебраических соотношений для определения коэффициентов турбулентной диффузии:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} + \rho w \frac{\partial k}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \sigma_k \sqrt{k} l \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \sigma_k \sqrt{k} l \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \sigma_k \sqrt{k} l \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P + B - \frac{\rho C_D k^{3/2}}{l}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь k – кинетическая энергия турбулентных пульсаций; l – интегральный масштаб турбулентности; $\sigma_k = 1.2$ – числовой коэффициент; член $C_D k^{3/2}/l$ отвечает за вязкую диссипацию энергии турбулентности ($C_D = 0.189$), а члены P и B выражают генерацию турбулентности за счет сдвиговых напряжений и действия силы плавучести:

$$\begin{aligned} P &= K_z^m \left[2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]; \\ B &= -K_z^h \frac{g}{\theta_v} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \gamma_\theta \right), \end{aligned}$$

где $\gamma_\theta = 0.00065$ К/м.

Коэффициенты вертикальной диффузии количества движения и тепла рассчитываются как

$$K_z^m = \rho c^m \sqrt{k} l; \quad c^m = 0.5; \quad K_z^h = \rho c^h \sqrt{k} l; \quad c^h = 0.675.$$

Коэффициент горизонтальной диффузии оценивается по формуле Смагоринского [10]:

$$K_H = \alpha_{Sm} (\Delta x \Delta y) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2},$$

где α_{Sm} – коэффициент, зависящий от выбора шагов горизонтальной сетки Δx и Δy .

Мезомасштабная модель TSUNM3 прогнозирует составляющие скорости ветра и температурно-влажностные характеристики в пограничном слое атмосферы на 29 вертикальных уровнях (до $H = 10000$ м) для площади 200×200 км и вложенной в нее 50×50 км (шаг сетки 1 км с центром в г. Томск) на 24 ч. Инициализация модели проводится на основе результатов численного прогноза по оперативной глобальной модели ПЛАВ [11] Гидрометцентра РФ (за срок 00 UTC на уровнях 1000, 925 и 850 гПа).

Граничные условия для уравнений (1) – (7) имеют следующий вид:

$$\text{при } z = H: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial q_j}{\partial z} = \frac{\partial k}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \gamma; \quad (9)$$

$$\text{при } x = 0, x = L_x: \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + c_\phi \frac{\partial \phi_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial q_j}{\partial x} = 0, \frac{\partial k}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

$$\text{при } y = 0, y = L_y: \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + c_\phi \frac{\partial \phi_0}{\partial y}, \quad \phi = u, v, \theta, q_v; \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \frac{\partial k}{\partial y} = 0, \frac{\partial q_j}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Индекс $()_0$ соответствует динамическим и термодинамическим параметрам синоптического масштаба, c_ϕ – фазовая скорость. Граничные условия вида (10) часто называются условиями «радиационного» типа [12]. Фазовая скорость c_ϕ рассчитываются численно из пространственных и временных тенденций внутри сеточной области вблизи ее границ.

Вблизи подстилающей поверхности ставятся условия, соответствующие основным соотношениям теории подобия Монина – Обухова [13, 14]. Согласно этой теории, значения турбулентных потоков динамических и термодинамических параметров в приземном слое атмосферы постоянны и определяются в зави-

симости от значения масштаба длины Обухова: $L = -\frac{\theta v_*^3}{g \kappa (\theta' w')_s}$.

Значения горизонтальных компонент скорости, температуры и влажности, а также турбулентных характеристик (кинетической энергии турбулентности k и масштаба турбулентности l) в первом над поверхностью Земли вычислительном уровне z_1 , находящемся в приземном слое, выражаются функциями безразмерной

высоты $\zeta_1 = z_1/L$:

$$\begin{aligned} |W|_1 &= \frac{v_*}{\kappa} f_m(\zeta_1, \zeta_0), \quad \theta_1 - \theta_S = \frac{\theta_*}{\kappa} f_\theta(\zeta_1, \zeta_{0T}), \\ q_1 - q_S &= \frac{q_*}{\kappa M} f_\theta(\zeta_1, \zeta_{0T}), \quad k_1 = v_*^2 f_k(\zeta_1). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь индекс $()_1$ соответствует первому расчетному узлу, расположенному вблизи поверхности, а индекс $()_S$ – на высоте шероховатости z_{0T} , $\kappa = 0,41$ – константа фон Кармана. Динамическая скорость v_* , динамическая температура θ_* и динамическая влажность q_* являются характерными масштабами скорости, температуры и влажности и выражаются через турбулентные потоки импульса, тепла и влаги на поверхности следующим образом:

$$\left[(\overline{u'w'})_S^2 + (\overline{v'w'})_S^2 \right]^{1/2} = v_*^2; \quad -(\overline{\theta'w'})_S = v_* \theta_*; \quad -(\overline{q'w'})_S = v_* q_*. \quad (12)$$

Эмпирические функции f_m, f_θ имеют вид [14]

$$f_m(\zeta) = \begin{cases} f_2(\zeta) - f_2(\zeta_0), & \zeta < 0, \\ \ln(\zeta/\zeta_0) + 4.7(\zeta - \zeta_0), & \zeta \geq 0; \end{cases}$$

$$f_\theta(\zeta) = \begin{cases} f_4(\zeta) - f_4(\zeta_{0T}), & \zeta < 0, \\ \ln(\zeta/\zeta_0) + 5(\zeta - \zeta_{0T}), & \zeta \geq 0; \end{cases}$$

$$f_2(\zeta) = \ln(-16\zeta) + 2 \arctan\left(\frac{1}{f_1(\zeta)}\right) - \ln\left(\frac{(1 + f_1^2(\zeta))^2}{f_1^4(\zeta)}\right);$$

$$f_4(\zeta) = \ln(-16\zeta) - 2 \ln\left(\frac{1 + f_1^2(\zeta)}{f_1^2(\zeta)}\right);$$

$$f_1(\zeta) = (1 - 16\zeta)^{-0,25}; \quad \zeta_0 = z_0/L; \quad \zeta_{0T} = z_{0T}/L,$$

где z_0 и z_{0T} – параметры динамической и термической шероховатости.

Для расчета приземных значений параметров по формулам (12) необходимо знать значения масштабов длины L , скорости v_* , температуры θ_* и влажности q_* , а также значения потенциальной температуры воздуха θ_S и абсолютной влажности q_S вблизи подстилающей поверхности.

При определении температуры поверхности Земли θ_g используется поток тепла через поверхность, обусловленный радиационным нагревом (выхлаживанием) и турбулентными потоками тепла и влаги на поверхности; также учитывается изменение температуры влагосодержания нижних слоев почвы (глубина ≈ 2 м, период моделирования несколько суток).

Поток тепла на поверхности Земли определяется формулой

$$Q_w = ((1 - A_s) Q_{shortw}^{in} + Q_{longw}^{in} - Q_{longw}^{out})_w - \rho c_p (\overline{\theta'w'})_w - \rho L_w (\overline{q'w'})_w, \quad (13)$$

где Q_{shortw}^{in} , Q_{longw}^{in} и Q_{longw}^{out} – потоки коротковолнового излучения, приходящего и уходящего длинноволнового излучения соответственно; A_s – альбеда поверхно-

сти; $(\overline{\theta'w'})_w$ и $(\overline{q'w'})_w$ – турбулентные потоки тепла и влаги вблизи подстилающей поверхности.

Для моделирования процессов обмена тепла и влаги между нижним уровнем атмосферы, растительностью и почвой используется схема параметризации ISBA (Interaction Soil Biosphere Atmosphere), разработанная Noilhan и Planton [15]. Эта схема учитывает изменение теплового режима почвы, содержания влаги в почве, осадки, накапливающиеся на растительности и аэродинамические процессы переноса в приземном слое атмосферы. Схема использует модель восстановления тепла и содержания влаги в почве и модель испарения.

Модель ISBA включает в себя пять прогностических уравнений для температуры почвы на глубине, T_2 , содержания воды в почве на глубине, w_2 , температуры на поверхности почвы/растительности, T_g , содержания воды на поверхности почвы, w_g и перехвата воды, задержавшейся на поверхности, W_r .

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} = C_T \left[(1 - A_S) Q_{shortw}^{in} + Q_{longw}^{in} - \varepsilon_S \sigma T_g^4 - \rho c_p (\overline{\theta'w'}) - \rho L_w (\overline{q'w'}) \right] + \frac{2\pi}{\tau_{24}} (T_2 - T_g); \quad (14)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{T_g - T_2}{\tau_{24}}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial w_g}{\partial t} = \frac{C_1}{\rho_w d_1} (P_g - E_g) - \frac{C_2}{\tau_{24}} (w_g - w_{geq}), 0 \leq w_g \leq w_{sat}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho_w d_2} (P_g - E_g - E_{tr}) - \frac{C_3}{d_2 \tau_{24}} \max(0, w_2 - w_{fc}), 0 \leq w_2 \leq w_{sat}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial W_r}{\partial t} = veg P - (E_v - E_{tr}) - R_r, 0 \leq W_r \leq W_{rmax}. \quad (18)$$

Здесь $\tau_{24} = 86400$ с, E_g – испарение с поверхности почвы, E_v – испарение с растительности ($E = E_g + E_v$), P – интенсивность жидких осадков, P_g – осадки, достигшие поверхности Земли, E_{tr} – поток влаги в почву, veg – доля поверхности, покрытой растительностью, C_T , C_1 , C_2 , C_3 , d_1 , d_2 , w_{geq} , w_{fc} , R_r – параметры модели почвы [15].

При отсутствии облачности коротковолновая составляющая радиационного потока, достигающего поверхности Земли, а также длинноволновое излучение атмосферы на верхней границе расчетной области определяются по формулам [16–18]:

$$Q_{shortw(clear-sky)}^{in} = \begin{cases} (a_g - a_w(h(x))) S_{slope} S_o \cos \chi, & \cos \chi > 0; \\ 0, & \cos \chi \leq 0; \end{cases} \quad (19)$$

$$Q_{l(clear-sky)}^{in} = 59.38 + 113.7(T_2 / 273.15)^6 + 96.96(r(h(x, y)) / 25)^{0.5}. \quad (20)$$

Здесь χ – зенитный угол Солнца; $S_o = 1367$ Вт/м² – солнечная постоянная; $a_g = 0.485 + 0.515(1.041 - 0.16/\sqrt{\cos \chi})$; $a_w(z) = 0.039(r(z)/\cos \chi)^{0.3}$ – коэффициент ослабления потока солнечного тепла за счет поглощения содержащейся в ат-

мосфере парообразной влагой; $r(z) = \int_z^H \rho q_V dz$ – количество влаги в столбе возду-

ха от высоты z до высоты верхней границы расчетной области H ; $h(x,y)$ – высота поверхности Земли над уровнем моря; S_{slope} – степень наклона поверхности к падающему солнечному потоку.

Изменение температуры воздуха при рассеивании излучения водяным паром, содержащимся в воздухе, определяется следующей зависимостью [17]:

$$Q_{rad(clear-sky)} = -S_o \cos \chi \frac{\partial a_w}{\partial z} - \sigma_{SB} \frac{\partial \varepsilon^\uparrow}{\partial z} (T^4(z) - T^4(h(x,y))) - \\ - \sigma_{SB} \frac{\partial \varepsilon^\downarrow}{\partial z} (T^4(h(x,y)) - T^4(z)),$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²К⁴ – постоянная Стефана – Больцмана, а степень черноты столба воздуха выше ($\varepsilon^\downarrow$) и ниже ($\varepsilon^\uparrow$) высоты z : $h(x,y) \leq z \leq H$ [17].

При учете влияния облачности используется предположение Стефенса [19], согласно которому допускается, что ясные и облачные участки неба могут давать вклад в суммарный радиационный баланс по отдельности. Коротковолновая и длинноволновая составляющие излучения модифицируются облачными участками согласно эмпирическим соотношениям, определяющим степень пропускания и рассеивания излучения в зависимости от содержания конденсированной влаги в атмосфере [16, 19]:

$$\Psi_{Transmission}(z) = \begin{cases} \exp\left(-16W^{in}(z) + 13(W^{in}(z))^2\right), & W^{in}(z) \leq 0.11, \\ 0.2, & W^{in}(z) > 0.11; \end{cases}$$

$$\Psi_{Absorption}(z) = \begin{cases} 0.3\sqrt{W^{in}(z)}, & W^{in}(z) \leq 0.11, \\ 0.1, & W^{in}(z) > 0.11; \end{cases}$$

$$\varepsilon_l^{in} = \min(0.9; 1 - \exp(-158W^{in}(z))); \quad \varepsilon_l^{out} = \min(0.9; 1 - \exp(-130W^{out}(z)));$$

$$W^{in}(z) = \int_z^H \rho \min(0.0003; q_c) dz; \quad W^{out}(z) = \int_h^z \rho \min(0.0003, q_c) dz.$$

Приходящее коротковолновое излучение, а также приходящее и уходящее длинноволновое излучение трансформируются согласно формулам:

$$Q_{shortw}^{in}(z) = Q_{shortw(clear-sky)}^{in} \Psi_{Transmission}(z);$$

$$Q_{longw}^{in}(z) = Q_{longw(clear-sky)}^{in} (1 - \varepsilon_l^{in}(z)) + \varepsilon_l^{in}(z) \sigma T^4(z);$$

$$Q_{longw}^{out}(z) = Q_{longw(clear-sky)}^{out} (1 - \varepsilon_l^{out}(z)) + \varepsilon_l^{out}(z) \sigma T^4(z).$$

Изменение температуры воздуха с учетом наличия облачности определяется следующей зависимостью [16]:

$$Q_{rad} = Q_{rad(clear-sky)} + \frac{\partial \Psi_{Heat}}{\partial z},$$

$$\text{где } \Psi_{Heat}(z) = Q_{shortw(clear-sky)}^{in} \Psi_{Absorption}(z) + Q_{longw}^{in}(z) - Q_{longw}^{out}(z).$$

Численный метод решения

Для системы уравнений перед ее численным решением методом сеток применялось преобразование координат вида

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = y, \\ \sigma = H \frac{z - h(x, y)}{H - h(x, y)}. \end{cases} \quad (21)$$

Преобразование (21) позволяет отобразить трехмерную область с криволинейной границей на параллелепипед. Аппроксимация построенной выше дифференциальной задачи с выполненным преобразованием (21) осуществляется на основе метода конечного объема [20]. Основная идея этого метода заключается в разбиении расчетной области на непересекающиеся, граничащие друг с другом конечные объемы так, чтобы один узел расчетной сетки содержался только в своем конечном объеме. Для дискретизации используется равномерная по горизонтальным направлениям сетка со сгущением сеточных плоскостей при приближении к поверхности Земли. После разбиения расчетной области каждое дифференциальное уравнение математической модели интегрируется по каждому конечному объему. Значения компонент скорости определяются на гранях конечных объемов, а скалярные характеристики – в их центре. При вычислении интегралов используются кусочно-полиномиальные приближения для зависимых величин. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполняется с использованием монотонизированной линейной противотокковой схемы MLU Ван Лира [21, 22]. В результате такого приближенного интегрирования получается дискретный аналог системы дифференциальных уравнений – система линейных алгебраических уравнений. Для дискретизации по времени желательно использование схемы второго или более высокого порядка аппроксимации. Для этих целей в данной работе применяются явный метод Адамса – Бэшфорда и неявный метод Кранка – Николсона второго порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} \Phi_h^{n+1} = & \Phi_h^n + \Delta t_n \left(\frac{3}{2} L_h(\Phi_h^n) - \frac{1}{2} L_h(\Phi_h^{n-1}) \right) + \\ & + \Delta t_n \left(\frac{1}{2} \Lambda_h(\Phi_h^{n+1}) + \frac{1}{2} \Lambda_h(\Phi_h^n) \right) + \Delta t_n \left(\frac{3}{2} S_h(\Phi_h^n) - \frac{1}{2} S_h(\Phi_h^{n-1}) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь L_h – конечно-разностный аналог конвективно-диффузионного оператора в уравнениях (2) – (5), (7), (8) за исключением вертикальной диффузии вдоль оси Oz , Λ_h – разностный аналог дифференциального оператора вертикальной диффузии, $S(\Phi)$ – источниковые члены уравнений (2) – (5), (7), (8). Заметим, что выбранный способ аппроксимации для конвективно-диффузионных уравнений позволяет использовать при их численном решении экономичный метод прогонки вдоль вертикальных сеточных линий.

В гидродинамической части модели для согласования полей скорости и давления использовалась схема предиктор – корректор, в соответствии с которой явно-неявная схема (22) для уравнений движения (2) – (4) выполняла функцию предиктора для компонент скорости, а коррекция поля скорости с целью удовлетворения сеточного аналога уравнения неразрывности (1) осуществлялась на основе итерационного решения дискретного уравнения Пуассона для поправки к негидростатической части давления $p'_h = p_h^{n+1} - p_h^n$.

Параллельный алгоритм

В качестве основного подхода распараллеливания для мезомасштабной метеорологической модели TSUNM3 выбрана геометрическая декомпозиция сеточной области на подобласти: каждому процессорному элементу вместе с выделенной сеточной подобластью распределяются все значения сеточной функции, принадлежащие этой подобласти [23]. Из-за используемого шаблона явно-неявной разностной схемы для вычисления очередного приближения в приграничных узлах каждой подобласти необходимо знать значения сеточной функции с соседнего граничащего процессорного элемента. Для этого на каждом вычислительном узле создаются фиктивные ячейки для хранения данных с соседнего вычислительного узла и организуются пересылки этих граничных значений, необходимых для обеспечения однородности вычислений [23]. Для передачи данных другим процессорным элементам и получения необходимых для продолжения вычислений данных от них в данной работе используется стандарт передачи сообщений MPI (Message Passing Interface).

В данной работе для решения разностного уравнения (22) используется метод прогонки, для разностного уравнения для поправки давления p'_h применяется полинейный метод Зейделя с красно-черным упорядочиванием узлов вычислительной сетки [23, 24], параллельная реализация которого при проведении расчетов показывает независимость скорости сходимости итерационного процесса от количества применяемых процессорных элементов. Важно, что такая реализация алгоритма на многопроцессорной вычислительной системе целиком сохраняет свойство последовательного алгоритма и очень хорошо масштабируется на любое разумное количество вычислительных узлов.

Некоторые результаты и их обсуждение

Разработанная мезомасштабная модель была применена к исследованию метеорологических условий над г. Томск (85.0°E 56.5°N, центр города) и аэропортом Богашево (85.21°E, 56.38°N).

Результаты расчетов по мезомасштабной метеорологической модели TSUNM3 сравнивались с измерениями, полученными с помощью метеорологических приборов Центра коллективного пользования «Атмосфера» Института оптика атмосфера СО РАН им. В.Е. Зуева для различных сезонных условий [25].

Ниже представлены сравнительные данные расчета метеовеличин по модели и фактические наблюдения в районе размещения датчиков за 25 ноября 2016 г. По метеоосводкам, в этот день в районе Томска на протяжении всех суток наблюдался интенсивный снегопад, за сутки выпало более 10 мм осадков. Ветер юго-юго-восточного направления, постепенно переходящий в юго-юго-западное. Скорость ветра составляла 3–5 м/с, погода характеризовалась высокой влажностью и температурой, близкой к климатической норме (минимальная ночью –11 °C, максимальная – днем –5 °C). Рис. 2 является прекрасной иллюстрацией описанных процессов. Расчеты по модели практически в точности повторяют изменение основных метеорологических параметров, улавливая их изменения в течение времени: суточный ход температуры воздуха, высокая относительная влажность, незначительное увеличение скорости ветра при приближении фронта в период 06–09 ч) и изменение его направления. Различие прогностических метео данных от измеренных находится в пределах погрешности измерительных приборов.

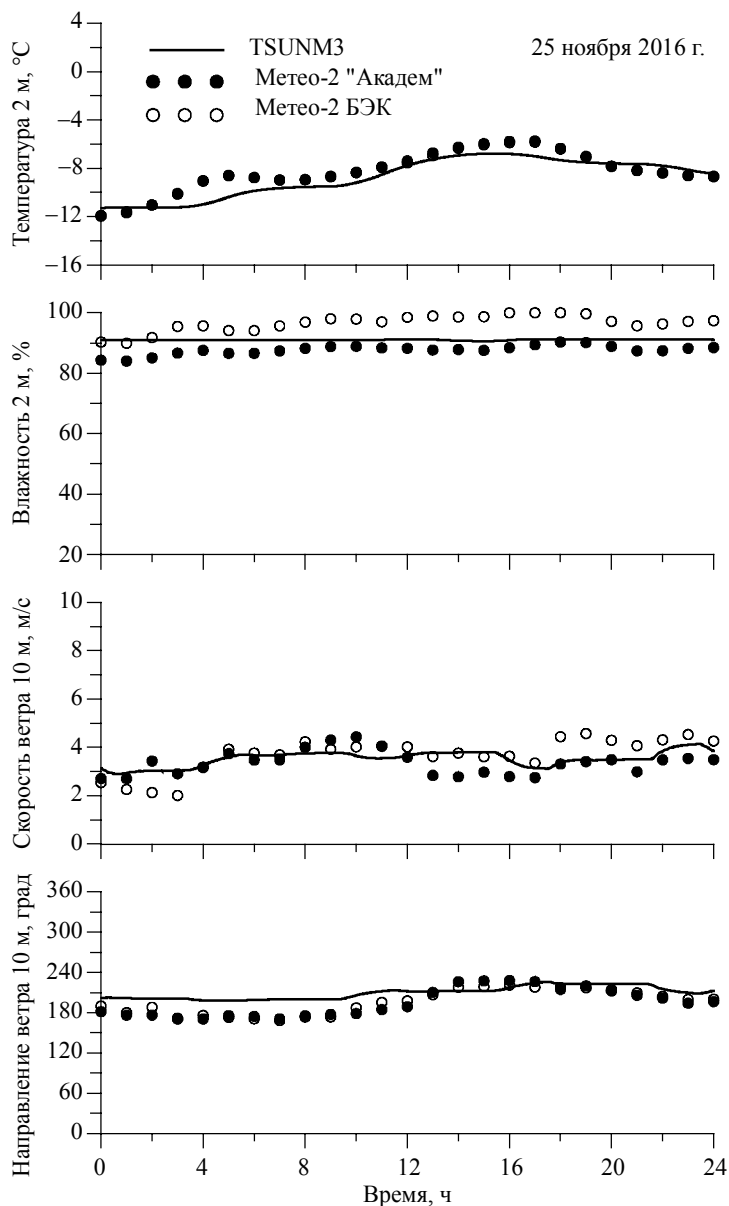


Рис. 2. Рассчитанные с помощью мезомасштабной модели TSUNM3 и измеренные ультразвуковой метеостанцией «Метео-2» приземные значения температуры и относительной влажности воздуха, а также скорости и направления ветра для 25 ноября 2016 г. в районе размещения приборов ЦКП «Атмосфера»

Fig. 2. Surface temperature and relative humidity values, as well as wind speed and direction calculated with the use of the TSUNM3 mesoscale model and measured by the Meteo-2 ultrasonic weather station for November 25, 2016 in the area where the instruments of the Atmosfera Collective Use Center are located.

Вертикальный профиль температуры воздуха смоделирован также очень точно на всех высотах (рис. 3): суточные изменения у земли и высотный ход, различие с профилимером не превышает на отдельных высотах 1.5 °С.

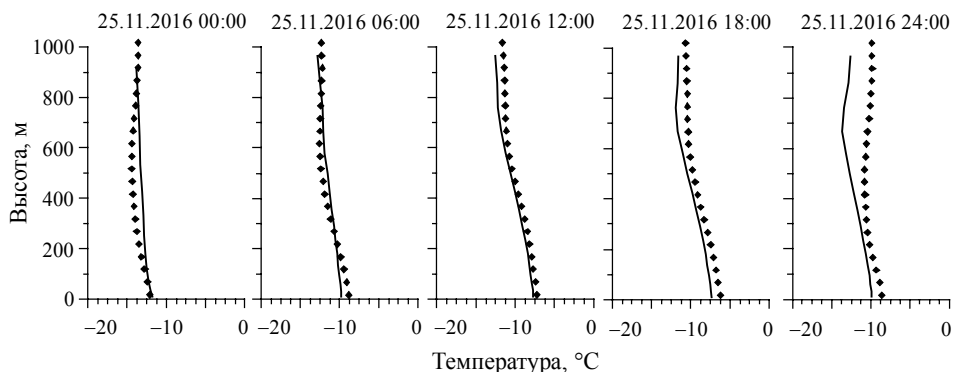


Рис. 3. Рассчитанные с помощью мезомасштабной модели TSUNM3 и измеренные температурным профилимером МТР-5 вертикальные профили температуры для 25 ноября 2016 г. в районе размещения приборов ЦКП «Атмосфера»

Fig. 3. Vertical temperature profiles calculated with the use of the TSUNM3 mesoscale model and measured by the MTR-5 temperature profile meter for November 25, 2016 in the area where the instruments of the Atmosfera Collective Use Center are located.

Результаты сравнения прогностических и измеренных метеовеличин за 21 мая 2018 г. представлены на рис. 4–6. По метеосводкам (<http://gp5.ru>), исследуемый район находился в теплом секторе циклона, расположенного северо-восточнее. Отмечалась облачная с прояснениями погода, местами в районе осадки. Преобладала погода с выраженным суточным ходом температуры, влажности, преобладанием южного – юго-западного ветра.

Моделью TSUNM3 были предсказаны эти особенности. Различие в температуре не превысило 2 °С, по скорости ветра погрешность составила не более 2 м/с, рассчитанные относительная влажность и направление ветра были незначительно завышены (максимальное различие составило соответственно 15 % и 60°).

Прогноз вертикального профиля температуры оказался менее удачен ночью и рано утром (00 и 06 ч). В ночной срок модель не предсказала температурную инверсию в слое до 200 м и более резкое понижение температуры выше этого слоя, хотя значения температуры у земли и на высоте 1 км совпали. В утренний срок модель также не «увидела» изотермию. Но при этом различия в показаниях не превысили 1.5 °С. В остальные сроки вертикальный профиль был предсказан верно (включая и следующий ночной срок, когда наблюдалась инверсия температуры).

Сравнение рассчитанных по модели и фактических данных по скорости и направлению ветра на высотах в приземном слое показало, что на высотах скорость ветра незначительно занижается, а направление – завышается. При этом с увеличением заблаговременности ошибки возрастают (по скорости различие с измерениями не более 4 м/с, по направлению – не более 40°).

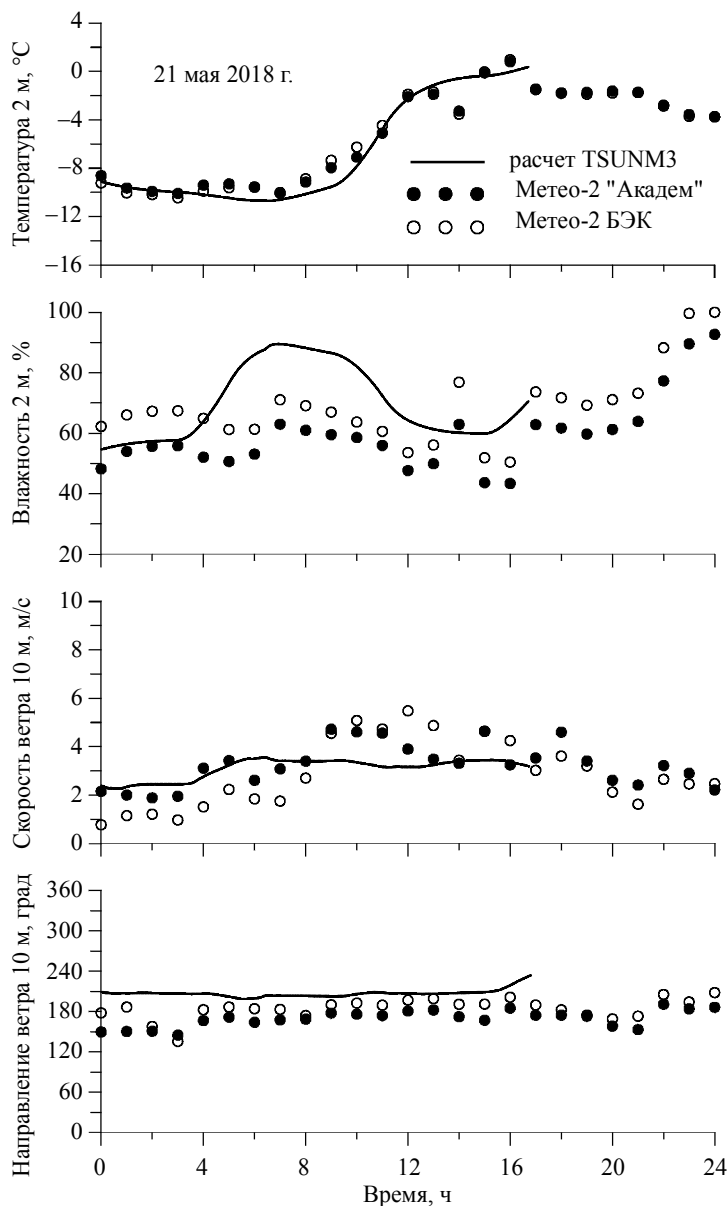


Рис. 4. Рассчитанные с помощью мезомасштабной модели TSUNM3 и измеренные ультразвуковой метеостанцией «Метео-2» приземные значения температуры и относительной влажности воздуха, а также скорости и направления ветра для 21 мая 2018 г. в районе размещения приборов ЦКП «Атмосфера»

Fig. 4. Surface temperature and relative humidity values, as well as wind speed and direction calculated with the use of the TSUNM3 mesoscale model and measured by the Meteo-2 ultrasonic weather station for May 21, 2018 in the area where the instruments of the Atmosfera Collective Use Center are located.

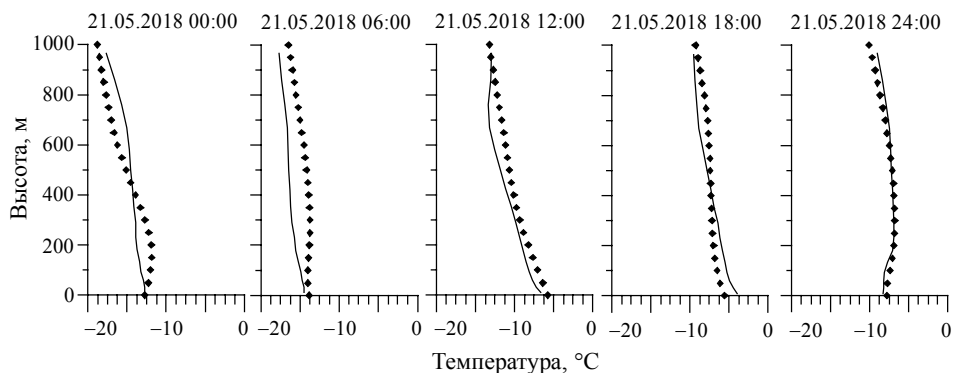


Рис. 5. Рассчитанные с помощью мезомасштабной модели TSUNM3 и измеренные температурным профилимером МТР-5 вертикальные профили температуры для 21 мая 2018 г. в районе размещения приборов ЦКП «Атмосфера»

Fig. 5. Vertical temperature profiles calculated with the use of the TSUNM3 mesoscale model and measured by the MTR-5 temperature profile meter for May 21, 2018 in the area where the instruments of the Atmosfera Collective Use Center are located.

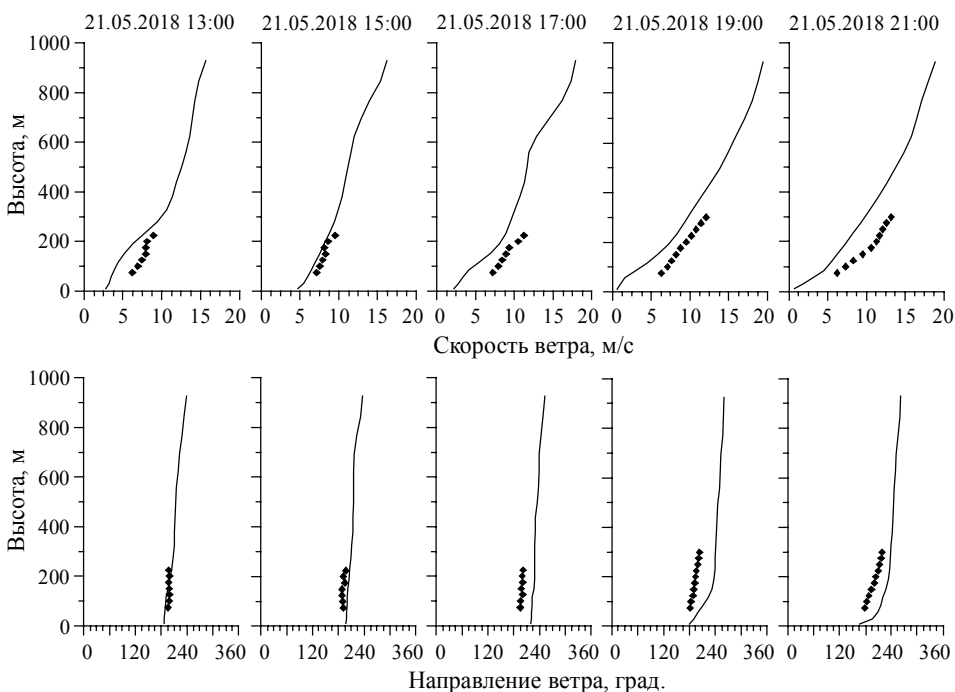


Рис. 6. Рассчитанные с помощью мезомасштабной модели TSUNM3 и измеренные содаром «Волна-4М» вертикальные профили скорости и направления ветра для 21 мая 2018 г. в районе размещения приборов ЦКП «Атмосфера»

Fig. 6. Vertical profiles of wind speed and direction calculated with the use of the TSUNM3 mesoscale model and measured by the Volna-4M sodar for May 21, 2018 in the area where the instruments of the Atmosfera Collective Use Center are located.

Результаты прогнозирования осадков

Способности модели TSUNM3 по предсказанию осадков в условиях Сибирского региона были оценены также для нескольких выбранных исторических дат в период 2016–2018 гг. (11.07.2016, 24.11.2016, 27.06.2016, 5.08.2017, 6.08.2017, 25.01.2017, 29.12.2017, 2.05.2018, 8.05.2018, 21.05.2018), когда наблюдались интенсивные осадки на территории аэропорта Богашево и которые фиксировались стандартными метеонаблюдениями.

На рис. 7 представлены рассчитанные по модели TSUNM3 осадки в районе аэропорта г. Томск – Богашево во время 25 ноября 2016 г. и 8 мая 2018 г. Из рисунка видно, что первый период времени характеризуется осадками в виде снега. Наблюдения в аэропорту (<http://rp5.ru>) указывают на непрекращающиеся снежные осадки в течение суток с усилением в интервалы времени: 7:00–9:30, 17:00–18:30. Во второй период времени до 10:30 метеорологами фиксировалось выпадение снега, затем до 17:00 наблюдались исключительно жидкие осадки. После 17:00 шел слабый снег и дождь. В целом, модель TSUNM3 удовлетворительно предсказала наблюдаемый характер изменения осадков в течение суток для каждого выбранного периода.

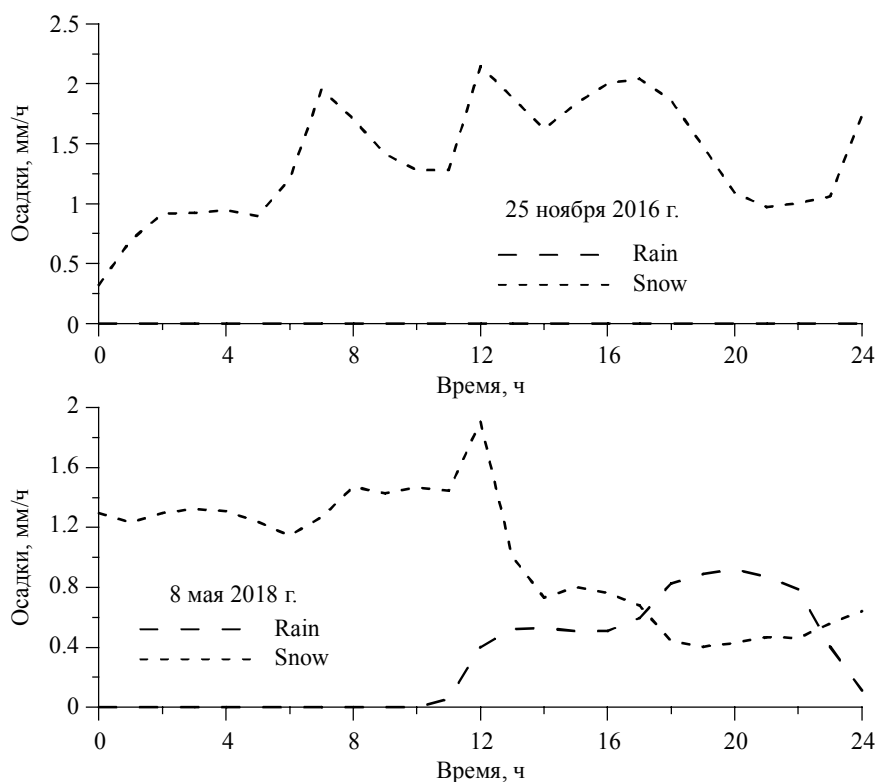


Рис. 7. Предсказанные значения накопленных за 1 ч осадков на 25 ноября 2016 г. и на 8 мая 2018 г. в районе аэропорта Богашево

Fig. 7. Predicted values of precipitation accumulated for 1 hour as of November 25, 2016 and May 8, 2018 in the area of Bogashevo Airport

Результаты оценки качества численного прогноза осадков по факту их выпадения даны в таблице. Последний столбец отражает характеристики для всех случаев выпадения осадков (дождь, снег, град). Качество численных прогнозов осадков устанавливается по факту их наличия или отсутствия и количеству осадков путем сравнения рассчитанных данных об осадках с фактическими наблюдениями. При оценке прогноза осадков по факту рассчитывается общая оправдываемость U , оправдываемость прогноза «осадки» U_+ и «без осадков» U_- , предупрежденность случаев с осадками P_+ , без осадков P_- (все значения рассчитываются в %) и критерий качества Пирси – Обухова T . Для получения этих характеристик строится таблица сопряженности, показывающая соотношение между количеством случаев прогноза и фактом выпадения осадков.

При оценке качества прогноза осадков по факту их выпадения использованы ежечасные прогностические и фактические данные об осадках для рассмотренных выше дат.

Характеристики качества прогноза осадков по факту их выпадения

№ п/п	Характеристики	Прогноз дождя	Прогноз снега	Прогноз осадков в целом
1	Общая оправдываемость U	77	68	74
2	Оправдываемость прогноза наличия осадков U_+	34	68	57
3	Предупрежденность факта наличия осадков P_+	59	98	87
4	Оправдываемость прогноза факта отсутствия осадков U_-	92	–	91
5	Предупрежденность факта отсутствия осадков P_-	80	–	67
6	Критерий Пирси – Обухова T	39	–	54

Из таблицы можно сделать следующие выводы:

- общая оправдываемость всех видов осадков по модели TSUNM3 составляет 74 %;
- для всех осадков характеристики 1, 2, 4 и 6 соответствуют качеству современных мезомodelей;
- предупрежденность факта наличия осадков выше, а факта отсутствия осадков несколько ниже, чем для известных моделей;
- общая оправдываемость дождя несколько выше, чем снега;
- модель TSUNM3 лучше прогнозирует факт отсутствия дождя, а по снегу лучше прогнозируется факт его наличия, что связано, возможно, с особенностями выборок;
- модель точно прогнозирует фазовое состояние осадков: только в одном случае дождь был дан в прогнозе как снег;
- из 6 случаев выпадения града модель не спрогнозировала его.

Что касается оценки модели по прогнозу количества осадков, то в связи с отсутствием фактических ежечасных данных по их количеству получить численные характеристики не удастся. Однако можно предварительно сказать, что по факту «дождь» и «ливневой дождь» модель прогнозирует на соответствующий час количество осадков от 0.2 до 1.0 мм. В случае выпадения снега по факту «снег» расчеты по модели TSUNM3 дают количество осадков до 1 мм/ч, при осадках «ливневой снег» прогнозы по модели дают от 1 до 5 мм/ч.

Заключение

Рассмотрены математическая постановка и параллельный алгоритм реализации создаваемой в ТГУ мезомасштабной метеорологической модели высокого разрешения TSUNM3, для которой в качестве «ведущей» глобальной модели прогноза погоды использовались расчеты по модели оперативного прогноза погоды ПЛАВ Гидрометцентра РФ.

Представлены результаты численного прогнозирования основных метеорологических параметров атмосферы (температура, влажность воздуха, скорость и направление ветра) и осадков в различные сезоны в Сибирском регионе. Модель была применена для заранее выбранных исторических дат, характеризующихся интенсивным выпадением осадков в виде дождя, снега или крупы в Томском районе. В качестве параметризации микрофизики атмосферной влаги использовалась модель Хонга и Лима WSM6 [7] и параметризация взаимодействия атмосферного пограничного слоя с почвой ISBA [15], предсказывающая изменение температуры и влажности поверхности. Апробация моделей проведена на наблюдениях, полученных с помощью содара «Волна-4М», температурного профилометра МТР-5 и ультразвуковых метеостанций «Метео-2» ЦКП «Атмосфера». Кроме того, результаты численного прогноза сравниваются с фактическими погодными наблюдениями в аэропорту г. Томска Богашево.

Результаты расчетов, направленные, в первую очередь, на валидацию разрабатываемой авторами мезомасштабной метеорологической модели TSUNM3, показали следующее. В целом, усовершенствованная модель TSUNM3 адекватно отражает время выпадения и интенсивность осадков, при этом однако в отдельных случаях время начала и окончания их не всегда совпадают, различие может достигать нескольких часов. Достоверно отображается фазовое состояние осадков. Более 70 % случаев выпадения осадков подтверждено численными расчетами. Модель удовлетворительно прогнозирует температурно-влажностные характеристики. Качество модели по прогнозу осадков сопоставимо с современными моделями мезомасштаба, например с моделью Weather Research and Forecasting (WRF).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sokhi R., Baklanov A., Schlünzen H., et al. Mesoscale Modelling for Meteorological and Air Pollution Applications. New York: Anthem Press, 2018. 260 p.
2. Skamarock W.C., Klemp J.B., Dudhia J., Gill D.O., Barker D.M., Duda D.M., Wang W., Powers J.G. A description of the advanced research WRF version 3 // NCAR Tech. Note. NCAR/TN-68CSTR, 2008. 100 p. DOI: 10.5065/D68S4MVH.
3. Yáñez-Morroni G., Gironás J., Caneo M., Delgado R., Garreaud R. Using the Weather Research and Forecasting (WRF) model for precipitation forecasting in an andean region with complex topography // Atmosphere. 2018. V. 9. No. 8. P. 304. DOI: 10.3390/atmos9080304.
4. Ривин Г.С., Вильфанд Р.М., Киктев Д.Б., Розинкина И.А., Тудрий К.О., Блинов Д.В., Варенцов М.И., Самсонов Т.Е., Бундель А.Ю., Кирсанов А.А., Захарченко Д.И. Система численного прогнозирования явлений погоды, включая опасные, для Московского мегаполиса: разработка прототипа // Метеорология и гидрология. 2019. № 11. С. 33–45.
5. Starchenko A.V., Bart A.A., Bogoslovsky N.N., Danilkin E.A., Terentyeva M.V. A mathematical modelling of atmospheric processes above an industrial center // Proc. SPIE. 2014. V. 9292. P. 929249-1–929249-30. DOI: 10.1117/12.2075164.
6. Pielke R. Mesoscale Meteorological Modeling. San Diego, California: Academic Press, 2002. 676 p.
7. Hong S.-Y., Lim J.-O.J. The WRF single-moment 6-class microphysics scheme (WSM6) // J. Korean Meteorological Society, 2006. V. 42. No. 2. P. 129–151.

8. Bao J.-W., Michelson S.A., Grell E.D. Pathways to the Production of Precipitating Hydrometeors and Tropical Cyclone Development // Monthly Weather Review. 2016. V. 144. P. 2395–2420. DOI: 10.1175/MWR-D-15-0363.1.
9. Andren A. Evaluation of a turbulence closure scheme suitable for air pollution applications // J. Applied Meteorology and Climatology. 1990. V. 29. P. 224–239.
10. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: Part I. The basic experiment // Monthly Weather Review. 1963. V. 91. No. 2. P. 99–164.
11. Толстых М.А., Булдовский Г.С. Усовершенствованный вариант глобальной полулагранжевой модели прогноза полей метеозадающих элементов в версии с постоянным разрешением заблаговременностью до 10 суток и результаты его оперативных испытаний // Фундаментальные и прикладные гидрометеорологические исследования. СПб.: Гидрометеороиздат, 2003. С. 24–47.
12. Carpenter K. Note on the paper «Radiation condition for the lateral boundaries of limited-area numerical models» by Miller, M. and Thorpe, A. (V. 107. P. 615–628) // J. Royal Meteorology Society. 1982. V. 108. P. 717–719.
13. Монин А.С., Обухов А.М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Труды Геофизического института АН СССР. 1954. № 24. С. 163–187.
14. Dyer A.J., Hicks B.B. Flux-gradient relationships in the constant flux layer // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1970. V. 96. P. 715–721.
15. Noilhan J., Mahfouf J.-F. The ISBA land surface parameterization scheme // Global and Planetary Change. 1996. V. 13. P. 145–159.
16. Hurley P. The Air Pollution Model (TAPM) Version 2 // CSIRO Atmospheric Research. 2002. Paper No. 55. P. 49. DOI: 10.4225/08/5863fe87915fd.
17. Mahrer Y., Pielke R.A. A numerical study of the airflow over irregular terrain // Beitr. Phys. Atmosph. 1977. V. 50. P. 98–113.
18. Dilley A.C., O'Brien D.M. Estimating downward clear-sky long-wave irradiance at the surface from screen temperature and precipitable water // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1998. V. 124. P. 1391–1401.
19. Stephens G. Radiation profiles in extended water clouds. Part II: Parameterization schemes // J. Atmospheric Sciences. 1978. V. 35. P. 2123–2132.
20. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.
21. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // J. Computational Physics. 1974. V. 14. P. 361–370.
22. Семёнова А.А., Старченко А.В. Разностная схема для нестационарного уравнения переноса, построенная с использованием локальных весовых интерполяционных кубических сплайнов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 49. С. 61–74. DOI: 10.17223/19988621/49/6.
23. Starchenko A., Danilkin E., Semenova A., Bart A. Parallel algorithms for a 3D photochemical model of pollutant transport in the atmosphere // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 687. P. 158–171. DOI: 10.1007/978-3-319-55669-7.
24. Старченко А.В., Берцун В.Н. Методы параллельных вычислений. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. 223 с.
25. Starchenko A.V., Bart A.A., Kizhner L.I., Odintsov S.L., Semyonov E.V. Numerical simulation of local atmospheric processes above a city // Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. 2019. V. 11208. P. 1–9. DOI: 10.1117/12.2541630.

Starchenko A.V., Bart A.A., Kizhner L.I., Danilkin E.A. (2020) MESOSCALE METEOROLOGICAL MODEL TSUNM3 FOR THE STUDY AND FORECAST OF METEOROLOGICAL PARAMETERS OF THE ATMOSPHERIC SURFACE LAYER OVER A MAJOR POPULATION CENTER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 35–55

DOI 10.17223/19988621/66/3

Keywords: mathematical modeling of atmospheric processes with high resolution, comparison of calculations with measurements of the Atmosfera Collective Use Center

The paper describes the mathematical formulation and numerical method of the TSUNM3 high-resolution mesoscale meteorological model being developed at Tomsk State University. The model is nonhydrostatic and includes three-dimensional nonstationary equations of hydrothermodynamics of the atmospheric boundary layer with parameterization of turbulence, moisture microphysics, long-wave and short-wave (solar) radiation, and advective and latent heat flows in the atmosphere and at the boundary of its interaction with the underlying surface.

The numerical algorithm is constructed using structured grids with uniform spacing in horizontal directions and condensing to the Earth surface in the vertical direction. When approximating the differential formulation of the problem, the finite volume method with the second order approximation in the spatial variables is used. Explicit-implicit approximations in time (Adams–Bashforth and Crank–Nicolson) are used to achieve second-order accuracy in time.

The paper presents results of numerical forecasting of the main meteorological parameters of the atmosphere (temperature, humidity, wind speed and direction) and precipitation in different seasons in the Siberian region. The models were tested with the help of observations obtained using the Volna-4M sodar, MTR-5 temperature profile meter, and Meteo-2 ultrasonic weather stations of the Atmosfera Collective Use Center.

The improved TSUNM3 model is shown to adequately reflect the precipitation time and intensity. However, in some cases, the times of its beginning and end do not always coincide, the difference can reach several hours. The precipitation phase state is reflected reliably. Over 70% of precipitation cases are confirmed by numerical calculations. The model satisfactorily predicts temperature and humidity characteristics. The quality of the precipitation forecast model is comparable to the modern mesoscale models, such as the Weather Research and Forecasting (WRF) model.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 65M08, 86A10

Financial support. The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-20042).

Alexander V. STARCHENKO (Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: starch@math.tsu.ru

Andrey A. BART (Candidate of Physics and Mathematics, Lead Engineer of the University Laboratory of the Department of Computational Mathematics and Computer Modelling, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bart@math.tsu.ru

Lyubov I. KIZHNER (Candidate of Geology and Geography, Associate Professor of the Department of Meteorology and Climatology, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kdm@mail.tsu.ru

Evgeniy A. DANILKIN (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics and Computer Modelling, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ugin@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Sokhi R., Baklanov A., Schlünzen H. et al. (2018) *Mesoscale Modelling for Meteorological and Air Pollution Applications*. New York: Anthem Press.
2. Skamarock W.C., Klemp J.B., Dudhia J., Gill D.O., Barker D.M., Duda D.M., Wang W., Powers J.G. (2008) A description of the advanced research WRF version 3. *NCAR Technical Notes. NCAR/TN-68CSTR*. DOI: 10.5065/D68S4MVH.
3. Yáñez-Morroni G., Gironás J., Caneo M., Delgado R., Garreaud R. (2018) Using the Weather Research and Forecasting (WRF) Model for Precipitation Forecasting in an Andean Region with Complex Topography. *Atmosphere*. 9(8). p. 304. DOI: 10.3390/atmos9080304.
4. Rivin G.S., Vil'fand R.M., Kiktev D.B., Rozinkina I.A., Tudrii K.O., Blinov D.V., Varentsov M.I., Samsonov T.E., Bundel' A. Yu., Kirsanov A.A., Zakharchenko D.I. (2019) Sistema chislennogo prognozirovaniya yavleniy pogody, vklyuchaya opasnyye, dlya Moskovskogo megapolisa: razrabotka prototipa [The System for Numerical Prediction of Weather Events Including Severe Ones for the Moscow Megacity: The Prototype Development]. *Meteorologiya i gidrologiya – Meteorology and hydrology* 11. pp. 33–45.
5. Starchenko A.V., Bart A.A., Bogoslovsky N.N., Danilkin E.A., Terentyeva M.V. (2014) A mathematical modelling of atmospheric processes above an industrial center. *Proceedings of SPIE*. 9292. P. 929249-1-929249-30. DOI: 10.1117/12.2075164.
6. Pielke R. (2002) *Mesoscale meteorological modeling*. San Diego: Academic Press.
7. Hong S.-Y., Lim J.-O.J. (2006) The WRF single-moment 6-class microphysics scheme (WSM6). *Journal of Korean Meteorological Society*. 42(2). pp. 129–151.
8. Bao J.-W., Michelson S.A., Grell E.D. (2016) Pathways to the Production of Precipitating Hydrometeors and Tropical Cyclone Development. *Monthly Weather Review*. 144. pp. 2395–2420. DOI: 10.1175/MWR-D-15-0363.1.
9. Andren A. (1990) Evaluation of a turbulence closure scheme suitable for air pollution applications. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*. 29. pp. 224–239.
10. Smagorinsky J. (1963) General Circulation Experiments with the Primitive Equations: Part I. The Basic Experiment. *Monthly Weather Review*. 91(2). P. 99–164.
11. Tolstykh M. A., Buldovsky G.S. (2003) Uovershenstvovanny variant global'noy polulagranzhevoy modeli prognoza poley meteoelementov v versii s postoyannym razresheniyem zablagovremennost'yu do 10 sutok i rezul'taty ego operativnykh ispytaniy [An improved version of the global semi-Lagrangian model for forecasting meteorological fields in a version with a constant resolution up to 10 days in advance and results of its operational tests]. *Fundamental'nyye i prikladnyye gidrometeorologicheskiye issledovaniya – Fundamental and Applied Hydrometeorological Studies*. P. 24–47.
12. Carpenter K. (1982) Note on the Paper "Radiation Condition for the Lateral Boundaries of Limited-Area Numerical Models" by Miller M. and Thorpe A. (V. 107. pp. 615–628). *Journal of Royal Meteorology Society*. 108. P. 717–719.
13. Monin, A.S., Obukhov, A.M. (1954) Osnovnyye zakonomernosti turbulentnogo peremeshivaniya v prizemnom sloe atmosfery [Basic laws of turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere]. *Trudy Akademii Nauk SSSR Geofizika*. 24. pp. 163–187.
14. Dyer A.J., Hicks B.B. (1970) Flux-Gradient Relationships in the Constant Flux Layer. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 96. pp. 715–721.
15. Noilhan J., Mahfouf J.-F. (1996) The ISBA land surface parameterization scheme. *Global and Planetary Change*. 13. pp. 145–159.
16. Hurley P. (2002) The Air Pollution Model (TAPM) Version 2. *CSIRO Atmospheric Research*. 55. pp. 49. DOI: 10.4225/08/5863fe87915fd.
17. Mahrer Y., Pielke R.A. (1977) A numerical study of the airflow over irregular terrain. *Beiträge zur Physik der Atmosphäre* 50. pp. 98–113.
18. Dilley A.C., O'Brien D.M. (1998) Estimating downward clear-sky long-wave irradiance at the surface from screen temperature and precipitable water. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 124. pp. 1391–1401.
19. Stephens G. (1978) Radiation Profiles in Extended Water Clouds. Part II: Parameterization Schemes. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 35. pp. 2123–2132.

20. Patankar, S. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC Press. Taylor & Frances Group.
21. Van Leer B. (1974) Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Computational Physics*. 14. pp. 361–370.
22. Semyonova A.A., Starchenko A.V. (2017) Raznostnaya skhema dlya nestatsionarnogo uravneniya perenosa, postroyennaya s ispol'zovaniyem lokal'nykh vesovykh interpolyatsionnykh kubicheskikh splaynov [The finite-difference scheme for the unsteady convection-diffusion equation based on weighted local cubic spline interpolation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 61–74. doi: 10.17223/19988621/49/6.
23. Starchenko A., Danilkin E., Semenova A., Bart A. (2016) Parallel Algorithms for a 3D Photochemical Model of Pollutant Transport in the Atmosphere. *Communications in Computer and Information Science*. 687. pp. 158–171. DOI: 10.1007/978-3-319-55669-7
24. Starchenko A.V., Berzun V.N. (2013) *Metody parallel'nykh vychisleniy [Parallel Computing Methods]*. Tomsk: Tomsk State University.
25. Starchenko A.V., Bart A.A., Kizhner L.I., Odintsov S.L., Semyonov E.V. (2019) Numerical Simulation of Local Atmospheric Processes above a City. *Proceedings of SPIE*. 11208. pp. 1–9. DOI: 10.1117/12.2541630.

Received: March 10, 2020

Е.А. Тимошенко

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МОДУЛЕЙ НАД CSP-КОЛЬЦАМИ¹

Исследуется тензорное произведение модулей над csp-кольцами. Получены критерии равенства такого произведения нулю. Полностью описаны чистые подмодули и плоские модули в категории модулей над csp-кольцом.

Ключевые слова: *csp-кольцо, тензорное произведение, чистый подмодуль, плоский модуль.*

1. Введение

Через $\mathbf{Z}$ и J_p мы обозначаем кольцо целых чисел и кольцо целых p -адических чисел соответственно; ■ – символ конца доказательства или его отсутствия.

Пусть L – некоторое бесконечное множество простых чисел. Для числа $p \in L$ зафиксируем кольцо R_p , которое совпадает либо с J_p , либо с некоторым кольцом вычетов $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ (для разных p число $k > 0$ может быть разным). Обозначим

$$K = \prod_{p \in L} R_p \text{ и } T = \bigoplus_{p \in L} R_p \subset K;$$

очевидно, что T – идеал кольца K .

Назовём *csp-кольцом* всякое содержащее T подкольцо R кольца K , такое, что факторкольцо $R_0 = R/T$ есть поле. Если L совпадает с множеством всех простых чисел и $R_p = J_p$ при всех p , а R_0 изоморфно полю рациональных чисел $\mathbf{Q}$, то соответствующее csp-кольцо (оно определено однозначно) называют *кольцом псевдорациональных чисел*. Это кольцо было независимо введено в работах Фомина [1] и Крылова, Пахомовой и Подберезиной [2] для исследования ряда важных классов смешанных абелевых групп. Позже Крылов предложил рассматривать csp-кольца (как обобщение кольца псевдорациональных чисел).

Зиновьев [3] дал описание инъективных модулей над csp-кольцами; в работах [4] и [5] автором были получены структурные теоремы для проективных модулей над такими кольцами. В настоящей статье полностью описаны чистые подмодули и плоские модули над произвольным csp-кольцом R .

Напомним основную терминологию, касающуюся чистых подмодулей.

Определение. Подмодуль B правого S -модуля A называется:

– *чистым* (говорят также «чистым в смысле Кона»), если для каждого левого S -модуля F индуцируемый естественным вложением модуля B в A гомоморфизм $B \otimes_S F \rightarrow A \otimes_S F$ является мономорфизмом;

– *$\cap$ -чистым*, если $B \cap Ax = Bx$ при всех $x \in S$.

Известно, что каждое прямое слагаемое модуля является чистым и $\cap$ -чистым подмодулем; для $\cap$ -чистой подгруппы (абелевой) группы используется и термин

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2020-1479/1).

«сервантная подгруппа». Из того, что кольца $\mathbf{Z}$ и J_p являются областями главных идеалов, можно вывести (см. [6]) следующее утверждение:

Теорема 1. а) Подгруппа абелевой группы чиста в том и только в том случае, когда она сервантна (т.е. $\cap$ -чиста).

б) Если A есть J_p -модуль, то его подмодуль B чист в том и только в том случае, когда $B \cap p^k A = p^k B$ для всех $k > 0$ (т.е. когда B является $\cap$ -чистым подмодулем). ■

Для $p \in L$ кольца R_p и их единичные элементы e_p естественным образом отождествляются с соответствующими идеалами и идемпотентами кольца R , в этом случае $R_p = Re_p$. Заметим, что кольцо R_p ($p \in L$) допускает ровно одну модульную структуру как над самим собой, так и над кольцом R ; поэтому в дальнейшем мы рассматриваем все R_p как R -модули, не оговаривая это дополнительно.

Если A – модуль над R , будем писать $A_0 = A/AT$ и $A_p = Ae_p$ для $p \in L$ (заметим, что это согласуется с обозначениями R_0 и R_p). Очевидно, A_p является R_p -модулем при любом $p \in L_0$, где $L_0 = L \cup \{0\}$. Для всякого R -модуля A можно рассматривать точную последовательность R -модулей

$$0 \longrightarrow AT \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0, \quad (1)$$

при этом справедливы равенства

$$AT = A \cdot \bigoplus_{p \in L} Re_p = \bigoplus_{p \in L} Ae_p = \bigoplus_{p \in L} A_p. \quad (2)$$

Утверждения следующей леммы устанавливаются непосредственно.

Лемма 2. Пусть A – модуль над кольцом R . Тогда:

- а) $A = A_p \oplus A(1 - e_p)$ для любого $p \in L$;
- б) для любых различных $p, q \in L_0$ выполнено $(A_p)_q = 0$;
- в) $(A_0)_0 \cong A_0$ и для любого $p \in L$ выполнено $(A_p)_p = A_p$;
- г) $A = 0$ в том и только в том случае, когда $A_p = 0$ для всех $p \in L_0$. ■

Напомним, что если дан кольцевой гомоморфизм $\varepsilon: S \rightarrow \Sigma$, то каждый правый (левый) Σ -модуль G можно рассматривать как правый (левый) S -модуль, полагая $gs = g\varepsilon(s)$ (соответственно $sg = \varepsilon(s)g$) при всех $g \in G$, $s \in S$. Отсюда вытекает, что для любых правого и левого модулей A и F над Σ мы можем задать канонический эпиморфизм $A \otimes_S F \rightarrow A \otimes_\Sigma F$, переводящий все элементы $a \otimes_S f$ в элементы $a \otimes_\Sigma f$ (здесь $a \in A$ и $f \in F$). Известно [7], что если гомоморфизм $S \rightarrow \Sigma$ сюръективен, то указанный канонический эпиморфизм будет изоморфизмом при любых A и F .

Замечание 3. Обе абелевых группы $A \otimes_S F$ и $A \otimes_\Sigma F$ по определению являются факторгруппами одной и той же свободной абелевой группы (свободным базисом которой служит множество $A \times F$). Таким образом, инъективность канонического эпиморфизма $A \otimes_S F \rightarrow A \otimes_\Sigma F$ эквивалентна равенству $A \otimes_S F = A \otimes_\Sigma F$.

2. Условия равенства тензорного произведения нулю

Замечание 4. Для произвольного $p \in L_0$ в силу существования гомоморфизма колец $R \rightarrow R_p$ всякий R_p -модуль естественным образом превращается в R -модуль. При этом ввиду сюръективности данного гомоморфизма тензорные произведения двух произвольных R_p -модулей над R и над R_p совпадают (см. замечание 3).

Предложение 5. Пусть A и F – модули над R , и пусть $\alpha_p: A_p \otimes_{R_p} F \rightarrow A \otimes_R F$, где $p \in L$, – гомоморфизм, индуцируемый естественным вложением модулей $A_p \rightarrow A$,

а гомоморфизм $\alpha_0: A \otimes_R F \rightarrow A_0 \otimes_R F$ индуцируется естественным эпиморфизмом $A \rightarrow A_0$. Тогда:

- а) α_p является мономорфизмом при всех $p \in L$;
- б) при всех $p \in L$ выполнено $(A \otimes_R F)_p = \text{Im } \alpha_p$;
- в) $\text{Ker } \alpha_0 = (A \otimes_R F)T$;
- г) при всех $p \in L_0$ выполнено $(A \otimes_R F)_p \cong A_p \otimes_R F \cong A_p \otimes_R F_p$.

Доказательство. Утверждение а) следует из того, что A_p – прямое слагаемое (и, значит, чистый подмодуль) модуля A , если $p \in L$.

б) Пусть $p \in L$. Для произвольных элементов $a \in A_p$ и $f \in F$ в R -модуле $A \otimes_R F$ выполнено $a \otimes_R f = ae_p \otimes_R f = (a \otimes_R f)e_p \in (A \otimes_R F)e_p$, откуда получаем, что модуль $\text{Im } \alpha_p$ содержится в модуле $(A \otimes_R F)e_p = (A \otimes_R F)_p$. Обратно, если $a \in A$ и $f \in F$, то $(a \otimes_R f)e_p = ae_p \otimes_R f \in \text{Im } \alpha_p$. Тем самым доказано, что $(A \otimes_R F)_p \subset \text{Im } \alpha_p$, а значит, справедливо равенство $(A \otimes_R F)_p = \text{Im } \alpha_p$.

в) Рассмотрим точную (см., например, [8]) последовательность

$$AT \otimes_R F \xrightarrow{\alpha} A \otimes_R F \xrightarrow{\alpha_0} A_0 \otimes_R F \longrightarrow 0, \quad (3)$$

индуцированную последовательностью (1). Ввиду (2) мы имеем

$$(A \otimes_R F)T = \bigoplus_{p \in L} (A \otimes_R F)_p = \bigoplus_{p \in L} \text{Im } \alpha_p = \text{Im } \alpha = \text{Ker } \alpha_0.$$

г) Из утверждений а) и б) следует, что $(A \otimes_R F)_p = \text{Im } \alpha_p \cong A_p \otimes_R F$. Поскольку последовательность (3) точна, то выполнено

$$(A \otimes_R F)_0 = (A \otimes_R F) / (A \otimes_R F)T = (A \otimes_R F) / \text{Ker } \alpha_0 \cong A_0 \otimes_R F.$$

Наконец, для любого $p \in L_0$ имеем $(A \otimes_R F)_p \cong ((A \otimes_R F)_p)_p \cong (A_p \otimes_R F)_p \cong A_p \otimes_R F_p$, что завершает доказательство предложения. ■

Учитывая лемму 2, приходим к такому результату.

Теорема 6. Для R -модулей A и F эквивалентны следующие условия:

- 1) $A \otimes_R F = 0$;
- 2) $A \otimes_R F_p = 0$ при всех $p \in L_0$;
- 3) $A_p \otimes_R F = 0$ при всех $p \in L_0$;
- 4) $A_p \otimes_R F_p = 0$ при всех $p \in L_0$. ■

Кроме того, из леммы 2 и предложения 5 следует, что для любых R -модулей A и F и любых различных $p, q \in L_0$ выполнено $A_q \otimes_R F_p \cong A_q \otimes_R (F_p)_q = A_q \otimes_R 0 = 0$.

С учётом замечания 4 и условия 4) теоремы 6 вопрос о равенстве $A \otimes_R F$ нулю сводится теперь к вопросу о том, при каких условиях равно нулю тензорное произведение в категории модулей над кольцом S , равным J_p , $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ или R_0 . Известен следующий факт (через $\mathbf{t}(G)$ обозначаем периодическую часть группы G):

Лемма 7. Для модулей U и V над кольцом $S = J_p$ справедливы утверждения:

- а) если $\mathbf{t}(U) = U = pU \neq 0$, то $U \otimes_S V = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено $p(V/\mathbf{t}(V)) = V/\mathbf{t}(V)$;
- б) если $\mathbf{t}(U) = U \neq pU$, то $U \otimes_S V = 0$ тогда и только тогда, когда $pV = V$;
- в) если $\mathbf{t}(U) \neq U$ и $\mathbf{t}(V) \neq V$, то $U \otimes_S V \neq 0$. ■

Напомним, что в ситуации $S = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ категория S -модулей совпадает с категорией p^k -ограниченных абелевых групп; поскольку кольцевой гомоморфизм $J_p \rightarrow S$ сюръективен, то (см. замечание 3) тензорное произведение двух S -модулей будет одним и тем же над кольцом J_p и над кольцом S . С учётом леммы 7 и того факта, что для любого ненулевого S -модуля G выполнено $\mathbf{t}(G) = G \neq pG$, получаем такое утверждение: $U \otimes_S V = 0$ тогда и только тогда, когда $U = 0$ или $V = 0$. Ясно также,

что указанная эквивалентность остаётся верной и в том случае, когда S является полем. Приведённые рассуждения вместе с теоремой 6 и леммой 7 дают полный ответ на вопрос, когда для R -модулей A и F справедливо равенство $A \otimes_R F = 0$.

3. Плоские модули и чистые подмодули

Предложение 8. Пусть A, B, F – некоторые R -модули, причём B – подмодуль модуля A , и пусть гомоморфизмы $\beta_p: B_p \otimes_R F \rightarrow B \otimes_R F$, $\lambda_p: B_p \otimes_R F \rightarrow A_p \otimes_R F$, где $p \in L$, и гомоморфизм $\lambda: B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ индуцированы соответственно естественными вложениями модулей $B_p \rightarrow B$, $B_p \rightarrow A_p$ и $B \rightarrow A$. Справедливы следующие утверждения:

$$\text{а) } \text{Ker } \lambda = \bigoplus_{p \in L} \beta_p (\text{Ker } \lambda_p);$$

б) λ является мономорфизмом в том и только в том случае, когда λ_p является мономорфизмом при всех $p \in L$.

Доказательство. а) Легко показать, что $B \cap AT = BT$, а значит, можно задать естественное вложение модуля $B_0 = B/BT$ в модуль $A_0 = A/AT$; это вложение обозначим через μ . Пусть $\lambda_0: B_0 \otimes_R F \rightarrow A_0 \otimes_R F$ есть гомоморфизм, индуцированный вложением μ , а $\alpha_0: A \otimes_R F \rightarrow A_0 \otimes_R F$ и $\beta_0: B \otimes_R F \rightarrow B_0 \otimes_R F$ – это гомоморфизмы, индуцированные естественными эпиморфизмами $A \rightarrow A_0$ и $B \rightarrow B_0$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_R F & \xrightarrow{\beta_0} & B_0 \otimes_R F \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes_R F & \xrightarrow{\alpha_0} & A_0 \otimes_R F \end{array}$$

(вертикальные отображения – λ и λ_0) коммутативна, так как и гомоморфизм $\lambda_0\beta_0$, и гомоморфизм $\alpha_0\lambda$ переводят каждый элемент $b \otimes_R f$, где $b \in B$ и $f \in F$, в элемент $(b + AT) \otimes_R f$. Заметим, что $\mu(B_0)$ – подпространство R_0 -пространства A_0 , а значит, $\mu(B_0)$ служит для A_0 прямым слагаемым (и как R_0 -пространство, и как R -модуль). Следовательно, $\mu(B_0)$ – чистый подмодуль R -модуля A_0 , а λ_0 – мономорфизм.

Пусть $y \in \text{Ker } \lambda$, тогда ввиду предложения 5 имеем

$$y \in \text{Ker}(\alpha_0\lambda) = \text{Ker}(\lambda_0\beta_0) = \text{Ker } \beta_0 = (B \otimes_R F)T = \bigoplus_{p \in L} \text{Im } \beta_p.$$

Поэтому для подходящего конечного подмножества $X \subset L$ справедливо равенство

$$y = \sum_{p \in X} \beta_p(y_p), \text{ где } y_p \in B_p \otimes_R F.$$

Пусть $\alpha_p: A_p \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ – это гомоморфизм, индуцируемый естественным вложением $A_p \rightarrow A$. Зафиксируем $p \in X$ и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & B_p \otimes_R F & \xrightarrow{\beta_p} & B \otimes_R F \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_p \otimes_R F & \xrightarrow{\alpha_p} & A \otimes_R F \end{array}$$

(вертикальные отображения – λ_p и λ ; строки диаграммы являются точными ввиду предложения 5). Так как $y_p e_p = y_p$, то $y = \sum_{p \in X} \beta_p(y_p e_p) = \sum_{p \in X} \beta_p(y_p) e_p$; отсюда

$$0 = \lambda(y) e_p = \lambda(y e_p) = \lambda(\beta_p(y_p) e_p) = \lambda(\beta_p(y_p e_p)) = \lambda(\beta_p(y_p))$$

и, следовательно, $y_p \in \text{Ker}(\lambda\beta_p) = \text{Ker}(\alpha_p\lambda_p) = \text{Ker } \lambda_p$ (при любом $p \in X$).

Тем самым мы доказали, что справедливо включение

$$\text{Ker } \lambda \subset \sum_{p \in L} \beta_p (\text{Ker } \lambda_p). \quad (4)$$

Стоящая в правой части (4) сумма является прямой (поскольку прямой является сумма подмодулей $\text{Im } \beta_p \subset B \otimes_R F$ по всем p из L). Верно и обратное включение, так как $\beta_p (\text{Ker } \lambda_p) = \beta_p (\text{Ker } (\alpha_p \lambda_p)) = \beta_p (\text{Ker } (\lambda \beta_p)) \subset \text{Ker } \lambda$ для любого $p \in L$.

Утверждение б) сразу вытекает из а) в силу инъективности гомоморфизмов β_p при всех $p \in L$. ■

С учётом замечания 4 и условия 4) теоремы 9 вопрос об инъективности гомоморфизма $B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$, индуцированного естественным вложением модулей $B \rightarrow A$, сводится к аналогичному вопросу для R_p -модулей.

Теорема 9. Пусть A, B, F – некоторые R -модули, причём $B \subset A$. Эквивалентны следующие условия:

- 1) гомоморфизм $B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ инъективен;
- 2) гомоморфизм $B_p \otimes_R F \rightarrow A_p \otimes_R F$ инъективен для всех $p \in L$;
- 3) гомоморфизм $B \otimes_R F_p \rightarrow A \otimes_R F_p$ инъективен для всех $p \in L$;
- 4) гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$ инъективен для всех $p \in L$.

Доказательство. Эквивалентность 1) и 2) уже установлена в предложении 8. Поскольку справедлива импликация 1) $\Rightarrow$ 2), то из инъективности гомоморфизма $B \otimes_R F_p \rightarrow A \otimes_R F_p$ для какого-то $p \in L$ немедленно следует, что инъективен также гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$ – а это даёт нам импликацию 3) $\Rightarrow$ 4).

4) $\Rightarrow$ 3). Допустим, что гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$, где $p \in L$, является инъективным. Для произвольного $q \in L \setminus \{p\}$ имеем $A_q \otimes_R F_p = B_q \otimes_R F_p = 0$. Таким образом, при всех $q \in L$ гомоморфизм $B_q \otimes_R F_p \rightarrow A_q \otimes_R F_p$ инъективен. Поскольку справедлива импликация 2) $\Rightarrow$ 1), получаем, что гомоморфизм $B \otimes_R F_p \rightarrow A \otimes_R F_p$ также инъективен.

Установим теперь эквивалентность условий 2) и 4). Зафиксируем $p \in L$; пусть $\alpha_p: A_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F$ и $\beta_p: B_p \otimes_R F_p \rightarrow B_p \otimes_R F$ – гомоморфизмы, индуцированные вложением $F_p \rightarrow F$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & B_p \otimes_R F_p & \xrightarrow{\beta_p} & B_p \otimes_R F \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_p \otimes_R F_p & \xrightarrow{\alpha_p} & A_p \otimes_R F \end{array}$$

(вертикальные отображения индуцируются вложением модулей $B_p \rightarrow A_p$). В силу предложения 5 строки диаграммы являются точными и, кроме того, выполняется $A_p \otimes_R F = (A_p \otimes_R F)e_p = (A_p \otimes_R F)_p = \text{Im } \alpha_p$, а значит, α_p – изоморфизм (аналогичное утверждение верно и для β_p). Отсюда ясно, что первое вертикальное отображение будет инъективным тогда и только тогда, когда инъективно второе вертикальное отображение. ■

Теорема 10 по сути обобщает данное в работе [9] описание плоских модулей над кольцом псевдорациональных чисел.

Теорема 10. Для R -модуля F эквивалентны следующие условия:

- 1) F – плоский R -модуль;
- 2) F_p – плоский R -модуль для всех $p \in L$;
- 3) F_p – плоский R_p -модуль для всех $p \in L$;
- 4) F_p является R_p -модулем без кручения для всех $p \in L$, таких, что выполнено $R_p = J_p$, и свободным R_p -модулем для всех $p \in L$, таких, что $R_p \neq J_p$.

Доказательство. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ получается из того факта, что каждый модуль F_p , где $p \in L$, служит прямым слагаемым R -модуля F .

$2) \Rightarrow 3)$. Пусть F_p – плоский R -модуль; зафиксируем некоторый модуль A над кольцом R_p и подмодуль $B \subset A$. Гомоморфизм $B \otimes_R F_p \rightarrow A \otimes_R F_p$, индуцируемый естественным вложением $B \rightarrow A$, инъективен, откуда в силу замечания 4 следует, что F_p – плоский R_p -модуль.

$3) \Rightarrow 1)$. Пусть A – произвольный R -модуль и B – его подмодуль. Из условия 3) и замечания 4 вытекает, что индуцированный естественным вложением модулей $B_p \rightarrow A_p$ гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$ является мономорфизмом для всякого $p \in L$, а значит, ввиду теоремы 9 индуцируемый вложением $B \rightarrow A$ гомоморфизм $B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ – тоже мономорфизм. Получаем, что F – плоский R -модуль.

Эквивалентность условий 3) и 4) следует из двух хорошо известных фактов:

- J_p -модуль G является плоским тогда и только тогда, когда $\mathbf{t}(G) = 0$;
- модуль над кольцом $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ является плоским тогда и только тогда, когда он свободен. ■

Теорема 11. Пусть B – подмодуль R -модуля A . Тогда эквивалентны условия:

- 1) B – чистый подмодуль R -модуля A ;
- 2) $B \cap AI = BI$ для любого идеала I кольца R ;
- 3) B есть $\cap$ -чистый подмодуль R -модуля A ;
- 4) B_p – чистый подмодуль R_p -модуля A_p при всех $p \in L$;
- 5) $B_p \cap A_p I = B_p I$ для любого $p \in L$ и любого идеала I кольца R_p ;
- 6) B_p есть $\cap$ -чистый подмодуль R_p -модуля A_p при всех $p \in L$.

Доказательство. Известно, что импликация $1) \Rightarrow 2)$ имеет место для модулей над произвольным кольцом R (см. [6]).

$2) \Rightarrow 3)$. Полагая $I = Rr$ для произвольного элемента $r \in R$, получаем требуемое равенство $B \cap Ar = Br$.

$3) \Rightarrow 6)$. Поскольку мы договорились отождествлять R_p с идеалом кольца R , то всякий элемент $x \in R_p$ можно считать принадлежащим R . Ввиду условия 3) имеем $B_p \cap A_p x \subset B \cap Ax = Bx = B(e_p x) = B_p x$; следовательно, $B_p \cap A_p x = B_p x$ (включение $B_p x \subset B_p \cap A_p x$ очевидно).

Импликации $4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6)$ доказываются так же, как $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$.

$6) \Rightarrow 4)$. Из условия 6) вытекает, что B_p – сервантная подгруппа группы A_p для каждого $p \in L$. По теореме 1 получаем, что B_p – чистый подмодуль R_p -модуля A_p (как в случае $R_p = J_p$, так и в случае $R_p \neq J_p$).

$4) \Rightarrow 1)$. Пусть F – некоторый R -модуль. Из условия 4) и замечания 4 следует, что для каждого $p \in L$ гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$ будет мономорфизмом; применяя теорему 9, получаем, что гомоморфизм $B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ тоже является мономорфизмом. Таким образом, B – чистый подмодуль R -модуля A . ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Fomin A.A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Basel et al.: Birkhäuser, 1999. P. 87–100. DOI: 10.1007/978-3-0348-7591-2.
2. Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 47–51.
3. Зиновьев Е.Г. Инъективные и делимые модули над csp-кольцами // Вестник ТГУ. 2007. № 299. С. 96–97.
4. Тимошенко Е.А. Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Журнал СФУ. Математика и физика. 2011. Т. 4. № 4. С. 541–550.

5. Тимошенко Е.А. Проективные модули над csp-кольцами // Журнал СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5. № 4. С. 581–585.
6. Lam T.Y. Lectures on modules and rings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1999. DOI: 10.1007/978-1-4612-0525-8.
7. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.
8. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: Иностр. лит., 1960.
9. Царев А.В. Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Мат. заметки. 2006. Т. 80. № 3. С. 437–448. DOI: 10.4213/mzm2830.

Статья поступила 07.05.2020 г.

Timoshenko E.A. (2020) TENSOR PRODUCT OF MODULES OVER CSP-RINGS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 56–63

DOI 10.17223/19988621/66/4

Keywords: csp-ring, tensor product, pure submodule, flat module.

Let us fix an infinite set L of primes. For every $p \in L$, let R_p be either the ring J_p of p -adic integers or the residue class ring $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ (the number $k > 0$ may depend on p). Define

$$K = \prod_{p \in L} R_p \text{ and } T = \bigoplus_{p \in L} R_p \subset K;$$

it is clear that T is an ideal of the ring K . By a *csp-ring* we mean any subring R of the ring K such that $T \subset R$ and the quotient ring R/T is a field.

For any $p \in L$ the ring R_p and its identity e_p can be identified with the corresponding ideal and idempotent of R (then $R_p = Re_p$). If A is an R -module, then we write $A_0 = A/AT$ and $A_p = Ae_p$ for $p \in L$ (in particular, $R_0 = R/T$). It is obvious that A_p is an R_p -module for any $p \in L \cup \{0\}$.

Theorem 6. Let A and F be R -modules. The following conditions are equivalent:

- 1) $A \otimes_R F = 0$;
- 2) $A \otimes_R F_p = 0$ for all $p \in L \cup \{0\}$;
- 3) $A_p \otimes_R F = 0$ for all $p \in L \cup \{0\}$;
- 4) $A_p \otimes_R F_p = 0$ for all $p \in L \cup \{0\}$.

If S coincides with J_p , with $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ or with a field, then the criteria under which $U \otimes_S V = 0$ are well-known. Thus Theorem 6 gives a full answer to the question of when $A \otimes_R F = 0$.

The last two theorems provide a complete description of flat modules and pure submodules in the category of modules over an arbitrary csp-ring R .

Theorem 10. Let F be an R -module. The following conditions are equivalent:

- 1) F is a flat R -module;
- 2) F_p is a flat R -module for all $p \in L$;
- 3) F_p is a flat R_p -module for all $p \in L$;
- 4) F_p is a free R_p -module for all $p \in L$ with $R_p \neq J_p$, and is a torsion-free R_p -module for all $p \in L$ such that $R_p = J_p$.

Definition. We say that a submodule B of a right S -module A is

– *pure* if for every left S -module F the homomorphism $B \otimes_S F \rightarrow A \otimes_S F$ induced by the inclusion map $B \rightarrow A$ is a monomorphism;

– $\cap$ -*pure* if $B \cap Ax = Bx$ for every $x \in S$.

Theorem 11. For a submodule B of an R -module A , the following are equivalent:

- 1) B is a pure submodule of the R -module A ;
- 2) $B \cap AI = BI$ for every ideal I of R ;
- 3) B is a $\cap$ -pure submodule of the R -module A ;
- 4) B_p is a pure submodule of the R_p -module A_p for every $p \in L$;
- 5) $B_p \cap A_p I = B_p I$ for every $p \in L$ and every ideal I of R_p ;
- 6) B_p is a $\cap$ -pure submodule of the R_p -module A_p for every $p \in L$.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 16D40

Financial support. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2020-1479/1).

Egor A. TIMOSHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Fomin A.A. (1999) Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers. *Abelian Groups and Modules*. Basel et al.: Birkhäuser. pp. 87–100. DOI: 10.1007/978-3-0348-7591-2.
2. Krylov P.A., Pakhomova E.G., Podberezina E.I. (2000) Ob odnom klasse smeshannykh abelevykh grupp [On one class of mixed abelian groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 47–51.
3. Zinoviev E.G. (2007) In'ektivnye i delimye moduli nad csp-kol'tsami [Injective and divisible modules over csp-rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 299. pp. 96–97.
4. Timoshenko E.A. (2011) Proyektivnye moduli nad kol'tsom psevdoratsional'nykh chisel [Projective modules over the ring of pseudorational numbers]. *Zhurnal Sibirskogo Federal'nogo Universiteta. Matematika i Fizika – Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 4(4). pp. 541–550.
5. Timoshenko E.A. (2012) Proyektivnye moduli nad csp-kol'tsami [Projective modules over csp-rings]. *Zhurnal Sibirskogo Federal'nogo Universiteta. Matematika i Fizika – Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 5(4). pp. 581–585.
6. Lam T.Y. (1999) *Lectures on Modules and Rings*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-0525-8.
7. Faith C. (1973) *Algebra*. Vol. 1. Berlin; Heidelberg; New York: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-80634-6.
8. Cartan H., Eilenberg S. (1956) *Homological algebra*. Princeton: Princeton University Press.
9. Tsarev A.V. (2006) Projective and generating modules over the ring of pseudorational numbers. *Math. Notes*. 80(3). pp. 417–427. DOI: 10.1007/s11006-006-0155-y.

Received: May 7, 2020

УДК 517.9
DOI 10.17223/19988621/66/5

MSC 2020: 35L05, 35C05, 35C07

О.Н. Шабловский

НЕЛИНЕЙНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И «ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЁМКОСТЬ» В СРЕДЕ С КОНКУРИРУЮЩИМИ ИСТОЧНИКАМИ

Получены новые точные решения волнового уравнения с нелинейными источниками. Построены уединенные бегущие волны и кинк-решения, формирующиеся при конкуренции двух источников. Определены условия возникновения аномального температурного отклика среды на тепловое воздействие («отрицательная теплоемкость»). Дан пример физической интерпретации одного из решений: вычислена скорость роста кристалла как функция переохлаждения расплава.

Ключевые слова: волновое уравнение; нелинейный источник энергии; температурный отклик среды; переохлажденный расплав.

В современной математической физике важное место занимают волновые уравнения с нелинейными источниками (уравнения Клейна – Гордона). Такие источники позволяют моделировать сложные явления в различных областях естествознания. В данной работе для определенности будем говорить о процессах волнового теплопереноса в системе «среда – источник энергии». Волновые задачи являются важным элементом динамической теории неравновесных состояний вещества [1].

Гиперболическое уравнение теплопроводности, получаемое с помощью вариационных принципов [2, 3] и учитывающее конечную скорость распространения тепловых возмущений, имеет вид

$$c \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \right) = \lambda \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + q_v, \quad (1)$$

где t – время; x – декартова координата; $\tau = T - T^0$ есть отклонение температуры T от ее отсчетного значения $T^0 \equiv \text{const}$; c – объемная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; γ – время релаксации теплового потока; q_v – мощность внутренних источников и стоков энергии; скорость распространения тепловых возмущений равна $w = (\lambda/c\gamma)^{1/2}$. Физические аспекты обоснования уравнения (1) изложены в [4]. Частным случаем модели (1) является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = w^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + k_v(\tau, x, t), \quad (2)$$

где $k_v = q_v/(c\gamma)$; c, γ – const. Это уравнение характеризует быстрые процессы, в которых волновой механизм переноса тепла преобладает над диффузионным: $\gamma \partial/\partial t \gg 1$. Основные предпосылки данной работы состоят в следующем:

1. Можно выделить два вида знакопеременных источников $q_v = q_v(T)$. Пусть $q_v(T = T^1) = 0$, где T^1 – пороговая температура, при переходе через которую

функция $q_v(T)$ меняет знак. Источник технического происхождения (далее для краткости *tech*-источник) обладает следующими свойствами: он положителен в области «высоких» температур $T > T^1$, где происходит подвод тепла, и отрицателен в области «низких» температур $T < T^1$, где тепло отводится, например вследствие теплообмена между элементом технического устройства и окружающей средой. Таким образом, $(dq_v/dT)_{T=T^1} > 0$.

Источник, типичный для биологической ткани (далее для краткости *bio*-источник), обладает свойствами, отличающими его от объектов неживой природы [5]. Такой источник выполняет уравнивающую роль компенсатора: в области «высоких» температур $T > T^1$ идет теплоотвод $q_v < 0$; в области «низких» температур $T < T^1$ происходит тепловыделение $q_v > 0$ в биоткани. Значит, в этом случае наклон функции источника при пороговой температуре отрицателен: $(dq_v/dT)_{T=T^1} < 0$.

2. Неклассическое явление «отрицательной теплоемкости» (ОТ) состоит в том, что подвод/отвод тепла дает снижение/рост температуры. Обзор экспериментальных и теоретических работ по этой проблеме и примеры ОТ в задачах конвекции стратифицированных двухкомпонентных жидкостей в поле силы тяжести даны в [6]. Некоторые нелинейно-волновые аспекты явления ОТ представлены в [7].

Будем рассматривать автомодельные решения волнового уравнения, применяя аргумент типа «бегущая волна»:

$$\tau = \tau(\zeta), \quad \zeta = x' - Mt, \quad x' = x/w,$$

$$\frac{d^2\tau}{d\zeta^2} = \frac{k_v}{M^2 - 1}, \quad (3)$$

где $M = N/w$ – тепловое число Маха; N – скорость перемещения волны $\zeta = 0$, $x_0 = Nt$, $N > 0$; N, w – const. Процесс «дозвуковой» при $M^2 < 1$, процесс «сверхзвуковой» при $M^2 > 1$. Таким образом, переход «дозвук» ↔ «сверхзвук» означает инверсию знака правой части (3). Предметом исследования является случай, когда

$$k_v(\tau, \zeta) = (M^2 - 1)[f(\tau) - g(\tau, \zeta)], \quad g = \tau Q^2(\zeta), \quad (4)$$

причем $Q^2(\zeta = 0) > 0$, $Q^2 \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \pm\infty$. Далее источник τQ^2 называем сосредоточенным, потому что при всех конечных $\tau(\zeta)$ его воздействие проявляется главным образом в окрестности волны $\zeta = 0$. Кроме того, мы рассматриваем пример периодической зависимости $Q^2(\zeta)$ от волновой координаты. Источник $f(\tau)$ нелинеен по температуре и может быть знакопеременным.

Цель работы: 1) построить функции $Q^2(\zeta), f(\tau)$, допускающие точное аналитическое решение волновой задачи; 2) изучить конкурентное взаимодействие сосредоточенного и нелинейного источников (4) и указать примеры существования ОТ.

Алгоритм построения решения

Возьмем за основу дифференциальное уравнение для неизвестной функции $\theta = \theta(\zeta)$:

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} = \left[F^2(\zeta) + \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right] \theta. \quad (5)$$

Здесь $F(\zeta)$ – произвольная функция. Одно из частных решений этого уравнения имеет вид [8]

$$\theta = \tau_0 \exp \left[\int_0^{\zeta} F(\zeta) d\zeta \right], \quad \tau_0 \equiv \text{const.} \quad (6)$$

Выполним преобразование $F = iQ$, $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ и тогда, выделяя в (5) действительную и мнимую части, получим систему уравнений

$$\frac{d^2\theta_1}{d\zeta^2} = -Q^2\theta_1 - \theta_2 \frac{dQ}{d\zeta}, \quad \frac{d^2\theta_2}{d\zeta^2} = -Q^2\theta_2 + \theta_1 \frac{dQ}{d\zeta}, \quad (7)$$

которой удовлетворяют функции $\theta_1 = \tau_0 \cos J$, $\theta_2 = \tau_0 \sin J$, $dJ/d\zeta = Q$. Очевидно, что здесь $\theta_2 Q = -d\theta_1/d\zeta$, $\theta_1 Q = d\theta_2/d\zeta$. Переобозначим $\theta_1 \rightarrow \tau$ и запишем первое уравнение (7) в виде

$$\frac{d^2\tau}{d\zeta^2} = -\tau Q^2 + \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\zeta} \frac{d\tau}{d\zeta}. \quad (8)$$

Аналогичным образом можно поступить с уравнением для θ_2 ; новых результатов это не дает. В уравнении (8) примем связь

$$\frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\zeta} \frac{d\tau}{d\zeta} = f(\tau),$$

которая означает переход к источнику вида (4); см. также (3). С учетом решения

$$\tau = \tau_0 \cos J, \quad dJ/d\zeta = Q \quad (9)$$

получаем $(-\tau_0) \sin J (d^2 J/d\zeta^2) = f(\tau)$. Теперь возьмем

$$f(\tau) = (\tau_0^2 - \tau^2) D(\tau). \quad (10)$$

В итоге имеем дифференциальное уравнение для функции $J = J(\zeta)$:

$$\frac{d^2 J}{d\zeta^2} = -\tau_0 D \sin J, \quad D = D(\tau = \tau_0 \cos J). \quad (11)$$

Выбор отдельных частных зависимостей $D(\tau)$ дает возможность получить точные решения уравнения (11). А это значит, что решение (9) будет удовлетворять уравнению (3) с источником (4), (10). Таким образом, в данном классе решений влияние сосредоточенного источника на градиент температуры описывается формулой $(d\tau/d\zeta)^2 = (\tau_0^2 - \tau^2) Q^2$. Конкуренция источников f и g наблюдается там, где эти функции одного знака; на рисунках области конкуренции отмечены звездочкой.

При анализе ОТ-ситуаций рассматриваем температурные интервалы, где конкуренция отсутствует. Кроме того, учитываем, что $\partial\tau/\partial t = -N d\tau/d\zeta$, $N > 0$. При фиксированном x имеем аномальный температурный отклик среды, если в этой точке $d\tau/d\zeta > 0$, т.е. $d\tau/dt < 0$ и $k_0 > 0$ либо $d\tau/d\zeta < 0$ и $k_0 < 0$. Области, где существует явление ОТ, отмечены на рисунках черным треугольником.

Решения на основе уравнения синус-Гордона

Обсудим варианты, когда (11) можно представить в виде уравнения синус-Гордона, определяющего автомодельное решение $J = J(\zeta)$:

$$\frac{d^2 J}{d\zeta^2} = -\tau_0 D_0 \sin BJ, \quad (12)$$

где D_0 – положительная постоянная; $B \geq 1$ – целое число. Далее применяем известные частные решения [9] этого уравнения: если $\tau_0 < 0$, то

$$J(\zeta) = (4/B) \operatorname{arctg} E, \quad E = \exp(\zeta \sqrt{-\tau_0 D_0 B}); \quad (13)$$

если $\tau_0 > 0$, то

$$J(\zeta) = (-\pi/B) + (4/B) \operatorname{arctg} E, \quad E = \exp(\zeta \sqrt{\tau_0 D_0 B}). \quad (14)$$

Из этих формул легко получаем функцию $Q^2(\zeta)$ сосредоточенного источника. Укажем отдельные примеры точных решений вида (9).

Пусть $B = 1$, $D(\tau) \equiv D_0$, $\tau = \pm \tau_0 (1 - 6E^2 + E^4) / (1 + E^2)^2$; здесь верхний и нижний знаки « $\pm$ », а также выражения $E(\zeta)$ соответствуют (13) и (14). Функции источников такие:

$$f(\tau) = (\tau_0^2 - \tau^2) D_0, \quad Q^2(\zeta) = \mp 16 \tau_0 D_0 E^2 / (1 + E^2)^2 > 0,$$

где $Q^2 \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \pm\infty$. Схематическое изображение нелинейного источника показано на рис. 1, а для $\tau_0 < 0$. При $\tau_0 > 0$ решение обладает аналогичными свойствами. В данном случае решение имеет структуру уединенной волны: $\zeta \rightarrow \pm\infty$, $\tau \rightarrow \tau_0$, $\tau(\zeta = 0) = -\tau_0$; выпуклость линии $\tau(\zeta)$ обращена вверх, рис. 1, б. Функция $\tau(\zeta)$ – знакопеременная: $\tau = 0$ при $\zeta = \zeta_1$, $\zeta = \zeta_2 = -\zeta_1$, где $E_1^2 = E^2(\zeta = \zeta_1) = 3 - 2\sqrt{2}$, $E_2^2 = E^2(\zeta = \zeta_2) = 3 + 2\sqrt{2}$. Своеобразие ситуации в том, что именно при $\zeta = 0$ достигает максимума функция $Q^2(\zeta)$, и в этой точке обращается в ноль нелинейный источник. Конкуренция источников $f > 0$ и $g > 0$ наблюдается в интервале $[0, -\tau_0)$. Таким образом, формирование уединенной волны происходит под влиянием преобладающего воздействия сосредоточенного источника. После перемены знака функции $\tau(\zeta)$ конкуренция отсутствует ($f > 0$, $g < 0$), и профиль волны выравнивается. Нетрудно видеть, что ОТ-ситуация наблюдается в сверхзвуковом/дозвуковом режиме слева/справа от возвышения волны, рис. 1.

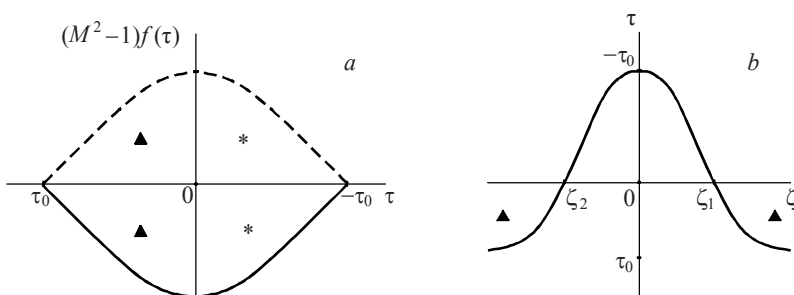


Рис. 1. Решение (9), (12) при $B = 1$, $\tau_0 < 0$: а – функция нелинейного источника; б – уединенная волна; * – область конкуренции источников; ▲ – область существования «отрицательной теплоемкости»; – – функция источника в сверхзвуковом ($M^2 > 1$) режиме; — — функция источника в дозвуковом ($M^2 < 1$) режиме

Fig. 1. Solution (9), (12) for $B = 1$, $\tau_0 < 0$: (a) nonlinear source function; (b) sole wave; (*) the region of source competition; (▲) the negative heat capacity region; – – the source function in the supersonic regime; — the source function in the subsonic regime

Например, в дозвуковом режиме явление ОТ существует в фиксированной точке $x = x^1 > \zeta_1 > 0$ при $t \in [0, t^1)$, где $t^1 = (x^1 - \zeta_1)/N$ есть конечное время, в течение которого волна проходит расстояние $x^1 - \zeta_1$.

Пусть

$$B = 2, D = 2D_0 \cos J, f(\tau) = 2D_0\tau(\tau_0^2 - \tau^2)/\tau_0. \quad (15)$$

При $\tau_0 < 0$ решения (9), (13) имеют кинк-структуру: $\tau(\zeta)$ монотонно возрастает слева направо от τ_0 до $(-\tau_0)$, причем $\tau(\zeta = 0) = 0$, рис. 2. Конкуренция источников отсутствует: $f > 0, g < 0$ при $\tau \in (\tau_0, 0)$; $f < 0, g > 0$ при $\tau \in (0, -\tau_0)$, рис. 2, а. ОТ-ситуация существует при $M^2 > 1$ в области решения, соответствующей нижней (левой) части кинка; при $M^2 < 1$ аномальный отклик получаем в верхней (правой) части кинка. В дозвуковом режиме явление ОТ существует на конечном интервале времени $[0, t^1)$ при каждом $x = x^1 \in (0, \infty)$, $t^1 = x^1/N$. Отметим еще, что при $M^2 > 1$ нелинейный источник имеет вид, характерный для биоткани: подвод/отвод тепла происходит в «холодной»/«горячей» температурных областях.

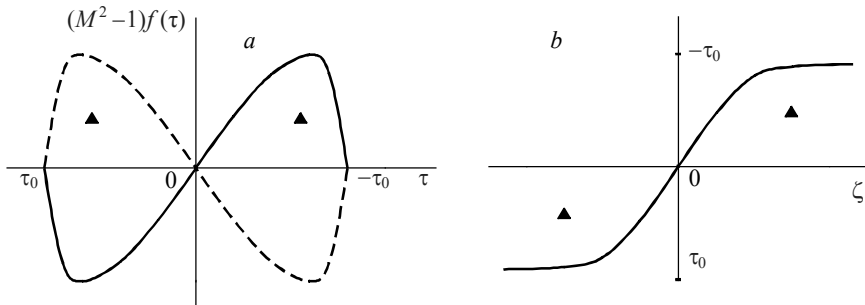


Рис. 2. Решение (9), (12) при $B = 2, \tau_0 < 0$: а – функция нелинейного источника; б – кинк-структура. Обозначения такие же, как на рис. 1

Fig. 2. Solution (9), (12) for $B = 2, \tau_0 < 0$: (a) nonlinear source function; (b) kink structure. Notations are the same as for Fig. 1

При $\tau_0 > 0$ из (9), (14) получаем уединенную волну: $\tau \in (0, \tau_0]$, $\tau(\zeta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$, $\tau(\zeta = 0) = \tau_0$. График функции $f(\tau)$ (он здесь не приводится) обращен выпуклостью вверх: имеется конкуренция, $f > 0, g > 0$ при $\tau \in (0, \tau_0)$, см. (15). В заключительной части статьи будет дан пример физической интерпретации этого решения: движение фазовой границы кристаллизации переохлажденного расплава.

Пусть $B = 3, D = D_0(4 \cos^2 J - 1)$, $f(\tau) = D_0(\tau_0^2 - \tau^2)[4(\tau^2/\tau_0^2) - 1]$. При $\tau_0 < 0$ решение имеет кинк-структуру $\tau \in (\tau_0, -\tau_0/2)$, причем $\tau(\zeta = 0) = \tau_0/2$. Температурный интервал $(\tau_0/2, 0)$, на котором происходит конкуренция источников $f < 0, g < 0$, располагается между двумя интервалами $(\tau_0, \tau_0/2)$ и $(0, -\tau_0/2)$, где конкуренция отсутствует, рис. 3. ОТ существует в сверхзвуковом и дозвуковом режимах, соответственно в левом и правом интервалах. При $\tau_0 > 0$ ситуация аналогична случаю $B = 2$: в условиях конкуренции источников $f > 0, g > 0$ формируется уединенная волна при $\tau \in (\tau_0/2, \tau_0]$, $\tau(\zeta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \tau_0/2$, $\tau(\zeta = 0) = \tau_0$. Такие же качественные результаты получаются для $B = 4, B = 5$.

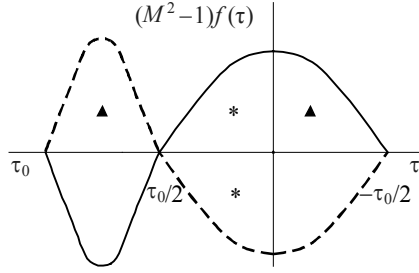


Рис. 3. Решение (9), (12) при $B = 3$, $\tau_0 < 0$: перемежаемость областей с отсутствием и наличием конкуренции источников.

Обозначения такие же, как на рис. 1

Fig. 3. Solution (9), (12) for $B = 3$, $\tau_0 < 0$: alternating regions with and without source competition. Notations are the same as for Fig. 1

Решения на основе двойного уравнения синус-Гордона

В (11) возьмем $D = D_0 + D_1\tau$, $D_1 > 0$ и получим

$$\frac{d^2 J}{d\zeta^2} = -\tau_0 D_0 \sin J - \frac{\tau_0^2 D_1}{2} \sin 2J. \quad (16)$$

Воспользуемся известными частными решениями [9] этого двойного уравнения синус-Гордона. Нелинейный источник $f(\tau)$ имеет вид (10).

Если $\tau_0^2 D_1^2 > D_0^2$, то

$$\tau = \tau_0 (1 - S^2) / (1 + S^2), \quad S^2 = D_2^2 \operatorname{th}^2 \zeta D_3, \quad (17)$$

$$D_2^2 = (\tau_0 D_1 + D_0) / (\tau_0 D_1 - D_0) > 1, \quad D_3 = \sqrt{\tau_0^2 D_1^2 - D_0^2} / (2\sqrt{D_1}),$$

$$Q^2(\zeta) = (\tau_0 D_1 + D_0)^2 / \left[D_1 \left(\operatorname{ch}^2 \zeta D_3 + D_2^2 \operatorname{sh}^2 \zeta D_3 \right)^2 \right].$$

Параметры задачи оцениваются следующим образом: 1) $\tau_0 > 0$, $D_0 > 0$, $\tau_0 D_1 > D_0$, $\tau_\infty < 0$, $|\tau_\infty| < \tau_0$; 2) $\tau_0 < 0$, $D_0 < 0$, $\tau_0 D_1 < D_0$, $\tau_\infty > 0$, $|\tau_0| > \tau_\infty > 0$, где $\tau_\infty = \tau(\zeta \rightarrow \pm\infty)$. Решение имеет вид уединенной волны, функция $\tau(\zeta)$ – знакопеременная; $\tau(\zeta = 0) = \tau_0$. При $\tau_0 < 0$ имеем $\tau \in [\tau_0, \tau_\infty]$, выпуклость линии $f(\tau) \leq 0$ обращена вниз; при $\tau_0 > 0$ имеем $\tau \in (\tau_\infty, \tau_0]$, выпуклость линии $f(\tau) \geq 0$ обращена вверх. Условия появления ОТ-ситуации такие же, как для варианта $B = 1$: см. (12) и рис. 1.

Если в (16) $D_0^2 > \tau_0^2 D_1^2$, то решение выглядит так:

$$\tau = \tau_0 (1 - S_1^2) / (1 + S_1^2), \quad S_1^2 = D_4^2 \operatorname{tg}^2 \zeta D_5, \quad (18)$$

$$D_4^2 = (D_0 + \tau_0 D_1) / (D_0 - \tau_0 D_1) > 1, \quad D_5 = \sqrt{D_0^2 - \tau_0^2 D_1^2} / (2\sqrt{D_1}),$$

$$Q^2(\zeta) = (D_0 + \tau_0 D_1)^2 / \left[D_1 \left(\cos^2 \zeta D_5 + D_2^2 \sin^2 \zeta D_5 \right)^2 \right].$$

Параметры задачи оцениваются следующим образом: 1) $\tau_0 > 0$, $D_0 > 0$, $D_0 > \tau_0 D_1$; 2) $\tau_0 < 0$, $D_0 < 0$, $D_0 < \tau_0 D_1$. Качественные свойства функции $f(\tau)$ такие же, как для предшествующего решения (17). Решение (18) представляет собой цуг волн. Например, для $\tau_0 > 0$ имеем: $\tau = \tau_0$ при $\zeta D_5 = \pi n_0$; $\tau \rightarrow (-\tau_0)$ при $\zeta D_5 = \pi n_0 \pm (\pi/2)$, где $n_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Функция $\tau(\zeta)$ – знакопеременная, рис. 4; $\tau = 0$ при $\text{tg}^2 \zeta D_5 = (1/D_4^2) < 1$. Каждая отдельная волна располагается по отношению к аргументу ζD_5 на интервалах $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ и т.п. Явление ОТ наблюдается в течение конечного промежутка времени в «холодной» области $\tau \in (-\tau_0, 0)$ на восходящем/нисходящем участках отдельной волны при сверхзвуковом/дозвуковом режиме.

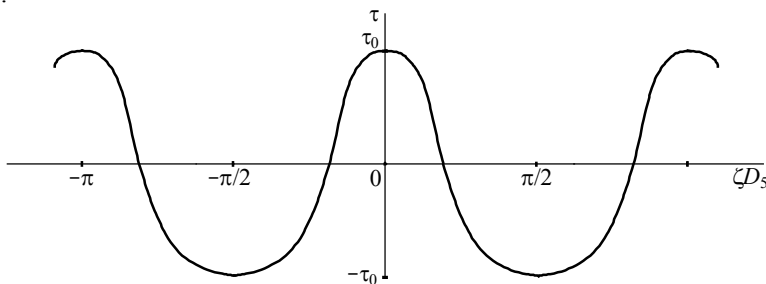


Рис. 4. Решение (18): цуг волн при $\tau_0 > 0$

Fig. 4. Solution (18): wave chain for $\tau_0 > 0$

Для $\tau_0 < 0$ график $\tau(\zeta)$ получается из рис. 4 переворотом на 180° вокруг горизонтальной оси. В этом случае имеем ОТ-ситуацию в «горячей» области на нисходящем/восходящем участках отдельной волны при сверхзвуковом/дозвуковом режиме.

В (11) возьмем $D = [\cos(J/2) - m] / [\tau_0 \cos(J/2)]$ и получим

$$\frac{d^2 J}{d\zeta^2} = 2m \sin \frac{J}{2} - \sin J.$$

Это уравнение имеет точное решение [10]:

$$J = 4 \arctg u, u = [(1-m)/m]^{1/2} / \cos(\zeta \sqrt{1-m}), 0 < m < 1. \quad (19)$$

В результате находим

$$\tau = \tau_0 \left[1 - \frac{8u^2}{(1+u^2)^2} \right]; \quad f(\tau) = \frac{(\tau_0^2 - \tau^2)}{\tau_0} \left[1 - m \left(\frac{2\tau_0}{(\tau_0 + \tau)} \right)^{1/2} \right]; \quad (20)$$

$$Q^2(\zeta) = \frac{16m(1-m)^2 \sin^2(\zeta \sqrt{1-m})}{[1 - m \sin^2(\zeta \sqrt{1-m})]^2}. \quad (21)$$

Обсудим случай $\tau_0 > 0$. Периодическое решение (19), (20) дает цуг волн, смыкающихся друг к другу при $\zeta \sqrt{1-m} = \pi n_0 \pm (\pi/2)$, $u \rightarrow \infty$. Каждая отдельная волна обращена в своей центральной части выпуклостью вниз и расположена на интервале вида $\zeta \sqrt{1-m} \in [-\pi/2, \pi/2]$. Зависимость $\tau(\zeta)$ может быть знакопеременной

ной: она принимает значения от τ_0 до $\tau_0(1+8m^2-8m)$. Размах колебаний функции (21) равен $16m$. Зависимость $f(\tau)$ в (20) примечательна тем, что именно в дозвуковом режиме она представляет нелинейный источник, характеризующий биоткань, рис. 5. Значение $m = 1/\sqrt{2}$ является пороговым: слева и справа от него различаются знаки величины $f(\tau = 0) = \tau_0(1 - m\sqrt{2})$. При $m \neq 1/\sqrt{2}$ имеется перемежаемость областей с наличием и отсутствием конкуренции; в отличие от рассмотренного выше случая $B = 3$ (см. рис. 3) здесь конкуренция отсутствует на внутреннем температурном интервале, примыкающем к $\tau = 0$. ОТ-ситуацию имеем там, где нет конкуренции. Если $m = 1/\sqrt{2}$, то конкуренция присутствует во всей области определения решения. Полученные физические результаты нетрудно переформулировать для случая $\tau_0 < 0$.

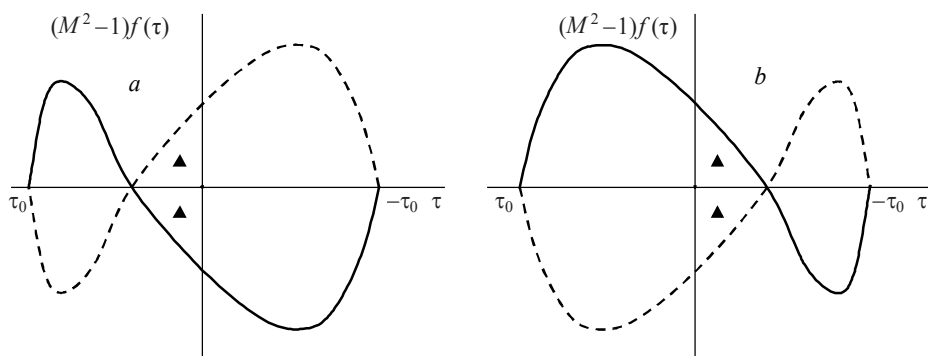


Рис. 5. Решение (20): возможные варианты перемежаемости областей с отсутствием и наличием конкуренции источников. Обозначения такие же, как на рис. 1

Fig. 5. Solution (20): possible combinations of alternating regions with and without source competition. Notations are the same as for Fig. 1

Таким образом, решение (20), (21) говорит о том, что в дозвуковом режиме периодический по волновой координате источник τQ^2 действует на фоне нелинейного *bio*-источника и возбуждает цуг волн.

Еще одно точное решение можно получить, выполнив преобразование $\zeta \rightarrow i\zeta$ в формулах (3) и (19) – (21). Эти результаты здесь не приводятся. Отметим только, что получаемая из (21) функция $Q^2(\zeta)$ описывает дважды сосредоточенный источник, потому что она дважды достигает максимум: слева и справа от $\zeta = 0$.

Переменная скорость распространения возмущений

Для волнового уравнения (2) рассмотрим случай переменной «скорости звука»:

$$w^2 = w_0^2 \pm w_1^2(\tau) > 0, \quad w_1^2 = a_1^2 \tau^\alpha, \quad (22)$$

$$\alpha, a_1 - \text{const}, \quad \zeta = (x/w_0) - t, \quad w_0 = N,$$

где α – положительное четное число. Здесь и далее верхний/нижний знаки соответствуют положительной (*p*)/отрицательной (*n*) производной $d(w^2)/d\tau$. Уравнение (2) принимает вид

$$d^2\tau/d\zeta^2 = \mp w_0^2 k_v / w_1^2. \quad (23)$$

Если $k_v = k_v^1 \tau^\alpha \sin B\tau$; $k_v^1, B - \text{const}$, то (23) превращается в уравнение синус-Гордона, определяющее бегущие «звуковые» волны $\tau = \tau(\zeta)$, см. формулы (12) – (14). Отметим, что в этом случае источник $k_v(\tau)$ колеблется по τ с нарастающей амплитудой – по резонансному типу. Возможны и другие варианты частных зависимостей $k_v(\tau)$, позволяющие преобразовать (23) к уравнению с известными точными аналитическими решениями. Изучим два примера, для которых (23) отличается по структуре от уравнения синус-Гордона. В соответствии со знаком производной $d(w^2)/d\tau$ будем говорить о (p) и (n) средах.

Уединенная «звуковая» волна:

$$\tau = \tau_0 / (1 + B_1^2 \zeta^2); \tau_0, B - \text{const}, \tau_0 > 0; \tau \in (0, \tau_0]; \quad (24)$$

$$k_v^{(p),(n)} = \pm k_1^2 \tau^{2+\alpha} [(4\tau/3) - \tau_0] / \tau_0^2, \quad k_1^2 = 6a_1^2 B_1^2 / w_0^2.$$

Здесь a_1^2 – параметр среды; B_1^2 – параметр источника. Источники $k_v^{(p),(n)}(\tau)$ – знакопеременные, и на периферии волны ($\zeta \rightarrow \pm\infty$) имеем $\tau \rightarrow 0$, $w^2 \rightarrow w_0^2$, $k_v \rightarrow 0$, $(dk_v/d\tau) \rightarrow 0$. Возвышение волны, т.е. максимум функции $\tau(\zeta)$, формируется в точке $\zeta = 0$, где $\tau(\zeta = 0) = \tau_0 > 0$. Для (p) -среды на возвышении имеем $k_v^{(p)} > 0$, $dk_v^{(p)}/d\tau > 0$; сам источник обладает *tech*-свойствами. Для (n) -среды на возвышении имеем $k_v^{(n)} < 0$, $dk_v^{(n)}/d\tau < 0$; сам источник обладает *bio*-свойствами, рис. 6. Таким образом, на возвышении волны для обеих сред имеем $(dk_v^{(p),(n)}/d\tau)(d(w^2)/d\tau) > 0$, а кривизна линии $\tau(\zeta)$ равна

$$K(\zeta = 0) = |k_v^{(p),(n)}| \frac{w_0^2}{w_1^2} = 2\tau_0 B_1^2.$$

В данном примере она не зависит от a_1^2 и определяется шириной температурного интервала τ_0 и параметром источника B_1^2 .

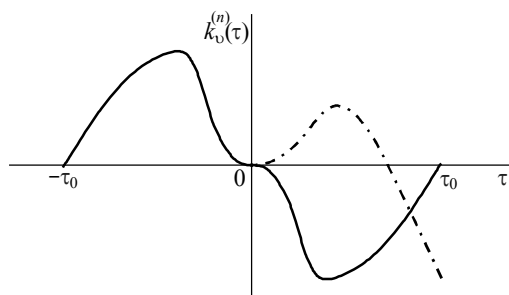


Рис. 6. Нелинейная среда (22), $d(w^2)/d\tau < 0$: объемные источники энергии, действующие в биологической ткани; - - - источник, возбуждающий уединенную волну (24); — источник, возбуждающий знакопеременный кинк (25)

Fig. 6. Nonlinear medium (22), $d(w^2)/d\tau < 0$: volumetric energy sources acting in the biological tissue: - - - the source of sole wave (24); — the source of alternating kink (25)

Знакопеременный кинк:

$$\tau = \tau_0 \operatorname{th} B_1 \zeta; \tau_0, B_1 - \text{const}, \tau_0 > 0; \quad (25)$$

$$k_v^{(p),(n)} = \pm k_1^2 \tau^{1+\alpha} (\tau_0^2 - \tau^2) / \tau_0^2, \quad k_1^2 = 2a_1^2 B_1^2 / w_0^2, \quad \tau \in (-\tau_0, \tau_0).$$

Аналогично только что рассмотренной уединенной волне, здесь для (p) -среды/ (n) -среды имеем *tech*-источник/*bio*-источник, рис. 6. В центральной точке кинка $\zeta = 0$, $\tau = 0$, $d\tau/d\zeta = \tau_0 B_1$, $k_v^{(p),(n)} = 0$, $k_v^{(p),(n)}/d\tau = 0$. Отметим корреляцию между наклоном функции источника в невозмущенных состояниях ($\zeta \rightarrow \pm\infty$) и наклоном кинка в его центральной точке:

$$\left(\frac{k_v^{(p),(n)}}{d\tau} \right)_{\zeta \rightarrow \pm\infty} = \mp \frac{4w_1^2(\tau = \tau_0)}{\tau_0^2 w_0^2} \left(\frac{d\tau}{d\zeta} \right)_{\zeta=0}^2 = \mp \frac{4B_1^2 w_1^2(\tau = \tau_0)}{w_0^2}.$$

Здесь отношение $w_1^2(\tau = \tau_0)/w_0^2$ дает количественную характеристику нелинейных свойств среды в интервале температур $(-\tau_0, \tau_0)$.

Фазовая граница кристаллизации

Обсудим физическую интерпретацию решения (9), (14), (15) при $\tau_0 > 0$. Пусть линия $\zeta = 0$ есть фазовая граница кристаллизации однокомпонентного чистого расплава, переохлажденного до температуры $T_* < T_c$, где T_c – равновесная температура кристаллизации. Применение волновой модели (2) оправдано тем, что по мере увеличения переохлаждения усиливается роль локально-неравновесного теплопереноса, см. [1], [11]. Будем рассматривать правую часть уединенной волны в звуковом режиме: $\zeta \geq 0$, $N > 0$, $M^2 < 1$,

$$T - T^0 \equiv \tau = 2\tau_0 E / (1 + E^2), \quad E = \exp(\zeta \sqrt{2\tau_0 D_0}), \quad \tau_0 > 0, D_0 > 0, \quad (26)$$

$$Q(\zeta) = 2E \sqrt{2\tau_0 D_0} / (1 + E^2), \quad \tau \in (0, \tau_0],$$

$$k_v = k_v^+ + k_v^-,$$

$$k_v^+ = (1 - M^2)g > 0, \quad k_v^- = (M^2 - 1)f < 0,$$

$$f = 2D_0 \tau (\tau_0^2 - \tau^2) / \tau_0, \quad g = \tau Q^2 = 2D_0 \tau^3 / \tau_0.$$

Возьмем $T^0 = T_*$, и тогда $\tau(\zeta \rightarrow +\infty) = 0$, а переохлаждение расплава равно $\tau(\zeta = 0) = T_c - T_* = \tau_0 > 0$. Параметр D_0 характеризует взаимодействие сосредоточенного источника k_v^+ (выделение теплоты фазового перехода) и теплоотвода k_v^- , обеспечивающего переохлажденное состояние расплава. Укажем размерность этого параметра: $[D_0] = [q_v / (T^2 c \gamma)] = [1 / (t^2 T)]$, где $[q_v] = [q/x]$, q – удельный тепловой поток. Ясно, что при таком упрощенном подходе источник k_v^+ «размазывает» по ζ подробности взаимодействия границы кристаллизации с жидкой фазой. По отношению к координате x определим толщину слоя перехода от $\tau = \tau_0$ к $\tau = 0$ как дробь

$$\Delta x = \tau_0 / |\partial \tau / \partial x|_{\max} = w \tau_0 / |d\tau / d\zeta|_{\max},$$

где знаменатель дроби есть максимальное значение модуля производной $d\tau/d\zeta$ при $\zeta \in [0, \infty)$. Расчеты показывают, что

$$\Delta x = (2 + \sqrt{2})w / \left[(1 + \sqrt{2})\sqrt{2\tau_0 D_0} \right].$$

Таким образом, баланс энергии на фазовой границе можем записать в виде

$$q_v^+(\zeta = 0)\Delta x = LN, \quad (27)$$

где LN есть тепловой поток, обусловленный выделением кристаллизационного тепла; L – теплота фазового перехода единицы объема вещества. Левая часть формулы (27) – это количественная оценка теплового потока, который создается сосредоточенным источником при $\zeta = 0$; $q_v^+ = k_v^+/(c\gamma)$. После аналитических преобразований, основанных на решении (26), из (27) получаем

$$N/w = M = (\sqrt{1 + 4\Gamma} - 1) / (2\sqrt{\Gamma}), \quad (28)$$

где $\Gamma = 4D_0\lambda^2\tau_0^3/(w^4L^2)$ – положительный безразмерный параметр. В физическом отношении основной интерес представляет зависимость скорости фазовой границы от переохлаждения: $N = N(\tau_0)$. Известные в литературе (см. [11] и указанную там библиографию) данные о высокоскоростной кристаллизации глубоко переохлажденных (до 300 К) расплавов чистых металлов говорят о том, что функция $N(\tau_0)$ монотонно возрастающая, $dN/d\tau_0 > 0$, и при не слишком больших переохлаждениях удовлетворяет условию выпуклости: $d^2N/d\tau_0^2 > 0$. Например, для чистого никеля оба эти свойства выполнены при $0 < \tau_0 \leq 150$ К. Из формулы (28) ясно, что условие монотонного роста выполняется при всех $\Gamma > 0$, а из условия выпуклости следует ограничение $\Gamma \leq 0.06$. Это означает, что для данного решения тепловое число Маха не превосходит 0.23. Числовые расчеты, проведенные на основе этой оценки, показывают, что для никеля формула (26) имеет физический смысл при $\tau_0 \leq 57$ К.

Заключение

Для волнового уравнения с источниками построены новые решения типа бегущей волны. Результаты изложены в терминах теории теплопереноса. Рассмотрены два типа нелинейных источников, различающихся характером тепловыделения/теплоотвода в «горячей» и «холодной» температурных областях. Например, источник, характерный для биологической ткани, в отличие от источника технического происхождения, выделяет тепло при низких температурах. Представлены примеры аномального температурного отклика среды: подвод/отвод тепла дает снижение/рост температуры (так называемая «отрицательная теплоемкость»). Дан пример нелинейной среды, допускающей точное аналитическое описание волновой задачи при воздействии источника, который зависит от температуры по резонансному типу: его колебания происходят с нарастающей амплитудой. Для задачи о фазовой границе кристаллизации переохлажденного расплава получена физически содержательная зависимость скорости роста кристалла от переохлаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon J. Extended Irreversible Thermodynamics. Springer-Verlag, 2001. 486 p.
2. Глазунов Ю. Т. Вариационный принцип явлений взаимосвязанного тепло- и массопереноса, учитывающий конечную скорость распространения возмущений // Инженерно-физический журнал. 1981. Т. 40. № 1. С. 134–138.
3. Яворский Н.И. Вариационный принцип для вязкой теплопроводной жидкости с релаксацией // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 3. С. 3–10.
4. Никитенко Н.И. Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 73. № 4. С. 851–859.
5. Pennes H. H. Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm // J. Appl. Physiol. 1948. V. 1. P. 93–122.
6. Ингель Л.Х. «Отрицательная теплоемкость» стратифицированных жидкостей // УФН. 2002. Т. 172. № 6. С. 691–699.
7. Шабловский О.Н. «Отрицательная теплоемкость» в задачах нелинейной динамики волн // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 16. М.: Янус-К, 2014. С. 78–89.
8. Ельшин М.И. К проблеме колебаний линейного дифференциального уравнения второго порядка // Доклады АН СССР. 1938. Т. 18. № 3. С. 141–145.
9. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
10. Шабловский О.Н. Точные решения волновых уравнений с нелинейными источниками // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 14. М.: Янус-К, 2011. С. 382–391.
11. Herlach D., Galenko P., Holland-Moritz D. Metastable solids from undercooled melts. Pergamon; Elsevier, 2007. 432 p.

Статья поступила 24.10.2018 г.

Shablovskii O.N. (2020) NONLINEAR WAVES AND "NEGATIVE HEAT CAPACITY" IN A MEDIUM WITH COMPETITIVE SOURCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 64–76

DOI 10.17223/19988621/66/5

Keywords: wave equation; nonlinear energy source; temperature response of the medium; undercooled melt.

For a wave equation with sources, new running-wave type solutions are built. The results are expressed in terms of the heat transfer theory. We study two types of alternating volume energy sources q_v with a nonlinear temperature dependence T . Let $q_v(T = T^1) = 0$ where T^1 is the temperature of the source sign change. The source is positive at $T > T^1$ (heat input) and negative at $T < T^1$ (heat output) when it has technical origin. A source of biological origin differs from technical ones. It serves as a compensator: at $T > T^1$ it takes the heat in; at $T < T^1$, it gives the heat out. Three types of analytical solutions are obtained: the sole wave, the kink structure, and the wave chain. Subsonic and supersonic wave processes are studied with respect to the rate of heat perturbations. The examples for a non-classical phenomenon of "negative heat capacity" are given when heat input/output leads to a temperature decrease/increase. We have considered a nonlinear medium liable to an exact analytical description of a wave problem with a having a resonance type of the temperature dependence: its oscillations have a crescent amplitude. As an example of physical interpretation for one solution, the rate of crystal growth is calculated as a function of the melt undercooling.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 35L05, 35C05, 35C07

Oleg N. SHABLOVSKII (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Republic of Belarus). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

REFERENCES

1. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon J. (2001) *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer-Verlag.
2. Glazunov Yu.T. (1981) Variatsionnyy printsip yavleniy vzaimosvyazannogo teplo- i massop-erenosa uchityvayushchiy konechnuyu skorost' rasprostraneniya vozmushcheniy [Variation principle for the phenomena of interconnected heat and mass transfer with account of finite velocity of perturbation propagation]. *Inzhenerno-Fizicheskiy Zhurnal – Engineering-Physical Journal*. 40(1). pp. 134–138.
3. Yavorskii N.I. (1986) Variational principle for a viscous heat-conducting liquid with relaxation. *Fluid Dynamics*. 21(3). pp. 338–345.
4. Nikitenko N.I. (2000) Problemy radiatsionnoy teorii teplo- i massoperenosa v tverdykh i zhidkikh sredakh [Problems of radiation theory of heat and mass transfer in solid and liquid media]. *Inzhenerno-Fizicheskiy Zhurnal – Engineering-Physical Journal*. 73(4). pp. 851–859.
5. Pennes H.H. (1948) Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm. *Journal of Applied Physiology*. 1(2). pp. 93–122.
6. Ingel' L.Kh. (2002) "Negative heat capacity" in stratified fluids. *Physics-USpekhi*. 45(6). pp. 637–644.
7. Shablovskii O.N. (2014) "Otritsatel'naya teployemkost'" v zadachakh nelineynoy dinamiki voln ["Negative heat capacity" in problems of nonlinear wave dynamics]. *Fundamental'nye Fiziko-Matematicheskie Problemy i Modelirovanie Tekhniko-Tekhnologicheskikh System – Fundamental Physical and Mathematical Problems and Modeling of Technical and Technological Systems*. Vol. 16. Moscow: Janus-K. pp. 78–89.
8. Yelshin M.I. (1938) *K probleme kolebaniy lineynogo-differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka* [To the oscillation problem of a linear second-order differential equation]. *Doklady AN SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*. 18(3). pp. 141–145.
9. Polyanin A.D., Zaytsev V.F. (2002) *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya* [Handbook on nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions]. Moscow: Fizmatlit.
10. Shablovskii O.N. (2011) Tochnye resheniya volnovykh uravneniy s nelineynymi istochnikami [Exact solutions of wave equations with nonlinear sources]. *Fundamental'nye Fiziko-Matematicheskie Problemy i Modelirovanie Tekhniko-Tekhnologicheskikh System – Fundamental Physical and Mathematical Problems and Modeling of Technical and Technological Systems*. Vol. 14. Moscow: Janus-K. pp. 382–391.
11. Herlach D., Galenko P., Holland-Moritz D. (2007) *Metastable Solids from Undercooled Melts*. Pergamon; Elsevier.

Received: October 24, 2018

МЕХАНИКА

УДК 532.5.01

DOI 10.17223/19988621/66/6

В.А. Архипов, С.А. Басалаев, Н.Н. Золоторёв, К.Г. Перфильева**ОСАЖДЕНИЕ БИДИСПЕРСНОГО КЛАСТЕРА
ТВЕРДЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ¹**

Представлены результаты экспериментального исследования гравитационного осаждения бидисперсного кластера твердых сферических частиц в вязкой жидкости. Разработана экспериментальная установка для исследования осаждения сферического полидисперсного кластера равномерно перемешанных частиц с нулевой начальной скоростью осаждения и с контролируемым значением начальной объемной концентрации частиц. Получены качественные и количественные данные по движению бидисперсного кластера твердых сферических частиц. Проведен сравнительный анализ характеристик осаждения моно- и бидисперсного кластера частиц.

Ключевые слова: *бидисперсный кластер частиц, гравитационное осаждение, коэффициент сопротивления, экспериментальное исследование.*

Исследование характеристик движения кластера частиц при осаждении в поле силы тяжести представляет интерес в задачах экологии (в частности, очистка воды от угольной пыли в открытых разрезах) и метеорологии, в теплоэнергетике, в химической технологии и в ряде других отраслей техники и технологии [1, 2].

Для определения эволюции формы и скорости осаждения кластера частиц используются, как правило, результаты экспериментальных исследований, так как теоретический анализ задачи не позволяет однозначно определить данные параметры [3–7]. Результаты экспериментальных исследований закономерностей гравитационного осаждения совокупности твердых частиц приведены в работах [8–16]. Анализ известных экспериментальных методов показал, что одним из определяющих факторов, влияющих на характеристики осаждения частиц, является способ введения частиц в жидкость.

В настоящей работе представлены метод и результаты экспериментального исследования гравитационного осаждения с нулевой начальной скоростью бидисперсного кластера твердых сферических частиц в вязкой жидкости.

Описание установки и методика проведения эксперимента

Схема установки [17] для исследования осаждения кластера твердых частиц приведена на рис. 1. Установка состоит из прозрачной кюветы с жидкостью, заполненной в виде прямоугольной призмы размером 300×300×900 мм, погруженной в вязкую жидкость сферического контейнера, наполненного твердыми сфе-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 15-19-10014) и Минобрнауки РФ в рамках государственного задания No. 0721-2020-0036..

рическими частицами и системы визуализации. Контейнер состоит из неподвижной 1 и подвижной 2 водонепроницаемых оболочек, заполненный частицами 3. Подвижная оболочка закреплена на оси 4, установленной в подшипниках 5 с возможностью ее вращения. Заполненный частицами контейнер закрывают поворотом подвижной оболочки и помещают в кювету 6 с жидкостью 7. После этого контейнер наполняют водой через патрубок 8 с вентилем 9 из емкости 10, излишек воды вытесняется через дренажную трубку 11. Перемешивание частиц с водой в контейнере производится воздействием ультразвуковых колебаний от генератора 12 типа УЗГМ-10-22МС. В процессе перемешивания постепенно вода вытесняется вязкой жидкостью, подаваемой в контейнер из емкости 13 через вентиль 14 и патрубок 15. После полного замещения воды вязкой жидкостью контейнер открывают, и сферический кластер частиц начинает оседать в кювете с жидкостью. Визуализация осадения проводится в двух ракурсах с использованием видеокамер 16 типа «Citius C 100» и «Panasonic HDC-SD60».

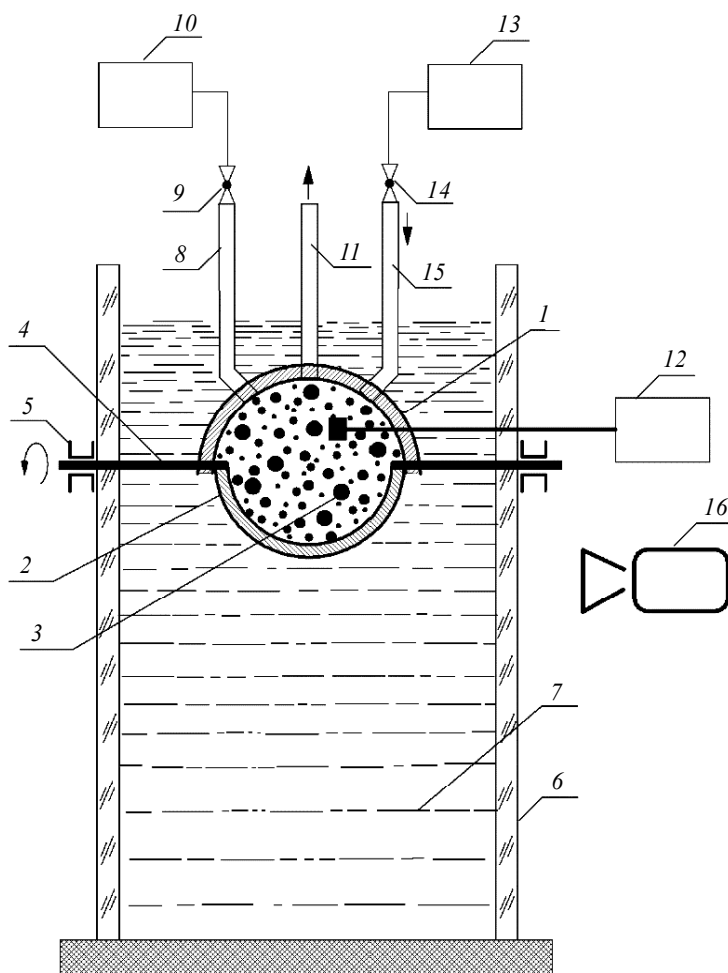


Рис. 1. Схема экспериментальной установки
Fig. 1. Schematic diagram of the experimental setup

Время открытия контейнера, обеспечивающее минимальную деформацию кластера в период открытия, определяется формулой [17]

$$\Delta t \leq \frac{0.45 D_c \mu_l}{(\rho_p - \rho_l) D_{\max}^2 g}, \quad (1)$$

где D_c – диаметр контейнера; μ_l – коэффициент динамической вязкости жидкости; ρ_p – плотность материала частиц; ρ_l – плотность жидкости; $D_{\max}$ – диаметр наиболее крупных частиц в кластере; g – ускорение свободного падения.

Начальная объемная концентрация частиц в кластере определяется формулой

$$C_0 = \frac{1}{D_c^3} \sum_{i=1}^n N_i D_i^3, \quad (2)$$

где N_i , D_i – количество и диаметр частиц i -й фракции.

Результаты экспериментального исследования

Экспериментальное исследование гравитационного осаждения бидисперсного кластера твердых сферических частиц в вязкой жидкости проводилось с использованием смеси шариков из стали марки 95X18 диаметром 2 и 3 мм. Плотность материала частиц $\rho_p = 7748 \text{ кг/м}^3$ измерялась взвешиванием на аналитических весах набора из 100 шариков. Для ввода частиц в вязкую жидкость использовался контейнер диаметром $D_c = 28 \text{ мм}$. В качестве жидкости использовалось силиконовое масло ПМС-10000. Плотность жидкости $\rho_l = 972 \text{ кг/м}^3$ измерялась ареометром при температуре эксперимента. Коэффициент динамической вязкости жидкости $\mu_l = (9.78 \pm 0.03) \text{ Па}\cdot\text{с}$ при $T = 23.5 \text{ }^\circ\text{C}$ измерялся по скорости стационарного осаждения в стоксовском режиме (при числах Рейнольдса $Re \ll 1$) стального шарика диаметром 3 мм. Время открытия контейнера, рассчитанное по формуле (1), составляло $\Delta t = 0.2 \text{ с}$.

Предварительно определялись характеристики осаждения одиночных частиц диаметром D_i , входящих в кластер ($D_1 = 2 \text{ мм}$, $D_2 = 3 \text{ мм}$). В табл. 1 приведены измеренные и рассчитанные значения скорости осаждения u_i . Расчет скорости осаждения проводился для стоксовского режима ($Re_i \ll 1$) по формуле [18]

$$u_i = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{18\mu_l} g D_i^2. \quad (3)$$

Здесь же приведены значения чисел Рейнольдса для одиночных частиц:

$$Re_i = \frac{\rho_l u_i D_i}{\mu_l}. \quad (4)$$

Т а б л и ц а 1

Характеристики осаждения одиночных частиц, входящих в кластер

i	$D_i, \text{ мм}$	$u_i, \text{ см/с}$		$Re_i \cdot 10^3$
		экспер.	расчет	
1	2	0.15	0.151	0.30
2	3	0.34	0.340	1.01
3	2.6	–	0.255	0.66

Для бидисперсного кластера частиц при оценке u_i , Re_i по формулам (3), (4) в первом приближении использовался диаметр эквивалентной частицы диаметром

D_3 , объем которой равен полусумме объемов входящих в кластер частиц разных размеров:

$$D_3 = \sqrt[3]{0.5(D_1^3 + D_2^3)}.$$

Скорость осаждения кластера частиц, и пройденное им расстояние определялись покадровой обработкой результатов скоростной видеосъемки. Скорость осаждения на высоте h_i (i – номер кадра) рассчитывалась по формуле:

$$u_c(h_i) = (h_{i+1} - h_{i-1}) / \Delta t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где h_{i+1} , h_{i-1} – пройденное кластером расстояние на $i-1$ и $i+1$ видеокадрах; Δt_i – интервал времени между $i-1$ и $i+1$ видеокадрами; n – количество видеокадров. Расстояние h_i , пройденное кластером, определялось по его центральной точке. По полученным экспериментальным данным рассчитывалось число Рейнольдса для кластера частиц

$$Re_c = \frac{\rho_l u_c D_c}{\mu_l}. \tag{5}$$

Экспериментальное значение коэффициента сопротивления кластера рассчитывалось по формуле [18]

$$C_D = \frac{4}{3} \frac{g D_c}{u_c^2} C_0 \left(\frac{\rho_p}{\rho_l} - 1 \right). \tag{6}$$

Для сравнения характеристик осаждения моно- и бидисперсного кластера частиц были проведены эксперименты с осаждением частиц одинакового диаметра и их смеси. Условия экспериментов и осредненные по результатам 5 дублирующих опытов характеристики осаждения (C_0 , ρ_c , u_c , $\overline{u_c} = u_c / u_i$, Re_c , C_D) моновдисперсного и бидисперсного кластера частиц приведены в табл. 2. Значения C_0 , Re_c , C_D рассчитывались по формулам (2), (5), (6), плотность кластера частиц – по формуле

$$\rho_c = \rho_l + C_0 (\rho_p - \rho_l).$$

Т а б л и ц а 2

Условия проведения и результаты экспериментов

	D_i , мм		C_0	ρ_c , кг/м ³	u_c , см/с	$\overline{u_c}$	Re_c	C_D	
	2	3						экспер.	расчет
N_i	300	-	0.11	1717	3.26	21.7	0.09	264	267
	-	300	0.37	3479	10.20	30.0	0.28	91	86
	150	150	0.24	2598	5.86	23.4	0.16	178	150

Здесь же приведены рассчитанные для стоксовского режима осаждения значения коэффициента сопротивления кластера:

$$C_D = \frac{24}{Re_c}. \tag{7}$$

На рис. 2 приведены видеокадры гравитационного осаждения моно- и бидисперсного кластера частиц для разных моментов времени. Анализ экспериментальных данных показал, что качественная картина осаждения сферического бидисперсного и моновдисперсного кластера частиц аналогичны. Для условий проведенных экспериментов процесс осаждения можно разделить на три стадии: движение сферы, формирование и движение сфероида с образованием циркуляции периферийных частиц, деформация сфероида и отрыв частиц от его поверхности.

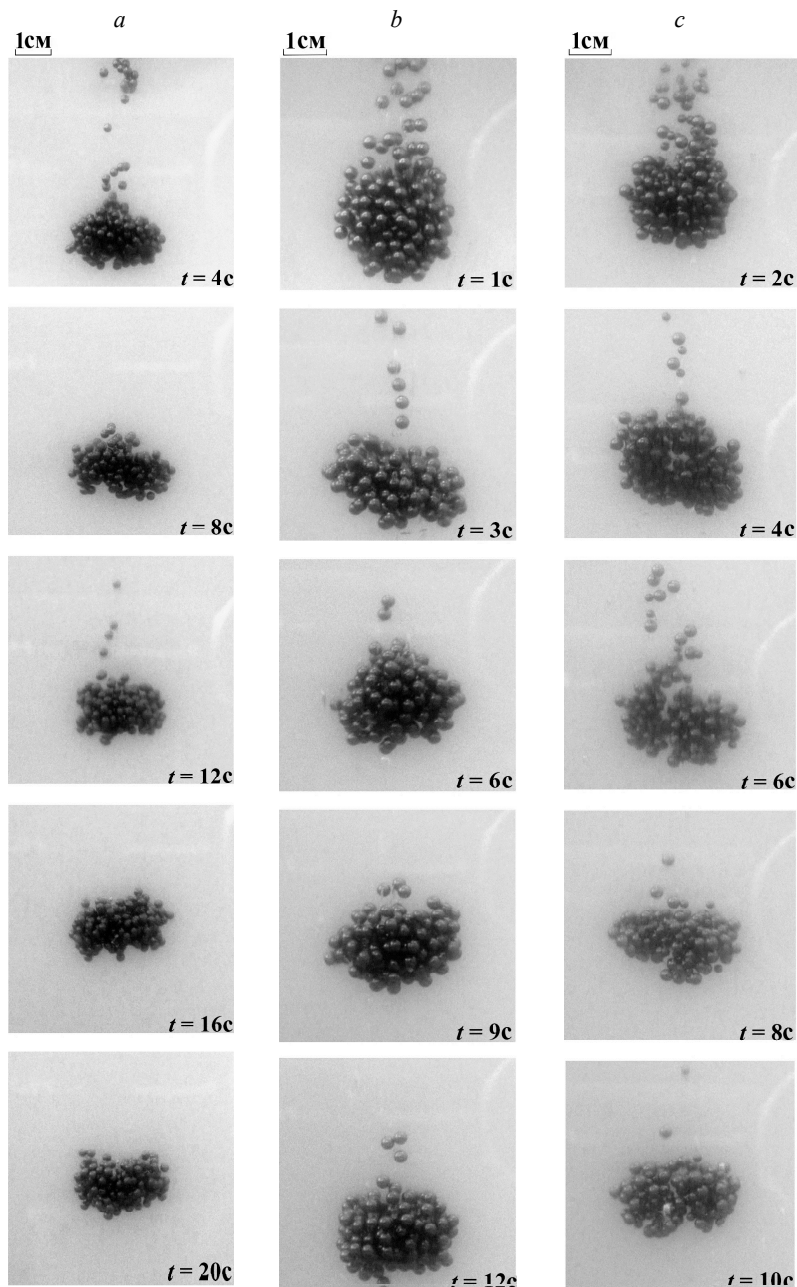


Рис. 2. Видеокadres осаждения кластеров частиц: *a* – монодисперсный кластер частиц ($D_1 = 2$ мм); *b* – монодисперсный кластер частиц ($D_2 = 3$ мм); *c* – бидисперсный кластер частиц ($D_3 = 2.6$ мм)

Fig. 2. Video frames of the particle cluster sedimentation: (*a*) monodisperse particle cluster ($D_1 = 2$ mm), (*b*) monodisperse particle cluster ($D_2 = 3$ mm), and (*c*) bidisperse particle cluster ($D_3 = 2.6$ mm)

В отличие от результатов [15, 16], стадия распада сфероида не наблюдалась, что связано с большими значениями начальной концентрации частиц в настоящей работе. Отметим, что процесс осаждения бидисперсного кластера частиц характеризуется более интенсивным вытеснением с поверхности в окружающую жидкость частиц меньшей фракции, а также более интенсивной циркуляции периферийных частиц в направлении, противоположном движению кластера.

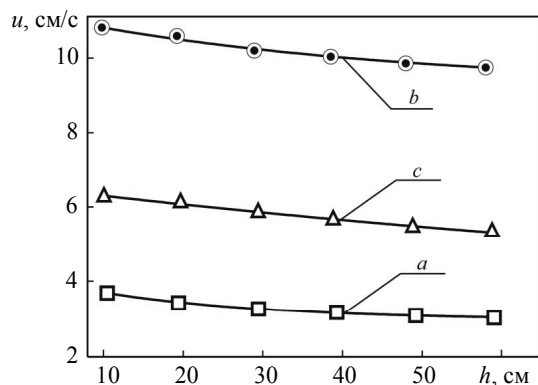


Рис. 3. Зависимость скорости осаждения кластера частиц от пройденного расстояния: *a* – монодисперсный кластер частиц ($D_1 = 2$ мм); *b* – монодисперсный кластер частиц ($D_2 = 3$ мм); *c* – бидисперсный кластер частиц ($D_3 = 2.6$ мм)

Fig. 3. Velocity of the particle cluster sedimentation as a function of the covered distance: (a) monodisperse particle cluster ($D_1 = 2$ mm), (b) monodisperse particle cluster ($D_2 = 3$ mm), and (c) bidisperse particle cluster ($D_3 = 2.6$ mm)

На рис. 3 представлены зависимости скорости осаждения моно- и бидисперсного кластера частиц от пройденного расстояния. Для всех проведенных серий экспериментов наблюдалось монотонное снижение на 12–15 % скорости кластера по траектории его движения, что можно объяснить уменьшением ρ_c за счет срыва частиц с его поверхности.

Показано, что основным фактором, влияющим на скорость осаждения кластера частиц, является его начальная концентрация. С увеличением C_0 от 0.11 до 0.37 скорость осаждения (измеренная для $h = 300$ мм) возрастает от 3.26 до 10.20 см/с. Отметим, что значения безразмерной скорости осаждения кластера для всех проведенных серий имеют близкие значения

($\overline{u_c} = 23\text{--}30$). Значение коэффициента сопротивления $C_D = 264$ для монодисперсного кластера с $D_1 = 2$ мм соответствует стоксовскому режиму осаждения ($C_D = 24/\text{Re}_c = 267$). Для бидисперсного кластера частиц значение $C_D = 178$ на 45 % превышает расчетное ($C_D = 24/\text{Re}_c = 122$).

Выводы

- Представлен способ исследования, обеспечивающий моделирование осаждения сферического полидисперсного кластера равномерно перемешанных частиц с нулевой начальной скоростью осаждения и с контролируемым значением начальной объемной концентрации частиц.

- Экспериментально показано, что качественная картина осаждения бидисперсного кластера частиц аналогична осаждению монодисперсного кластера частиц и характеризуется более интенсивным вытеснением с поверхности кластера в жидкость частиц меньшей фракции, а также более интенсивной циркуляцией периферийных частиц в направлении, противоположном движению кластера.

- Скорость движения кластера частиц монотонно уменьшается по его траектории, введение кластера с большей концентрацией частиц приводит к увеличению скорости осаждения.

• Показано, что в отличие от монодисперсного кластера частиц, значение коэффициента сопротивления бидисперсного кластера частиц не соответствует формуле (5) для стоксовского режима осаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романков П.Г., Курочкина М.И. Гидромеханические процессы химической технологии. Л.: Химия, 1982.
2. Броунштейн Б.И., Фишбейн Г.А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных средах. Л.: Химия, 1977.
3. Васенин И.М., Дьяченко Н.Н., Ёлкин К.Е., Нариманов Р.К. Математическое моделирование двухфазных конвективных течений с малыми частицами // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 6. С. 19–25.
4. Невский Ю.А., Осипцов А.Н. Моделирование гравитационной конвекции суспензий // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. № 7. С. 98–105.
5. Пикущак Е.В., Миньков Л.Л. Влияние поправки Озеена на выражение для скорости оседания мелких частиц в бидисперсной суспензии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 33. С. 88–95. DOI: 10.17223/19988621/33/9.
6. Матвиенко О.В., Андропова А.О. Исследование движения частицы в потоке жидкости вблизи подвижной стенке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 36. С. 85–92. DOI: 10.17223/19988621/36/10.
7. Дик И.Г., Миньков Л.Л., Неессе Т. Гидродинамическая модель ускорения седиментации мелких частиц в бидисперсной суспензии // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8. № 2. С. 283–294.
8. Хоргуани В.Г. О характере и скорости падения системы частиц одинаковых размеров // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1966. Т. 2. № 4. С. 394–401.
9. Metzger B., Nicolas M., Guazzelli E. Falling clouds of particles in viscous fluids // J. Fluid Mechanics. 2007. V. 580. P. 283–301. DOI: 10.1017/S0022112007005381.
10. Daniel W.B., Ecke R.E., Subramanian G., Koch D.L. Clusters of sedimenting high-Reynolds-number particles // J. Fluid Mechanics. 2009. V. 625. P. 371–385. DOI: 10.1017/S002211200900620X
11. Ekiel-Jezewska M.L., Metzger B., Guazzelli E. Spherical cloud of point particles falling in a viscous fluid // Phys. Fluids. 2006. V. 18. P. 038104-1–038104-2. DOI: 10.1063/1.2186692.
12. Yin X., Koch D.L. Hindered settling velocity and microstructure in suspensions of solid spheres with moderate Reynolds numbers // Phys. Fluids. 2007. V. 19. P. 093302-1–093302-15. DOI: 10.1063/1.2764109.
13. Anthony J.C. Ladd. Sedimentation of homogeneous suspensions of non-Brownian spheres // Physics of Fluids. 1997. V. 9. No. 3. P. 491–499. DOI 10.1063/1.869212.
14. Mylyk A., Meile W., Brenn G., Ekiel-Jezewska M.L. Break-up of suspension drops settling under gravity in a viscous fluid close to a vertical wall // Phys. Fluids. 2011. V. 23. P. 063302-1–063302-14. DOI: 10.1063/1.3600660.
15. Архипов В.А., Усанина А.С. Режимы осаждения консолидированной системы твердых сферических частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 5. С. 74–85. DOI 10.7868/S0568528117050085.
16. Архипов В.А., Усанина А.С. Гравитационное осаждение высококонцентрированной системы твердых сферических частиц // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24. № 5. С. 739–750.
17. Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Маслов Е.А. Способ исследования осаждения сферического облака полидисперсных твердых частиц в вязкой жидкости // Патент на изобретение РФ № 2703935. Опубл.: 22.10.2019 г. Бюл. № 30.
18. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С., Шрагер Г.Р. Динамическое взаимодействие частиц дисперсной фазы в гетерогенных потоках. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2019.

Статья поступила 22.12.2019 г.

Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Zolotorev N.N., Perfil'eva K.G. (2020) SEDIMENTATION OF A BIDISPERSE CLUSTER OF SOLID SPHERICAL PARTICLES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 77–85

DOI 10.17223/19988621/66/6

Keywords: bidisperse particle cluster, gravitational sedimentation, drag coefficient, experimental study.

A new method for the experimental study of gravitational sedimentation of a polydisperse cluster of solid spherical particles in a viscous fluid is presented. The method is based on the preliminary ultrasonic mixing of the particles in a spherical container and assumes the introduction of a spherical cluster of particles at a given concentration and zero initial velocity into a fluid. This method is used to determine sedimentation characteristics of a bidisperse cluster of particles (steel balls, 2 and 3 mm in diameter) in silicone oil. A qualitative pattern of the cluster evolution, a sedimentation rate, and a drag coefficient are obtained. A comparative analysis of sedimentation characteristics of monodisperse and bidisperse particle clusters is carried out in the range of Reynolds numbers $Re = (0.30 \div 0.66) \cdot 10^{-3}$. It is shown that, in contrast to a monodisperse cluster of particles, the drag coefficient of the bidisperse cluster of particles does not correspond to a correlation $C_D = 24/Re_c$ for the Stokes sedimentation.

Financial support. This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 15-19-10014) and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of State Assignment No. 0721-2020-0036.

Vladimir A. ARKHIPOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Sergey A. BASALAEV (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Nikolay N. ZOLOTOREV (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikzolotorev@mail.ru

Kseniya G. PERFIL'EVA (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

REFERENCES

1. Romankov P.G., Kurochkina M.I. (1982) *Gidromekhanicheskie protsessy khimicheskoy tekhnologii* [Hydromechanical processes in chemical technology]. Leningrad: Khimiya.
2. Brownstein B.I., Fishbein G.A. (1977) *Gidrodinamika, masso- i teploobmen v dispersnykh sredakh* [Hydrodynamics, mass and heat transfer in disperse systems]. Leningrad: Khimiya.
3. Vasenin I.M., D'yachenko N.N., Elkin K.E., Narimanov R.K. (2004) Mathematical modeling of two-phase convective flows with fine particles. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 45(6). pp. 788–793. DOI: 10.1023/B:JAMT.0000046025.09468.9a.
4. Nevskiy Yu.A., Osipov A.N. (2009) Modeling gravitational convection in suspensions. *Technical Physics Letters*. 35(7). pp. 340–343. DOI: 10.1134/S1063785009040154.
5. Pikushchak E.V., Min'kov L.L. (2015) Vliyanie popravki Ozeena na vyrazhenie dlya skorosti osedaniya melkikh chastits v bidispersnoy suspenzii [Influence of Oseen's correction on fine particle settling velocity formula for bidisperse suspension]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 33. pp. 88–95. DOI: 10.17223/19988621/33/9.

6. Matvienko O.V., Andropova A.O. (2015) Issledovanie dvizheniya chastitsy v potoke zhidkosti vblizi podvizhnoy stenki [Studying the particle motion in a fluid flow in the vicinity of a movable wall]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 36. pp. 85–92. DOI: 10.17223/19988621/36/10.
7. Dueck J.G., Minkov L.L., Neesse T. (2001) A hydrodynamic model for enhanced sedimentation of small particles in a bidisperse suspension. *Thermophysics and Aeromechanics*. 8. pp. 259–269.
8. Horguani V.G. (1966) O kharaktere i skorosti padeniya sistemy chastits odinakovykh razmerov [On the pattern and velocity of settling for a system of equal-sized particles]. *Izvestiya AN SSSR. Fizika atmosfery i okeana – Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*. 2(40). pp. 394–401.
9. Metzger B., Nicolas M., Guazzelli E. (2007) Falling clouds of particles in viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*. 580. pp. 283–301. DOI: 10.1017/S0022112007005381.
10. Daniel W.B., Ecke R.E., Subramanian G., Koch D.L. (2009) Clusters of sedimenting high-Reynolds-number particles. *Journal of Fluid Mechanics*. 625. pp. 371–385. DOI: 10.1017/S002211200900620X.
11. Ekiel-Jezewska M.L., Metzger B., Guazzelli E. (2006) Spherical cloud of point particles falling in a viscous fluid. *Physics of Fluids*. 18. pp. 038104-1–038104-2. DOI: 10.1063/1.2186692.
12. Yin X., Koch D.L. (2007) Hindered settling velocity and microstructure in suspensions of solid spheres with moderate Reynolds numbers. *Physics of Fluids*. 19. pp. 093302-1–093302-15. DOI: 10.1063/1.2764109.
13. Anthony J.C. Ladd. (1997) Sedimentation of homogeneous suspensions of non-Brownian spheres. *Physics of Fluids*. 9(3). pp. 491–499. DOI: 10.1063/1.869212.
14. Mylyk A., Meile W., Brenn G., Ekiel-Jezewska M.L. (2011) Break-up of suspension drops settling under gravity in a viscous fluid close to a vertical wall. *Physics of Fluids*. 23. pp. 063302-1–063302-14. DOI: 10.1063/1.3600660.
15. Arkhipov V.A., Usanina A.S. (2017) Regimes of sedimentation of a consolidated system of solid spherical particles. *Fluid Dynamics*. 52. pp. 666–677. DOI: 10.1134/S0015462817050088.
16. Arkhipov V.A., Usanina A.S. (2017) Gravitational settling of a highly concentrated system of solid spherical particles. *Thermophysics and Aeromechanics*. 24. pp. 719–730. DOI: 10.1134/S0869864317050079.
17. Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Perfil'eva K.G., Maslov E.A. (2019) Sposob issledovaniya osazhdeniya sfericheskogo oblaka polidispersnykh tverdykh chastits v vyazkoy zhidkosti [A method of studying sedimentation of a spherical cloud of polydisperse solid particles in a viscous fluid]. RF Patent 2703935.
18. Arkhipov V.A., Vasenin I.M., Usanina A.S., Shrager G.R. (2019) *Dinamicheskoe vzaimodeystvie chastits dispersnoy fazy v geterogennykh potokakh* [Dynamic interaction of disperse phase particles in heterogeneous flows]. Tomsk: Tomsk State University Publishing House.

Received: December 22, 2019

УДК 532:536

DOI 10.17223/19988621/66/7

А.В. Дмитриев, П.Н. Зятиков

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ УГЛЕВОДОРОДНЫХ ГАЗОВЫХ СРЕД В УСЛОВИЯХ СЕПАРАЦИИ

Целью исследования является выявление особенностей и установление закономерностей эволюции локальных параметров и процессов конвективного тепло- и массообмена в нефтегазовых аппаратах (таких, как коэффициент динамической вязкости, диффузии, а также их безразмерных аналогов – чисел Прандтля, Шмидта и Льюиса), ориентированных на использование в качестве рабочего тела многокомпонентных углеводородных газовых сред в диапазоне термобарических условий, характерных для функционирования оборудования подготовки нефти при сепарации – $T \cong 273.1\text{--}363\text{ К}$ и $P \cong 0.1\text{--}3.5\text{ МПа}$.

Ключевые слова: коэффициенты переноса, многокомпонентная система, углеводороды, сепарация, моделирование.

Сепарация газа — процесс разделения твердой, жидкой и газовой фаз потока с последующим извлечением из него твердой и жидкой фаз. Сепарация газа предназначена для предохранения от попадания влаги и твердых частиц в промысловые газосборные сети и технологическое оборудование газовых и газоконденсатных месторождений.

В настоящее время проектирование, разработка и оптимизация работы технологического оборудования не обходится без численного моделирования многомерных и многофакторных процессов в конвективном и диффузионном тепло-массопереносе, гидрогазодинамике, осложненных фазовыми переходами весьма чувствительными к изменению режима течений и структуры теплоносителей, интенсивности механизмов переноса скаляра (тепла, массы) и импульса, а также особенностям распределений теплофизических свойств в сопряженной термодинамической системе [1]. Это связано с прогрессом в исследовании инженерных задач нефтегазовой отрасли в рамках своих общих и полных постановок, опирающихся на привлечение законов сохранения массы индивидуальных компонентов (фаз) в смесях, энергии и импульса, а также в результате появления быстродействующих ПЭВМ и целого ряда программных продуктов, предназначенных для прогноза физико-химических явлений и механизмов в рабочих системах и технологических процессах. Ввиду этого, к точности прогнозирования тепло- и массообмена в сплошных гомогенных и гетерогенных системах предъявляются все более высокие требования. В частности, к методикам формулировок краевых условий для математических моделей в многокомпонентных газовых смесях. Для успешного численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений и их замыкающих соотношений требуются корректные сведения о деталях поведения теплофизических свойств термодинамической системы (динамической вязкости, теплопроводности и диффузии), характеризующих интенсивности проте-

кания процессов переноса импульса, теплоты и массы [2]. Следует отметить, что ввиду широкого многообразия рабочих смесей газов в аппаратах экспериментальный подход в решении указанных задач сопряжен со значительными сложностями. И данные теоретического анализа закономерностей и эволюции пространственных распределений локальных и интегральных параметров функционирующих объектов, аппаратов и устройств нефтегазовой отрасли обретают чрезвычайную важность для практики.

Известно, что при определении коэффициентов переноса химически однородных веществ используются два подхода: феноменологический (принцип соответственных состояний) и статистический (молекулярно-кинетическая теория газов). Некоторые результаты сопоставления данных подходов при вычислении коэффициентов динамической вязкости и теплопроводности индивидуальных веществ были отражены в [3]. На их примере можно увидеть, что они выдают близкие между собой значения и находятся в хорошем согласии с экспериментом. Вместе с тем, в [3] продемонстрировано, что картина изменений указанных свойств многокомпонентных газовых смесей, полученных с помощью общепринятых методов Уилки [4] и Мэйсона – Саксены [5], качественно коррелирует с результатами, полученными в среде HYSYS. Необходимо отметить следующее: в отличие от коэффициентов динамической вязкости и теплопроводности вычисление коэффициента диффузии в многокомпонентных смесях требует индивидуального подхода к каждому случаю. Поэтому в последнее время проводится множество исследований, направленных на разработку новых методов определения коэффициента диффузии в газах [6–8]. Так, например, авторами [7, 8] проведены экспериментальные исследования диффузии в бинарных газовых смесях, в широком диапазоне изменений температуры и давления. Также в [6, 7] предлагаются новые методы определения коэффициентов бинарной диффузии в смесях. Отсюда следует вывод, что исследования диффузионного переноса массы в смесях далеки от завершения, в особенности для многокомпонентных систем. В практике известны два метода определения эффективного коэффициента диффузии в многокомпонентных газовых смесях – бинарная постановка задачи [9] и метод Уилки [10]. При бинарной постановке смесь разделяется на два псевдокомпонента по близким значениям молекулярной массы, после чего рассчитывается коэффициент диффузии по известным методам. В случае с методом Уилки коэффициент диффузии вычисляется для каждой отдельной компоненты смеси. Однако в случаях смесей с сильно различающимися по молекулярной массе компонентами использование обоих методов приводит к большим расхождениям с экспериментом. Поэтому оценка скорости диффузии в газах и поиск новых методов её определения является актуальным направлением исследования.

Учитывая вышесказанное, цель представленной работы – нахождение закономерностей изменения параметров процессов переноса (коэффициентов динамической вязкости, диффузии, чисел Прандтля, Шмидта и Льюиса) многокомпонентных углеводородных газовых сред в зависимости от термобарических условий сепарации, характерных для функционирования оборудования подготовки нефти – $T \cong 273.1\text{--}363\text{ K}$ и $P \cong 0.1\text{--}3.5\text{ МПа}$.

Последовательность численного моделирования

При решении тепло- и массообменных задач в сплошных средах широко используется метод подобия [11]. Анализ изучаемых процессов методом подобия подразумевает приведение уравнений, описывающих исследуемый процесс и соответствующих краевых (начальных и граничных) условий, к безразмерному виду. При всем этом количество новых безразмерных и постоянных величин, входящих в основные уравнения и краевые условия, могут оказаться меньше числа размерных величин, что значительно упрощает задачу. Так, при решении задач теплообмена искомой величиной является безразмерный коэффициент теплоотдачи – число Нуссельта (Nu), массообмена – безразмерный коэффициент массоотдачи – число Шервуда (Sc).

С достаточной для практики точностью указанные параметры определяются эмпирическими критериальными связями типа [11]

$$Nu = f(Re, Pr); \quad (1)$$

$$Sh = f(Re, Sc). \quad (2)$$

Здесь Re – число Рейнольдса, Pr – число Прандтля и Sc – число Шмидта.

Число Прандтля характеризует влияние свойств жидкости на интенсивность теплообмена, число Шмидта – относительную роль молекулярных процессов переноса количества движения и переноса массы примеси диффузией, число Льюиса – соотношение между интенсивностями переноса массы компонента диффузией и переноса теплоты.

Числа Прандтля, Шмидта и Льюиса ($Le = Pr/Sc$) являются физическими критериями подобия, независимыми от характера движения среды и определяют тройную аналогию процессов переноса в газах, характеризуя интенсивности между переносами теплоты, массы и импульса. В инженерной практике прикладных расчетов тепло- и массообмена в газах зачастую указанные числа принимают как $Pr = Sc = Le = 1$, что позволяет экстраполировать результаты вычислений одного процесса на другие [12]. Однако ни численно, ни экспериментально это не было подтверждено для многокомпонентных газовых смесей, а в литературе утверждается, что данные числа подобия могут изменяться в достаточно широком диапазоне значений [3]. Следовательно, выяснение распределения перечисленных параметров для многокомпонентных газовых сред является немаловажной задачей. Численное исследование зависимостей коэффициентов переноса и чисел подобия многокомпонентных углеводородных сред от температуры и давления с учётом изменения компонентного состава в термобарических условиях процесса сепарации, характерных для аппаратов подготовки нефти, проводилось в несколько этапов:

- моделирование процессов сепарации пластовых нефтей различных месторождений в указанном диапазоне изменений температур и давлений;
- расчет коэффициентов динамической вязкости углеводородных газовых смесей, полученных в результате моделирования сепарации пластовых нефтей;
- выявление зависимости коэффициента диффузии веществ от давления, предложение поправочного коэффициента;
- вычисление коэффициента диффузии в углеводородных средах, а также чисел подобия (Прандтля Pr , Шмидта Sc и Льюиса Le).

Достоверное прогнозирование процесса сепарации является важной частью исследования, поскольку коэффициенты переноса многокомпонентных газовых смесей сильно зависят от состава. Поэтому моделирование сепарации проводилось в программном пакете HYSYS с использованием в качестве термодинамической модели уравнения состояния Peng – Robinson [13, 14]. Ранее авторы [3] проводили сравнительный анализ некоторых имеющихся моделей пакета HYSYS в прогнозе покомпонентного разделения пластовой нефти, в результате чего подтвердили, что уравнение Пенга – Робинсона действительно выдаёт надежные результаты по сравнению с остальными моделями. Также заметим, что в [15] были получены числа подобия (Pr, Sc, Le) для двух вариантов газовых смесей при изменении термобарических условий сепарации и предложено использовать уравнение из кинетической теории газов [16], выражающее коэффициент диффузии вещества через коэффициент кинематической вязкости, соотношение интегралов столкновений для переноса импульса и массы, для определения осредненной скорости диффузии в смесях:

$$D_i = v_i \frac{6 \Omega_v}{5 \Omega_D}, \quad (3)$$

где D_i – коэффициент диффузии вещества, Ω_v , Ω_D – интегралы столкновений для переноса импульса и массы, соотношение которых для газов при умеренных давлениях приблизительно равно 1.1. Однако не было учтено влияние давления на соотношение Ω_v/Ω_D , так как оно является функцией температуры. Поэтому в данной работе предлагается уравнение, учитывающее давление, вида

$$\frac{\Omega_v}{\Omega_D} = 1.0665 - 0.0551P. \quad (4)$$

Здесь P – давление, МПа. В данном случае, число Шмидта не зависит от температуры, что вполне оправдано для чистых веществ и бинарных смесей газов, и с учетом (4)

$$Sc = \frac{5}{6}(1.0665 - 0.0551P)^{-1}. \quad (5)$$

Таким образом, при известных данных о коэффициентах динамической вязкости, плотности, коэффициентах кинематической вязкости (ν_i) и числе Шмидта (Sc) многокомпонентных газовых смесей ($\text{CO}_2\text{-C}_3\text{H}_8$, $\text{CH}_4\text{-C}_2\text{H}_6$, $\text{N}_2\text{-C}_2\text{H}_6$) при определенных термобарических условиях можем найти их коэффициенты диффузии. В целях верификации представленного метода сопоставлены результаты расчетов с экспериментальными данными для чистых веществ (табл. 1) и бинарных смесей (рис. 1).

Таблица 1

Давление P , МПа	$P = 0.82$ МПа	$P = 1.54$ МПа	$P = 2.62$ МПа
Число Шмидта Sc	0.81	0.83	0.89

На рис. 1 и 2 экспериментальная информация была позаимствована из [17, 18], при этом средняя относительная погрешность расчетных величин не превышает 3 %. Это позволяет утверждать, что предлагаемое поправочное уравнение (6) является вполне удовлетворительным в прогнозировании эффективного коэффициента диффузии в смесях.

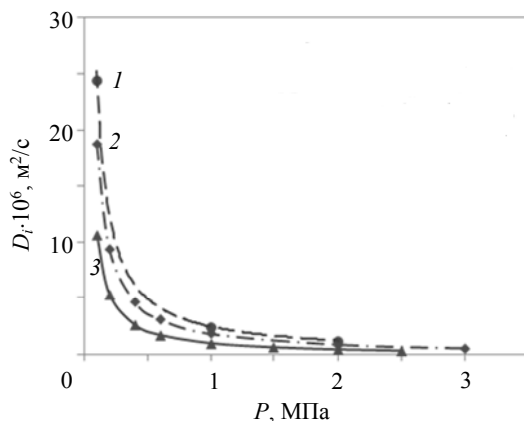


Рис. 1. Экспериментальные и расчетные значения эффективного коэффициента диффузии ($D_i \cdot 10^6$, $\text{m}^2/\text{с}$) бинарных смесей в зависимости от давления (P , МПа) при различных температурах: — — — расчетные значения при $T = 350$ К, — · — расчетные значения при $T = 340$ К, — — — расчетные значения при $T = 360$ К, ▲ — экспериментальные значения при $T = 350$ К, ◆ — экспериментальные значения при $T = 340$ К, ● — экспериментальные значения при $T = 360$ К. 1. Коэффициент диффузии при $P = 0.15$ МПа: 1 — $24.8 \cdot 10^6$ $\text{m}^2/\text{с}$; 2 — $18.8 \cdot 10^6$ $\text{m}^2/\text{с}$; 3 — $11.1 \cdot 10^6$ $\text{m}^2/\text{с}$

Fig. 1. Experimental and calculated values of the apparent diffusion coefficient ($D_i \cdot 10^6$, m^2/s) of binary mixtures as a function of pressure (P , MPa) at various temperatures: — — — calculated values at $T = 350$ K, — · — calculated values at $T = 340$ K, — — — calculated values at $T = 360$ K, ▲ — experimental values at $T = 350$ K, ◆ — experimental values at $T = 340$ K, ● — experimental values at $T = 360$ K. Diffusion coefficient at $P = 0.15$ MPa = (1) $24.8 \cdot 10^6$, (2) $18.8 \cdot 10^6$, and (3) $11.1 \cdot 10^6$ m^2/s

Результаты и их обсуждение

В качестве исходных данных при численном моделировании процессов сепарации углеводородных сред были выбраны компонентные составы Ямбургского и Медвежьего месторождений. Компонентные составы представлены в табл. 2.

Таблица 2

Месторождение	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}	C_5H_{12}	N_2	CO_2	Относительная плотность
Ямбургское	88.65	4.31	1.59	0.81	2.34	0.27	0.91	0.716
Медвежье	97.92	0.15	0.09	-	-	1.1	0.2	0.567

Заметим, что содержание в смесях основного составляющего — метана, колеблется в пределах от 25.5 до 98.0 % (об.). В связи с этим, теплофизические свойства у каждой смеси в зависимости от T и P изменяться могут по-разному (рис. 2). Однако в отличие от свойств, числа подобия (Pr , Sc , Le) распределяются во всех случаях в достаточно узком диапазоне значений. Так, число Прандтля ограничивается нижним пределом 0.72 и верхним — 0.84, число Шмидта варьируется в пределах величин от 0.82 до 0.89, а число Льюиса — от 1.04 до 1.28 (рис. 3).

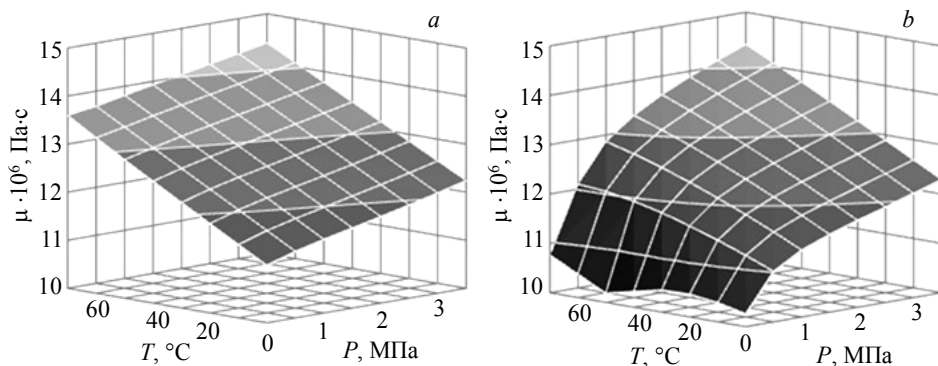


Рис. 2. Изменение коэффициента динамической вязкости ($\mu \cdot 10^6$, Па·с) в газовой смеси в зависимости от T , К и P , МПа сепарации пластовой нефти: а) Ямбургского месторождения; б) Медвежьего месторождения

Fig. 2. Variation of the dynamic viscosity coefficient ($\mu \cdot 10^6$, Pa·s) of a gas mixture as a function of temperature (T , K) and pressure (P , MPa) of crude oil separation: (a) Yamburgskoye Field and (b) Medvezhye Field

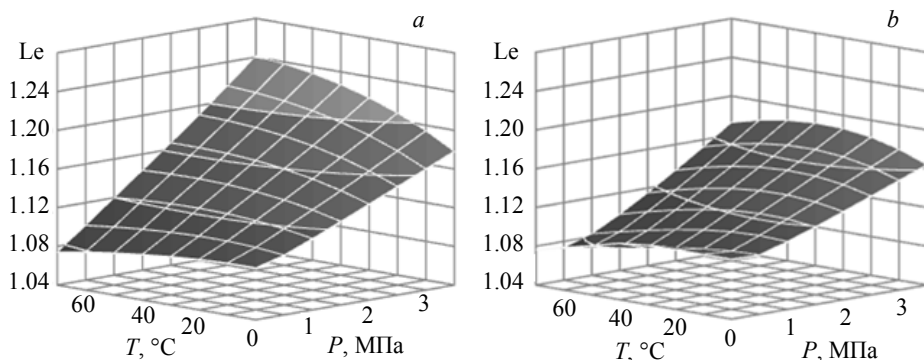


Рис. 3. Изменение числа Льюиса (Le) газовой смеси в зависимости от температуры (T , К) и давления (P , МПа) сепарации пластовой нефти: а – Ямбургского месторождения; б – Медвежьего месторождения

Fig. 3. Variation of the Lewis number (Le) of a gas mixture as a function of temperature (T , K) and pressure (P , MPa) of crude oil separation: (a) Yamburgskoye Field and (b) Medvezhye Field

Вышеизложенное позволяет утверждать, что в многокомпонентных углеводородных газовых смесях, при дальнейшей сепарации в стандартных условиях (атмосферном давлении и температуре от 273.1 до 363 К) существует некоторое подобие процессов тепло- и массопереноса. Следовательно, функции в выражениях (1) и (2) принимают одинаковый вид, в связи с чем результаты расчета теплообмена могут быть применены для расчета массообмена. Кроме того, при сепарации в условиях давления 3.5 МПа имеем подобие процессов переноса импульса и массы, так как число Шмидта при указанном давлении находится ближе всего к единице ($Sc = 0.98$). В этом случае справедливо будет выразить число Шервуда как функцию одной переменной – числа Рейнольдса:

$$Sh = f(Re). \quad (6)$$

Заключение

Таким образом, проведенное исследование параметров процессов переноса в углеводородных газовых смесях в условиях сепарации в пределах рассматриваемых температур и давлений позволило обозначить границы применимости метода подобия и оценить степень отклонения безразмерных параметров, характеризующих аналогию процессов переноса, от единицы. Данные рекомендации полезны при расчетах тепло- и массообмена в сплошных средах не только в нефтегазовой промышленности, но и в химической, топливно-энергетической и т.д. Об этом свидетельствует использование критериальных связей типа (1) и (2) в самых различных инженерных расчетах: при оценке испарений нефти из резервуаров [19], при моделировании массопереноса в газовой фазе в скруббере Вентури [20], в практике научного приборостроения, а также в практике прикладного моделирования процессов горения [21]. Следует отметить, что до сих пор исследования характера массообмена в углеводородных средах далеки от завершения, в особенности при повышенных давлениях, о чём говорят современные работы [22–24].

Результаты проведенного исследования позволяют сформулировать следующие выводы:

1. Исследованы зависимости теплофизических свойств (коэффициента диффузии) углеводородных газовых смесей от термобарических условий с учётом изменения компонентного состава.

2. Установлено влияние давления на соотношение интегралов столкновений (соотношение этих интегралов равно 1.1) для переноса массы и переноса импульса и предложено поправочное уравнение для учёта параметра давления.

3. Впервые приведены и обобщены числа Прандтля $Pr \cong 0.72 \div 0.84$, Шмидта $Sc \cong 0.82 \div 0.89$ и Льюиса $Le \cong 1.04 \div 1.28$ для многокомпонентных углеводородных газовых сред в условиях сепарации пластовой нефти, определяющие характер тепло- и массообмена в открытых термодинамических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kharlamov S.N., Kim V.Yu., Silvestrov S.I., Alginov R.A., Pavlov S.A. Prospects of RANS models with multiparameter effects at simulation of complex non-isothermal flows of viscous media in devices with any configuration of surface // Proc. 6th International Forum on Strategic Technology. August 22–24, 2011, Harbin, China. IFOST 2011. V. 2. P. 787–791.
2. Харламов С.Н., Сильвестров С.И., Зайковский В.В., Николаев Е.В. О проблемах математического моделирования процессов переноса импульса, тепла и массы в углеводородных вязких средах в условиях сложного движения и тепломассопереноса в трубопроводах // Вестник Российской Академии естественных наук. Западно-Сибирское отделение. 2017. Вып. 20. С. 67–89.
3. Николаев Е.В., Харламов С.Н. Исследование сепарационных процессов углеводородных многокомпонентных систем в режимах функционирования оборудования предварительной подготовки нефти // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2016. Т. 327. № 7. С. 84–89.
4. Wilke C.R. A Viscosity Equation for Gas Mixtures // J. Chemical Physics. 1950. V. 18. P. 517–519.
5. Mason E.A., Saxena S.C. Approximate formula for the thermal conductivity of gas mixtures // The Physics of Fluids. 1958. V. 1. P. 361–369.
6. Lunev V.V. New phenomenological model of multicomponent gas diffusion // Fluid Dynamics. 2017. V. 52. P. 454–462.
7. Незовитина М.А. Исследование зависимости коэффициентов взаимной диффузии углеводородных газов от давления при различных температурах: дис. ... канд. тех. наук. Смоленск, 2011. 189 с.

8. Zangi P., Rausch M.H., Fröba A.P. Binary diffusion coefficients for gas mixtures of propane with methane and carbon dioxide measured in a Loschmidt cell combined with holographic interferometry // *Int. J. Thermophysics*. 2019. V. 40. 17 p.
9. Турский Г.А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое // *Докл. АН СССР*. 1964. Т. 155. № 6. С. 1278–1281.
10. Wilke C.R. Diffusional properties of multicomponent gases // *Chemical Engineering Progress*. 1950. V. 46. P. 95–104.
11. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 409 с.
12. Шарфарец Б.П. Обзор теории явлений переноса и поверхностных явлений применительно к решению некоторых задач научного приборостроения // *Научное приборостроение*. 2015. Т. 25. № 3. С. 45–64.
13. HYSYS Simulation Basis. Aspen Technology, Inc. 2005. 527 p.
14. Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. 1976. V. 15. P. 59–64.
15. Николаев Е.В., Харламов С.Н. Особенности сепарации многокомпонентных углеводородных сред в режимах работы аппаратов подготовки нефти // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. 2018. Т. 329. № 3. С. 69–76.
16. Hirschfelder J.O., Curtis C.F., Bird R.B. *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York: John Wiley and Sons, 1954. 1219 p.
17. Варгафтик Н.Б. *Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей*. М.: Наука, 1972. 720 с.
18. Абиев Р.Ш., Бирик Е.Е., Власов Е.А., Ермаков Б.С. Новый справочник химика и технолога. Электродные процессы. Химическая кинетика и диффузия. Коллоидная химия. СПб.: Автономная некоммерческая организация, научно-просветительская организация «Профессионал», 2004. 838 с.
19. Любин Е.А., Коршаков А.А. Критериальные уравнения массоотдачи при операциях с нефтями в вертикальных цилиндрических резервуарах // *Нефтегазовое дело*. 2010. № 2.
20. Ali M., Yan Ch., Sun Zh., Gu H., Wang J., Khurram M. Iodine removal efficiency in non-submerged and submerged self-priming venturi scrubber // *Nuclear Engineering and Technology*. 2013. V. 45. No. 45. P. 203–210.
21. Chen J., Yan L., Song W., Xu D. Effect of heat and mass transfer on the combustion stability in catalytic micro-combustors // *Applied Thermal Engineering*. 2018. V. 131. P. 750–765.
22. Carreon-Calderon B., Uribe-Vargas V. Thermomechanical Point of View of the Effect of Pressure and Free Volume on the Molecular Diffusion Coefficients // *J. Chemical and Engineering Data*. 2019. V. 64. P. 1956–1969.
23. Daniel A.B., Mohammad S.A., Miranda M.A., Aichele C.P. Absorption and desorption mass transfer rates as a function of pressure and mixing in a simple hydrocarbon system // *Chemical Engineering Research and Design*. 2019. V. 144. P. 209–215.
24. Рудяк В.Я., Лежнев Е.В., Любимов Д.Н. Имитационное моделирование коэффициентов переноса разреженных газов и наногазовзвесей // *Вестник Томского государственного университета*. 2019. Математика и механика. №. 59. С. 105–117.

Статья поступила 21.10.2019 г.

Dmitriev A.V., Zyatikov P.N. (2020) PATTERNS OF THE VARIATION OF PARAMETERS OF TRANSFER PROCESSES FOR MULTICOMPONENT HYDROCARBON GAS MEDIA UNDER SEPARATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 86–95

DOI 10.17223/19988621/66/7

Keywords: transfer coefficients, multicomponent system, hydrocarbons, separation, modeling.

A detailed study of the evolution of local and integral parameters of momentum, heat, and mass transfer processes in hydrocarbon gas mixtures under separation conditions at given

temperature and pressure values in working media is carried out within the framework of the principles of equilibrium thermodynamics using the Aspen HYSYS software package, namely, the Peng-Robinson equation of state for real gas mixtures, the principles of statistical mechanics, the approaches of corresponding states, the Chapman-Enskog and the Golubev methods, and the theory of similarity and dimensional analysis. The limits of similarity method applicability in quantitative estimates and qualitative forecasts of the mechanisms and configurations of convective heat and mass transfer in oil treatment units are established. The paper also discusses results of the analog method application in separation process modeling for momentum, heat and mass transfer processes in the problems of oil and gas industry. The conclusions about the aspects of property changes in complex mixtures and about heat and mass transfer intensity during separation, which violate a triple analogy in non-isothermal homogeneous and heterogeneous media, are recommended to take into account when designing real equipment.

Aleksandr V. DMITRIEV (Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: sanaexpert@mail.ru

Pavel N. ZYATIKOV (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Oil and Gas Engineering of the School of Natural Resources, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zpavel@tpu.ru

REFERENCES

1. Kharlamov S.N., Kim V.Yu., Silvestrov S.I., Alginov R.A., Pavlov S.A. (2011) Prospects of RANS models with multiparameter effects at simulation of complex non-isothermal flows of viscous media in devices with any configuration of surface. *Proceedings of the 6th International Forum on Strategic Technology, Harbin*. 2. pp. 787–791. DOI: 10.1109/IFOST.2011.6021139.
2. Kharlamov S.N., Silvestrov S.I., Zaykovskiy V.V., Nikolaev E.V. (2017) O problemakh matematicheskogo modelirovaniya protsessov perenosa impul'sa, tepla i massy v uglevodorodnykh vyazkikh sredakh v usloviyakh slozhnogo dvizheniya i teplomassoperenosa v truboprovodakh [On the problems of mathematical modeling of momentum, heat and mass transfer processes in viscous hydrocarbon media under conditions of complex motion and heat and mass transfer in pipelines]. *Vestnik Rossiyskoy Akademii estestvennykh nauk. Zapadno-Sibirskoe otделение*. 20. pp. 67–89.
3. Nikolaev E.V., Kharlamov S.N. (2016) Issledovanie separatsionnykh protsessov uglevodorodnykh mnogokomponentnykh sistem v rezhimakh funktsionirovaniya oborudovaniya predvaritel'noy podgotovki nefi [Study of separation processes for multicomponent hydrocarbon systems in operating modes of oil preliminary treatment equipment]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, Geo Assets Engineering*. 327(7). pp. 84–99.
4. Wilke C.R. (1950) A viscosity equation for gas mixtures. *The Journal of Chemical Physics*. 18. pp. 517–519. DOI: 10.1063/1.1747673.
5. Mason E.A., Saxena S.C. (1958) Approximate formula for the thermal conductivity of gas mixtures. *The Physics of Fluids*. 1. pp. 361–369. DOI: 10.1063/1.1724352.
6. Lunev V.V. (2017) New phenomenological model of multicomponent gas diffusion. *Fluid Dynamics*. 52. pp. 454–462. DOI: 10.1134/S0015462817030139.
7. Nezovitina M.A. (2011) *Issledovanie zavisimosti koeffitsientov vzaimnoy diffuzii uglevodorodnykh gazov ot davleniya pri razlichnykh temperaturakh* [Study of the dependency of mutual diffusion coefficients of hydrocarbon gases on pressure at various temperature values]. Ph.D. thesis. Smolensk.
8. Zangi P., Rausch M.H., Fröba A.P. (2019) Binary diffusion coefficients for gas mixtures of propane with methane and carbon dioxide measured in a Loschmidt cell combined with holographic interferometry. *International Journal of Thermophysics*. 40. pp. 17. DOI: 10.1007/s10765-019-2484-6.

9. Tirskey G.A. (1964) Opredelenie effektivnykh koeffitsientov diffuzii v laminarnom mnogokomponentnom pogranichnom sloe [Determination of apparent diffusion coefficients in a laminar multicomponent boundary layer]. *Doklady Akademii nauk*. 155(6). pp. 1278–1281.
10. Wilke C.R. (1950) Diffusional properties of multicomponent gases. *Chemical Engineering Progress*. 46. pp. 95–104. DOI: 10.1021/ie50483a022.
11. Petukhov B.S. (1967) *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh* [Heat exchange and resistance in a laminar fluid flow in tubes]. Moscow: Energiya.
12. Sharfaret B.P. (2015) Obzor teorii yavleniy perenosa i poverkhnostnykh yavleniy primenitel'no k resheniyu nekotorykh zadach nauchnogo priborostroeniya [Review of the theory of transport phenomenon and surface phenomena as applied to the solution of some problems in scientific instrument-making industry]. *Nauchnoe priborostroenie*. 25(3). pp. 45–64.
13. HYSYS Simulation Basis (2005) *Aspen Technology, Inc.*
14. Peng D.Y., Robinson D.B. (1976) A new two-constant equation of state. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. 15. pp. 59–64. DOI: 10.1021/i160057a011.
15. Nikolaev E.V., Kharlamov S.N. (2018) Osobennosti separatsii mnogokomponentnykh uglevodorodnykh sred v rezhimakh raboty apparatov podgotovki nefiti [Features of the separation of multicomponent hydrocarbon media in operating modes of oil preparation apparatus]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, Geo Assets Engineering*. 329(3). pp. 69–76.
16. Hirshfelder J.O., Curtis C.F., Bird R.B. (1954) *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York: John Wiley and Sons.
17. Vargaftik N.B. (1972) *Spravochnik po teplofizicheskim svoystvam gazov i zhidkostey* [Handbook of thermal and physical properties of gases]. Moscow: Nauka.
18. Abiev P.Sh., Bibik E.E., Vlasov E.A., Ermakov B.S. (2004) *Novyy spravochnik khimika i tekhnologa. Elektrodneye protsessy. Khimicheskaya kinetika i diffuziya. Kolloidnaya khimiya* [New handbook of chemist and technologist. Electrode processes. Chemical kinetics and diffusion. Colloid chemistry]. Saint Petersburg: Professional.
19. Lyubin E.A., Korshak A.A. (2010) Kriterial'nye uravneniya massootdachi pri operatsiyakh s neftyami v vertikal'nykh tsilindricheskikh rezervuarakh [Dimensionless equations of mass transfer when operating with oils in vertical cylindrical tanks]. *Neftegazovoe delo – Oil and Gas Business*. 2. pp. 1–11.
20. Ali M., Yan Ch., Sun Zh., Gu H., Wang J., Khurram M. (2013) Iodine removal efficiency in non-submerged and submerged self-priming Venturi scrubber. *Nuclear Engineering and Technology*. 45(2). pp. 203–210. DOI: 10.5516/NET.03.2012.047.
21. Chen J., Yan L., Song W., Xu D. (2018) Effect of heat and mass transfer on the combustion stability in catalytic micro-combustors. *Applied Thermal Engineering*. 131. pp. 750–765. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2017.12.059.
22. Carreon-Calderon B., Uribe-Vargas V. (2019) Thermomechanical point of view of the effect of pressure and free volume on the molecular diffusion coefficients. *Journal of Chemical and Engineering Data*. 64. pp. 1956–1969. DOI: 10.1021/acs.jced.8b00995.
23. Daniel A.B., Mohammad S.A., Miranda M.A., Aichele C.P. (2019) Absorption and desorption mass transfer rates as a function of pressure and mixing in a simple hydrocarbon system. *Chemical Engineering Research and Design*. 144. pp. 209–215. DOI: 10.1016/j.cherd.2019.02.009.
24. Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V., Lyubimov D.N. (2019) Imitatsionnoe modelirovanie koeffitsientov perenosa razrezhennykh gazov i nanogazovzvesey [Simulation modeling of transport coefficients for rarefied gases and nanogas suspensions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 59. pp. 105–117. DOI: 10.17223/19988621/59/11.

Received: October 21, 2019

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/66/8

Д.А. Иваницhev

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ С МАССОВЫМИ СИЛАМИ¹

Представлена методика определения напряженно-деформированного состояния анизотропных тел вращения от одновременного действия поверхностных и массовых сил. Теория представляет собой развитие метода граничных состояний. Особенность решения состоит в том, что след искомого упругого поля удовлетворяет одновременно поверхностным и массовым силам, а не представляет собой сумму решений частных задач.

Ключевые слова: метод граничных состояний, анизотропия, массовые силы, краевые задачи, пространство состояний, первая основная задача.

Детали из современных материалов, такие, как эластомеры, поликристаллические металлы, керамика, а также композитные материалы, обладающие значительной анизотропией свойств, применяемые в конструкциях, механизмах и машинах, часто пребывают в сложных условиях нагружения. На тело, находящееся в таких условиях, действуют поверхностные и массовые силы. Определение напряженно-деформированного состояния тел от совокупности таких воздействий, а также в силу анизотропии упругих свойств материала, составляет актуальную научную задачу.

Массовые силы рассматривались в работах различного направления механики. Например, в работе [1] установлена зависимость между критическим состоянием твердого тела, предшествующим разрушению, и взаимным влиянием угловых и линейных деформаций друг на друга, что сопровождается высвобождением их внутренней энергии. В работе [2] представлено численно-аналитическое решение плоской задачи теории упругости с использованием метода взвешенных невязок в форме метода граничного решения. Найдены распределения напряжений и смещений в упругом теле, подверженном действию заданной системы объемных сил и заданных напряжений или смещений на границах. Авторами [3] рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии твердого тела с учетом ползучести и находящегося под действием объемных сил. В [4] исследовались вынужденные деформации в виде суммы воздействий поверхностных и объемных сил. В работе [5] с использованием фиктивных расчетные схем, основанных на эквивалентности воздействий в механике деформируемого твердого тела, получены напряженно-деформированные состояния для балки на двух опорах, находящейся под действием массовых сил; вращающегося тонкого круглого диска; плотины треугольного поперечного сечения, находящейся под действием объемных фильтрационных сил. В работе [6] представлены задачи теории упругости с заданными объемными и поверхностными силами в функциональных энергетиче-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p_a".

ских пространствах тензоров напряжений и деформаций; методом ортогональных проекций решены конкретные задачи. Объемные силы рассматривались и в механике разрушения [7]: дается решение задачи механики разрушения о зарождении трещин в металлическом круговом диске под действием объемных сил. Авторами [8] для перемещений получено условие эквивалентности поверхностных и объемных сил с использованием вариационного уравнения Лагранжа. Оценке вклада гравитационных сил в возмущение напряженно-деформированного состояния упругого полупространства, вызванное шаровой неоднородностью упругих свойств, расположенной на некоторой глубине посвящена работа [9]. В [10] приведено построение поля перемещений для изотропного упругого тела, ограниченного концентрическими сферами и находящегося под действием осесимметричных нестационарных объемных сил. В работе [11] показано влияние силы тяжести на деформированное состояние идеальнупластического пространства, ослабленного цилиндрической полостью, а в [12] получены точные аналитические решения задач о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных составных сфер с жестко закрепленной границей и находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления. Для анизотропного стержня с одной плоскостью упругой симметрии решена задача кручения с помощью метода граничных состояний [13].

Обратный метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел от действия непрерывных непотенциальных массовых сил приведен в работе [14].

Метод граничных состояний с участием объемных сил для изотропной среды применен авторами [15]. В [16] разработана методика получения полнопараметрических решений для анизотропных тел, где возникновение фиктивных массовых сил являлось следствием применения метода Пуанкаре.

Метод граничных состояний относится к разряду энергетических методов. С помощью метода минимизации полной энергии деформации, решена задача по определению напряженно-деформированного состояния, возникающего при осадке жесткопластической тонкой квадратной заготовки [17]. В работе [18] в осесимметричной постановке с помощью непрямого метода граничных состояний показано решение уравнения Лапласа, а в [19] рассмотрены задачи контакта без трения трансверсально-изотропного цилиндра в условиях одновременного действия массовых и поверхностных сил.

В рамках настоящей работы предполагается развитие энергетического метода граничных состояний на класс краевых задач теории упругости с массовыми силами для трансверсально-изотропных тел вращения. Особенность искомого упругого поля состоит в том, что его след одновременно удовлетворяет заданным условиям на границе и внутри области, т.е. массовым силам, а не представляет собой сумму отдельных полей в задаче эластостатики и в задаче определения напряженно-деформированного состояния от действия массовых сил.

1. Постановка задачи

Рассматривается равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения под действием осесимметричных (не зависящих от угла θ в цилиндрической системе координат r, Q, z) поверхностных усилий $\mathbf{p}_v = \{p_r, p_z\}$ и массовых сил $\mathbf{X} = \{R, Z\}$, симметрично распределенных относительно оси вращения z (рис. 1).

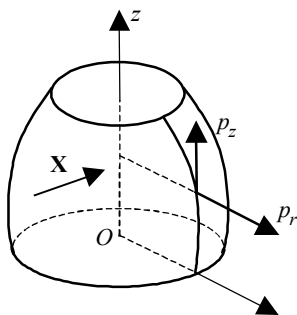


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения
Fig. 1. A transversely isotropic body of revolution

Решение поставленной задачи может быть проведено простым путем: сначала решить краевую осесимметричную задачу механики от внешних сил, приложенных к поверхности тела, затем отдельно решить задачу по определению упругого состояния от массовых сил, а полученные упругие поля сложить. Однако в этом случае сложно проводить анализ полученного результата исходя из теорий прочности и жесткости. Возникает необходимость дискретно корректировать граничные условия в краевой задаче, что составляет непростую и трудоемкую задачу, особенно если граница тела частично или полностью закреплена. Например, естественно, что напряжения внутри тела, находящегося под действием сил инерции со свободной границей, отличаются от напряжений в том же теле с закрепленной границей, вопрос состоит в том, каким образом происходит это перераспределение.

Целью работы является развитие метода граничных состояний на класс краевых осесимметричных задач теории упругости для анизотропных тел, в которых упругое поле от массовых сил не просто суммируется с полем от внешней уравновешенной нагрузки, а входит в состав решения, позволяя получить то самое перераспределение напряжений от влияния граничных условий. Ее достижению отвечает система взаимосвязанных процедур: корректная постановка, обезразмеривание, выбор метода решения с построением определяющей теории, решение конкретных задач.

2. Определяющие соотношения

В случае осесимметричной деформации тела вращения точки перемещаются лишь в меридианных плоскостях и компоненты напряженно-деформированного состояния не зависят от угла θ , т.е. напряжения $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ и деформации $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{z\theta}$ равны нулю.

Для однородного трансверсально-изотропного упругого тела в цилиндрических координатах имеют место следующие соотношения [20].

Дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad (2)$$

Обобщенный закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)]; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \quad \gamma_{zr} = \frac{1}{G_z} \tau_{zr}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь u, w – компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$ вдоль оси r и z соответственно; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{zr}$ – компоненты тензора деформаций; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{zr}$ – компоненты тензора напряжений; R, Z – компоненты вектора массовых сил $\mathbf{X}$ вдоль соответствующей оси; E_z и E_r – модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии; ν_z – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль оси r при растяжении вдоль оси z ; ν_r – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; G_r и G_z – модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней.

3. Метод решения

Для решения первой основной задачи теории упругости прибегнем к понятиям метода граничных состояний (МГС) [21]. МГС является энергетическим методом решения задач уравнений математической физики. Он показал свою эффективность в решении краевых задач теории упругости, как для изотропных, так и для анизотропных сред, в решении задач термоупругости, гидродинамики идеальной жидкости, динамики (колебаний) изотропных тел и др.

Основу метода составляют пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}. \quad (4)$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений:

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}. \quad (5)$$

Воспользуемся при построении решения основных задач механики уравнением Клапейрона [22], [23]:

$$\int_V \mathbf{X} \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{p} \mathbf{u}_\nu dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{u}_\nu$ – векторы поверхностных усилий и перемещения точек границы.

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования (отсюда и принадлежность

метода к классу энергетических). Например, для 1-го и 2-го внутренних состояний тела, занимающего область V :

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV, \quad (7)$$

причем в силу тождества Бетти:

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV.$$

Граничное состояние γ_k , в отличие от традиционного $\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k\}$, определяемого в [21], будем формировать наборами компонент вектора перемещения точек границы u_{vi} , поверхностными усилиями p_i и массовыми силами X_i ($X_1 = R, X_2 = Z$). Последнее условно в силу того, что массовые силы не относятся к элементу поверхности тела:

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k, X_i^k\}; \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j; \quad i, j = 1, 2, \quad (8)$$

где n_j – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний Γ согласно (6) скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела S и работу массовых сил на перемещениях u_i внутренних точек тела, например для 1-го и 2-го состояний:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV, \quad (9)$$

причем в силу тождества Бетти и соотношения Клапейрона

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV = \int_S p_i^2 u_{vi}^1 dS + \int_V X_i^2 u_i^1 dV.$$

В случае гладкой границы и в силу единственности решения задач линейной теории упругости оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. Каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$, причем это соответствие взаимно-однозначное: $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния.

Основную сложность формирования решения в МГС составляет конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений. Здесь предлагается несколько иная методика конструирования базиса внутренних состояний, которая изложена ниже.

Для формирования определяющих соотношений базисы пространств состояний необходимо проортонормировать. Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [24], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимается (7). Алгоритм основан на процессе Грама – Шмидта, переписанном в форме, использующей лишь перекрестные скалярные произведения элементов исходного базиса, которые сведены в матрицу Грама. Если в процессе ортогонализации на k -м шаге встречается некоторый элемент базиса внутренних состояний ξ_k , алго-

ритм на этом шаге выдаст 0 (нулевое), если этот элемент является линейной комбинацией элементов $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$. Для сохранения ортогональности выходных элементов и для предотвращения деления на ноль при ортонормировании алгоритм делает проверку на нулевые элементы и исключает их. На их место идут следующие элементы исходного базиса внутренних состояний и процесс повторяется.

Ортонормированный базис Γ редуцируется из ортонормированного базиса внутренних состояний при использовании (8) и (1).

Окончательно, проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомого внутреннего ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k ; \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k ; u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k ; \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k ; \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k ; X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^k . \quad (10)$$

В случае первой основной задачи, где заданы массовые силы $\mathbf{X} = \{R, Z\}$ и усилия на границе $\mathbf{p} = \{p_r, p_z\}$, коэффициенты Фурье c_k определяются из выражения

$$c_k = \int_V \mathbf{X} \mathbf{u}^k dV + \int_S \mathbf{p} \mathbf{u}_v^k dS , \quad (11)$$

где $\mathbf{u}^k$ и $\mathbf{u}_v^k$ – вектор перемещения в k -м базисном элементе базиса внутренних (5) и граничных (8) состояниях соответственно.

Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими ГУ в качестве заданного, при этом должны выполняться условия $c_n = 1$, n – номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

4. Формирование базиса внутренних состояний

Авторами [20] с помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного конечного тела без полостей и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которых зависят от двух координат z и y (переменных).

При установлении зависимости используется следующий прием. Упругое тело, напряженное состояние которого требуется изучить, рассматривается как часть некоторого бесконечного цилиндра с осью η , параллельной образующей цилиндра. С телом связана система координат r, z, θ . Меридианное сечение тела совпадает с плоскостью поперечного сечения бесконечного цилиндра с осями координат zy (направление $\eta \perp$ плоскости zy , ось z общая для тела и цилиндра). Предполагается, что цилиндр находится в некотором двумерном напряженном состоянии не

меняющемся вдоль образующей. Компоненты этого состояния u_y^{pl} , u_z^{pl} , σ_y^{pl} , σ_z^{pl} , σ_{zy}^{pl} , σ_{η}^{pl} определяют плоскую деформацию цилиндра в плоскости zy . Эти же компоненты определяют напряженное состояние заданного упругого тела, так как оно является частью цилиндра. Для того чтобы получить пространственное напряженное состояние тела, рассматривается ряд цилиндров, отличающихся направлением образующей или углом поворота относительно оси z . Последовательно представляя тело вырезанным из каждого такого цилиндра при $m \rightarrow \infty$ (m – число цилиндров), образуется ряд напряженных состояний, суперпозиция которых и дает суммарное трехмерное состояние. Если напряженное состояние каждого цилиндра в процессе поворота не меняется, то трехмерное состояние тела будет осесимметричным, не зависящим от координаты θ . Например, для компоненты вектора перемещения w трехмерного состояния имеет место выражение

$$w = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (u_z^{pl})_k.$$

При переходе к пределу при $m \rightarrow \infty$ сумма заменяется интегралом. При следующей замене переменной интегрирования, окончательно связь между перемещениями осесимметричной деформации и плоской деформации соответствующего цилиндра имеет вид [20]

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad v = 0. \quad (12)$$

В работе [25] приведены выражения для напряжений осесимметричного состояния через напряжения плоского вспомогательного состояния.

Для построения поля перемещений плоских вспомогательных состояний воспользуемся системой многочленов $y^\alpha z^\beta$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$, образуя некоторое допустимое состояние

$$\mathbf{u}^{pl} = \left\{ \left\{ y^\alpha z^\beta, 0 \right\}, \left\{ 0, y^\alpha z^\beta \right\} \right\}.$$

Перебор всевозможных вариантов в пределах $\alpha + \beta \leq n$, ($n = 1, 2, 3 \dots$) позволяет получить множество плоских состояний. Далее, согласно (12), определяются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(r, z)$ пространственного осесимметричного состояния и по цепочке (2), (3) определяются соответствующие тензоры деформаций и напряжений, образуя конечномерный базис (5).

5. Решение задач для тел вращения

Тестовая задача. Апробацию предложенной методики проведем на исследовании упругого состояния трансверсально-изотропного кругового в плане цилиндра из горной породы алевролита крупного темно-серого [22]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи, аналогия которой представлена в работе [26], цилиндр занимает область $V = \{(z, r) | 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$ и имеет упругие характеристики материала: $E_z = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_r = 2.29$ $G_z = 2.55$; $\nu_z = 0.22$; $\nu_r = 0.24$.

В тестовой задаче предполагается подбор таких граничных условий, чтобы была возможность получения строгого решения. Зададим следующие неуравновешенные усилия на границе:

$$p_r = 0; p_z = -1, S_1 \mid z = -2, 0 \leq r \leq 1;$$

$$p_r = 0; p_z = 2, S_2 \mid z = 2, 0 \leq r \leq 1;$$

$$p = 0, S_3 \mid r = 1, -2 \leq z \leq 2,$$

и компоненты массовых сил $R = 0$, $Z = -1/4$, последняя определена как разность главных векторов заданных сил, деленная на объем тела и направленная противоположно оси z .

После построения базиса внутренних состояний, процедуры его ортонормирования и исключения линейно зависимых элементов, базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в таблице (показано 5 элементов).

**Ортонормированный базисный набор
компонент вектора перемещения**

	u	w
ξ_1	0	$0.263z$
ξ_2	$0.18528r$	$-0.10429z$
ξ_3	0	$0.11427z^2$
ξ_4	$0.15544rz$	$-0.04374z^2$
ξ_5	$-0.3983rz$	$0.32323r^2 + 0.01121z^2$

Искомое состояние определено пятью членами ряда Фурье с соответствующими коэффициентами (11):

$$c_1 = 0.79167, c_2 = -0.31287, c_3 = 0.15235, c_4 = -0.05832, c_5 = 0.01494.$$

Решение определяется выражениями (10), является строгим и имеет вид

$$u = -0.057971r + 0.0096618rz; w = 0.0048309r^2 + 0.241546z + 0.0201288z^2;$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{zr} = 0; \sigma_{zz} = 1.5 + 0.25z; R = 0; Z = -0.25.$$

Расчетная задача для цилиндра. Рассмотрим теперь для этого же цилиндра первую основную задачу механики с внешними усилиями, имитирующими однородное растяжение вдоль оси z и неоднородное вдоль оси r :

$$p_r = 0; p_z = -1, S_1 \mid z = -2, 0 \leq r \leq 1;$$

$$p_r = 0; p_z = 1, S_2 \mid z = 2, 0 \leq r \leq 1;$$

$$p_r = 4 - z^2; p_z = 0, S_3 \mid r = 1, -2 \leq z \leq 2$$

и массовыми силами $\mathbf{X} = \{r^2, z\}$.

Сохранение той же геометрии и физических свойств материала, что и в тестовой задаче, позволяет использовать уже построенный ортонормированный базис. При решении использовался базис из 52 элементов. Приближенное решение имеет аналитический вид (приведем выражения для перемещений и массовых сил):

$$u = [479558r - 1273.25r^3 - 791.76r^5 + 156.23r^7 - 12190.3rz^2 + \\ + 665r^3z^2 - 393.48r^5z^2 + 1.54r^7z^2 - 281.27rz^4 + 40.083r^3z^4 + \\ + 141.88r^5z^4 + 124.87rz^6 - 78.874r^3z^6 + 3.105rz^5] \cdot 10^{-5};$$

$$w = [10005.1z + 11670.4r^2z + 135.833r^4z - 88.783r^6z + \\ + 8.0848r^8z + 100z^3 - 936.646r^2z^3 + 853.594r^4z^3 - 6.3186r^6z^3 + \\ + 153.371z^5 - 191.719r^2z^5 - 139r^4z^5 - 24.56z^7 + 41.8r^2z^7] \cdot 10^{-5};$$

$$R = [220.8r + 1183.54r^3 - 445.856r^5 - 3.0348r^7 - 4.8617rz^2 + \\ + 136.936r^3z^2 - 43.05r^5z^2 - 28.8633rz^4 - 35.207r^3z^4 + 10.0678rz^6] \cdot 10^{-3};$$

$$Z = [995.247z + 104.925r^2z - 70.404r^4z - 11.599r^6z - 21.853z^3 - \\ - 102.278r^2z^3 + 49.768r^4z^3 + 25.2473z^5 + 17.1775r^2z^5 - 5.5309z^7] \cdot 10^{-3}.$$

Следует отметить, что сходимость в направлении поверхностных сил наблюдается быстрее, чем в направлении массовых сил. Поверхностные силы восстанавливаются с достаточной точностью уже при использовании 20 элементов базиса. Для достижения удовлетворительной точности в отношении массовых сил такого количества используемых элементов недостаточно.

При практической реализации приема решения первой основной задачи для цилиндра и его тестирования при различных видах функций заданных массовых сил наблюдалась следующая особенность: если область интегрирования V симметрична относительно плоскости $z = 0$, то сходимостью решения в части восстановления массовых сил обладают задачи с косимметричной относительно этой плоскости компонентой массовых сил Z , например $Z = z^n, n = 1, 3, 5, \dots$. Это связано с видом базисных функций и, естественно, ограничивает круг рассматриваемых задач.

Рассмотрим теперь задачу для тела вращения неканонической формы (рис. 2) из того же материала, что и цилиндр. Исследуем распределение напряжений внутри области от действия массовых сил $\mathbf{X} = \{r^2, 0\}$ при условии, что след этих напряжений на границе равен нулю $\mathbf{p} = 0$.

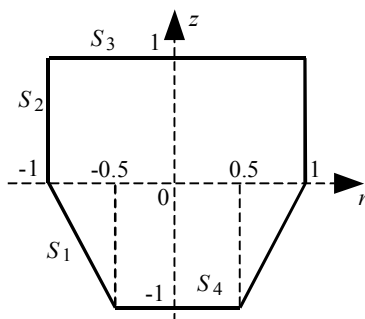


Рис. 2. Меридианное сечение тела вращения
Fig. 2. A meridian section of the body of revolution

Сходимость решения сильно зависит от геометрии тела, поэтому для решения данной задачи потребовался базис уже из 70 элементов; коэффициенты Фурье приводить не будем. Проверка результата и оценка точности осуществляется сопоставлением заданных ГУ с восстановленными в результате решения. На рис. 3 показаны массовые силы на участках S_1 и S_2 . На графиках заданные (| | |) и восстановленные (—) массовые силы изображены в масштабе. Например, истинное значение R на левом графике рис. 3, а равно значению на графике, умноженному на коэффициент κ .

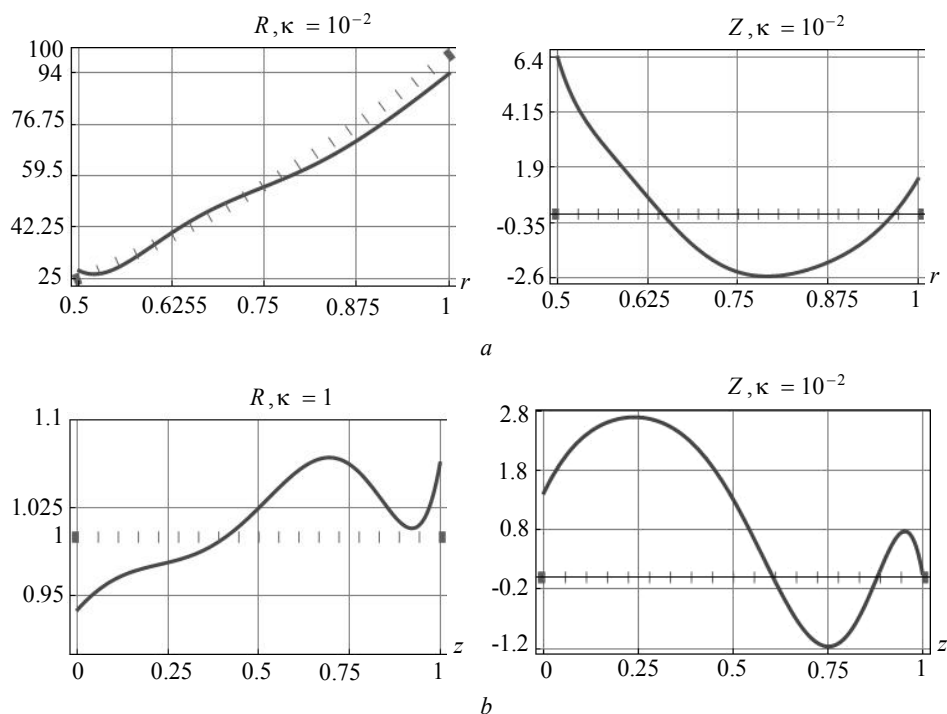


Рис. 3. Верификация массовых сил на участках границы:

a – на участке S_1 , b – на участке S_2

Fig. 3. Verification of mass forces on the boundaries:
in the section (a) S_1 and (b) S_2

Как видно из графиков, восстановленные массовые силы совпадают с заданными в диапазоне определенной точности ($\pm 10\%$ от значения заданной величины) в любой точке на границе тела.

Компоненты вектора перемещения, имеющие полиномиальный вид, представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) (рис. 4). В силу осевой симметрии показана область $0 \leq r \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$. Истинное значение показанной величины равно соответствующему значению на изолиниях, умноженному на κ .

Полученные упругие поля удовлетворяют уравнениям (1) – (3), а также уравнениям совместности деформаций [23].

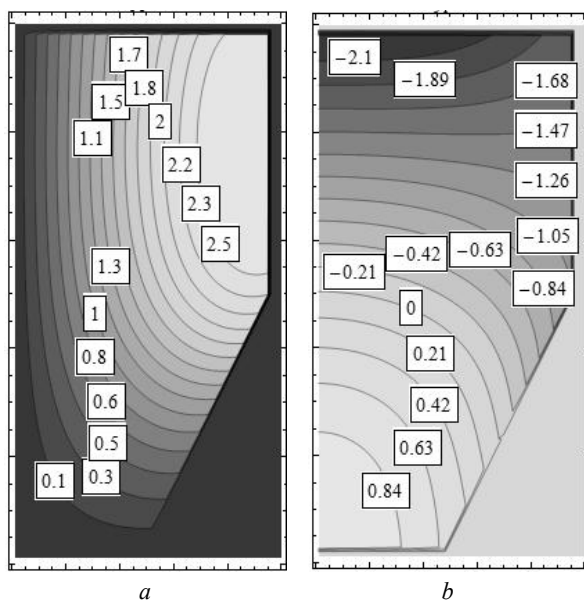


Рис. 4. Компоненты вектора перемещения:

$$a - u, \kappa = 10^{-2}, \quad b - w, \kappa = 10^{-2}$$

Fig. 4. Displacement vector components:

$$(a) u, \kappa = 10^{-2} \text{ and } (b) w, \kappa = 10^{-2}$$

Заключение

Таким образом, решение задач линейной теории упругости строится в виде рядов, но совершенно не опирается на общее или фундаментальное решение. Здесь задается зависимость вектора перемещения плоского вспомогательного состояния от координат $y^\alpha z^\beta$ и на его основе определяется вектор перемещения пространственного осесимметричного состояния. Для такого вектора по соотношению Коши определяется тензор деформаций, из закона Гука – тензор напряжений, из фундаментального соотношения Коши – усилия на поверхности тела, а из уравнения равновесия – массовые силы. То есть строится точное частное решение задачи, соответствующее заданной в каждой точке тела функции перемещения. Перебирая $\alpha + \beta \leq n$ ($n = 1, 2, 3 \dots$), строится множество точных частных решений задачи линейной теории упругости: векторы перемещения $\mathbf{u}_k$, тензоры деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, тензоры напряжений $\boldsymbol{\sigma}_k$, векторы поверхностных сил $\mathbf{p}_k = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_k$, векторы массовых сил $\mathbf{X}_k$. Оставляя среди этих решений только линейно независимые и осуществляя их ортогонализацию в соответствии с соотношением (7), получаем базис, по которому соответствующие векторы или тензоры разлагаются в ряды с одинаковыми коэффициентами (11). Поэтому изложенный подход является более широким, чем подход, основанный на общих или фундаментальных решениях [25]. В данном случае используется процедура ортогонализации, определяемая соотношениями (7) и (9), позволяющая сразу строить решение задачи с заданными массовыми и поверхностными силами, а не строить полное решение как сумму

частного решения задачи при действии массовых сил и общего решения при действии только поверхностных сил, как сделано, например, в работе [14].

Предложенная методика, однако, не является общей для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных) и вида заданных функций массовых сил. Скорость сходимости рядов зависит от граничных условий и условий внутри области, а также от геометрии тела.

Таким образом, метод граничных состояний показал свою эффективность в решении первой основной задачи теории упругости для трансверсально-изотропных тел вращения с массовыми силами. Результирующее упругое поле имеет численно-аналитический вид, что позволяет легко проводить анализ полученных характеристик напряженно-деформированного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пикуль В.В. К аномальному деформированию твердых тел // Физическая мезомеханика. 2013. № 2. С. 90–100. DOI: 10.24411/1683-805X-2013-00019.
2. Голоскоков Д.П., Данилюк В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. № 1. С. 8–14.
3. Агаханов Э.К., Агаханов М.К. О моделировании действия объемных сил в упругоползучем теле // Изв. вузов. Северо-кавказский регион. Технические науки. 2005. № 1. С. 39–45.
4. Агаханов Э.К. О развитии комплексных методов решения задач механики деформируемого твердого тела // Вестник ДГТУ. Технические науки. 2013. № 2 (29). С. 39–45.
5. Агаханов Э.К. Решение задач механики деформируемого твердого тела с использованием фиктивных расчетных схем // Вестник ДГТУ. Технические науки. 2015. № 3(38). С. 8–15.
6. Стружанов В.В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // Математическое моделирование систем и процессов. 2004. № 12. С. 89–100.
7. Калантарлы Н.М. Трещинообразование в круговом диске под действием объемных сил // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 23–29.
8. Агаханов Э.К., Магомедэминов Н.С. Условия эквивалентности воздействий для перемещений // Вестник ДГТУ. Технические науки. 2007. №12. С. 27–28.
9. Пантелеев И.А., Полтавцева Е.В., Мубассарова В.А., Гаврилов В.А. Возмущение напряженно-деформированного состояния упругого полупространства шаровой неоднородностью упругих свойств при сдвиге в горизонтальной плоскости с учетом гравитационных сил // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 4. С. 138–153. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.10.
10. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 6. С. 59–69. DOI: 10.15372/PMTF20150608.
11. Матвеева А.Н. О влиянии силы тяжести на перемещения в упругопластической среде, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела, Самара, 2017. С. 75–77.
12. Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20–24 августа 2015. С. 3951–3953.
13. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length // Int. Trans. J. Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. 2019. V. 10. No. 2. pp. 183–191. DOI: 10.14456/IJTJEMAST.2019.18.
14. Левина Л.В., Кузьменко Н.В. Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // XI Всероссийский съезд по фунда-

- ментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. докл. Казань, 2015. С. 2276–2278.
15. Пеньков В.Б., Пеньков В.В., Викторов Д.В. Учет массовых сил в методе граничных состояний // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 2. С. 94–100.
 16. Penkov V.B., Ivanychev D.A., Novikova O.S., Levina L.V. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations // J. Physics: Conf. Series. 973. 2018. 012015. P. 1–10. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012015.
 17. Албагачиев А.Ю., Моисеенко А.М., Якобовская И.М., Зернов Е.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой квадратной заготовки при ее осадке шероховатыми плитами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 49. С. 75–80. DOI: 10.17223/19988621/49/7.
 18. Пономарева М.А., Собко Е.А., Якутенок В.А. Решение осесимметричных задач теории потенциала непрямым методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 84–96.
 19. Иванычев Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 49–62. DOI: 10.15593/pern.mech/2019.2.05.
 20. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, 1978. 464 с.
 21. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
 22. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
 23. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
 24. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. 2007. С. 130–131.
 25. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в приложении к осесимметричным задачам для анизотропных тел // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2014. № 1. С. 19–26.
 26. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2(28). С. 16–24.

Статья поступила 24.06.2019 г.

Ivanychev D.A. (2020) A METHOD OF BOUNDARY STATES IN A SOLUTION TO THE FIRST FUNDAMENTAL PROBLEM OF THE THEORY OF ANISOTROPIC ELASTICITY WITH MASS FORCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 96–111

DOI 10.17223/19988621/66/8

Keywords: boundary state method, anisotropy, mass forces, boundary value problems, state space, first fundamental problem.

The purpose of this work is to determine the stress-strain state of the anisotropic bodies of revolution exposed to axisymmetric surface and mass forces. The problem is solved using the method of boundary states. A theory for the construction of space bases of the inner and boundary states conjugated with isomorphism is developed. Determination of the internal state is reduced to a study of isomorphic boundary state. The elastic state components are represented as Fourier series with quadrature coefficients. In the first fundamental problem of mechanics, determination of the elastic state is reduced to the solution of an infinite system of algebraic equations.

A particularity of this solution is that the pattern of the determined elastic field satisfies both the conditions specified at the boundary and inside the body.

A rigorous solution to a test problem for a circular cylinder, as well as a solution to the problem with inhomogeneous boundary conditions is presented. An elastic field is found in the problem for the non-canonical body of revolution exposed to mass forces and zero boundary conditions. The explicit and indirect indicators of problem solution convergence and a graphical visualization of results are shown.

Financial support. The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Lipetsk Region in the framework of the research project No. 19-41-480003 "p_a".

Dmitriy A. IVANYCHEV (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: lsivdml@mail.ru

REFERENCES

1. Pikul' V.V. (2013) K anomal'nomu deformirovaniyu tverdykh tel [To the anomalous deformation of solids]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 2. pp. 90–100. DOI: 10.24411/1683-805X-2013-00019.
2. Goloskokov D.P., Danilyuk V.A. (2013) Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugikh tel s pomoshch'yu polinomov [Modeling of a stress-strain state of elastic bodies using polynomials]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova*. 1. pp. 8–14.
3. Agakhanov E.K., Agakhanov M.K. (2005) O modelirovanii deystviya ob'emnykh sil v uprugopolzuchem tele [On the modeling of the action of body forces in an elastic-creeping body]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki – University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series*. 1. pp. 39–45.
4. Agakhanov E.K. (2013) O razvitii kompleksnykh metodov resheniya zadach mekhaniki deformiruемого твердого тела [On the development of complex methods for solving problems of mechanics of deformable solids]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2(29). pp. 39–45.
5. Agakhanov E.K. (2015) Reshenie zadach mekhaniki deformiruемого твердого тела s ispol'zovaniem fiktivnykh raschetnykh skhem [Solving problems of mechanics of deformable solids with the use of fictitious computational schemes]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 3(38). pp. 8–15.
6. Struzhanov V.V. (2004) O reshenii kraevykh zadach teorii uprugosti metodom ortogonal'nykh proektsiy [On the solution to boundary value problems of the theory of elasticity by the method of orthogonal projections]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 12. pp. 89–100.
7. Kalantarly N.M. (2014) Treshchinoobrazovanie v krugovom diske pod deystviem ob'emnykh sil [Cracking in a circular disk under the action of volume forces]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 6. pp. 23–29.
8. Agakhanov E.K., Magomedeminov N.S. (2007) Usloviya ekvivalentnosti vozdeystviy dlya peremeshcheniy [Equivalence conditions of impacts for displacements]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 12. pp. 27–28.
9. Panteleev I.A., Poltavtseva E.V., Mubassarova V.A., Gavrillov V.A. (2017) Vozmushchenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugogo poluprostranstva sharovoy neodnorodnost'yu uprugikh svoystv pri sdvige v gorizonta'noy ploskosti s uchetom gravitatsionnykh sil [Perturbation of a stress-strain state of an elastic half-space by a spherical inhomogeneity of elastic properties under shear in horizontal plane taking account

- gravitational forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 138–153. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.10.
10. Vestyak V.A., Tarlakovskiy D.V. (2015) Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 56(6). pp. 984–994. DOI: 10.1134/S0021894415060085.
 11. Matveeva A.N. (2017) O vliyaniy sily tyazhesti na peremeshcheniya v uprugoplasticheskoy srede, oslablennoy gorizontallyy tsilindricheskoy polost'yu [On the effect of gravity on the motion in the elastoplastic medium weakened by a horizontal cylindrical cavity]. *Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics of Deformable Solids, Samara*. pp. 75–77.
 12. Fukalov A.A. (2015) Zadachi ob uprugom ravновесii sostavnykh tolstostennyykh transversal'no-izotropnykh sfer, nakhodyashchikhsya pod deystviem massovykh sil i vnutrennego davleniya, i ikh prilozheniya [Problems on the elastic equilibrium of composite thick-walled transversally isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications]. *Proceedings of the XI All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics, Kazan*. pp. 3951–3953.
 13. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. (2019) The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length. *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*. 10(2). pp. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.
 14. Levina L.V., Kuz'menko N.V. (2015) Obratnyy metod effektivnogo analiza sostoyaniya uprugogo tela ot massovykh sil iz klassa nepreryvnykh [An inverse method of effective analysis of an elastic body state under mass forces from a class of continuous]. *Proceedings of the XI All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics, Kazan*. pp. 2276–2278.
 15. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V., Viktorov D.V. (2005) Uchet massovykh sil v metode granichnykh sostoyaniy [The account for mass forces in the method of boundary states]. *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 11. pp. 94–100.
 16. Penkov V.B., Ivanychev D.A., Novikova O.S., Levina L.V. (2018) An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations. *Journal of Physics: Conference Series*. 973(012015). DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012015.
 17. Albagachiev A.Yu., Moiseenko A.M., Yakobovskaya I.M., Zernov E.V. (2017) Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie tonkoy kvadratnoy zagotovki pri ee osadke sherokhovatymi plitami [A stress-strain state of a thin square workpiece during upsetting by rough plates]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 75–80. DOI: 10.17223/19988621/49/7.
 18. Ponomareva M.A., Sobko E.A., Yakutenok V.A. (2015) Reshenie osesimmetrichnykh zadach teorii potentsiala nepryamym metodom granichnykh elementov [Solving axisymmetric potential problems using the indirect boundary element method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(37). pp. 84–96. DOI: 10.17223/19988621/37/8.
 19. Ivanychev D.A. (2019) Reshenie kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi silami [Solution to a contact problem of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2. pp. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.
 20. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of the methods of the theory of functions of complex variable)]. Moscow: Nauka.

21. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [A method of boundary states for solving the problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal*. 2(2). pp. 115–137.
22. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity for anisotropic body]. Moscow: Nauka.
23. Novatskiy V. (1975) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir.
24. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychisleniy [Expansion of the basis of space of a state at severe limitations in the energy consumption of computations]. *Theses of Reports at Scientific Conference of Lipetsk State Technical University for Students and Postgraduates*. pp. 130–131.
25. Ivanychev D.A. (2014) Metod granichnykh sostoyaniy v prilozhenii k osesimetricnym zadacham dlya anizotropnykh tel [A method of boundary states as applied to axisymmetric problems for anisotropic bodies]. *Vesti vysshikh uchebnykh zavedeniy Chernozem'ya – News of Higher Educational Institutions of the Chernozem Region*. 1. pp. 19–26.
26. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnoparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennoy tela [A full-parameter solution to the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Lipetsk State Technical University*. 2 (28). pp. 16–24.

Received: June 24, 2019

УДК 534.113

DOI 10.17223/19988621/66/9

Ф.Ю. Кузнецов**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ СПОСОБ ЧАСТОТНОГО АНАЛИЗА
ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ**

Теоретически обоснован и экспериментально проверен электромагнитный способ, позволяющий определять собственные частоты поперечных колебаний стержня при различных граничных условиях. На его основе разработан метод электромагнитной вибродиагностики для неразрушающего контроля стержневых конструкций, а также метод экспериментального определения коэффициента внутреннего трения электропроводных материалов.

Ключевые слова: *стержень, поперечные колебания, магнитное поле, вибрации, вибродиагностика, внутреннее трение.*

Переход машиностроения к цифровым методам связан, в частности, с разработкой и внедрением теоретически обоснованных методов вибродиагностики различных конструкций при неразрушающем контроле. В связи с этим возникает проблема адекватного теоретического описания и создания экспериментального оборудования для исследований вибрационных процессов в различных конструкциях с учетом условий их закрепления [1–5]. Многие конструкционные элементы и детали, применяемые в машино- и приборостроении, имеют стержневую форму, поэтому актуальным является исследование поперечных вибраций стержневых конструкций. Обычно при вибродиагностике стержней используются магнитострикционные датчики [1], которые устанавливаются в определенных точках испытуемой конструкции. Они фиксируют характеристики колебаний только определенных точек, иногда этого недостаточно, чтобы сделать вывод о наличии или отсутствии дефекта конструкции. Кроме того, присоединение датчиков к конструкции изменяет ее инерционные и упругие свойства, что необходимо учитывать при расчете собственных частот. Возникает приоритетная идея бесконтактной вибродиагностики. Ее предлагается [2–5] решить за счет использования внешнего магнитного поля.

Цель настоящего исследования заключается в теоретическом обосновании и экспериментальной проверке электромагнитного метода частотного анализа стержневых систем. Этот метод также можно использовать для экспериментального определения коэффициента внутреннего трения конкретных стержневых конструкций. Основное внимание уделяется теоретическому описанию поперечных колебаний консольного электропроводного стержня во внешнем магнитном поле.

**1. Поперечные колебания консольного электропроводного стержня
в магнитном поле**

В монографии [4] детально исследованы колебания двухопорного электропроводного стержня в магнитном поле. Амплитудные функции в этом случае являются синусоидальными, что облегчает математическую часть исследования. Установлено соответствие между частотами собственных поперечных колебаний стержня и частотами электрического сигнала, возникающего в цепи, замыкающей его концы. При этом обнаружены следующие особенности:

1) набор частот электрического сигнала зависит от ширины и расположения активного участка $\Delta z = z_2 - z_1$, на котором действует внешнее магнитное поле;

2) выделяется группа собственных частот колебаний стержня, которые не отражаются в электрическом сигнале, то есть электромагнитное воздействие обладает селективным свойством;

3) магнитная сила, действующая на стержень, увеличивает фактор затухания свободных колебаний, поэтому в каждом частном случае необходимо сравнивать по величине механическую и электромагнитную диссипацию.

Исследуем поперечные колебания консольного электропроводного стержня длиной l в плоскости Oxz в присутствии внешнего магнитного поля (рис. 1). Однородное и стационарное магнитное поле действует на участке $\Delta z = z_2 - z_1$, вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ направлен перпендикулярно плоскости колебаний стержня. Концы стержня замкнуты электрическим контуром, обладающим импедансом R .

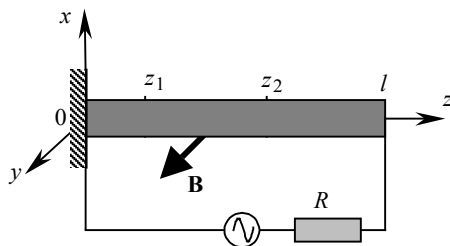


Рис. 1. Консольный стержень в магнитном поле
Fig. 1. Cantilever beam in a magnetic field

В монографии [4] составлено дифференциальное уравнение поперечных колебаний электропроводного стержня, находящегося во внешнем магнитном поле. Запишем его для случая, когда импеданс внешней цепи значительно превышает сопротивление стержня:

$$EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{B^2}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = 0, \quad (1)$$

где $u(z, t)$ – динамическая функция смещений, зависящая от продольной координаты и времени; EJ – изгибная жесткость стержня; β – коэффициент внешнего демпфирования, зависящий от свойств окружающей среды; β^* – демпфирующий коэффициент, зависящий от свойств материала стержня; m_0 – погонная масса стержня; R – полное сопротивление электрической цепи. Последний член в уравнении (1) соответствует электромагнитной силе.

Интегродифференциальное уравнение в частных производных (1) обычно при помощи процедуры Фурье сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Представим динамическую функцию смещений в виде бесконечного ряда по собственным амплитудным функциям X_n :

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(z),$$

где q_r – обобщенные координаты системы, в качестве которых можно принять смещения точек максимального прогиба при каждой форме колебаний, $X_n(z)$ – безразмерные функции.

Используя процедуру Фурье применительно к интегродифференциальному уравнению (1), с учетом ортогональности собственных амплитудных функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{B^2 \gamma_r}{\chi_r m_0 R} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \gamma_n \quad (r=1, 2, \dots). \quad (2)$$

Здесь p_r – собственные циклические частоты и использованы обозначения

$$\chi_r = \int_0^l X_r^2 dz; \quad \gamma_r = \int_{z_1}^{z_2} X_r dz; \quad \gamma_n = \int_{z_1}^{z_2} X_n dz. \quad (3)$$

Правые части этих уравнений соответствуют электромагнитной силе. При условии

$$\gamma_r = \int_{z_1}^{z_2} X_r dz = 0 \quad (r=1, 2, \dots) \quad (4)$$

электромагнитное воздействие отсутствует, а следовательно, в замыкающей цепи не генерируется электрический сигнал. Условие (4) определяет группу колебательных мод, которые не подвергаются электромагнитному воздействию и не регистрируются анализатором, включенным в замыкающую цепь.

Собственные амплитудные функции консольного стержня выражаются в ортогональных функциях Крылова [6]:

$$X_r(z) = C_1 K_1(\alpha_r z) + C_2 K_2(\alpha_r z) + C_3 K_3(\alpha_r z) + C_4 K_4(\alpha_r z) \quad (r=1, 2, \dots), \quad (5)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы, подлежащие определению, α_r – волновые числа, которые связаны с собственными частотами p_r соотношениями

$$\alpha_r^4 = \frac{p_r^2 m_0}{EJ} \quad (r=1, 2, \dots). \quad (6)$$

Консольному стержню соответствуют граничные условия:

$$X_r(0) = 0; \quad X_r'(0) = 0;$$

$$X_r''(l) = 0; \quad X_r'''(l) = 0.$$

С помощью условий на закрепленном конце стержня определяются первые две константы: $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$.

Граничные условия на свободном конце приводят к системе уравнений:

$$X_r''(l) = C_3 K_1(\lambda_r) + C_4 K_2(\lambda_r) = 0; \quad (7)$$

$$X_r'''(l) = C_3 K_4(\lambda_r) + C_4 K_1(\lambda_r) = 0,$$

где $\lambda_r = \alpha_r l$. Из первого уравнения (7) получаем соотношение

$$C_3 = -C_4 \frac{K_2(\lambda_r)}{K_1(\lambda_r)}.$$

Масштабируем собственные амплитудные функции, приняв $C_4 = 1$. С учетом этого из второго уравнения (7) получаем уравнение частот:

$$K_1^2(\lambda_r) - K_2(\lambda_r) K_4(\lambda_r) = 0 \quad (r=1, 2, \dots), \quad (8)$$

которое можно представить в форме

$$\cos(\lambda_r) = -\frac{1}{ch(\lambda_r)} \quad (r=1, 2, \dots). \quad (9)$$

Первые корни уравнения (9) имеют значения [6]: $\lambda_1 = 1.875$; $\lambda_2 = 4.694$. Волновые числа соответственно равны: $\alpha_1 = 4.6875 \text{ м}^{-1}$; $\alpha_2 = 11.735 \text{ м}^{-1}$. Применяя формулу (6), можно определить собственные частоты p_1 и p_2 для стержня, который используется в эксперименте при $m_0 = 0.077 \text{ кг/м}$, $EJ = 4.45 \text{ Нм}^2$:

$$p_1 = 167.509 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = 1049.837 \text{ с}^{-1}.$$

Амплитудные функции с учетом значений констант принимают вид

$$X_r(\alpha_r z) = K_4(\alpha_r z) - \frac{K_2(\lambda_r)}{K_1(\lambda_r)} K_3(\alpha_r z) \quad (r=1, 2, \dots). \quad (10)$$

На рис. 2 изображены две первые амплитудные формы колебаний консольного стержня длиной $l = 0.4 \text{ м}$ с учетом выбранного масштаба. При $r=1$ электромагнитное воздействие проявляется при любом расположении активного участка, так как все точки линии изгиба смещаются в одной фазе. При $r=2$ выделяются участки стержня, смещающиеся в противофазе. Следовательно, можно выбрать такое расположение и такую ширину активного участка, при которых ток в стержне не индуцируется и электромагнитное воздействие отсутствует. Определим положение активного участка (магнитов), при котором электромагнитное воздействие на вторую моду отсутствует.

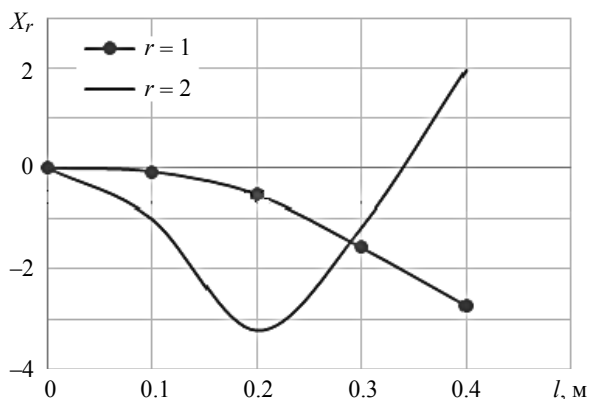


Рис. 2. Амплитудные функции X_1 и X_2

Fig. 2. Amplitude functions X_1 and X_2

Используя условие (4), составим уравнение частот изолированных колебаний:

$$K_1(\alpha_r z_2) - K_1(\alpha_r z_1) - \frac{K_2(\lambda_r)}{K_1(\lambda_r)} (K_4(\alpha_r z_2) - K_4(\alpha_r z_1)) = 0 \quad (r=1, 2, \dots). \quad (11)$$

Пусть магнитное поле создается плоскими магнитами шириной $\Delta z = z_2 - z_1 = 0.06 \text{ м}$. Условию отсутствия электромагнитного воздействия отвечает случай, при котором $\lambda_2 = 4.694$. На рис. 3 изображены два графических решения уравнения (11) при различных положениях активного участка: в первом случае $z_1 = 0.85l$, $z_2 = l$; во втором случае $z_1 = 0.7l$, $z_2 = 0.85l$. Второй случай соответствует поставленному условию, поскольку график пересекает ось абсцисс при значении близком к $\lambda_2 = 4.694$.

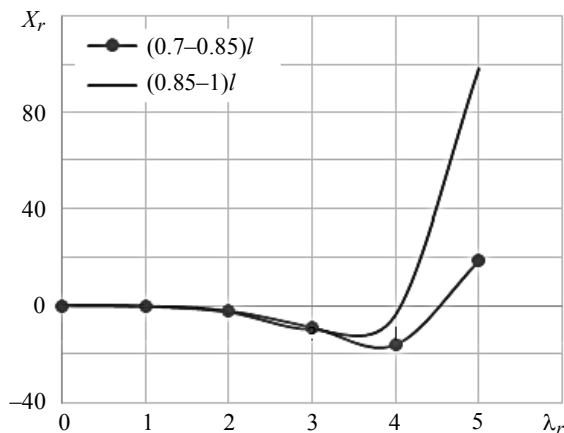


Рис. 3. Графические решения уравнения частот изолированных колебаний при различных местоположениях магнитов

Fig. 3. Graphical solutions to the equation of frequency of the isolated oscillations at different locations of magnets

Присутствие внешнего магнитного поля приводит к возникновению распределенной электромагнитной силы, которая действует на стержень. В случае собственных колебаний магнитная сила является демпфирующей, что приводит к изменению факторов затухания парциальных колебаний. Как показано выше, электромагнитное воздействие обладает избирательностью (селективностью) по отношению к колебательным модам. Очевидно, и факторы затухания различных парциальных колебаний стержня за счет электромагнитного воздействия изменяются в различной мере. Можно определить моды, факторы которых не изменяются при колебаниях стержня в магнитном поле.

Уравнения, входящие в систему (2), являются взаимосвязанными, поскольку их правые части содержат весь набор обобщенных скоростей. С помощью метода расщепления [4] систему уравнений (2) можно упростить. Оставим в первом уравнении только первый член суммы, стоящий в правой части, во втором – два и т.д. Получим систему уравнений, которые можно интегрировать последовательно, начиная с первого:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 + \left(\beta + \beta^* p_1^2 + \frac{B^2 \gamma_1^2}{\chi_1 m_0 R} \right) \dot{q}_1 + p_1^2 q_1 &= 0; \\
 \ddot{q}_2 + \left(\beta + \beta^* p_2^2 + \frac{B^2 \gamma_2^2}{\chi_2 m_0 R} \right) \dot{q}_2 + p_2^2 q_2 &= -\frac{B^2 \gamma_1 \gamma_2}{\chi_2 m_0 R} \dot{q}_1; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \ddot{q}_r + \left(\beta + \beta^* p_r^2 + \frac{B^2 \gamma_r^2}{\chi_r m_0 R} \right) \dot{q}_r + p_r^2 q_r &= -\frac{B^2 \gamma_r}{\chi_r m_0 R} (\gamma_1 \dot{q}_1 + \dots + \gamma_{r-1} \dot{q}_{r-1}).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Используя уравнения (12), определим факторы затухания $\tilde{h}_r$ и демпфированные частоты $\tilde{p}_r$ нескольких первых колебаний, используя формулы

$$\tilde{h}_r = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* p_r^2 + \frac{B^2 \gamma_r^2}{\chi_r m_0 R} \right); \quad \tilde{p}_r = \sqrt{p_r^2 - \tilde{h}_r^2}. \tag{13}$$

Механическая диссипация определяется коэффициентами β и β^* . Значения этих коэффициентов можно оценить лишь приблизительно, используя табличные данные, например: $\beta = 3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $\beta^* = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Однако, следует понимать, что эти значения требуется уточнять для каждой конкретной экспериментальной установки. Обозначим коэффициент магнитной диссипации $\beta_r^{(m)} = B^2 \gamma_r^2 / (\chi_r m_0 R)$.

В таблице приведены расчеты факторов затухания и демпфированных частот при индукции магнитов $B = 1 \text{ Тл}$ и их расположении в соответствии с координатами $z_1 = 0.7l$, $z_2 = 0.85l$. Импеданс осциллографа $R = 10^6 \text{ Ом}$. Видно, что магнитная диссипация намного меньше механической и не влияет на демпфированные частоты колебаний. Этот факт можно отметить как достоинство электромагнитного способа измерения собственных частот: при больших значениях импеданса частотного анализатора электромагнитное воздействие практически не искажает собственные частоты стержня, то есть измеряемые значения совпадают с демпфируемыми частотами в отсутствие магнитного поля.

	$p_r, \text{ с}^{-1}$	$\tilde{h}_r, \text{ с}^{-1}$	$\beta_r^{(m)}, \text{ с}^{-1}$	$\tilde{p}_r, \text{ с}^{-1}$
$r = 1$	167.51	42.09	$7,8 \cdot 10^{-7}$	167.13
$r = 2$	1049.84	1653.24	$1,9 \cdot 10^{-8}$	Апериодич.затухание
$r = 3$	2939.87	12964.25	$7,0 \cdot 10^{-7}$	Апериодич.затухание

Заметим, что магнитная диссипация при $r = 2$ существенно меньше, чем $r = 1$ и $r = 3$. Это объясняется выбором положения активного участка, при котором электромагнитное воздействие на вторую моду практически исключается.

2. Экспериментальная проверка теоретических результатов

Проверка теоретических расчетов произведена на специально сконструированной установке (рис. 4, а). На массивной станине смонтирована стойка, на которой консольно закреплен алюминиевый стержень круглого сечения длиной 40 см и диаметром 6 мм. Внешнее однородное стационарное магнитное поле создается двумя плоскими постоянными магнитами, изготовленными из сплава неодим – бор. Такие магниты позволяют создать очень сильное магнитное поле. При близком расположении двух плоских магнитов, как указано на рис. 4, между ними создается магнитное поле с индукцией, близкой к 1 Тл. Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости колебаний стержня, магнитное поле создано на участке $\Delta l = z_2 - z_1 = 0.06 \text{ м}$. Для регистрации электрических импульсов использовался электронный осциллограф OWON SDS7102V, соединённый с концами электропроводного стержня.

Цели эксперимента: 1) экспериментальная проверка метода электромагнитного частотного анализа при поперечных колебаниях консольного стержня; 2) получение экспериментальных данных для определения коэффициента внутреннего трения, возникающего в стержне.

В первой серии экспериментов стержень совершал собственные плоские колебания в поле двух магнитов, при этом магнитное поле действовало на участке $z_1 = 0.7l$, $z_2 = 0.85l$, который соответствует приведенным выше теоретическим расчетам.

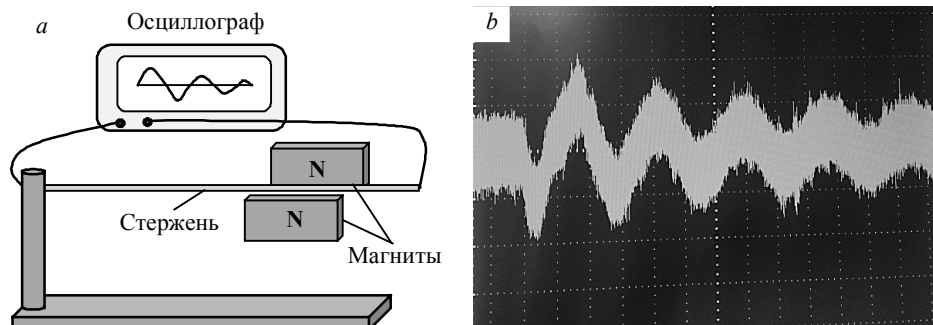


Рис. 4. Схема экспериментальной установки (а); осциллограмма электрического сигнала (б)
Fig. 4. (a) Installation diagram of the experimental facility; (b) oscillogram of an electric signal

С помощью магнитного поля механические колебания стержня преобразовываются в электрический сигнал, считываемый осциллографом. На экране осциллографа отражается затухающая периодическая кривая (рис. 4, б). Измерив период колебаний, можно вычислить частоту. В результате серии опытов определено значение основной частоты колебаний стержня: $\nu_1 = (20 \pm 3)$ Гц. Соответственно циклическая демпфированная частота имеет значение $\tilde{\rho}_1 = (125.6 \pm 15) \text{ c}^{-1}$. Различие теоретического значения и результата эксперимента объясняется двумя причинами: 1) невысокой точностью измерений периода колебаний из-за «шумовых» помех; 2) неточностью принятых коэффициентов механической диссипации β и β^* .

Во второй серии экспериментов применен резонансный метод: с помощью генератора сигналов специальной формы Tabor WW2571A, включенного в электрическую цепь, подается электрический ток определенной частоты. Возникают вынужденные колебания стержня под действием электромагнитной силы. При совпадении частоты электрического сигнала с собственной частотой колебаний стержня, наступает резонанс и стержень вибрирует с максимальной амплитудой. Эксперимент проводился с постепенным увеличением частоты входного сигнала шагом 0.1 Гц. Максимальная амплитуда колебаний достигалась при частоте сигнала 23 Гц, а при дальнейшем повышении частоты входного сигнала, амплитуда колебаний стержня постепенно уменьшалась. Для проверки совершалось постепенное понижение задаваемой частоты и максимальная амплитуда колебаний замечена так же при частоте в 23 Гц. Следовательно, можно сделать вывод, что основная собственная частота колебаний стержня с достаточно высокой степенью точности $\nu_1 = (23 \pm 0.1)$ Гц. Соответственно циклическая демпфированная частота имеет значение $\tilde{\rho}_1 = (144.4 \pm 0.6) \text{ c}^{-1}$. Используя это значение, можно более точно оценить механическую диссипацию в данной экспериментальной установке:

$$\tilde{h}_1 = \sqrt{p_1^2 - \tilde{\rho}_1^2} = 84.8 \text{ c}^{-1}.$$

Основной причиной механической диссипации при поперечных колебаниях металлического стержня является внутреннее трение, поэтому коэффициент β^* можно достаточно точно определить из соотношения:

$$\beta^* \approx \frac{2\tilde{h}_1}{p_1^2} = 0,006 \text{ c}.$$

Таким образом, предложенный электромагнитный метод можно использовать для исследования явления внутреннего трения конкретных электропроводных материалов и сплавов.

Заключение

Полученные в настоящем исследовании результаты можно использовать для обоснования электромагнитного метода вибродиагностики. Его суть заключается в экспериментальном определении собственных частот поперечных колебаний детали, имеющей стержневую форму. Вначале определяется первая собственная частота эталонного образца, не имеющего дефектов. В ходе испытания деталей сравниваются их частоты с эталонной частотой. При наличии в детали трещин и других внутренних дефектов эти частоты заметно различаются. Достоинства этого метода: отсутствие разрушений образца, бесконтактный способ измерений, неизменяемость механических свойств образца в процессе испытаний.

Эту же экспериментальную установку можно использовать для изучения внутренних свойств электропроводных материалов, в частности для определения внутреннего трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрухин В.В., Петрухин С.В. Основы вибродиагностики и средства измерения вибрации: учеб. пособие. М.: Инфра-Инженерия, 2010. 176 с.
2. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Управление частотами колебаний упругих электромеханических систем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 3(19). С. 87–92.
3. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Электромагнитный способ подстройки частоты вибрметра // Изв. вузов. Физика. 2012. № 6/2. С. 244–247.
4. Томилин А.К. Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами. Усть-Каменогорск, 2004. 286 с.
5. Tomilin A.K., Kurilskaya N.F. Vibrations of a conductive string in a nonstationary magnetic field under presence of two nonlinear factors // J. Applied and Industrial Mathematics. 2017. V. 11. No. 4. P. 600–604. DOI: 10.1134/S1990478917040184.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
7. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83–89.
8. Ахтямов М.А., Каримов А.Р. Диагностирование местоположения трещины в стержне по собственным частотам продольных колебаний // Техническая акустика (электронный журнал). 2010. № 3.
9. Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.
10. Лавровиц Н.И. Собственные частоты колебаний стержней // Омский научный вестник. 2000. С. 106–108.

Статья поступила 26.03.2019 г.

Kuznetsov F.Yu. (2020) AN ELECTROMAGNETIC METHOD FOR FREQUENCY ANALYSIS OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF A BEAM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 112–120

DOI 10.17223/19988621/66/9

Keywords: beam, transverse oscillations, magnetic field, vibrations, vibrodiagnostics, internal friction.

Vibration-based diagnostics of constructions is an obligatory technical procedure in mechanical engineering. In this regard, there is a problem of an adequate theoretical description of vibration processes in various structures with account for end fixity conditions, as well as the creation of experimental facilities for non-contact testing.

The paper presents a theoretical basis and experimental verification results for a method of electromagnetic frequency analysis of rod systems. The essence of the method is the experimental determination of natural oscillation frequencies and their comparison with reference values. The main attention is paid to a theoretical description of transverse vibrations of a cantilever conductive rod in an external magnetic field in order to determine reference frequencies of a defect-free sample.

The presence of the external magnetic field gives rise to the distributed electromagnetic force exerted on the rod. In the case of natural oscillations, the magnetic force is damping, which leads to a change in damping factors of partial oscillations. The electromagnetic effect is selective towards vibrational modes; hence, the damping factors of various partial oscillations of the rod vary to different degrees. This fact allows one to determine an optimal location of the area with acting magnetic field, as well as its width when measuring a given frequency of sample testing.

The proposed method has several advantages: indestructibility of the sample, non-contact measurements, invariability of mechanical properties of the sample during the tests.

Fedor Yu. KUZNETSOV (National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kuznetsov_f@mail.ru

REFERENCES

1. Petrukhin V.V., Petrukhin S.V. (2010) *Osnovy vibrodiagnostiki i sredstva izmereniya vibratsii: uchebnoe posobie*. [Fundamentals of vibration-based diagnostics and vibration measuring instruments: a textbook]. Moscow: Infra-Inzheneriya.
2. Tomilin A.K., Bayzakova G.A. (2012) Upravlenie chastotami kolebaniy uprugikh elektromekhanicheskikh sistem [Control over oscillation frequencies of resilient electromechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(19). pp. 87–92.
3. Tomilin A.K., Bayzakova G.A. (2012) Elektromagnitnyy sposob podstroyki chastoty vibrometra [An electromagnetic method of vibrometer frequency adjusting]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 6/2. pp. 244–247.
4. Tomilin A.K. (2004) *Kolebaniya elektromekhanicheskikh sistem s raspredelennymi parametrami* [Oscillations of electromechanical systems with distributed parameters]. Ust-Kamenogorsk.
5. Tomilin A.K., Kuril'skaya N.F. (2017) Vibrations of a conductive string in a nonstationary magnetic field under presence of two nonlinear factors. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 11(4). pp. 600–604. DOI: 10.1134/S1990478917040184.
6. Babakov I.M. (1968) *Teoriya kolebaniy* [Theory of oscillations]. Moscow: Nauka.
7. Il'gamov M.A., Khakimov A.G. (2009) Diagnosis of damage of a cantilever beam with a notch. *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 6. pp. 430–435.
8. Akhtyamov M.A., Karimov A.R. (2010) Diagnostirovanie mestopolozheniya treshchiny v sterzhne po sobstvennym chastotam prodol'nykh kolebaniy [Diagnosis of a crack location in a rod based on natural frequencies of longitudinal vibrations]. *Elektronnyy zhurnal «Tekhnicheskaya akustika» – Electronic Journal Technical Acoustics*. 3.
9. Gladwell G.M.L. (2008) *Obratnye zadachi teorii kolebaniy* [Inverse problems of the theory of oscillations]. Moscow – Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy
10. Lavrovich N.I. (2000) Sobstvennyye chastoty kolebaniy sterzhney [Natural frequencies of vibrations of rods]. *Omskiy nauchnyy vestnik – Omsk Scientific Bulletin*. pp. 106108.

Received: March 26, 2019

УДК 533.6.011.72; 519.63
DOI 10.17223/19988621/66/10

Д.В. Садин, Б.В. Беляев, В.А. Давидчук

ВЛИЯНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ФОКУСИРОВКУ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ОБЛАКЕ ГАЗОВЗВЕСИ

Исследуется взаимодействие плоского скачка уплотнения в воздухе с цилиндрической областью газовзвеси и влияние релаксационных процессов для различных размеров частиц на преломление и фокусировку ударной волны. Проведено численное моделирование в рамках неравновесного эйлера-рового подхода при описании газовой и дисперсной фаз. Для численного решения используется высокоустойчивая схема второго порядка по пространству и времени. Установлено, что увеличение размеров частиц приводит к уменьшению интенсивности фокусировки и перестройке ударно-волновой конфигурации с внутреннего на внешний режим.

Ключевые слова: ударная волна, фокусировка, релаксационные процессы, газовзвесь.

Движение ударных волн и их взаимодействие с неоднородностями (областями, отличными по плотности и/или температуре от окружающей среды) встречается при решении прикладных задач в технологических процессах импульсного нанесения порошковых покрытий, анализа взаимодействия ударных волн с заградительными дисперсными образованиями, прогнозирования последствий аварий при взрывах на угольных шахтах, изготовления ракетных двигателей на твердом топливе и др. Возникающее при этом течение сопровождается структурно-сложными ударно-волновыми конфигурациями с рефракцией скачка уплотнения на границе раздела сред, фокусировкой ударных волн и развитием неустойчивости на контактной поверхности.

Взаимодействию ударной волны в газах с различными показателями адиабаты, молекулярного веса и температуры посвящены теоретические [1–3] и экспериментальные [4–6] работы. Преломление скачка уплотнения на границах раздела различных конфигураций с учетом релаксационных процессов в газах изучен в [7]. Пространственные эффекты при взаимодействии ударной волны с продольным каналом газа пониженной плотности рассмотрены в [8].

С одной стороны, преломление скачка уплотнения на границе раздела неоднородных по плотности газовзвесей качественно согласуется с аналогичными явлениями в газах повышенной плотности. С другой стороны, наличие частиц в газе может приводит к «аномальным» эффектам, например формированию ударно-волновой структуры на дозвуковом (по несущему газу) режиму течения [9–11]. В работах [12, 13] изучено ускорение облака частиц из плексигласа и бронзы в спутном потоке за ударной волной и показано существенное влияние объемной концентрации частиц. Авторами [14, 15] рассмотрено влияние начальной геометрии и угла поворота облака на дисперсию частиц. В [16] численно в рамках односкоростной и одно-температурной постановки задачи исследовано распространение плоской сильной ударной волны по воздуху, содержащему цилиндрическое облако кварцевой пыли малой концентрации.

Настоящая работа является продолжением исследований структурно-сложных релаксирующих течений газовзвесей и посвящена изучению возможностей численного моделирования влияния релаксационных процессов при изменении размеров дисперсных частиц на фокусировку ударной волны в облаке газовзвеси.

Постановка задачи

Для математического описания ударно-волновых процессов в неравновесных по скоростям и температурам смесях двухкомпонентного газа и твердых монодисперсных частиц выпишем законы сохранения в следующем виде [17, 18]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \mathbf{B}(\nabla_d \mathbf{F}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}), \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = [\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_2, \rho_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2, \rho_1 E_1 + \rho_2 K_2]^T,$$

$$\mathbf{G} = [\rho_{11} \mathbf{v}_1, \rho_{12} \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 E_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 K_2 \mathbf{v}_2]^T,$$

$$\mathbf{F} = [0, 0, 0, p, p, 0, p(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)]^T, \quad \mathbf{H} = [0, 0, 0, -\mathbf{F}_\mu, \mathbf{F}_\mu, Q_T, -Q_T]^T,$$

$$\nabla_d = \text{diag}(\nabla; \nabla; \nabla; \nabla, \nabla, \nabla; \nabla \cdot), \quad \mathbf{B} = \text{diag}[1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, 1, 1],$$

$$\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12}, \quad \rho_i = \rho_i^\circ \alpha_i \quad (i=1, 2), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad E_1 = e_1 + v_1^2/2, \quad K_2 = v_2^2/2.$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 внизу относятся соответственно к параметрам несущей и дисперсной фаз, а вторые индексы – к компонентам газа; ∇ – оператор Гамильтона. Через $\alpha_i, \rho_i^\circ, \rho_i, \mathbf{v}_i, E_i, e_i, p$ обозначены объемная доля, истинная и приведенная плотности, вектор скорости, полная и внутренняя энергии единицы массы i -й фазы, давление газа; $\mathbf{F}_\mu, Q_T$ – соответственно вязкая составляющая силы межфазного взаимодействия и мощность теплообмена между газом и частицами в единице объема; t – время.

Для замыкания системы (1) используем уравнения состояния идеального совершенного газа, аддитивности и термической равновесности его компонентов, а также несжимаемых твердых частиц:

$$p = (\gamma_1(\phi) - 1) \rho_1^\circ e_1, \quad \gamma_1(\phi) = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_{p1}\phi + c_{p2}(1-\phi)}{c_{v1}\phi + c_{v2}(1-\phi)},$$

$$e_1 = c_v T_1, \quad e_2 = c_2 T_2, \quad \{c_2, \rho_2^\circ\} \equiv \text{const},$$

где $c_{v1}, c_{p1}, c_{v2}, c_{p2} \equiv \text{const}$ – удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении для соответствующих газов; c_2 – теплоемкость частиц; T_i – температура i -й фазы; γ_1 – показатель адиабаты смеси газов; $\phi = \rho_{11} / \rho_1$ – массовая доля первого компонента.

Метод решения

Метод решения основан на расщеплении уравнений (1) по физическим процессам [18]:

$$\frac{\mathbf{q}^{(0)} - \mathbf{q}^k}{\tau} + \mathbf{B}[\nabla_d \mathbf{F}]_0^k = \mathbf{H}(\mathbf{q}^{(0)}), \quad \frac{\mathbf{q}^{(1)} - \mathbf{q}^{(0)}}{\tau} + [\nabla_d \mathbf{G}]_w^{(0)} = 0, \quad (2)$$

где τ – шаг по времени; k – индекс временного слоя; (0), (1) – этапы расщепле-

ния; $[\cdot]_0^k$ – оператор центральной разности; $[\cdot]_w^{(0)}$ – TVD-реконструкция потоков путем взвешенной линейной комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций конвективных членов с ограничителями потоков [19].

На предварительном этапе используется адаптивная искусственная вязкость TVD-типа [20] как скалярная добавка к давлению газа [19]. Обозначив в (2) пространственный разностный оператор $L(\mathbf{q})$, используем двухшаговый TVD-метод Рунге-Кутты:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{q}^k + \tau L(\mathbf{q}^k), \quad \mathbf{q}^{k+1} = 0.5(\mathbf{q}^k + \mathbf{q}^{(1)}) + 0.5\tau L(\mathbf{q}^{(1)}). \quad (3)$$

Разностная схема (3) с настраиваемыми диссипативными свойствами – CDP2 (Customizable Dissipative Properties) – имеет второй порядок точности по пространству и времени на гладких решениях [21]. Схема CDP2 является К-устойчивой [22], т.е. условия устойчивости не зависят от интенсивности межфазных взаимодействий и размеров сетки. Число Куранта для всех задач в настоящей работе принято $CFL = 0.4$.

Валидация метода

Характерными чертами рассматриваемого явления являются различия плотности и скорости распространения звука в окружающей среде и в неоднородности, приводящие к преломлению скачка уплотнения, перестройке течения и фокусировки ударной волны. Для подтверждения вычислительных свойств схемы CDP2 рассмотрим широко применяемый тестовый пример взаимодействия ударной волны в воздухе с пузырем газа R22 [4].

Плоская ударная волна с числом Маха 1.22 распространяется в канале с поперечным размером 8.9 см, заполненный воздухом с показателем адиабаты $\gamma_1 = 1.4$ плотностью $\rho_{10} = 1.225 \text{ кг/м}^3$. Через некоторое время ударная волна встречает цилиндрический пузырь диаметром 5 см газа R22 (показатель адиабаты $\gamma_2 = 1.249$, газовая постоянная $R_2 = 91 \text{ Дж/(кг·К)}$, плотностью $\rho_{20} = 3.863 \text{ кг/м}^3$). Давление в обоих газах одинаковое – $p_{10} = p_{20} = 101325 \text{ Па}$. Задача решалась на равномерной сетке до оси симметрии с шагом 600 ячеек на радиус пузыря. Краевые условия: отражения – на оси симметрии и стенках; на входе – параметры за падающей ударной волной; выходные условия – экстраполяция параметров.

Шлирен-изображения градиента плотности газа в последовательные моменты времени представлены на рис. 1. Момент времени отсчитывается от прихода падающей ударной волны на левый край пузыря. Численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [4]. На приведенных расчетных изображениях воспроизводятся тонкие детали ударно-волновой картины прохождения скачка уплотнения, его отражения от границы раздела сред, преломления, дифракции и фокусировки поперечных волн. Малая численная диссипация схемы позволяет выявить развитие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца вдоль контактной границы. Сравнение с расчетами других авторов [23, 24] подтверждает работоспособность (малую численную вязкость, монотонность и точность) схемы CDP2 для данного класса задач.

Рассмотрим также тестовую одномерную задачу фокусировки ударной волны в слое мелкодисперсной смеси: преломление ударной волны на границе раздела сред и отражения прошедшей в газозвесь волны от стенки. В начальный момент

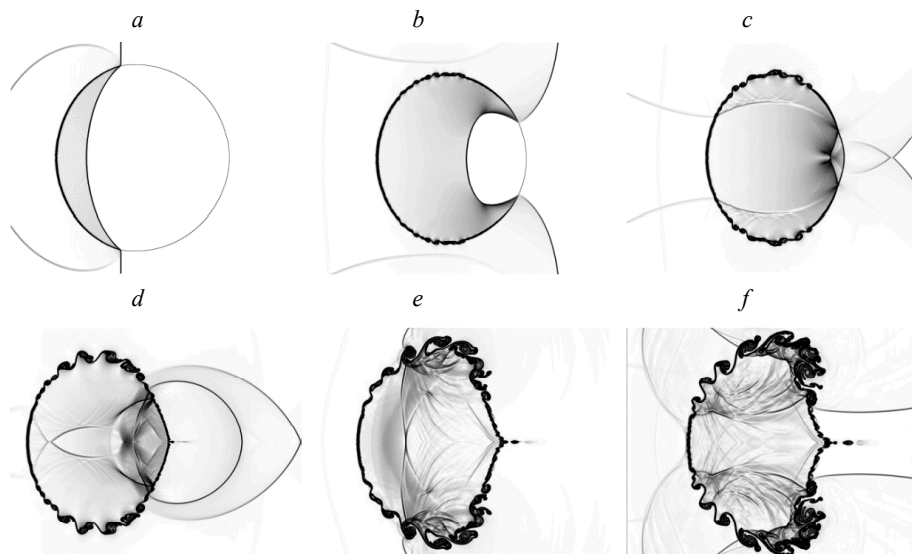


Рис. 1. Шлирен-изображения градиента плотности газа в последовательные моменты времени: *a* – 111.2; *b* – 202.2; *c* – 249.2; *d* – 307.2; *e* – 401.2; *f* – 472.2 μs

Fig. 1. Schlieren-images of the gas density gradient at successive time instants:

(*a*) 111.2, (*b*) 202.2, (*c*) 249.2, (*d*) 307.2, (*e*) 401.2, and (*f*) 472.2 μs

времени ударная волна с числом Маха 3 движется слева направо по воздуху с давлением $p_0 = 101325$ Па и температурой $T_0 = 293$ К. На расстоянии 0.4 м расположен неподвижный слой смеси воздуха при указанных параметрах со взвешенными сферическими частицами диаметром $d = 0.1$ мкм, плотностью $\rho_2^\circ = 2650$ кг/м³ и объемной долей $\alpha_2 = 0.0015$. Начало координат $x = 0$ совпадает с левой границей слоя, а справа в точке $x = 1$ м находится стенка. Задача для ограниченного интервала времени $t > 0$ имеет точное предельное равновесное автомодельное решение [18], к которому сходится решение (1) при уменьшении диаметра частиц $d \rightarrow 0$.

На рис. 2 для трех характерных моментов времени приведены распределения плотности смеси, давления и скорости, отнесенные к соответствующим начальным величинам за ударной волной (ρ_1, p_1) и скорости звука в газе (a_0) перед ней. Здесь пунктирные кривые – численные решения на сетке с шагом $h = 1$ мм, а сплошные – точные автомодельные решения (рис. 2, *a–f*). После взаимодействия падающей ударной волны с левой границей газовой смеси с реализуется распад разрыва с прошедшим в слой s_1 и отраженным s_2 скачками уплотнения (рис. 2, *a–c*). Точные значения давления и плотности в сжатом слое газовой смеси составляют $p^{(1)} / p_1 = 1.70269$ и $\rho^{(1)} / \rho_1 = 10.8511$. После прохождения слоя смеси газа с частицами происходит отражение ударной волны от стенки s_3 и ее движение в обратном направлении навстречу границе разрыва сред c (рис. 2, *d–f*). При этом существенно повышается давление $p^{(3)} / p_1 = 18.2186$ и плотность смеси $\rho^{(3)} / \rho_1 = 72.2291$. Автомодельные значения скоростей D_1, D_2, D_3 и D_c распространения разрывов s_1, s_2, s_3 и c , рассчитанные по соотношениям из [18], приведены в табл. 1.

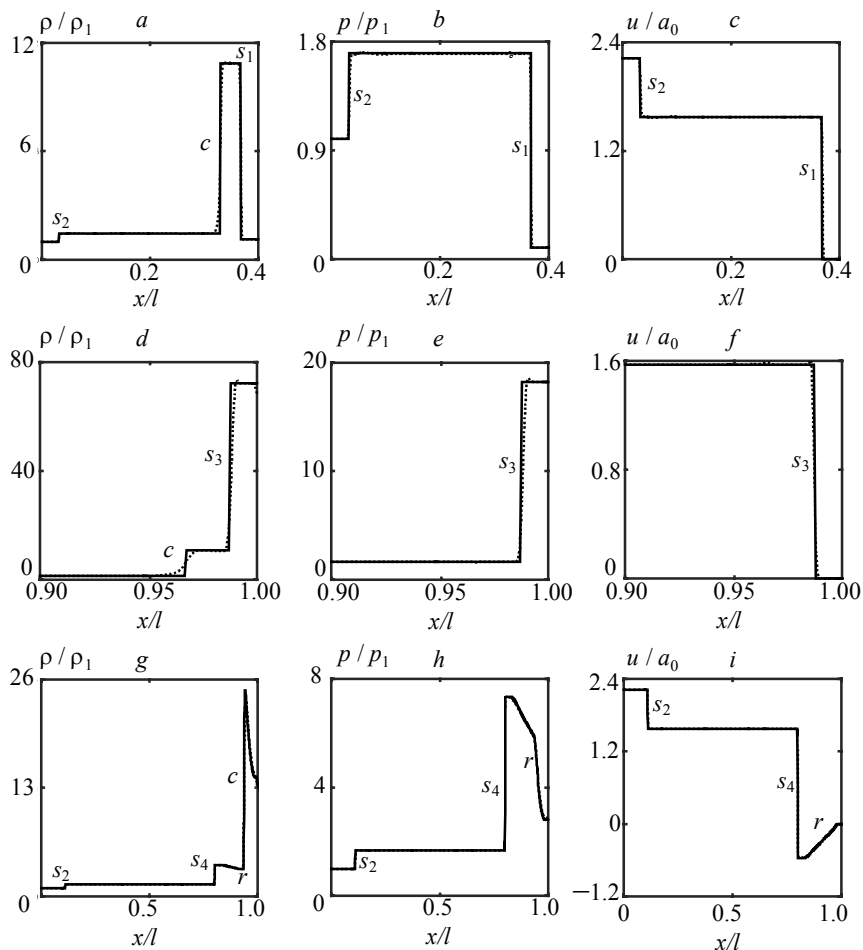


Рис. 2. Распределения относительных значений плотности смеси, давления и скорости в последовательные моменты времени: (a-c) – 1; (d-f) – 2.18; (g-i) – 2.5 мкс. Пунктирные кривые – расчет, а сплошные – точные автомодельные решения (a-f), расчет на измельченной сетке (g-i)

Fig 2. Distributions of relative values of the mixture density, pressure, and velocity at successive time instants: (a-c) 1, (d-f) 2.18, and (g-i) 2.5 μ s. The dashed lines are the calculated results; the solid lines are the exact self-similar solutions (a-f), calculations on a refined grid (g-i)

Таблица 1

Автомодельные значения скоростей распространения разрывов, м/с

D_1	D_2	D_3	D_c
601.559	51.5927	-95.4303	539.793

При взаимодействии отраженной от стенки ударной волны с контактной границей c возникает очередной распад разрыва со скачком уплотнения s_4 и волной разрежения r . На рис. 2, g-i показаны профили параметров течения в поздний момент времени после ряда отражений волны разрежения от стенки и контактного

разрыва. Ввиду отсутствия автомодельного решения для этого момента времени для сравнения выбран расчет на измельченной сетке $h = 0.5$ мм (рис. 2, $g-i$: сплошные кривые).

Численные результаты хорошо согласуются с точными решениями. Схема CDP2 демонстрирует возможности при разрешении деталей преломления ударной волны, ее фокусировки с возникновением пиковых профилей распределения параметров.

Результаты расчета

Исследуется двумерная задача распространения плоской ударной волны с числом Маха 3 в воздухе и ее взаимодействия с цилиндрической областью газозвеси радиусом $r = 1$ м [16]. Начальные условия соответствуют приведенной выше одномерной тестовой задаче. Исходное положение ударной волны, отсчитываемое от левой границы облака газозвеси, $x_0 = -1$ м. Расчеты выполнены на равномерной сетке с шагом $h = 1/600$ м. Граничные условия заданы на оси симметрии – отражения; слева (входные) – параметры за падающей ударной волной; выходные условия – экстраполяция параметров.

На рис. 3 приведены ширен-изображения градиента плотности смеси в характерные моменты времени для различных размеров частиц от 0.1, 10, 50, 100 мкм. Пунктирной линией показано начальное положение границы газозвеси. При взаимодействии исходного скачка уплотнения s_0 с границей облака газозвеси s_0 возникает распад разрыва с прошедшей s_1 , отраженной s_2 ударными волнами и комбинированным разрывом (скачком пористости) c_1 между ними. Течение для достаточно мелких частиц $d = 0.1$ мкм является практически равновесным по скоростям и температурам фаз (рис. 3, a и b). Скорость звука и ударной волны s_1 в смеси меньше, чем в окружающем воздухе s_0 . Это приводит к формированию известной ударно-волновой структуры (двойное преломление фон Неймана) с тройной точкой tr и системой сопряженных волн $s_0-s_1-s_3-s_4$. Фронт огибающей волны s_0 обгоняет скачок уплотнения внутри облака s_1 . Поперечные волны и тройная точка движутся к оси симметрии и в некоторый момент времени происходит отражение от оси – фокусировка. При этом может значительно повышаться давление газа и плотность смеси. Вследствие несовпадения градиентов давления и плотности развивается неустойчивость Рихтмайера – Мешкова и вихреобразование v (рис. 3, a и b), которое в свою очередь приводит к энтропийным (малым) возмущениям в окружающем газе.

С увеличением размеров частиц зоны релаксации за проходящей в облаке газозвеси ударной волной и вторичными волнами становятся конечными. При этом для достаточно малых частиц $d \leq 10$ мкм ударная волна вырождается в волну сжатия с фронтом малой интенсивности, а тройная точка tr размывается до некоторой области сопряжения волн сжатия (рис. 3, c и d). При возрастании диаметра частиц скорость и интенсивность скачка s_1 уменьшается, но остается конечной (рис. 3, e и f). При $d < 50$ мкм фронт прошедшей s_1 ударной волны отстает от поперечного ударного разрыва s_3 и точки сопряжения i , поэтому фокусировка реализуется внутри облака газозвеси в окрестности ее границы (рис. 3, $a-f$). Напротив, для крупных частиц $d = 100$ мкм скачок s_3 приходит на границу облака на оси симметрии раньше, чем огибающая s_0 , поперечная s_3 волна и точка их сопряжения i (рис. 3, g и h). При этом режим фокусировки меняется с внутреннего на внешний.

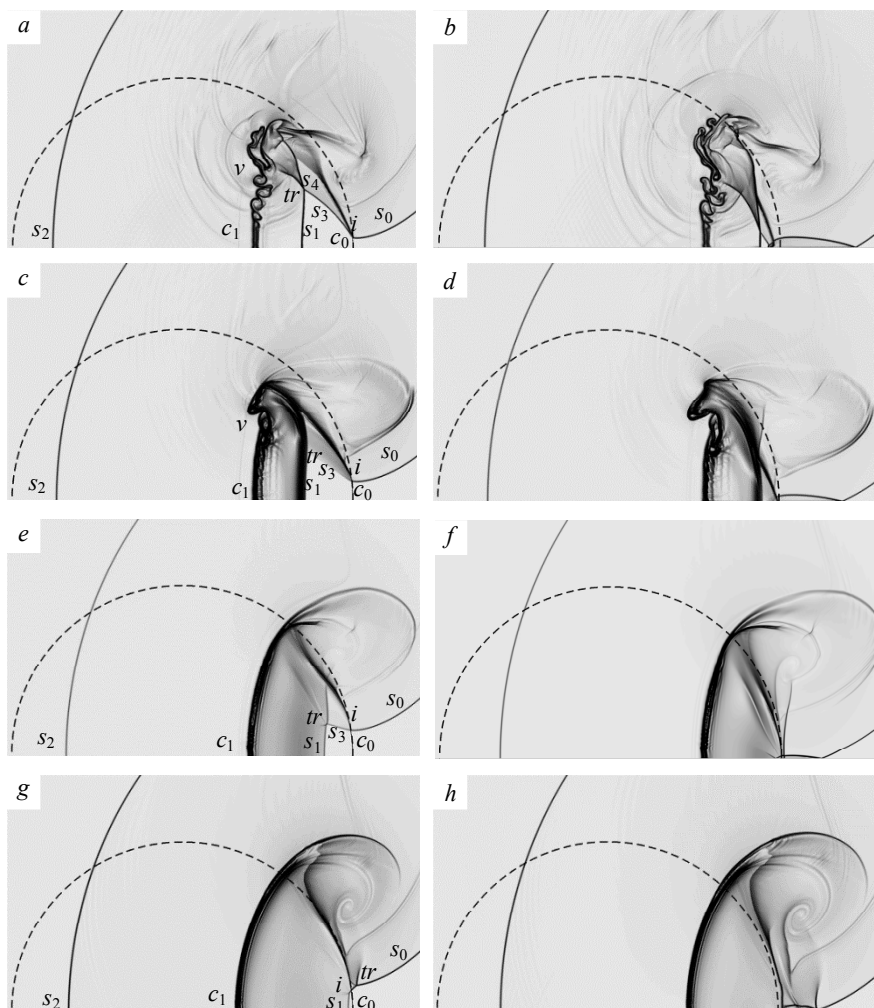


Рис. 3. Шлирен-изображения градиента плотности смеси в характерные моменты времени: левая колонка – 3.8; справа – 4.1 мс. Размеры частиц: *a, b* – 0.1; *c, d* – 10; *e, f* – 50; *g, h* – 100 мкм. Пунктирной линией показано начальное положение границы газозвеси

Fig 3. Schlieren-images of the mixture density gradient at characteristic time instants: left column corresponds to 3.8 μs ; right column, 4.1 μs . Size of particles: (*a*), (*b*) 0.1, (*c*), (*d*) 10, (*e*), (*f*) 50, and (*g*), (*h*) 100 μm . A dashed line indicates an initial position of the gas suspension boundary

Для подтверждения качественных закономерностей фокусировки ударной волны в облаке газозвеси проведены расчеты продольной относительной координаты x_f и безразмерные давления p_{f1} и p_{fr} фокусировки, отнесенные соответственно к давлению за исходным скачком уплотнения p_1 и давлению при прямом отражении ударной волны от стенки p_r (тестовая одномерная задача фокусировки, приведенная выше). Параметры фокусировки ударной волны рассчитаны

вались следующим образом. На каждом временном шаге определялось наибольшее давление газа и его координата на оси симметрии. Затем из полученных дискретных значений рассчитывалось максимальное значение давления и соответствующая ему координата фокусировки:

$$1) p_{\max} = \max_{\forall x} p, x_{\max} = \arg \max_{\forall x} (p);$$

$$2) p_f = \max_{\forall t} p_{\max}, t_{\max} = \arg \max_{\forall t} (p_{\max}), x_f = (x_{\max}(t_{\max}) - x_c) / r.$$

Здесь x_c – координата центра цилиндрического облака газозвеси.

С увеличением размеров частиц точка фокусировки смещается к правой границе облака газозвеси, а при $d = 100$ мкм находится за его пределами (внешний режим фокусировки). При этом давление фокусировки уменьшается. Максимальное его значение превышает более чем в 8 раз давление за фронтом падающей ударной волны в окружающем воздухе и составляет менее 50 % от давления прямого отражения скачка уплотнения в газозвеси от стенки.

Результаты расчетов сведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Безразмерные параметры фокусировки ударной волны

	$d = 0.1$ мкм	$d = 10$ мкм	$d = 50$ мкм	$d = 100$ мкм
x_f	0.913	0.955	0.960	1.33
p_f	8.51	7.00	2.63	2.53
p_{fr}	0.467	0.385	0.144	0.139

Выводы

В результате численного моделирования изучены особенности взаимодействия плоской ударной волны с цилиндрическим облаком газозвеси с учетом релаксационных процессов. Установлено, что размеры дисперсных частиц оказывают существенное влияние на преломление скачка уплотнения, фокусировку поперечных ударных волн и развитие неустойчивости на границе раздела сред. Увеличение диаметров частиц при одинаковой их начальной концентрации приводит к качественным и количественным изменениям: уменьшению интенсивности фокусировки и перестройки ударно-волновой конфигурации с внутреннего на внешний режим фокусировки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F.* Shock waves at a fast-slow gas interface // *Journal of Fluid Mechanics*. 1978. V. 86. No. 1. P. 15–32. DOI: 10.1017/S0022112078000981.
2. *Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F.* Shock waves at a slow-fast gas interface // *Journal of Fluid Mechanics*. 1978. V. 89. No. 1. P. 79–95. DOI: 10.1017/S0022112078002475.
3. *Niederhaus J.H.J., Greenough J.A., Oakley J.G., Ranjan D., Anderson M.H., Bonazza R.A.* Computational parameter study for the three-dimensional shock–bubble interaction // *J. Fluid Mechanics*. 2008. V. 594. P. 85–124. DOI: 10.1017/S0022112007008749.
4. *Haas J.F., Sturtevant B.* Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical inhomogeneities // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. V. 181. P. 41–76. DOI: 10.1017/S0022112087002003
5. *Wang M., Si T. & Luo X.* Generation of polygonal gas interfaces by soap film for Richtmyer–Meshkov instability study // *Experiments in Fluids*. 2013. V. 54. P. 1–9. DOI: 10.1007/s00348-012-1427-9.

6. Wang M., Si T. & Luo X. Experimental study on the interaction of planar shock wave with polygonal helium cylinders // *Shock Waves*. 2015. V. 25. No. 4. P. 347–355. DOI: 10.1007/s00193-014-0528-1
7. Войнович П.А., Жмакин А.И., Фурсенко А.А. Моделирование взаимодействия ударных волн в газах с пространственными неоднородностями параметров // *ЖТФ*. 1988. Т. 58. № 7. С. 1259–1267.
8. Георгиевский П.Ю., Левин В.А., Сутырин О.Г. Пространственные эффекты при взаимодействии ударной волны с продольным каналом газа пониженной плотности // *Письма в ЖТФ*. 2018. Т. 44. № 20. С. 5–13. DOI: 10.21883/PJTF.2018.20.46887.17402.
9. Садин Д.В. Поведение нестационарной струи при истечении смеси газа высокого давления и дисперсной среды из цилиндрического канала в атмосферу // *ПМТФ*. 1999. Т. 40. № 1. С. 151–157.
10. Садин Д.В., Гузенков В.О., Любарский С.Д. Численное исследование структуры нестационарной двухфазной тонкодисперсной струи // *ПМТФ*. 2005. Т. 46. № 2. С. 91–97. DOI: 10.1007/PL00021900.
11. Садин Д.В., Любарский С.Д., Гравченко Ю.А. Особенности недорасширенной импульсной ударной газодисперсной струи с высокой концентрацией частиц // *ЖТФ*. 2017. Т. 87. № 1. С. 22–26. DOI: 10.21883/JTF.2017.01.1809.
12. Киселев В.П., Киселев С.П., Фомин В.М. О взаимодействии ударной волны с облаком частиц конечных размеров // *ПМТФ*. 1994. № 2. С. 26–37.
13. Kiselev V.P., Kiselev S.P., Vorozhtsov E.V. Interaction of a shock wave with a particle cloud of finite size // *Shock Waves*. 2006. V. 16. No. 1. P. 53–64. DOI: 10.1007/s00193-006-0043-0.
14. Jacobs G.B., Don W.S., Dittmann T. High-order resolution Eulerian–Lagrangian simulations of particle dispersion in the accelerated flow behind a moving shock // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2012. V. 2. No. 1–4. P. 37–50. DOI: 10.1007/s00162-010-0214-6.
15. Дэвис С.Л., Диттман Т.Б., Якобс Дж.Б., Дон В.С. Дисперсия облака частиц в ударной волне. Влияние формы, угла поворота и геометрических параметров облака на динамику потока и дисперсию // *ПМТФ*. 2013. Т. 54. № 6. С. 45–59.
16. Георгиевский П.Ю., Левин В.А., Сутырин О.Г. Фокусировка ударной волны при взаимодействии ударной волны с цилиндрическим облаком пыли // *Письма в ЖТФ*. 2016. Т. 42, № 18. С. 17–24.
17. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1987.
18. Садин Д.В. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // *ЖВМиМФ*. 2016. Т. 56. № 12. С. 2098–2109. DOI: 10.1134/S0965542516120137.
19. Садин Д.В. Применение схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами к расчету течений газа с развитием неустойчивости на контактной границе // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2018. Т. 18. № 1. С. 153–157. DOI: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1060-1065.
20. Christensen R.B. Godunov Methods on a Staggered Mesh – An Improved Artificial Viscosity. Preprint. UCRL-JC-105269. Livermore, California: Lawrence Livermore National Laboratory, 1990. 11 p.
21. Садин Д.В. Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газозвеси // *Вестник ЮУрГУ ММП*. 2019. Т. 12. № 2. С. 112–122. DOI: 10.14529/mmp190209.
22. Садин Д.В. Проблема жесткости при моделировании волновых течений гетерогенных сред с трехтемпературной схемой межфазного тепло- и массообмена // *ПМТФ*. 2002. Т. 43. № 2. С. 136–141. DOI: 10.1023/A:1014714012032.
23. Niederhaus J. A Computation parameter study for three-dimensional shock-bubble interactions. Ph. D. thesis. Madison, 2007. 283 p.
24. Wang B., Xiang G., Hu X. An incremental-stencil WENO reconstruction for simulation of compressible two-phase flows // *Int. J. Multiphase Flow*. 2018. 104. P. 20–31. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.03.013.

Статья поступила 22.09.2019 г.

Sadin D.V., Belyaev B.V., Davidchuk V.A. (2020) EFFECT OF RELAXATION PROCESSES ON THE SHOCK WAVE FOCUSING IN A GAS SUSPENSION CLOUD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 121–131

DOI 10.17223/19988621/66/10

Keywords: shock wave, focusing, relaxation processes, gas suspension.

In this paper, the interaction of a plane shock wave in air with a cylindrical region of a gas suspension and the effect of relaxation processes for various particle sizes on the refraction and focusing of the shock wave are studied. In the course of numerical modeling, the Euler approach is used to describe non-equilibrium motion of the gas and dispersed phases. A second order accuracy method in space and time is used. Verification of the method through test problems by comparing with exact solutions and calculations of other authors confirms a capability of detecting shock wave refraction effects and wave focusing with the appearance of peak profiles in a distribution of parameters. With an increase in particle sizes, the relaxation zones behind the shock wave and secondary waves, which propagate through a gas suspension cloud, have a significant impact on the shock wave refraction, focusing of transverse shock waves, and interface instability evolution. A focus point is shifted towards suspension cloud boundaries, while for sufficiently large particles, it moves beyond the boundaries (external focus mode). Thus, the reflection pressure of transverse waves and intensity of the instability at the interface reduce.

Dmitriy V. SADIN (Doctor of Technical Sciences, Mozhaysky Military Space Academy, Saint-Petersburg, Russian Federation). E-mail: sadin@yandex.ru

Boris V. BELYAEV (Candidate of Technical Sciences, Mozhaysky Military Space Academy, Saint-Petersburg, Russian Federation). E-mail: belyaev.boris.spb@gmail.com

Viktor A. DAVIDCHUK (Mozhaysky Military Space Academy, Saint-Petersburg, Russian Federation). E-mail: david_lxii@mail.ru

REFERENCES

1. Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F. (1978) Shock waves at a fast-slow gas interface. *Journal of Fluid Mechanics*. 86(1). pp. 15–32. DOI: 10.1017/S0022112078000981.
2. Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F. (1978) Shock waves at a slow-fast gas interface. *Journal of Fluid Mechanics*. 89(1). pp. 79–95. DOI: 10.1017/S0022112078002475.
3. Niederhaus J.H.J., Greenough J.A., Oakley J.G., Ranjan D., Anderson M.H., Bonazza R.A. (2008) Computational parameter study for the three-dimensional shock–bubble interaction. *Journal of Fluid Mechanics*. 594. pp. 85–124. DOI: 10.1017/S0022112007008749.
4. Haas J.F., Sturtevant B. (1987) Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical inhomogeneities. *Journal of Fluid Mechanics*. 181. pp. 41–76. DOI: 10.1017/S0022112087002003.
5. Wang M., Si T., Luo X. (2013) Generation of polygonal gas interfaces by soap film for Richtmyer-Meshkov instability study. *Experiments in Fluids*. 54. pp. 1–9. DOI: 10.1007/s00348-012-1427-9.
6. Wang M., Si T., Luo X. (2015) Experimental study on the interaction of planar shock wave with polygonal helium cylinders. *Shock Waves*. 25(4). pp. 347–355. DOI: 10.1007/s00193-014-0528-1.
7. Voinovich P.A., Zhmakin A.I., Fursenko A.A. (1988) Numerical simulation of the interaction of shock waves in spatially inhomogeneous gases. *Soviet Physics: Technical Physics*. 33. pp. 748–753.
8. Georgievskiy P.Yu., Levin V.A., Sutyurin O.G. (2018) Spatial effects of interaction of a shock with a lateral low-density gas channel. *Technical Physics Letters*. 44(10). pp. 905–908. DOI: 10.1134/S1063785018100231.

9. Sadin D.V. (1999) Behavior of the unsteady jet of a mixture of a pressurized gas and dispersed particles discharged from a circular duct into the atmosphere. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 40(1). pp. 130–135.
10. Sadin D.V., Guzenkov V.O., Lyubarskii S.D. (2005) Numerical study of the structure of a finely disperse unsteady two-phase jet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 46(2). pp. 224–229. DOI: 10.1007/PL00021900.
11. Sadin D.V., Lyubarskii S.D., Gravchenko Yu.A. (2017) Features of an underexpanded pulsed impact gas-dispersed jet with a high particle concentration. *Technical Physics*. 62(1). pp. 18–23. DOI: 10.1134/S1063784217010194.
12. Kiselev V.P., Kiselev S.P., Fomin V.M. (1994) Interaction of a shock wave with a cloud of particles of finite dimensions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 35(2). pp. 183–192.
13. Kiselev V.P., Kiselev S.P., Vorozhtsov E.V. (2006) Interaction of a shock wave with a particle cloud of finite size. *Shock Waves*. 16(1). pp. 53–64. DOI: 10.1007/s00193-006-0043-0.
14. Jacobs G.B., Don W.S., Dittmann T. (2012) High-order resolution Eulerian–Lagrangian simulations of particle dispersion in the accelerated flow behind a moving shock. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2(1–4). pp. 37–50. DOI: 10.1007/s00162-010-0214-6.
15. Davis S.L., Dittmann T.B., Jacobs G.B., Don W.S. (2013) Dispersion of a cloud of particles by a moving shock: Effects of the shape, angle of rotation, and aspect ratio. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 54(6). pp. 900–912. DOI: 10.1134/S0021894413060059.
16. Georgievskiy P.Yu., Levin V.A., Sutyurin O.G. (2016) Shock focusing upon interaction of a shock with a cylindrical dust cloud. *Technical Physics Letters*. 42(9). pp. 936–939. DOI: 10.1134/S1063785016090182.
17. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Part 1, 2. Moscow: Nauka.
18. Sadin D.V. (2016) TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 56(12). pp. 2068–2078. DOI: 10.1134/S0965542516120137.
19. Sadin D.V. (2018) Primenenie skhemy s nastraivaemymi dissipativnymi svoystvami k raschetu techeniy gaza s razvitiem neustoychivosti na kontaktnoy granitse [Application of a scheme with customizable dissipative properties for a gas flow calculation with interface instability evolution]. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki – Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 18(1). pp. 153–157. DOI: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-153-157.
20. Christensen R.B. (1990) *Godunov Methods on a Staggered Mesh – An Improved Artificial Viscosity*. Preprint. UCRL-JC-105269. Livermore, California: Lawrence Livermore National Laboratory.
21. Sadin D.V. (2019) Modifikatsiya metoda krupnykh chastits do skhemy vtorogo poryadka tochnosti po prostranstvu i vremeni dlya udarno-volnovykh techeniy gazozvesi [A modification of the large-particle method to the scheme having the second order of accuracy in space and time for shockwave flows in a gas suspension]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye – Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 12(2). pp. 112–122. DOI: 10.14529/mmp190209.
22. Sadin D.V. (2002) Stiffness problem in modeling wave flows of heterogeneous media with a three-temperature scheme of interphase heat and mass transfer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 43(2). pp. 286–290. DOI: 10.1023/A:1014714012032.
23. Niederhaus J. (2007) *A Computation parameter study for three-dimensional shock-bubble interactions*. Ph. D. thesis. Madison.
24. Wang B., Xiang G., Hu X. (2018) An incremental-stencil WENO reconstruction for simulation of compressible two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*. 104. pp. 20–31. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.03.013.

Received: September 22, 2019

УДК 532.5: 532.13

DOI 10.17223/19988621/66/11

М.А. Сумбатян, Я.А. Бердник, А.А. Бондарчук

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ¹

Предлагаемый итерационный метод состоит в решении на каждом шаге интегрального уравнения относительно функции вязкого трения на пластинке. Вид интегрального уравнения на каждой итерации определяется с помощью аналитических преобразований. Сравнение с прямым численным методом в среде ANSYS CFX показывает, что итерационный процесс сходится для любых чисел Рейнольдса и несколько первых итераций обеспечивают высокую точность.

Ключевые слова: *уравнения Навье – Стокса, итерационный метод, вязкая жидкость, тонкая пластинка, интегральные уравнения.*

В данной статье рассматривается задача обтекания однородным стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости тонкой прямолинейной пластинки, расположенной вдоль набегающего потока. В 1904 году Людвиг Прандтль предложил теорию пограничного слоя, которая заложила основу для решения задач об обтекании объектов различных форм потоком вязкой жидкости. Ричард Блазиус разработал математическую модель для вычисления силы сопротивления с помощью теории пограничного слоя. Первое решение задачи обтекания плоской пластинки вязкой жидкостью при нулевом угле атаки было получено им в 1908 году в контексте теории пограничного слоя [1, 2]. В первой половине двадцатого века интерес к данной проблеме проявили многие известные ученые в области гидромеханики, в частности Ричард фон Мизес, Уолтер Толлмин, Герман Шлихтинг, Сидни Голдштейн, Теодор фон Карман [3]. Проведённые в 1940-е годы эксперименты показали небольшие расхождения между экспериментальными данными и решением Блазиуса для больших чисел Рейнольдса и значительные расхождения для малых и средних чисел Рейнольдса. За последние несколько десятилетий интерес к задаче возрос вследствие развития компьютерных программ и численных методов [4]. Исследователи используют параллельные вычислительные платформы [5] и современные программы для расчета задач методом конечных элементов, такие, как ANSYS [6], ABAQUS и другие.

Несмотря на то, что исследованием этой задачи занимаются с начала двадцатого века, она всё ещё не решена полностью. Необходимо отметить, что в настоящее время нет общих теорий для всех чисел Рейнольдса. Между тем, эта задача имеет широкое практическое применение при конструировании крыльев самолёта или лопастей ветрогенераторов. По этим причинам продолжается развитие эффективных подходов к данной задаче с использованием как полуаналитических, так и вычислительных методов, на основе решения уравнений Навье – Сто-

¹ Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ № 9.5794.2017/БЧ.

кса [7, 8]. Отличительной особенностью данной работы является новый подход к решению задачи, который позволяет построить эффективное решение в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса. В настоящее время решение Блазиуса считается классическим для больших чисел Рейнольдса, поэтому мы сравниваем с ним как результаты, полученные с помощью предложенного итерационного метода, так и результаты в среде ANSYS CFX. Для малых чисел Рейнольдса полученные на нескольких итерациях решения сравниваются с решением Харрисона – Файлона [9].

1. Постановка задачи и основные гипотезы

Исследуется обтекание тонкой прямолинейной пластинки длиной l безграничным однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Задача исследуется в двумерном приближении. Скорость U_0 набегающего потока постоянна. Основной искомой величиной является полная сила трения, действующая на пластинку. В данной работе предлагается подход, основанный на последовательных приближениях по возмущениям скорости.

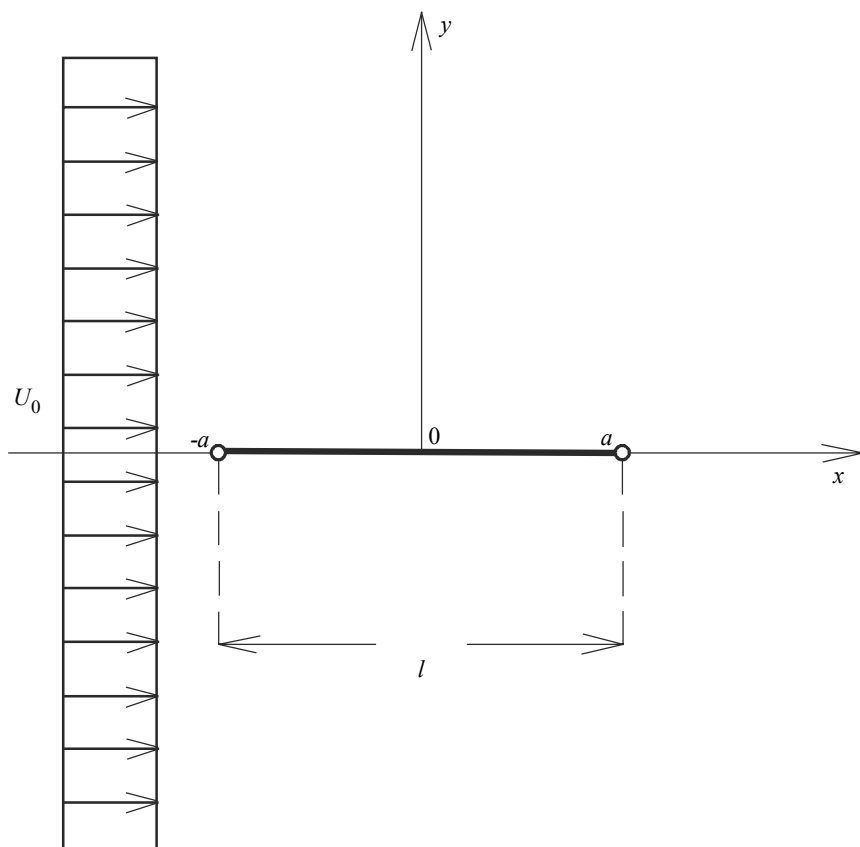


Рис. 1. Обтекание плоской пластинки длиной $l = 2a$ набегающим потоком вязкой жидкости со скоростью U_0
Fig. 1. Oncoming flow of a viscous fluid around a flat plate with a length of $l = 2a$ at velocity U_0

Течение жидкости рассматривается в декартовой системе координат Oxy , где ось Oy направлена по нормали к поверхности пластинки, ось Ox – вдоль набегающего потока (рис. 1). Пластика занимает интервал $(-a, a)$ на оси Ox , где $a = l/2$. В силу симметрии течения рассматривается только верхняя полуплоскость. Течение жидкости полагается стационарным и описывается уравнением неразрывности и уравнениями Навье – Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \Delta v_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \nu \Delta v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ – массовая плотность жидкости; ν – коэффициент кинематической вязкости; p – гидродинамическое давление; v_x и v_y – продольная и поперечная компоненты вектора скорости соответственно.

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

1) условия прилипания жидкости на поверхности пластинки:

$$v_x = v_y = 0 \text{ при } y = 0, |x| \leq a; \quad (2)$$

2) условия симметрии и отсутствия трения вне пластинки:

$$v_y = 0, \partial v_x / \partial y \text{ при } y = 0, |x| > a; \quad (3)$$

3) условия на бесконечности:

$$\text{при } y \rightarrow +\infty, x \in (-\infty, +\infty): v_y \rightarrow 0, v_x \rightarrow U_0. \quad (4)$$

2. Построение основного алгоритма. Первая итерация

Продемонстрируем предлагаемый итерационный метод последовательных приближений для первой итерации. Представим продольную и поперечную компоненты скорости в виде суммы скорости основного потока и скорости малых на его фоне искомых возмущений со штрихами:

$$\begin{cases} v_x(x, y) = U(x, y) + v'_x(x, y) \\ v_y(x, y) = V(x, y) + v'_y(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

При этом количество штрихов над функцией будет соответствовать номеру итерации.

При введении функции тока $\psi = \psi(x, y)$ следующим образом:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

выражение для функции тока представляется аналогично разложению скоростей (5) на первой итерации: $\psi(x, y) = \Psi(y) + \psi'(x, y)$, $\Psi(y) = U_0 y$. После исключения давления из системы (1) и с учётом приведённых выше представлений (5) и (6) получившееся уравнение линеаризуется по малым возмущениям скоростей. Вид полученного линейного дифференциального уравнения в частных производных одинаков для всех итераций:

$$-U \Delta V + U \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - \Delta V \frac{\partial \psi'}{\partial y} + V \Delta U + V \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y} - \Delta U \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \nu \Delta^2 \Psi - \nu \Delta^2 \psi' = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим первое приближение решения задачи. На нулевом шаге предполагается, что вектор скорости совпадает с $\{U_0, 0\}$. Таким образом, на первом шаге: $U(x, y) = U_0$, $V(x, y) = 0$. Заметим, что при построении первой итерации возмущение скорости вблизи пластинки, которое в силу условия прилипания равно $\{-U_0, 0\}$, не является величиной малой по сравнению со скоростью основного потока U_0 . Однако в интегральной метрике по достаточно большой области потока, охватывающей пластинку, возмущение будет малым по сравнению с аналогичной интегральной величиной от скорости U_0 . Ниже будет показано, что уже для первой итерации полная скорость имеет поведение, удовлетворяющее всем требуемым условиям.

К дифференциальному уравнению (7), имеющему упрощённый вид с учётом допущенных предположений, применяется преобразование Фурье по переменной x . Результатом является однородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) с постоянными коэффициентами, решаемое аналитически:

$$v \frac{d^4 \tilde{\psi}'(\alpha, y)}{dy^4} + (U_0 i \alpha - 2v \alpha^2) \frac{d^2 \tilde{\psi}'(\alpha, y)}{dy^2} + (v \alpha^4 - U_0 i \alpha^3) \tilde{\psi}'(\alpha, y) = 0, \quad (8)$$

где $\tilde{\psi}'(\alpha, y)$ – трансформанта Фурье функции $\psi'(x, y)$; α – параметр преобразования Фурье.

Решение ОДУ четвёртого порядка (8), удовлетворяющее граничному условию (4), содержит две произвольные постоянные:

$$\tilde{\psi}'(\alpha, y) = C_1 e^{-|\alpha|y} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{v\alpha^2 - U_0 i \alpha}{v}} y}. \quad (9)$$

Из условий (2), (3), в частности, следует, что ось Ox можно принять за нулевую линию тока, тогда $C_1 = -C_2$, следовательно

$$\tilde{\psi}'(\alpha, y) = C_2 \left(e^{-|\alpha|y} - e^{-\sqrt{\frac{v\alpha^2 - U_0 i \alpha}{v}} y} \right). \quad (10)$$

Второе граничное условие свяжем с вязким трением, если последнее временно считать известной функцией:

$$\mu \frac{\partial v'_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ \tau'(x), & |x| \leq a, \end{cases} \quad (11)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости, $\tau'(x)$ – функция вязкого трения на пластинке. Условие (11) определяет коэффициент в (10), именно: $C_2 = v \tilde{\tau}'(\alpha) / (i \mu \alpha U_0)$. В итоге первое граничное условие (2) для продольной компоненты возмущённой скорости дает

$$v'_x = -U_0 \sim \frac{\partial \psi'}{\partial y} = -U_0 \quad (y=0, |x| \leq a),$$

что после применения обращения преобразования Фурье приводит к граничному интегральному уравнению относительно функции $\tau'(\xi)$ вида

$$\frac{v}{2\pi i \mu U_0} \int_{-a}^a \tau'(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\alpha| - \sqrt{\alpha^2 - \frac{i \alpha U_0}{v}}}{\alpha} \cdot e^{i \alpha (\xi - x)} d\alpha = -U_0, \quad |x| \leq a. \quad (12)$$

Похожее интегральное уравнение выведено в [10].

Следует отметить, что в ходе анализа свойств ядра интегрального уравнения (12) были выявлены следующие его свойства:

1) ядро не является ни чётным, ни нечётным, то есть решение интегрального уравнения (12) не обладает никаким видом симметрии;

2) ядро имеет стандартную логарифмическую особенность при $x \rightarrow \xi$. Таким образом, решение на концах пластинки имеет корневую особенность: при приближении к краям пластинки касательные напряжения неограниченно возрастают.

После того как функция $\tau'(\xi)$ найдена путем численного решения интегрального уравнения (12), на основе формулы (10) с уже найденным коэффициентом C_2 , в явном виде определяются компоненты продольной $v_x'(x, y)$ и поперечной $v_y'(x, y)$ скоростей потока на первом шаге итерации.

Полученное аналитически интегральное уравнение (12) решается методом коллокации, в итоге в дискретном виде оно приводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции τ в выбранной системе узлов, решаемой методом Гаусса. Важнейшими результатами численного расчёта являются значения силы трения W_1 , действующей на пластинку, однако легко также определить поле скоростей в произвольной точке потока.

3. Вторая и последующие итерации

На второй итерации искомые функции малых возмущений (обозначенные двумя штрихами) рассматриваются на фоне функций, найденных на первом шаге:

$$\begin{cases} v_x(x, y) = U_0 + v_x'(x, y) + v_x''(x, y) = U(x, y) + v_x''(x, y), \\ v_y(x, y) = v_y'(x, y) + v_y''(x, y) = V(x, y) + v_y''(x, y). \end{cases} \quad (13)$$

При этом на второй итерации функции $U(x, y)$, $V(x, y)$, как видно выше в соотношениях (13), получены из первой итерации и имеют вид $U(x, y) = U_0 + v_x'(x, y)$, $V(x, y) = v_y'(x, y)$.

По аналогии с первым шагом итерации, на второй итерации выписываем линейное уравнение в частных производных относительно возмущённой функции тока $\psi''(x, y)$. Далее «замораживаем» функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ по переменной x в полученном уравнении в частных производных и применяем к нему преобразование Фурье по переменной x . В результате получаем неоднородное линейное ОДУ четвёртого порядка с переменными коэффициентами, исследование которого производится теми же методами, что и на первой итерации [11].

Однако расчеты показывают, что устойчивого счета практически с той же точностью при построении второй итерации можно добиться в упрощенной трактовке. Она основана на том, что при больших числах Рейнольдса длина интервалов погранслоного решения вблизи концов пластинки асимптотически мала, и в первом приближении концы можно отодвинуть на бесконечность. В этом случае «внешнее» решение вне пограничных слоёв не зависит от переменной x , поэтому в простейшем случае приближение для второй итерации можно построить, считая, что все функции уравнения (7) для данной итерации не зависят от x . В этом случае приходим к следующей краевой задаче для ОДУ четвёртого порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d^4 \psi''}{dy^4} - \frac{V(y)d^3 \psi''}{\nu dy^3} + \frac{1}{\nu} \frac{d^2 V(y)d\psi''}{dy^2} = -\frac{U(y)d^2 V(y)}{\nu dy^2} + \frac{V(y)d^2 U(y)}{\nu dy^2} - \frac{d^3 U(y)}{dy^3} \quad (14)$$

с краевыми условиями вида

$$\psi''(y)|_{y=0} = 0; \quad \frac{d\psi''(y)}{dy}|_{y=0} = 0; \quad (15)$$

$$\psi''(y)|_{y \rightarrow +\infty} \rightarrow 0; \quad \frac{d\psi''(y)}{dy}|_{y \rightarrow +\infty} \rightarrow 0, \quad (16)$$

которая решается методом стрельбы с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка. После того, как система (14) – (16) решена, вязкое трение на пластинке находится по формуле $\tau''(x)/\mu = d^2\psi''(y)/dy^2|_{y=0}$, где $\tau''(x)$ – возмущенная функция вязкого трения на фоне функции $\tau'(x)$, построенной в первом приближении.

Коэффициенты в виде функций $U(y)$, $V(y)$ и их производных в (14) находятся из первого приближения. При этом интегралы в бесконечных пределах по переменной α берутся аналитически, с применением методов, описанных в [12 – 14]. Это существенно облегчает дальнейшее решение задачи, так как время вычисления функций $U(y)$, $V(y)$ и их производных сокращается с нескольких часов в случае использования квадратурных формул до нескольких секунд. В итоге эти функции представляются следующим образом:

$$U(y) = \frac{1}{2\pi\rho U_0} \int_{-a}^a \tau'(\xi) \left(b e^{-\frac{b\xi}{2}} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} K_1\left(\frac{b}{2}\sqrt{\xi^2 + y^2}\right) - K_0\left(\frac{b}{2}\sqrt{\xi^2 + y^2}\right) \right) - \frac{2\xi}{\xi^2 + y^2} \right) d\xi + U_0; \quad (17)$$

$$V(y) = \frac{1}{2\pi\rho U_0} \int_{-a}^a \tau'(\xi) \left(\frac{2y}{\xi^2 + y^2} - \frac{b y e^{-\frac{b\xi}{2}}}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} K_1\left(\frac{b}{2}\sqrt{\xi^2 + y^2}\right) \right) d\xi, \quad (18)$$

где, $K_0(z)$ и $K_1(z)$ – функции Макдональда нулевого и первого порядка соответственно [13], $b = U_0/\nu$. Участвующие в уравнении (14) функции $d^2U(y)/dy^2$, $d^2V(y)/dy^2$ и $d^3U(y)/dy^3$ легко выписываются в аналогичном виде после взятия производных от функций Макдональда в формулах (17), (18).

Заметим, что построение решения на следующих итерациях происходит по той же схеме, что и при построении 2-й итерации.

При этом коэффициенты, входящие в уравнение (14) на текущей итерации, напрямую находятся в процессе решения этого уравнения методом Рунге-Кутты на предыдущей итерации, поскольку все они являются производными некоторого порядка от основной неизвестной функции. Более подробное решение данной задачи до второй итерации включительно для больших чисел Рейнольдса с использованием поправочных коэффициентов представлено в [15].

4. Анализ результатов численных расчетов

С целью тестирования точности предложенного в данной работе метода вводится в рассмотрение следующая безразмерная величина:

$$S = 0.664W / W_{Blaz}, \quad W_{Blaz} = 0.664\rho U_0^2 \sqrt{\frac{2av}{U_0}}, \quad (19)$$

где W – сила трения на одной стороне пластинки, полученная с помощью числен-

ных расчётов, W_{Blaz} – аналогичная величина, полученная Г. Блазиусом в аналитическом виде [2, 16]. Таким образом, значение безразмерного коэффициента трения S по Г. Блазиусу равно постоянной величине $S_{Blaz} = 0.664$ при любых значениях параметров α , ρ , ν , U_0 . Решение Г. Блазиуса получено в приближении тонкого пограничного слоя по теории Прандтля и справедливо в случае предельно больших чисел Рейнольдса Re . Полученное в данной работе решение сравнивается с решением Г. Блазиуса при различных числах Рейнольдса $Re = 2a U_0/\nu$ с помощью параметра S .

Далее сравним построенное решение не только с погранслои́м решением Блазиуса [16] для предельно больших чисел Рейнольдса, но и с решением Харрисона – Файлона (см. [9, с. 775]) для предельно малых чисел Рейнольдса, которое имеет вид

$$W = \frac{2\mu U_0}{1 - \gamma - \ln(U_0 a / 8\nu)}, \quad \gamma = 0.577216,$$

(20)

где γ – число Эйлера.

Таблица представляет расчёты, полученные от первой до десятой итерации. В той части, где таблица заканчивается на 4-й или 5-й итерации, это означает, что все дальнейшие итерации совпадают между собой. В той части, где таблица заканчивается на 10-й итерации, это означает, что результаты 9-й и 10-й итераций совпадают. Решение в рамках предложенного итерационного процесса сравнивается как с двумя предельными асимптотическими случаями, так и с прямым численным расчетом методом конечных объемов в среде ANSYS CFX.

Зависимость параметра S , рассчитанного различными методами, от числа Рейнольдса

Re	0.0001	0.001	0.01	0.1	1
Лэмб [9]	50.65	19.67	8.055	3.614	1.966
1-я итерация	50.63	19.66	8.051	3.610	1.932
2-я итерация	50.72	19.69	8.064	3.616	1.964
3-я итерация	50.71	19.69	8.063	3.615	1.963
4-я итерация	50.71	19.69	8.063	3.615	1.963

Re	1	3	5	10	20	50	70	100	150
Блазиус [2]	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664
ANSYS	2.341	1.614	1.424	1.248	1.104	1.001	0.956	0.917	0.877
1-я итерация	1.932	1.582	1.476	1.371	1.298	1.234	1.217	1.202	1.188
2-я итерация	1.964	1.618	1.512	1.401	1.296	1.156	1.108	1.061	1.015
3-я итерация	1.963	1.617	1.512	1.400	1.296	1.156	1.104	1.049	0.990
4-я итерация	1.963	1.617	1.512	1.400	1.296	1.156	1.104	1.048	0.987
5-я итерация	1.963	1.617	1.512	1.400	1.296	1.156	1.104	1.048	0.986

Re	200	300	400	500	1000	1500	2000	5000	10000
Блазиус [2]	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664
ANSYS	0.856	0.832	0.817	0.806	0.768	0.752	0.742	0.717	0.702
1-я итерация	1.180	1.170	1.164	1.160	1.151	1.147	1.144	1.138	1.135
2-я итерация	0.987	0.954	0.934	0.922	0.894	0.885	0.879	0.865	0.857
3-я итерация	0.951	0.903	0.875	0.856	0.818	0.806	0.797	0.776	0.765
4-я итерация	0.945	0.891	0.858	0.835	0.791	0.778	0.766	0.742	0.728
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10-я итерация	0.943	0.886	0.851	0.825	0.775	0.761	0.747	0.719	0.704

Для расчетов в пакете ANSYS CFX использовалась структурированная сетка с гексаэдрическими элементами. Длина пластинки бралась 1 м. При этом размеры расчетной области составляли 6 м в продольном (по отношению к потоку и пластине) направлении и 2.5 м в поперечном, при толщине в 1 элемент (стандартный способ моделирования плоских задач). При этом, в силу симметрии, расчет выполнялся только для половины области (т.е. пластина была расположена на середине одной из продольных границ области). Количество элементов в сетке ~1 млн, характерный размер элементов вдали от пластины – 0.01 м, вблизи от пластины – 0.0001 м. На рис. 2 представлен график продольных скоростей, построенный предложенным методом и в программе ANSYS CFX, для трех средних значений числа Рейнольдса.

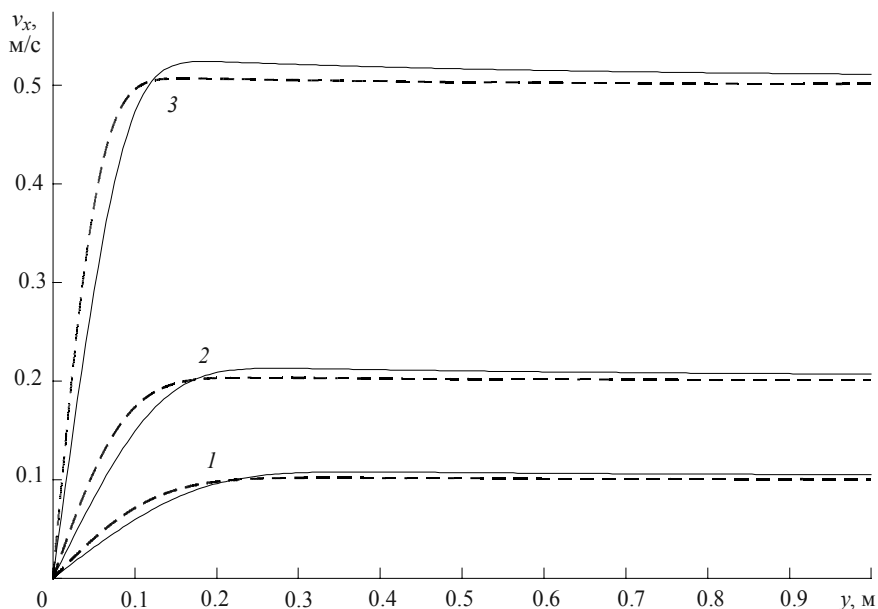


Рис. 2. Распределение продольной скорости v_x в зависимости от координаты y при $l = 2a = 1$ м, $\rho = 1$ кг/м³, $\nu = 0.001$ м²/с при различных значениях U_0 (м/с). Сплошные линии соответствуют расчету в среде ANSYS CFX, пунктирные линии – методу, предложенному авторами: линии 1 – $U_0 = 0.1$ м/с ($Re = 100$), линии 2 – $U_0 = 0.2$ м/с ($Re = 200$), линии 3 – $U_0 = 0.5$ м/с ($Re = 500$)

Fig. 2. Distribution of the longitudinal velocity v_x versus y -coordinate at $l = 2a = 1$ m, $\rho = 1$ kg/m³, $\nu = 0.001$ m²/s, and various U_0 (m/s). Solid lines correspond to the calculations obtained using the ANSYS CFX software; dotted lines, to the calculations obtained using the method proposed by the authors: $U_0 = (1)$ 0.1, (2) 0.2, and (3) 0.5 m/s at $Re = 100$, 200, and 500, respectively

Заключение

Таким образом, анализируя таблицу можно сделать следующие качественные выводы:

1) Для всех чисел Рейнольдса итерационный метод сходится довольно быстро. Решение с четырьмя значащими цифрами всегда достигается не более чем за 10 шагов итераций.

2) Если принять, что точность численной реализации предложенного алгоритма составляет три значащих цифры, то в случае очень малых чисел Рейнольдса (до значения $Re = 1$ включительно) данная точность достигается за три шага итерации, если сравнивать численный результат с асимптотическим решением [9]. При этом, как показывает сравнение с ANSYS CFX для случая $Re = 1$, сама асимптотика малых чисел Рейнольдса становится слишком грубой в области умеренно малых значений.

3) При выходе числа Рейнольдса в область средних значений построенное в данной работе решение становится больше точного (если решение методом конечных объемов считать точным). С дальнейшим ростом Re отклонение построенного решения от точного уменьшается.

4) Из предыдущих выводов следует, что предложенный в данной работе итерационный метод обеспечивает достаточно высокую точность в области малых и больших значений Re . Для средних значений Re точность метода ухудшается, однако при $Re \geq 400$ относительная погрешность не превышает 4 %, а при $Re \geq 1000$ погрешность предложенного метода менее 1 %.

5) Приближенная формула Блазиуса (19) является слишком грубой даже при предельно больших Re . Параметр S на её основе сильно отличается как от точного, так и от построенного в данной работе. В этой области два последних значения монотонно убывают с ростом Re , стремясь к значению Блазиуса 0.664. Однако даже для $Re = 2000$ погрешность теории Блазиуса составляет более 10 %.

6) Отметим также, что данный подход работает в реальном масштабе времени на персональном компьютере. В этом смысле он имеет несомненное преимущество перед решением ANSYS CFX, реализация которого требует нескольких часов, а для больших значений Re – до суток.

7) В связи с пунктом 4), подчеркнем еще раз, что предлагаемый итерационный метод всегда обеспечивает сходимость к некоторому решению. Не для всех значений Re это решение совпадает с точным. Однако можно показать, что первая итерация, сводящаяся к интегральному уравнению (12), при малых значениях Re дает явную асимптотику предельно-вязкого обтекания, если в уравнении (12) перейти к пределу при $U_0 \rightarrow 0$. Это соответствует физике процесса, при котором в предельно медленном течении, равномерно во всем потоке, возмущения скоростей малы на фоне основной продольной скорости потока U_0 . Итерационный метод строится так, как если бы эта же гипотеза выполнялась для всех чисел Рейнольдса. На деле она оказалась весьма точной и для предельно больших Re , что также можно было предсказать *a priori* с физической точки зрения. В самом деле, в условиях сверхмалой вязкости, если сохранять стационарность потока и ламинарность, то физически очевидно, что скорости во всей области потока, кроме тонкого погранслоя, будут близки к основной продольной скорости U_0 . Это дает надежду на сходимость итераций по малым возмущениям на фоне основного потока, что и подтвердилось в процессе численных расчетов. В области средних значений Re сходимость итерационного метода приводит лишь к некоторому приближенному решению. Однако максимальная погрешность в 15 % показывает, что основная физическая гипотеза, лежащая в основе итерационного процесса, и здесь выполняется с приемлемой точностью. К сожалению, для средних значений Re точность предлагаемого метода не может быть улучшена. Это подтверждается также и кривыми на рис. 2, соответствующими средним значениям $Re = 100, 200, 500$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blasius H. Boundary layers in fluids with little friction. Washington D.C.: National Advisory Committee for Aeronautics. 1950. 57 p.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
3. Goldstein S. Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1930. V. 26. P. 1–30.
4. McLachlan R.I. The boundary layer on a finite flat plate // Physics of Fluids A. 1991. V. 3(2). P. 341–348.
5. Kaiyuan L., Zhao Hua Y., Qiaohong L. Some experiences of improving the speed of numerical Navier-Stokes solver using CUDA // J. Algorithms and Computational Technology. 2014. V. 8. P. 287–300.
6. Brunschwig A., Rondi C. Laminar flow across a flat plate // J. Numerical Analysis for Engineering. 2001. P. 1–18.
7. Feng X.F., Tian Z.F., Dai S.Q. Numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations with exponential type schemes // Int. J. Computer Mathematics. 2006. V. 82(9). P. 1167–1176.
8. Quartapelle L. Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations. Basel: Birkhäuser-Verlag, 2012. 292 p.
9. Lamb H. Hydrodynamics. C.U.P, 1932. 738 p.
10. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 335 с.
11. Бердник Я.А. Итерационный метод для стационарных уравнений Навье – Стокса в задаче обтекания тонкой пластинки // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2014. № 1(179). С. 30–34.
12. Sumbatyan, M.A., Scalia, A. Equations of mathematical diffraction theory. CRC Press, 2005. 291 p.
13. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. N.Y.: Dover, 1972. 1046 p.
14. Bateman H., Erdélyi A. Tables of integral transforms. N.Y.: McGraw-Hill, 1954. 451 p.
15. Berdnik Y., Beskopylny A. The approximation method in the problem on a flow of viscous fluid around a thin plate // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 2019. V. 91(6). pp. 807–813.
16. Schlichting H. Boundary-layer theory. N.Y.: Mc Graw-Hill, 1955. 535 p.

Статья поступила 12.06.2019 г.

Sumbatyan M.A., Berdnik Ya.A., Bondarchuk A.A. (2020) AN ITERATIVE METHOD FOR THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN THE PROBLEM OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW AROUND A THIN PLATE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 132–142

DOI 10.17223/19988621/66/11

Keywords: Navier–Stokes equations, iterative method, viscous fluid, thin plate, integral equations.

In this paper, the problem on a viscous fluid flow around a thin plate is considered using the exact Navier–Stokes equations. An iterative method is proposed for small velocity perturbations with respect to main flow velocities. At each iterative step, an integral equation is solved for a function of the viscous friction over the plate. The collocation method is used at each iteration step to reduce an integral equation to a system of linear algebraic equations, and the shooting method based on the classical fourth-order Runge-Kutta technique is applied. The solution obtained at each iteration step is compared with the Harrison–Filon solution at low Reynolds numbers, with the classical Blasius solution, and with the results computed using the direct numerical finite-volume method in the ANSYS CFX software for moderate and high Reynolds

numbers. The proposed iterative method converges in a few steps. Its accuracy is rather high for small and large Reynolds number, while the error can reach 15% for moderate values.

Financial support. The presented study was funded by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the basic part of the State task № 9.5794.2017/ БЧ.

Mezhlum A. SUMBATYAN (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: sumbat@math.rsu.ru

Yanina A. BERDNIK (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: yaninaberdnik@mail.ru

Aleksey A. BONDARCHUK (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: melchior@list.ru

REFERENCES

1. Blasius H. (1950) *Boundary Layers in Fluids with Little Friction*. Washington D.C.: National Advisory Committee for Aeronautics.
2. Loytsyanskiy L.G. (1973) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
3. Goldstein S. (1930) Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 26. pp. 1–30. DOI: 10.1017/S03050004100014997.
4. McLachlan R.I. (1991) The boundary layer on a finite flat plate. *Physics of Fluids A*. 3(2). pp. 341–348. DOI: 10.1063/1.858143.
5. Kaiyuan L., Zhaohua Y., Qiaohong L. (2014) Some experiences of improving the speed of numerical Navier-Stokes solver using CUDA. *Journal of Algorithms and Computational Technology*. 8. pp. 287–300. DOI: 10.1260/1748-3018.8.3.287.
6. Brunschwig A., Rondi C. (2001) Laminar flow across a flat plate. *Journal of Numerical Analysis for Engineering*. pp. 1–18.
7. Feng X.F., Tian Z.F., Dai S.Q. (2006) Numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations with exponential type schemes. *International Journal of Computer Mathematics*. 82(9). pp. 1167–1176. DOI: 10.1080/00207160500113249.
8. Quartapelle L. (2012) *Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations*. Basel: Birkhäuser-Verlag.
9. Lamb H. (1934) *Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
10. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. (1986) *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* [Problems of continuum mechanics with mixed boundary conditions]. Moscow: Nauka.
11. Berdник Ya.A. (2014) Iteratsionnyy metod dlya statsionarnykh uravneniy Nav'e-Stoksa v zadache obtekaniya tonkoy plastinki [An iterative method for the stationary Navier-Stokes equations in the problem on a flow around a linear plate]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasian Region. Natural Sciences*. 179(1). pp. 30–34.
12. Sumbatyan M.A., Scalia A. (2005) *Equations of Mathematical Diffraction Theory*. CRC Press.
13. Abramowitz M., Stegun I. (1972) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover.
14. Bateman H., Erdélyi A. (1954) *Tables of Integral Transforms*. New York: McGraw-Hill.
15. Berdник Ya., Beskopylny A. (2019) The approximation method in the problem on a flow of viscous fluid around a thin plate. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 91(6). pp. 807–813. DOI: 10.1108/AEAT-07-2018-0196.
16. Schlichting H. (1955) *Boundary-layer Theory*. New York: Mc Graw-Hill.

Received: June 12, 2019

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/66/12

А. Юлдашев, Ш.Т. Пирматов**АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН**

Рассматривается построение единой вычислительной схемы решения краевых задач динамического расчета гибких пластин с использованием нелинейной теории Лява, разработка автоматизированной системы динамического расчета гибких пластин, апробация построенной автоматизированной системы и исследование напряженно-деформированного состояния гибких пластин.

Ключевые слова: алгоритм, пластина, теория упругости, сферическая пластинка.

Динамический расчёт гибких пластин используется при проектировании корпусов судов, самолетов, ракет и других технических объектов, которые наряду с достаточной прочностью должны иметь наименьший вес, достигающийся путем применения облегченных пластин и снижения запаса прочности.

В данной работе на основе метода конечных разностей разрабатывается вычислительный алгоритм решения динамических краевых задач теории гибких пластин.

В связи с этим методы динамического расчёта пластин как в классической линейной постановке, так и в геометрической нелинейной постановке задачи постоянно совершенствуются.

В настоящей работе рассматриваются следующие вопросы:

1. Построение единой вычислительной схемы решения краевых задач динамического расчёта гибких прямоугольных пластин с использованием нелинейной теории Лява.

2. Разработка автоматизированной системы динамического расчета гибких пластин.

3. Апробация построенной автоматизированной системы.

4. Использование напряженно-деформированного состояния гибких пластин.

Проблема создания автоматизированной системы решения задач теории упругости и пластичности впервые была поставлена в монографии В.К. Кабулова [1], где сформулированы основные задачи алгоритмизации и указаны пути их машинного решения.

Задача алгоритмизации решается в четыре этапа. На первом в зависимости от геометрических свойств объекта и физических свойств материала выбирается расчётная схема конструкции. Второй этап связан с выводом исходных дифференциальных уравнений и соответствующих им граничных условий. Выбор вычислительного алгоритма и численное решение полученных уравнений составляет третий этап исследований. Четвертый этап завершается анализом полученных численных результатов, описывающих напряженно-деформированное состояние рассматриваемой конструкций.

При этом построение вычислительного алгоритма для численного решения сформулированных краевых задач представляет собой основной этап алгоритмизации.

В соответствии с проведенным анализом проблем, возникающих при автоматизации расчета тонкостенных элементов конструкций машиностроения, целесообразно остановиться на нелинейной динамической расчетной схеме гибкой однородной изотропной линейно-упругой оболочкой произвольной формы, при описании движения которой учитываются как влияние сдвигов, так и инерции вращения.

Такая модель даст возможность расчета в рамках единой достаточно гибкой и быстродействующей схемы широкого класса динамических процессов, происходящих в разнообразных по форме и не слишком сильно ограниченных по толщине пластинках и оболочках, которые составляют заметную часть элементов конструкций.

Различные варианты динамических дифференциальных уравнений движения пластин достаточно хорошо разработаны и апробированы. Очевидно, что при создании системы автоматизированного расчёта не имеет особого смысла построение отдельных алгоритмов для расчёта плоских пластин.

В настоящей работе рассматриваются уравнения движения гибких прямоугольных пластин. Уравнения приводятся к удобной для вычислений безразмерной форме. Описываются конечно-разностные схемы, используемые для преобразования уравнений движения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, по схеме Рунге-Кутты.

1. Уравнения движения прямоугольных пластин

Уравнения движения без учета влияния сдвигов и инерции вращения в геометрически нелинейной постановке в форме Лава [3, 10, 11, 12] имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{y}} - \bar{Q}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} - \bar{Q}_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \rho h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}^2}, \\ \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{y}} - \bar{Q}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \bar{Q}_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} &= \rho h \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}^2}, \\ \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial \bar{y}} + \bar{T}_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} + 2\bar{S} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{T}_2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{q} &= \rho h \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= \frac{12}{h^2} D(\bar{\epsilon}_{11} + \mu \bar{\epsilon}_{22}), \quad \bar{T}_2 = \frac{12}{h^2} D(\bar{\epsilon}_{11} + \mu \bar{\epsilon}_{22}), \\ \bar{S} = \bar{S}_1 = -\bar{S}_2 &= \frac{6(1-\mu)}{h^2} D \bar{\epsilon}_{12}, \quad \bar{Q}_1 = D \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla^2 \bar{w}, \\ \bar{Q}_2 &= D \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \nabla^2 \bar{w}, \quad \bar{\epsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2, \\ \bar{\epsilon}_{12} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{\epsilon}_{22} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2. \end{aligned}$$

$D = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала; h – толщина пластин; $\bar{q}$ – внешняя нагрузка.

Подставляя выражения для $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{S}, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ в (1), получаем уравнения движения в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} &= \bar{a}_1 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{a}_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{a}_3 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{a}_4 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{a}_5 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{a}_6 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{t}^2} &= \bar{b}_1 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{b}_2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{b}_3 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{b}_4 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{b}_5 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{b}_6 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} &= \bar{c}_1 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + \bar{c}_2 \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \bar{c}_3 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} + \bar{c}_4 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{c}_5 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{c}_6 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{q} q_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{12}{h^2}, \quad \bar{a}_2 = \frac{6(1-\mu)}{h^2}, \quad \bar{a}_3 = \frac{6(1+\mu)}{h^2}, \\ \bar{a}_4 &= \frac{12}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla^2 \bar{w}, \quad \bar{a}_5 = \frac{6(1-\mu)}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \nabla^2 \bar{w}, \\ \bar{a}_6 &= \frac{6(1-\mu)}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{b}_1 = \frac{6(1-\mu)}{h^2}, \quad \bar{b}_2 = \frac{12}{h^2}, \quad \bar{b}_3 = \frac{6(1+\mu)}{h^2}, \\ \bar{b}_4 &= \frac{6(1-\mu)}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{b}_5 = \frac{6(1+\mu)}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla^2 \bar{w}, \\ \bar{b}_6 &= \frac{12}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \nabla^2 \bar{w}, \quad \bar{c}_1 = -1, \quad \bar{c}_2 = -2, \quad \bar{c}_3 = -1, \\ \bar{c}_4 &= \frac{12}{h^2} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \right\}, \\ \bar{c}_5 &= \frac{12}{h^2} (1-\mu) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right), \\ \bar{c}_6 &= \frac{12}{h^2} \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] \right\}, \\ \bar{q}_0 &= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}, \quad \bar{q} = q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{aligned}$$

Вводя следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = \frac{\bar{y}}{b}, \quad u = \frac{\bar{u}}{h}, \quad v = \frac{\bar{v}}{h}, \quad w = \frac{\bar{w}}{h}, \quad \gamma = \frac{b}{a}, \quad \delta = \frac{b}{h}, \quad t = \sqrt{\rho h \frac{b^4}{D}} \bar{t}, \quad (3)$$

в (2) получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + a_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + c_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \beta,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где a, b – длина и ширина пластины.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 12(\gamma\delta)^2, \quad a_2 = b(1-\mu)\delta^2, \quad a_3 = b(1+\mu)\gamma\delta^2, \\
 a_4 &= 12\gamma^3\delta \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{12\delta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\
 a_5 &= 6(1+\mu)\gamma\delta \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{6(1+\mu)\delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\
 a_6 &= 6(1-\mu)\gamma\delta \frac{\partial w}{\partial y}, \quad b_1 = 6(1-\mu)\gamma\delta^2, \quad b_2 = 12\delta^2, \quad b_3 = 6(1+\mu)(\gamma\delta)^2, \\
 b_4 &= 6(1-\mu)\gamma^2\delta \frac{\partial w}{\partial y}, \quad b_5 = 6(1+\mu)\gamma^2\delta \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{6(1+\mu)\delta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\
 b_6 &= 12\delta \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{12\delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\
 c_1 &= -\gamma^4, \quad c_2 = -2\gamma^2, \quad c_3 = -1, \\
 c_4 &= 12\gamma^2\delta \left\{ \gamma \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma}{2\delta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]^2 + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\gamma}{2\delta} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]^2 \right\}, \\
 c_5 &= 6(1-\mu)\gamma\delta \left(\gamma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
 c_6 &= 12\delta \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\gamma}{2\delta} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu\gamma \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma}{2\delta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \\
 \beta &= qq_0, \quad q = q(x, y, z), \quad q_0 = \frac{12(1-\mu^2)}{E} \delta^4.
 \end{aligned}$$

Система уравнений (4) решается в области

$$G = \Omega \times T \quad (\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad T = \{0 \leq t \leq t_1\})$$

с начальными и граничными условиями

$$y|_{t=0} = y^0, \quad \dot{y}|_{t=0} = \dot{y}^0; \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
T_v \delta u_v|_{\Gamma} &= 0, \\
T_{v\tau} \delta u_{v\tau}|_{\Gamma} &= 0, \\
M_v \delta \frac{\partial w}{\partial v}|_{\Gamma} &= 0, \\
R_v \delta w|_{\Gamma} &= 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $y(x, y, t) = \{u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t)\}$.

2. Интегрирование уравнений движения гибких прямоугольных пластин методом прямых

Система уравнений (4) с начальными и граничными условиями (5), (6) решается методом сеток в области

$$\begin{aligned}
G = \Omega_{h_1 h_2} \times T \quad (\Omega_{h_1 h_2} = \{0 \leq x_i \leq 1, 0 \leq y_j \leq 1\} \quad T = \{0 \leq t \leq t_1\}) \\
\left(x_i = ih_1, \quad y = jh_2, \quad h_1 = \frac{1}{N_1}, \quad h_2 = \frac{1}{N_2}, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_2} \right).
\end{aligned}$$

Пользуясь центральными разностными формулами, аппроксимирующими частные производные по x и y с точностью второго порядка [4–9, 13], вместо (4) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_{ij} &= a_{ij}^{(1)} v_{i-1,j-1} + a_{ij}^{(2)} w_{i-1,j-1} + a_{ij}^{(3)} u_{i-1,j} + a_{ij}^{(4)} w_{i-1,j} + a_{ij}^{(5)} v_{i-1,j+1} + a_{ij}^{(6)} w_{i-1,j+1} + \\
&\quad + a_{ij}^{(7)} u_{i,j-1} + a_{ij}^{(8)} w_{i,j-1} + a_{ij}^{(9)} u_{i,j} + a_{ij}^{(10)} w_{i,j} + a_{ij}^{(11)} u_{i,j+1} + a_{ij}^{(12)} w_{i,j+1} + \\
&\quad + a_{ij}^{(13)} v_{i+1,j-1} + a_{ij}^{(14)} w_{i+1,j-1} + a_{ij}^{(15)} u_{i+1,j} + a_{ij}^{(16)} w_{i+1,j} + a_{ij}^{(17)} v_{i+1,j+1} + a_{ij}^{(18)} w_{i+1,j+1}, \\
\ddot{v}_{ij} &= b_{ij}^{(1)} u_{i-1,j-1} + b_{ij}^{(2)} w_{i-1,j-1} + b_{ij}^{(3)} v_{i-1,j} + b_{ij}^{(4)} w_{i-1,j} + b_{ij}^{(5)} u_{i-1,j+1} + b_{ij}^{(6)} w_{i-1,j+1} + \\
&\quad + b_{ij}^{(7)} v_{i,j-1} + b_{ij}^{(8)} w_{i,j-1} + b_{ij}^{(9)} v_{i,j} + b_{ij}^{(10)} w_{i,j} + b_{ij}^{(11)} v_{i,j+1} + b_{ij}^{(12)} w_{i,j+1} + \\
&\quad + b_{ij}^{(13)} u_{i+1,j-1} + b_{ij}^{(14)} w_{i+1,j-1} + b_{ij}^{(15)} v_{i+1,j} + b_{ij}^{(16)} w_{i+1,j} + b_{ij}^{(17)} u_{i+1,j+1} + b_{ij}^{(18)} w_{i+1,j+1}, \\
\ddot{w}_{ij} &= c_{ij}^{(1)} w_{i-1,j-1} + c_{ij}^{(2)} w_{i-1,j} + c_{ij}^{(3)} w_{i-1,j+1} + c_{ij}^{(4)} w_{i,j-1} + c_{ij}^{(5)} w_{i,j} + c_{ij}^{(6)} w_{i,j+1} + c_{ij}^{(7)} w_{i+1,j-1} + \\
&\quad + c_{ij}^{(8)} w_{i+1,j} + c_{ij}^{(9)} w_{i+1,j+1} + c_{ij}^{(10)} w_{i-2,j} + c_{ij}^{(11)} w_{i,j-2} + c_{ij}^{(12)} w_{i,j+2} + c_{ij}^{(13)} w_{i+2,j} + \beta_i,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(1)} &= a_{ij}^{(17)} = -a_{ij}^{(5)} = -a_{ij}^{(13)} = a_3 \frac{N_1 N_2}{4}, \\
a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(18)} = -a_{ij}^{(6)} = -a_{ij}^{(14)} = a_5 \frac{N_1 N_2}{4}, \\
a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(15)} = a_1 N_1^2, \quad a_{ij}^{(4)} = a_{ij}^{(16)} = a_4 N_1^2, \\
a_{ij}^{(7)} &= a_{ij}^{(11)} = a_2 N_2^2, \quad a_{ij}^{(8)} = a_{ij}^{(12)} = a_6 N_2^2, \\
a_{ij}^{(9)} &= -2(a_1 N_1^2 + a_2 N_2^2), \quad a_{ij}^{(10)} = -2(a_4 N_1^2 + a_6 N_2^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{ij}^{(1)} &= b_{ij}^{(17)} = -b_{ij}^{(5)} = -b_{ij}^{(13)} = b_1 \frac{N_1 N_2}{4}, \quad b_{ij}^{(2)} = b_{ij}^{(18)} = -b_{ij}^{(6)} = -b_{ij}^{(14)} = b_1 \frac{N_1 N_2}{4}, \\
b_{ij}^{(3)} &= b_{ij}^{(15)} = b_2 N_1^2, \quad b_{ij}^{(4)} = b_{ij}^{(16)} = b_4 N_1^2, \quad b_{ij}^{(7)} = b_{ij}^{(11)} = b_3 N_2^2, \quad b_{ij}^{(8)} = b_{ij}^{(12)} = b_6 N_2^2, \\
b_{ij}^{(9)} &= -2(b_2 N_1^2 + b_3 N_2^2), \quad b_{ij}^{(10)} = -2(b_4 N_1^2 + b_6 N_2^2), \\
c_{ij}^{(1)} &= N_1^2 N_2^2 c_2 + c_5 \frac{N_1 N_2}{4}, \quad c_{ij}^{(2)} = -4N_1^4 c_1 - 2N_1^2 N_2^2 c_2 + N_1^2 c_4, \\
c_{ij}^{(3)} &= N_1^2 N_2^2 c_2 - c_5 \frac{N_1 N_2}{4}, \quad c_{ij}^{(4)} = -4N_2^4 c_3 + 6c_3 N_2^4 - 2c_4 N_1^2 + 4N_1^2 N_2^2 c_2 - 2N_2^2 c_6, \\
c_{ij}^{(4)} &= c_{ij}^{(6)}, \quad c_{ij}^{(3)} = c_{ij}^{(7)}, \quad c_{ij}^{(8)} = c_{ij}^{(2)}, \quad c_{ij}^{(9)} = c_{ij}^{(1)}, \\
c_{ij}^{(10)} &= c_1 N_1^4, \quad c_{ij}^{(11)} = c_3 N_2^4, \quad c_{ij}^{(12)} = c_{ij}^{(11)}, \quad c_{ij}^{(13)} = c_{ij}^{(10)}, \\
a_4 &= 6\gamma^3 \delta N_1 \left\{ w_{i+1,j} - w_{i-1,j} + \frac{1}{12\delta^2} \left[(\gamma N_1)^2 (w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + N_2^2 (w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i-1,j} - w_{i-1,j-1}) \right] \right\}, \\
a_5 &= 3(1+\mu)\gamma\delta N_2 \left\{ w_{i,j+1} - w_{i,j-1} + \frac{1}{6(1+\mu)\delta^2} \left[(\gamma N_1)^2 (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2w_{i,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}) + N_2^2 (w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}) \right] \right\}, \\
a_6 &= 3(1-\mu)\gamma\delta N_1 (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}), \quad b_4 = 3(1-\mu)\gamma^2 \delta N_2 (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), \\
b_5 &= 3(1+\mu)\gamma^2 \delta N_1 \left\{ w_{i+1,j} - w_{i-1,j} + \frac{1}{6(1+\mu)\delta^2} \left[(\gamma N_1)^2 (w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - w_{i-2,j}) + N_2^2 (w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}) \right] \right\}, \\
b_6 &= 6\delta N_1 \left\{ w_{i,j+1} - w_{i,j-1} + \frac{1}{12\delta^2} \left[(\gamma N_1)^2 (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}) + N_2^2 (w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}) \right] \right\}, \\
c_4 &= 6\gamma^2 \delta N_1 \left\{ \left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + \frac{\gamma N_1}{4\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right] + \mu \left[v_{i,j+1} + v_{i,j-1} + \frac{N_2}{4\delta} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right] \right\}, \\
c_5 &= 3(1-\mu)\gamma\delta \left[(\gamma N_1)(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + N_2 (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \frac{\gamma N_1 N_2}{2\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \right], \\
c_6 &= 6\delta \left\{ N_2 \left[v_{i,j+1} - v_{i,j-1} + \frac{N_2}{4\delta} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right] + \mu \gamma N_1 \left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + \frac{\gamma N_1}{4\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

с начальными и граничными условиями

$$y_{ij} \big|_{t=0} = y_{ij}^0, \quad \dot{y}_{ij} \big|_{t=0} = \dot{y}_{ij}^0. \quad (8)$$

В случае заземления контура

$$y_{0,j} \mid_{x=0} = 0, \quad y_{N_1,j} \mid_{x=1} = 0, \quad y_{i,0} \mid_{y=0} = 0, \quad y_{iN_2} \mid_{y=1} = 0; \quad (9)$$

$$w_{-1,j} \mid_{x=0} = w_{1,j}, \quad w_{i+1,j} \mid_{x=1} = w_{N_1-1,j}, \quad w_{i,-1} \mid_{y=0} = w_{i,1}, \quad w_{i,N_2+1} \mid_{y=1} = w_{i,N_2-1}, \quad (10)$$

а в случае шарнирного отпирания

$$w_{-1,j} \mid_{x=0} = -w_{1,j}, \quad w_{T+1,j} \mid_{x=1} = -w_{N_1-1,j}, \quad w_{i,-1} \mid_{y=0} = -w_{i,1}, \quad w_{i,N_2+1} \mid_{y=1} = -w_{i,N_2-1}. \quad (11)$$

Учитывая соответствующие разностные краевые условия, систему (7) представим в следующей форме:

$$\ddot{Y}_I = MY_I + g, \quad (12)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & D_1 & E_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 & E_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & A_{N_1-4} & B_{N_1-4} & C_{N_1-4} & D_{N_1-4} & E_{N_1-4} \\ & & A_{N_1-3} & B_{N_1-3} & C_{N_1-3} & D_{N_1-3} & E_{N_1-3} \\ & & & A_{N_1-2} & B_{N_1-2} & C_{N_1-2} & D_{N_1-2} \\ & & & & A_{N_1-1} & B_{N_1-1} & C_{N_1-1} \end{pmatrix},$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ & a_{22} & & & & \\ & & a_{33} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{N_2-3,N_2-3} & & \\ & & & & a_{N_2-2,N_2-2} & \\ & & & & & a_{N_2-1,N_2-1} \end{pmatrix},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & b_{N_2-2,N_2-3} & b_{N_2-2,N_2-2} & b_{N_2-2,N_2-1} \\ & & & b_{N_2-1,N_2-2} & b_{N_2-1,N_2-1} \end{pmatrix},$$

$$C_i = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & c_{N_2-2,N_2-4} & c_{N_2-2,N_2-3} & c_{N_2-2,N_2-2} & c_{N_2-2,N_2-1} \\ & & c_{N_2-1,N_2-3} & c_{N_2-1,N_2-2} & c_{N_2-1,N_2-1} \end{pmatrix},$$

$$D_i = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & & & & & \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & & & & \\ & d_{32} & d_{33} & d_{34} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & d_{N_2-3, N_2-4} & d_{N_2-3, N_2-3} & d_{N_2-3, N_2-2} & & & \\ & & d_{N_2-2, N_2-3} & d_{N_2-2, N_2-2} & d_{N_2-2, N_2-1} & & \\ & & & d_{N_2-1, N_2-2} & d_{N_2-1, N_2-1} & & \end{pmatrix},$$

$$E_i = \begin{pmatrix} e_{11} & & & & & & \\ & e_{22} & & & & & \\ & & e_{33} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & e_{N_2-3, N_2-3} & & & \\ & & & & e_{N_2-2, N_2-2} & & \\ & & & & & e_{N_2-1, N_2-1} & \end{pmatrix},$$

$$g_i = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{N_1-2} \\ g_{N_1-1} \end{pmatrix}, \quad g_j = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{N_2-2} \\ g_{N_2-1} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(10)} \end{pmatrix}, \quad b_{\bar{j}, \bar{j}-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(1)} & a_{ij}^{(2)} \\ b_{ij}^{(1)} & 0 & b_{ij}^{(2)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(3)} & 0 & a_{ij}^{(4)} \\ 0 & b_{ij}^{(3)} & b_{ij}^{(4)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b_{j, \bar{j}+1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(5)} & a_{ij}^{(6)} \\ b_{ij}^{(5)} & 0 & b_{ij}^{(1)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$c_{i, j-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(11)} \end{pmatrix}, \quad c_{j, j-1} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(7)} & 0 & a_{ij}^{(8)} \\ 0 & b_{ij}^{(7)} & b_{ij}^{(8)} \end{pmatrix},$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(4)} & 0 & a_{ij}^{(10)} \\ 0 & b_{ij}^{(9)} & b_{ij}^{(10)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(5)} \end{pmatrix}, \quad c_{j, j+1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(11)} & a_{ij}^{(12)} \\ b_{ij}^{(11)} & 0 & b_{ij}^{(12)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(6)} \end{pmatrix},$$

$$c_{i,j+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(6)} \end{pmatrix}, \quad d_{j,j-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(13)} & a_{ij}^{(14)} \\ b_{ij}^{(13)} & 0 & b_{ij}^{(14)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(7)} \end{pmatrix},$$

$$d_{j,j} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(15)} & 0 & a_{ij}^{(16)} \\ 0 & b_{ij}^{(15)} & b_{ij}^{(16)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(8)} \end{pmatrix}, \quad d_{j,j+1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(17)} & a_{ij}^{(18)} \\ b_{ij}^{(17)} & 0 & b_{ij}^{(18)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(9)} \end{pmatrix},$$

$$e_{j,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(13)} \end{pmatrix}, \quad Y_{Ii} = \begin{pmatrix} Y_{I1,j} \\ Y_{I2,j} \\ \dots \\ Y_{IN_1-2,j} \\ Y_{IN_1-1,j} \end{pmatrix}, \quad Y_j = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_{N_2-2} \\ Y_{N_2-1} \end{pmatrix},$$

$$\text{при } i = 1, j = \overline{1, (N_2 - 1)} \quad \bar{c}_1 = c_1 \neq A_1;$$

$$\text{при } i = N_1 - 1, j = \overline{1, (N_2 - 1)} \quad \bar{c}_{N_1-1} = c_{N_1-1} \neq E_{N_1-1};$$

$$\text{при } i = \overline{1, (N_1 - 1)}, j = 1 \quad \bar{c}_{ij}^{(5)} = c_{ij}^{(5)} \neq c_{ij}^{(11)};$$

$$\text{при } i = \overline{1, (N_1 - 1)}, j = N_2 - 1 \quad \bar{c}_{ij}^{(5)} = c_{ij}^{(5)} \neq c_{ij}^{(12)}.$$

Для решения системы (12) с начальными условиями (8) применяется симметричная формула Рунге-Кутты четвертого порядка точности [4, 6, 7]. При этом система уравнений (12) приводится к виду

$$\dot{Y} = \Upsilon Y + \tilde{b}, \quad (13)$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} Y_I \\ Y_{II} \end{pmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & E \\ M & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Тогда начальные условия примут вид

$$\left. \begin{aligned} Y_I|_{t=0} &= Y_I^0, & Y_{II}|_{t=0} &= Y_{II}^0, \\ \dot{Y}_I|_{t=0} &= \dot{Y}_I^0, & \dot{Y}_{II}|_{t=0} &= \dot{Y}_{II}^0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

С учетом (14) уравнения (13) решаются по следующей схеме:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_I &= Y_I^0 + \tau \bar{\alpha} \bar{Y}_{II}, & Y_I' &= Y_I' + \tau \bar{\beta} \bar{Y}_{II}, \\ \bar{Y}_{II} &= Y_{II}^0 + \tau \bar{\alpha} \dot{Y}_{II}, & Y_{II}' &= Y_{II}' + \tau \bar{\beta} \dot{Y}_{II}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где $\bar{Y}, \bar{Y}_{II}, Y_I^0, Y_{II}^0$ – соответственно текущие и начальные значения, Y_I', Y_{II}' – искомые функции.

После определения искомых функции методом Рунге-Кутты по формуле (15) вычисляются расчетные величины по следующим формулам:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\gamma N_1}{2\delta} \left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + \frac{\gamma N_1}{4} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right],$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\delta} \left[N_2(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \gamma N_1(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \frac{\gamma N_1 N_2}{2\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \right],$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{N_2}{2\delta} \left[v_{i,j+1} - v_{i,j-1} + \frac{N_2}{4\delta} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right],$$

$$\chi_{11} = \frac{(\gamma N_1)^2}{\delta^2} (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}),$$

$$\chi_{12} = \frac{\gamma N_1 N_2}{4\delta^2} (w_{i+1,j-1} - w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}),$$

$$\chi_{11} = \frac{N_2^2}{\delta^2} (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}),$$

$$Q_1 = -\frac{\gamma N_1}{\delta^3} \left[\frac{(\gamma N_1)^2}{2} (w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - 2w_{i-2,j}) + \right. \\ \left. + \frac{N_2^2}{2} (w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j-1}) \right],$$

$$Q_2 = -\frac{N_2}{\delta^3} \left[\frac{N_2^2}{2} (w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}) + \right. \\ \left. \frac{(\lambda N_1)^2}{2} (w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} - 2w_{i,j+1} - 2w_{i,j-1}) \right],$$

$$T_1 = \varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22}, \quad T_2 = \varepsilon_{22} + \mu \varepsilon_{11}, \quad s = \varepsilon_{12},$$

$$M_{11} = -(\chi_{11} + \mu \chi_{22}), \quad M_{22} = -(\chi_{22} + \mu \chi_{11}), \quad M_{12} = \chi_{12},$$

$$\sigma_{11}^k = \sigma_{11}^m + (-1)^k \sigma_{11}^u, \quad \sigma_{22}^k = \sigma_{22}^m + (-1)^k \sigma_{22}^u, \quad \sigma_{12}^k = \sigma_{12}^m + (-1)^k \sigma_{12}^u, \quad (k = 1, 2).$$

3. Динамический расчёт гибких прямоугольных пластин

Исследуется напряженно-деформированное состояние защемленных и шарнирно-опертых по контуру гибких прямоугольных пластин, подвергаемых действию мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузки с постоянной интенсивностью. Обе задачи решаются при нулевых начальных условиях и следующих значениях параметров счета; шаг сетки по пространственным координатам $N_1 = N_2 = 10$; отношение ширины пластин к длине $\gamma = b/a = 1$; отношение ширины пластин к толщине $\delta = b/h = 50$; шаг по времени τ и интенсивности нагрузки β будут указаны в каждой задаче.

Задача 1. Прямоугольная пластина, защемленная по контуру. Шаг по времени $\tau_x = 0.00125$ при решении задач в линейной постановке; $\tau_{H\lambda} = 0.00025$ при нелинейной, интенсивность нагрузки $\beta = 400$.

Для реализации линейных и нелинейных задач потребовалось соответственно 1 ч 10 мин и 2 ч 17 мин машинного времени. Результаты расчета оформлены в виде графиков (рис. 1).

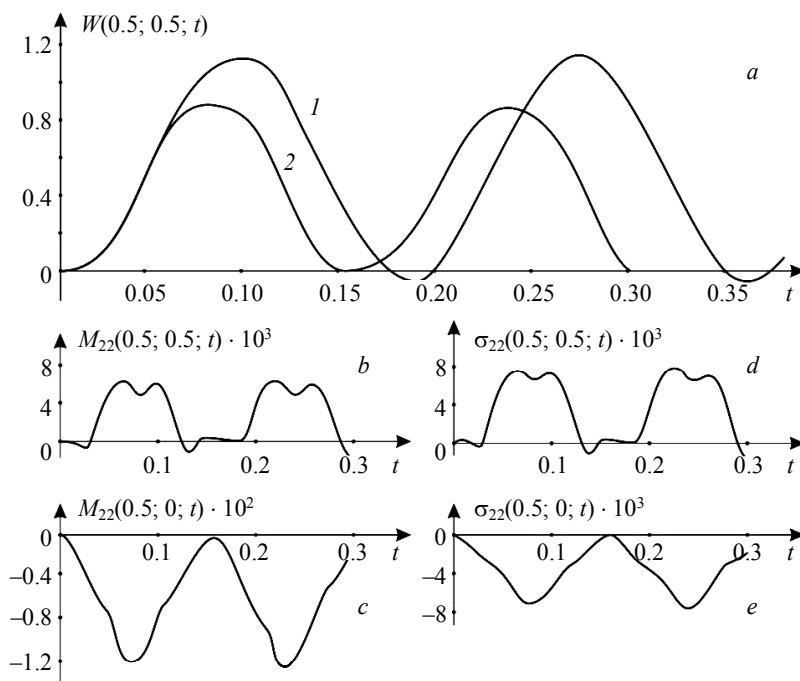


Рис. 1. График прогиба в центре пластин с истечением времени в линейной (1) и нелинейной (2) постановке задачи (a); график момента в центре $(0.5, 0.5, t)$ и на краю $(0.5, 0, t)$ пластин с истечением времени (b, c); график изменения напряжения в центре $(0.5, 0.5, t)$ и на краю $(0.5, 0, t)$ пластин с истечением времени (d, e)

Fig. 1. A chart of a deflection at the center of plates in the course of time for 1, linear and 2, nonlinear problem formulations (a); a chart of a momentum at the center $(0.5, 0.5, t)$ and on the edge $(0.5, 0, t)$ of plates in the course of time (b, c); a chart of tension variation at the center $(0.5, 0.5, t)$ and on the edge $(0.5, 0, t)$ of plates in the course of time (d, e)

Из рис. 1 видно, что прогиб в центре пластин по линейной теории достигает максимума соответственно при $t = 0.100$ и 0.275 ($w_\lambda = 1.123; 1.153$), минимума при $t = 0.19$ и 0.36 ($w_\lambda = -0.055; -0.0576$) а по линейной – максимума соответственно при $t = 0.0725$ и 0.2275 ($w_{H\lambda} = 0.87209; 0.88245$); минимума при $t = 0.155$ и 0.3075 ($w_{H\lambda} = 0; -0.032$).

Разница между результатами, линейной и нелинейной теориями, при $t = 0.100$; $t_{H\lambda} = 0.0725$ и $t_\lambda = 0.275$; $t_{H\lambda} = 0.2275$ составляет соответственно $k = 28.8$ и 30.6% а при $t = 0.0725$ $k = 15$.

Рис. 1, a показывает, что при решении задач в нелинейной постановке увеличивается частота колебаний и уменьшается период колебаний на $14.2, 33.3\%$.

Изменения прогиба пластин по линейной и нелинейной теории совпадают до момента времени $t = 0.05$. Следовательно, при данной нагрузке до этого момента времени можно решать задачу в линейной постановке, при $t > 0.05$ увеличивается отклонения между величиной прогиба, полученной по линейной и нелинейной теории.

Задача 2. Прямоугольная пластина, шарнирно-опертая по контуру. Для реализации линейных и нелинейных задач шарнирно-опертых по контуру гибких пластин при $\beta = 125$, $t_{\lambda} = 0.005$, $t_{H\lambda} = 0.000225$ потребовалось соответственно 1 ч 40 мин и 3 ч 0.5 мин машинного времени. Основные результаты оформлены в виде графиков рис. 2.

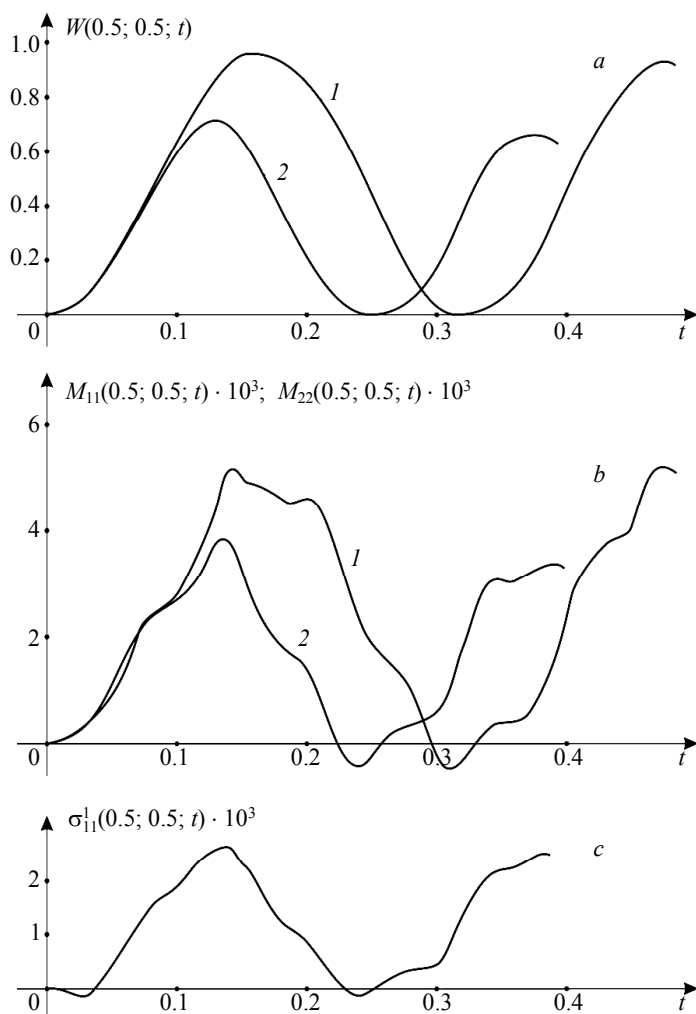


Рис. 2. График прогиба в центре $(0.5, 0.5, t)$ пластин с истечением времени в линейной (1) и нелинейной (2) постановке задачи (a), график момента в точке $(0.5, 0.5, t)$ в линейной (1) и нелинейной (2) постановке задачи (b), график напряжения в точке $(0.5, 0.5, t)$ с истечением времени (c)

Fig. 2. A chart of a deflection at the center $(0.5, 0.5, t)$ of plates in the course of time for 1, linear and 2, nonlinear problem formulations (a); a chart of a momentum at the point $(0.5, 0.5, t)$ for 1, linear and 2, nonlinear problem formulations (b); a chart of tension at the point $(0.5, 0.5, t)$ in the course of time (c)

Изменения прогибов и моментов в сечении $x = 1/2$, $y = 1/2$ с течением времени по линейной и нелинейной теориям, приведены на рис.2. Видно, что до момента времени $t = 0.086$ изменение прогиба в центре пластин по линейной и нелинейной теории совпадает, а при $t > 0.086$ увеличивается отклонение между ними.

Из рис. 2 видно, что в нелинейных постановках задачи частота колебаний увеличивается, а период уменьшается. Линейные прогибы в центре пластин достигает максимума при $t = 0.157$; 0.470 ($w_\lambda = 1.003$; 1.015) и минимума – при $t = 0.315$; ($w_\lambda = -0.0175$), а по нелинейной – максимума при $t = 0.1275$; 0.3725 ($w_{H\lambda} = 0.7470$; 0.7488) и минимума при $t = 0.2445$ ($w_{H\lambda} = 0,0021$). Разница между величинами прогибов по линейной и нелинейной теории при $t = 0.157$ и 1.1275 составляет $k = 33\%$, а при $t = 0.1275 - 22,6\%$.

Заключение

Таким образом, основные результаты работы следующие:

1. Построена единая вычислительная схема решения краевых задач динамического расчета гибких пластин методом конечных разностей. При постановке краевых задач в перемещениях использована нелинейная теория Вольмира, причем в динамических задачах учтено как нормальные, так и потенциальные инерционные слагаемые уравнений движения.

2. Разработана автоматизированная система полного динамического расчета гибких прямоугольных пластин с произвольными начальными и граничными условиями. В основу системы положены стандартные программы образования и решения больших систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающих динамическое состояние распределения операционной и внешней памяти ЭВМ, вычисления расчетных величин и выдачи результатов на печать.

3. Исследован характер сходимости метода конечных разностей и неявных итерационных процессов решения систем нелинейных алгебраических уравнений в зависимости от интенсивности внешней нагрузки, отношения ширины к толщине пластины и граничных условий. Установлено, что значения прогибов, полученные М.С. Карнишиным [8], оказались завышенными. Скорость сходимости итерационного процесса не зависит от количества узлов сетки. Применяемый итерационный процесс позволяет получить результаты для широкого диапазона больших прогибов.

4. Учет силы инерции сдвига, введенный А.С. Вольмиром, приводит к уменьшению изгибных и увеличению мембранных расчетных величин.

5. Установлено, что с увеличением степени нелинейности задачи уменьшается амплитуда изгибных расчетных величин и периода колебаний пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. Ташкент: Фан, 1966. 394 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ-НКТИЛ ССР, 1935. 674 с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т. I-II, Физматгиз, 1959.

5. Буриев Г., Юлдашев А. Динамический расчет гибких пластин методом прямых на ЭВМ. Всесоюзный симпозиум по распространению упругих и упругопластических волн. Кишинев, 1968.
6. Демидович Б.П., Марон И.А. Численные методы анализа / под ред. Б.П. Демидовича. М.: Физматгиз. 1962.
7. Бате К.Ю. Методы конечных элементов. М: Физматлит, 2010. 1024 с.
8. Корнишин М.С. Некоторые вопросы применения метода конечных разностей для решения краевых задач теории пластин // Прикладная механика. 1963. Т. 9. № 3.
9. Юлдашев А., Пирматов Ш.Т., Минарова Н. Уравнение равновесия гибких круглых пластин // Austrian J. Technical and Natural Sciences. 2015. No. 3–4. P. 32–35.
10. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
11. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
12. Берикханова Г.Е., Жумагулов Б.Т., Кангужин Б.Е. Математическая модель колебаний пакета прямоугольных пластин с учетом точечных связей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 72–86.
13. Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996. 189 с.
14. Вячкин Е.С., Каледин В.О., Решетникова Е.В., Вячкина Е.А., Гилева А.Е. Разработка математической модели статического деформирования слоистых конструкций с несжимаемыми слоями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 72–83. DOI: 10.17223/19988621/55/7.

Статья поступила 20.03.2019 г.

Yuldashev A., Pirmatov Sh.T. (2020) ALGORITHMIZATION OF SOLVING DYNAMIC EDGE PROBLEMS OF THE THEORY OF FLEXIBLE RECTANGULAR PLATES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 143–157

DOI 10.17223/19988621/66/12

Keywords: algorithm, plate, theory of elasticity, spherical plate.

In this paper, a computational algorithm is developed on the basis of the finite difference method for solving dynamic edge problems of the theory of flexible shells with account for shears and rotary inertia.

Dynamic calculations of flexible plates is used in designing hulls of ships, aircraft, missiles, and other technical objects, which, along with sufficient strength, should have the least weight ensured by the use of lightweight plates and by reducing the margin of safety. The problem of developing an automated system for solving problems of the theory of elasticity and plasticity was first raised in the monograph by V.K. Kabulov. This work reveals the main problems of algorithmization and indicates approaches for their machine solution.

In accordance with the analyzed problems, which arise during automated calculations of thin-walled elements of mechanical engineering structures, it is reasonable to use a nonlinear dynamic computational scheme for a flexible homogeneous isotropic linear elastic shell of arbitrary shape and to take into account the effect of both shears and rotary inertia when describing the motion of the shell. Such a model allows one to apply a sufficiently flexible and fast-acting scheme to calculate a wide class of dynamic processes taking place within the plates and shells of different shapes which are not over-limited in thickness and serve as significant parts of mechanical engineering elements.

A number of dynamic differential equations of plate motion have been developed and tested. Obviously, there is no need to build other algorithms to calculate flat plates when developing an automated computational system.

Adash YULDASHEV (Candidate of Physics and Mathematics, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: Yuldashev687@scientifictext.ru

Shamshod T. PIRMATOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: shamshod@rambler.ru

REFERENCES

1. Kabulov V.K. (1966) *Algoritmizatsiya v teorii uprugosti i deformatsionnoy teorii plastichnosti* [Algorithmization in the theory of elasticity and deformation theory of plasticity]. Tashkent: Fan.
2. Vol'mir A.S. (1972) *Nelineynaya dinamika plastin i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka.
3. Lyav A. (1935) *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical theory of elasticity]. Moscow; Leningrad: ONTI-NKTL SSR.
4. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1959) *Metody vychisleniy* [Computational methods]. Moscow: Fizmatgiz.
5. Buriev G., Yuldashev A. (1968) Dinamicheskiy raschet gibkikh plastin metodom pryamykh na EVM [Dynamic calculation of flexible plates by the method of lines on computers]. *Proceedings of the All-Union Symposium on the Propagation of Elastic and Elastoplastic Waves, Kishinev*.
6. Demidovich B.P., Maron I.A. (1962) *Chislennye metody analiza* [Numerical methods of analysis]. Moscow: Fizmatgiz.
7. Bate K.Yu. (2010) *Metody konechnykh elementov* [Finite element methods]. Moscow: Fizmatlit.
8. Kornishin M.S. (1963) Nekotorye voprosy primeneniya metoda konechnykh raznostey dlya resheniya kraevykh zadach teorii plastin [Some issues of the application of finite difference method to solve edge problems of the plate theory]. *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*. 9(3).
9. Yuldashev A., Pyrmatov S.T., Minarova N. (2015) Uravnenie ravnovesiya gibkikh kruglykh plastin [An equilibrium equation for flexible round plates]. *Austrian Journal of Technical and Natural Sciences*. 3–4. pp. 32–35.
10. Korobeynikov S.N. (2000) *Nelineynoe deformirovanie tverdykh tel* [Nonlinear deformation of solid bodies]. Novosibirsk: Izdatelstvo SO RAN.
11. Rabotnov Yu.N. (1988) *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solid bodies]. Moscow: Nauka.
12. Berikhanova G.E., Zhumagulov B.T., Kanguzhin B.E. (2010) Matematicheskaya model' kolebaniy paketa pryamougol'nykh plastin s uchedom tochechnykh svyazey [Mathematical model of rectangular plate stack oscillations with account for point-like coupling]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1 (9). pp. 72–86.
13. Bazarov M.B., Safarov I.I., Shokin Yu.I. (1996) *Chislennoe modelirovanie kolebaniy dissipativno odnorodnykh i neodnorodnykh mekhanicheskikh sistem* [Numerical simulation of the oscillations of dissipative homogeneous and heterogeneous mechanical systems]. Novosibirsk: Izdatelstvo SO RAN.
14. Vyachkin E.S., Kaledin V.O., Reshetnikov E.V., Vyachkin E.A., Gileva A.E. (2018) Razrabotka matematicheskoy modeli staticheskogo deformirovaniya sloistykh konstruktsey s neszhimaemymi sloyami [Mathematical modeling of static deformation of a layered construction with incompressible layers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 72–83. DOI: 10.17223/19988621/55/7.

Received: March 20, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АБИКЕНОВА Шолпан Какимжановна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского университета имени Л.Н.Гумилева, г. Нур-Султан, Республика Казахстан. E-mail: abikesh29@gmail.com

АБУ-САЛЕЕМ Ахмад – доктор философии, асс. профессора кафедры математики Университета Аль-Байт, Мафрак, Иордания. E-mail: abusaleem2@yahoo.com

АЖГАЛИЕВ Шапен Урынбасарович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского университета имени Л.Н.Гумилева, г. Нур-Султан, Республика Казахстан. E-mail: nepash@mail.ru

АРХИПОВ Владимир Афанасьевич – доктор физико-математических наук, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

БАРТ Андрей Андреевич – кандидат физико-математических наук, программист кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: bart@math.tsu.ru

БАСАЛАЕВ Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

БЕЛЯЕВ Борис Васильевич – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры 11 Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, Россия. E-mail: belyaev.boris.spb@gmail.com

БЕРДНИК Янина Александровна – аспирантка кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Южного Федерального университета, г. Ростов-на-Дону, Россия. E-mail: yaninaberdnik@mail.ru

БОНДАРЧУК Алексей Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Южного Федерального университета, г. Ростов-на-Дону, Россия. E-mail: melchior@list.ru

ДАВИДЧУК Виктор Александрович – аспирант кафедры 11 Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, Россия. E-mail: david_lxii@mail.ru

ДАНИЛКИН Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ugin@math.tsu.ru

Дмитриев Александр Валерьевич – аспирант отделения нефтегазового дела Инженерной школы природных ресурсов Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: sanaexpert@mail.ru

ЗОЛОТОРЁВ Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: nikzolotorev@mail.ru

Зятиков Павел Николаевич – доктор технических наук, профессор отделения нефтегазового дела Инженерной школы природных ресурсов Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: zpavel@tpu.ru

ИВАНЫЧЕВ Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета, г. Липецк, Россия. E-mail: Lsivdml@mail.ru

КИЖНЕР Любовь Ильинична – доцент, кандидат геолого-географических наук, доцент кафедры метеорологии и климатологии Томского государственного университета. E-mail: kdm@mail.tsu.ru

КУЗНЕЦОВ Федор Юрьевич – аспирант отделения общетехнических дисциплин Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: kuznetsov_f@mail.ru

ПЕРФИЛЬЕВА Ксения Григорьевна – аспирантка кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kis33365@yandex.ru

ПИРМАТОВ Шамшод Тургунбоевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского государственного технического университета, г. Ташкент, Республика Узбекистан. E-mail: shamshod@rambler.ru

РУСТАНОВ Алигаджи Рабаданович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Института фундаментального образования Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, г. Москва, Россия. E-mail: aligadzhi@yandex.ru

САДИН Дмитрий Викторович – доктор технических наук, профессор кафедры 11 Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, Россия. E-mail: sadin@yandex.ru

СТАРЧЕНКО Александр Васильевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: starch@math.tsu.ru

СУМБАТЯН Межлум Альбертович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, Россия. E-mail: sumbat@math.rsu.ru

ТИМОШЕНКО Егор Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

ХАРИТОНОВА Светлана Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, г. Оренбург, Россия. E-mail: hcb@yandex.ru

ШАБЛОВСКИЙ Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики Гомельского государственного технического университета имени П.О. Сухого, г. Гомель, республика Беларусь. E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

ЮЛДАШЕВ Адаш Юлдашевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского государственного технического университета, г. Ташкент, Республика Узбекистан. E-mail: shamshod@rambler.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 15.08.2020. Выпуск в свет 27.08.2020.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 12.9. Уч.-изд. л. 14.45. Тираж 250 экз. Заказ № 15. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4379.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru